

## 論文

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2012.40.10.840>

## 후향계단 유동장 저차 모델링을 위한 ARX 설계 기법

이진익\*, 이은석\*

ARX Design Technique for Low Order Modeling  
of Backward-Facing-Step Flow Field

Jin-Ik Lee\* and Eun-Seok Lee\*

## ABSTRACT

An ARX(Auto-Regressive eXogenous) modeling technique for vortex dynamics in the BFS(Backward Facing Step) flow field is proposed in this paper. In order for the modeling of the dynamics, the spatial and temporal modes are extracted through POD(Proper Orthogonal Decomposition) analysis. Determining the orders of the inputs and outputs for an ARX structure is carried out by the spectrum analysis and temporal mode analysis, respectively. The order of input delay terms is also determined by the flow velocity. Finally the coefficients of the ARX model are designed by using an artificial neural network.

## 초 록

본 논문에서는 후향계단(Backward Facing Step) 유동장의 유동운동에 대한 ARX(Auto Regressive eXogenous) 모델링 기법을 제시한다. BFS 유동장 모델링을 위해 밀도를 모드분석을 통해 고유 공간모드와 시간계수를 추출한다. 입력 차수와 상태변수 차수는 각각 유동장 스펙트럼 분석과 시간계수 분석을 통해 결정한다. 또한, 유동장의 속도 분석을 통해 ARX의 입력 지연 차수를 결정한다. 한편, ARX 모델의 계수는 신경망을 이용하여 설계한다.

**Key Words** : Backward Facing Step(후향계단), Flow Control(유동제어), ARX(Auto-Regressive eXogenous), POD(Proper Orthogonal Decomposition)

## 1. 서 론

유동장의 유동제어[1-7]를 위해서는 제어대상이 되는 유동운동의 수학적 모델이 요구된다. 이러한 수학적 모델을 통해 유동장의 운동을 이해하고, 제어기를 설계하며 최종적으로는 제어루프

전체의 성능을 분석하기 위해서 필요로 한다.

유동장을 형성하는 유동의 운동은 매우 복잡하고 비선형성이 강한 것으로 알려져 있다. 이때 유동장의 주된 지배방정식으로는 NS(Navier-Stokes)[8] 방정식을 사용한다. 즉,

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + f \quad (1)$$

대부분의 유동장에서는 불행하게도 이 지배방정식의 해를 해석적으로 구하는 것이 거의 불가

† 2012년 5월 15일 접수 ~ 2012년 9월 20일 심사완료

\* 정회원, 국방과학연구소

교신저자, E-mail : jilee@fdcl.kaist.ac.kr

대전시 유성구 북유성대로 488번길 160

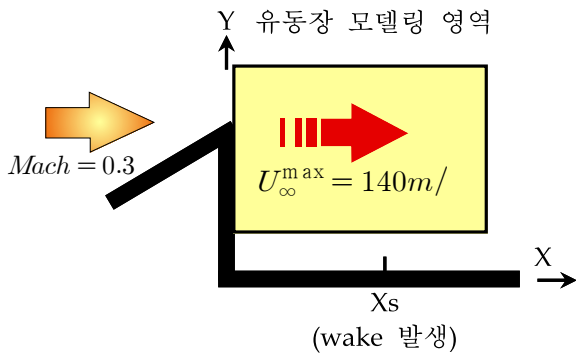


Fig. 1. BFS structure

능한 것으로 알려져 있다. 많은 경우 전산유체역학(CFD: Computational Fluid Dynamics) 즉 컴퓨터를 이용해서 수치적 해를 구하게 된다. 이 과정에서 수많은 격자점과 미소 시간에 대해 수치적분을 실시함으로써, 결과로 얻어지는 해도 대용량의 데이터로 주어진다. 획득된 데이터는 여러 가지 분석기법을 통해 유동장을 분석하고 모델링된다. 이러한 분석방식은 유동장을 재현하고 정밀 분석하는 데는 매우 유용한 방법이라 할 수 있다.

한편, 유동을 제어하기 위한 제어측면에서는 이렇게 수치적으로 주어진 플랜트의 운동방정식을 이용하여 제어를 설계하기에는 다소 부적합할 수 있다. 많은 제어이론들이 수학적으로 주어진 시스템 모델을 기반으로 정립되어 있기 때문이다. 따라서 적절한 방법을 적용하여 유동장을 수학적으로 표현하는 모델링 기법이 요구된다.

본 연구에서는 유동장으로 후향계단을 사용한 다. 유동장을 모델링을 위해 다양한 입력에 대한 개루프 시험을 통해 얻은 유동장의 데이터 베이스를 이용한다. POD 분석기법과 스펙트럼 분석을 통하여 유동장의 특성을 고찰하고, ARX 구조로 유동장을 모델링한다. ARX의 입력과 출력의 차수는 스펙트럼 분석 및 모드분석 결과로부터 결정한다. 또한 유동 속도분석을 통하여 입력 지연 차수를 결정한다. 마지막으로 ARX 모델의 각 계수는 웨이블릿(wavelet)을 활성화함수(activation function)로 하는 신경망을 통하여 설계한다.

## II. 본 론

### 1. 후향계단 유동장

#### 1.1 후향계단 유동장 구조

본 연구는 계단 높이가 0.15m인 후향계단 유동장을 사용하였으며, Fig. 1에 도시하였다.

마하 0.3의 자유류(free stream)로 유동장을 형성하였으며, 유동의 속도는 계단을 지나면서 빨라져 계단 끝 부분에서는 140m/s까지 증가하게 되고, 이때 레이놀즈수는  $1.4 \times 10^6$ 이다.

한편, 유동제어는 계단 끝 부분에 설치된 45도 각도의 blowing/ suction용 노즐을 통하여 수행된다.

## 2 후향계단 유동장 분석

### 2.1 POD의 분산 특성

BFS 유동장 모델링을 위해 개루프 응답특성 고찰한다. 자유류 속도의 1%, 5%, 10%의 크기로 각각 400Hz, 600Hz 및 800Hz의 정현파를 인가한다. 유동장 데이터는  $x=0 \sim 0.35$ ,  $y=-0.05 \sim 0.05$ 의 영역을 사용하였으며, 참고로 데이터 샘플링 시간  $ts=50\mu s$ 이다. 이제, 다음과 같이 POD[9] 분석 기법을 도입하여 유동장을 축약하고 모드 분석을 실시한다.

$$z(x,y,t) = \sum_{k=1}^N \phi_k(x,y)a_k(t) \quad (2)$$

여기서  $z(x,y,t)$ 는 각 격자점  $(x,y)$ 에서의 밀도이며,  $N$ 은 축약 차수이다.  $\phi(x,y)$ 는 시간과는 무관한 즉 유동장의 물리적 기하의 함수인 공간 모드이며, 반면  $a(t)$ 는 시간모드이다. 따라서 위 식에서 밀도  $z$ 는 공간모드  $\phi(x,y)$ 와 시간모드

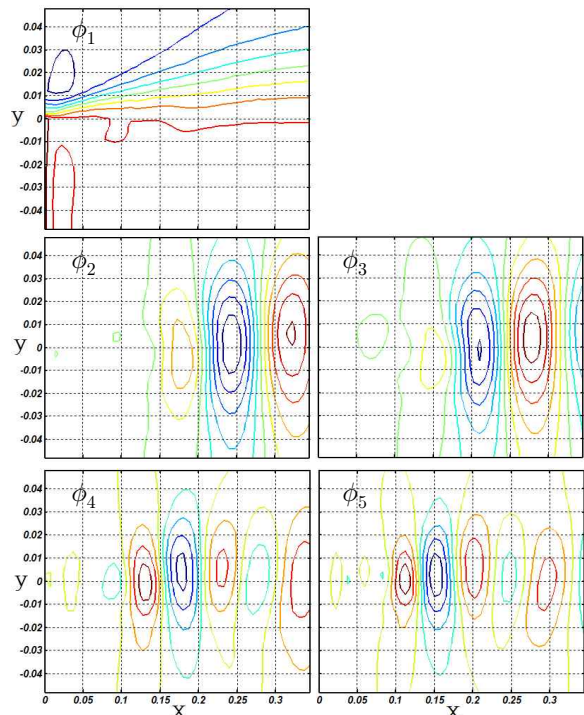


Fig. 2. POD modes( $\phi_{1-5}$ )

$a(t)$ 의 선형조합으로 표현됨을 알 수 있다. 이때 두 모드가 직교(orthogonal)할 경우 이들은 최적해로 알려져 있다[10]. 그리고  $k$ 는 에너지(energy strength)  $E(\phi_k)$ 의 순서를 의미한다. 즉

$$E(\phi_1) > E(\phi_2) > \dots > E(\phi_N) \quad (3)$$

개루프 입력으로부터 얻은 밀도 데이터의 POD 모드는 Fig. 2와 같다.

그림에서 첫 번째 모드인  $\phi_1$ 은 주로 자유류에 의한 평균 유동에 해당하며,  $\phi_2 \sim \phi_5$ 까지는 유동장의 와류에 해당한다. 그림에서  $(\phi_2, \phi_3)$  및  $(\phi_4, \phi_5)$ 은 위상 변위를 갖으며 각각 쌍을 이루고 있음을 확인할 수 있다.

뿐만 아니라 등위선의 중심이  $y=0$ (노즐이 있는 위치)를 따라 형성하고 있는데, 이는 유동장의 에너지가 이 축을 따라 심하게 변화하고 있음을 의미한다.

### 3. 유동장 모델링

#### 3.1 ARX 모델 구조

ARX[11] 모델은 다음과 같이 외부 입력(exogenous input), 백색잡음(white noise) 및 자기회귀(Auto-Regressive)를 갖는 출력 항으로 표현된다.

$$\begin{aligned} y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{n_a}y(k-n_a) \\ = b_1u(k-n_k) + b_2u(k-n_k-1) \\ + b_{n_b}u(k-n_k-n_b+1) + e(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $n_a$ 는 자기회귀 차수 즉 출력  $y$ 를 이전 단계부터  $n_a$  단계까지 시간 지연시키면서 회귀함을 의미한다.  $n_k$ 는 입력 지연에 해당하는 차수 즉 입력을  $n_k$  만큼 시간지연 후 반영시킴을 의미한다. 그리고  $n_b$ 는 입력을  $n_k$ 부터  $n_b$  만큼 지연시키면서 반영시키기 위한 이동 윈도우 차수이다. 마지막 항인  $e(t)$ 는 백색잡음을 의미한다. 또한,  $a_i$ 는 출력을 자기회귀시키기 위한 선형계수이며,  $b_j$ 는 외부 입력이 출력에 미치는 영향에 대한 강도이다.

한편, ARX 모델의 입력은 유동장 모델링 실험에서 사용한 정현파 입력이 되며, 스칼라량이다. 시간모드  $a_2 \sim a_5$ 의 4개를 추정 변수인 출력으로 하였다.

#### 3.2 ARX 설계

시스템을 ARX 구조를 이용하여 표현할 때 앞서 고찰한 바와 같이 결정해야할 파라미터는 출

력의 자기회귀 차수  $n_a$ , 입력 지연차수  $n_k$ , 입력 윈도우 차수  $n_b$ , 그리고 계수  $a_i, b_j$ 이다. 각 차수들은 시스템 모델링 성능에 미치지 않는 범위 내에서 가능한 낮은 차수로 모델링하는 것이 제어기 설계 및 해석에 있어서 복잡성과 시뮬레이션 시간에 영향을 덜 미치게 된다.

##### 3.2.1 입력 윈도우 차수

입력 윈도우 차수  $n_b$ 는 입력의 신호가 분별력을 갖도록 설정한다. 입력 윈도우를 입력신호 주기의 1/4에 해당하는 즉 입력의 위상이 90도 이상 변하게 되는 시점을 기준으로 하였다. 개루프 응답특성 고찰 시험에서 사용한 주파수가 각각 400Hz, 600Hz 및 800Hz이다. 참고로, 샘플링 시간은 나이퀴스트 주파수 이상으로 충분히 작게 ( $t_s=50\mu s$ ) 하였다. 따라서 각 기준점은 13, 8 및 6 샘플링( $t_s$ )에 해당한다. 본 문제에서는 중간 값에 해당하는  $n_b=8$ 로 설정하였다.

##### 3.2.2 입력 지연 차수

입력 지연은 계단 끝 부분에 설치된 노즐을 통해 입력이 인가될 때 출력에 미치는 영향을 반영하도록 한다. 이때 출력의 위치는 Fig. 2에서 모드 값이 큰 부분 즉 wake가 발생하는 부분인  $x_s=0.3m$ 으로 하였다. Fig. 3은 노즐( $x=0$ )에서부터  $x_s$ 까지  $y=0$  축을 따라 흐르는 유동의 속도를 시간에 대해 평균한 것을 보여준다.

Fig. 3에서 비교적 정상상태를 보이고 있는 400Hz와 600Hz의 경우 천이영역을 제외한 평균 속도는 약  $\bar{v}_x=85\%$  정도이다. 즉  $x_s$ 까지 평균 도달시간은 다음과 같이 계산된다.

$$t_d = \frac{x_s}{v_x} \approx 3.5ms \quad (5)$$

따라서 입력이 기준점에 도달하는 시간지연을 고려하여  $n_k=70$  스텝(dt)으로 설정하였다.

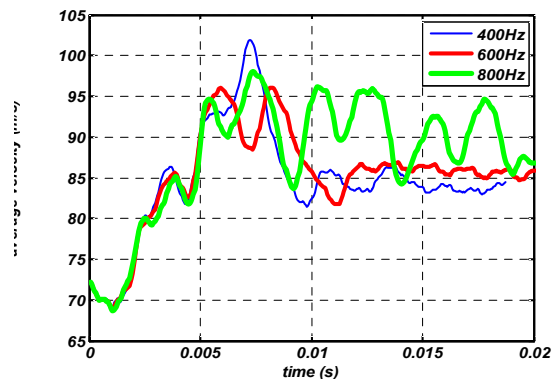


Fig. 3. 입력 주파수에 따른 평균 유동속도

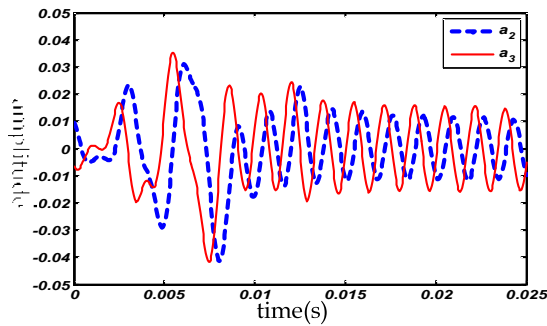


Fig. 4. Temporal Modes  $a_2$  and  $a_3$

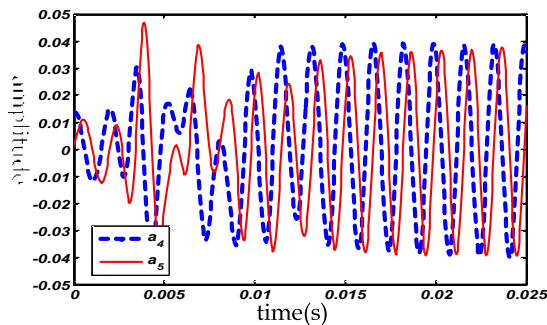


Fig. 5. Temporal Modes  $a_4$  and  $a_5$

3.2.3 출력 자기회귀 차수

출력의 자기회귀 차수  $n_a$  결정을 위해, (600Hz, 10%) 입력에 대한 출력인 시간모드  $a_2 \sim a_5$ 를 고찰한다. 앞서 Fig. 2로부터  $(\phi_2, \phi_3)$  및  $(\phi_4, \phi_5)$  모드가 각각 쌍을 이루고 있음을 확인하였다. Fig. 4, 5에 도시한 시간모드에서도 이들 각 쌍은 각각 크기가 비슷하고 약 90도의 위상차를 보이고 있다. POD로 유동장을 직교분해 함으로써 각 신호가 수직하고 있기 때문이다. 이는 각 쌍은 상호 관련을 시사한다.

한편, 주파수 측면 이들 신호의 상관관계를 고찰해보면(Fig. 6), 예상대로 4개의 시간모드 모두에서 입력 주파수인 600Hz가 주성분을 이루며,

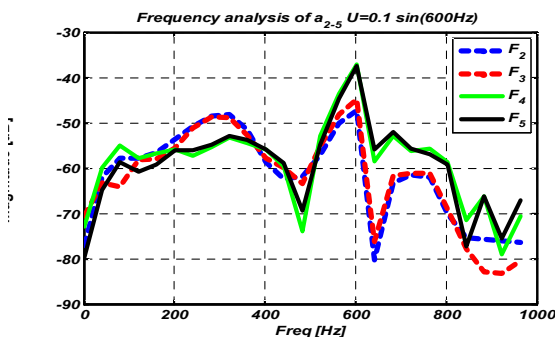


Fig. 6. Frequency Spectra of  $a_{2-5}$

다음으로 조화 성분(300Hz)이 나타남을 알 수 있다. 이러한 고찰 결과로부터 모드 상호간 관련성을 고려하여 자기회귀 행렬을 다음과 같이 블록대칭(block symmetric) 형태로 설정한다.

$$n_a = \begin{bmatrix} AE \\ EA \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

3.2.4 ARX 계수 설계

식(4)의 계수  $a_i, b_j$ 를 구하기 위해서 wavelet을 activation 함수로 갖는 신경망을 사용한다. 시스템 모델로는 앞서 결정한 ARX의 차수를 사용하며, 신경망 입력으로 유동장에 인가한 정현파 함수를, 학습 데이터로는 주파수에 따른 시간모드를 사용한다.

본 문제에서 적용한 신경망 학습조건과 검증 조건을 Table 1에서 보여주고 있다. 즉 개루프 시험 조건 중에서 (600Hz,10%) 시험결과를 제외한 각 실험의 입력신호를 신경망 입력으로 하고, 이때 시간모드  $a_2 \sim a_5$ 를 추정변수(출력)로 하였다. 신경망 학습 후 검증 과정에서는 학습에서 제외한 (600Hz,10%) 입력을 인가하고, 이에 해당하는 시간모드를 추정하여 유동장 모델링 결과를 확인하였다.

3.3 유동장 모델링 결과

자연계에 존재하는 실제 시스템을 수학적으로 모델링 하는 과정에서 차이 즉 모델링 오차는 피하기 어렵다. 이러한 오차로 인해, 수학적으로 모델링된 시스템을 바탕으로 설계된 제어기를 실제 시스템에 적용할 때 성능 저하가 발생할 수 있다. 모델링 오차가 극단적으로 큰 경우 시스템이 발산되는 극한 상황까지 발생할 수 있다. 따라서 제어기 설계 과정에서는 어느 정도 모델링 오차를 고려하여 이득여유와 위상여유를 확보하는 것이 일반적이다.

본 검증시험에서 얻은 600Hz의 각 시간모드에 대해서 실험치( $a_{2-5}$ )와 추정치( $\hat{a}_{2-5}$ )를 Fig. 7에 도시하였다. Fig.에서 신호의 크기는 약 10% 감소, 시간지연은 약 0.1ms 발생되는 것이 확인되었

| 크기(A) / 주파수(f) | 5%  | 10%        |
|----------------|-----|------------|
| 400Hz          | 설계용 | 설계용        |
| 600Hz          | 설계용 | <b>검증용</b> |
| 800Hz          | 설계용 | 설계용        |

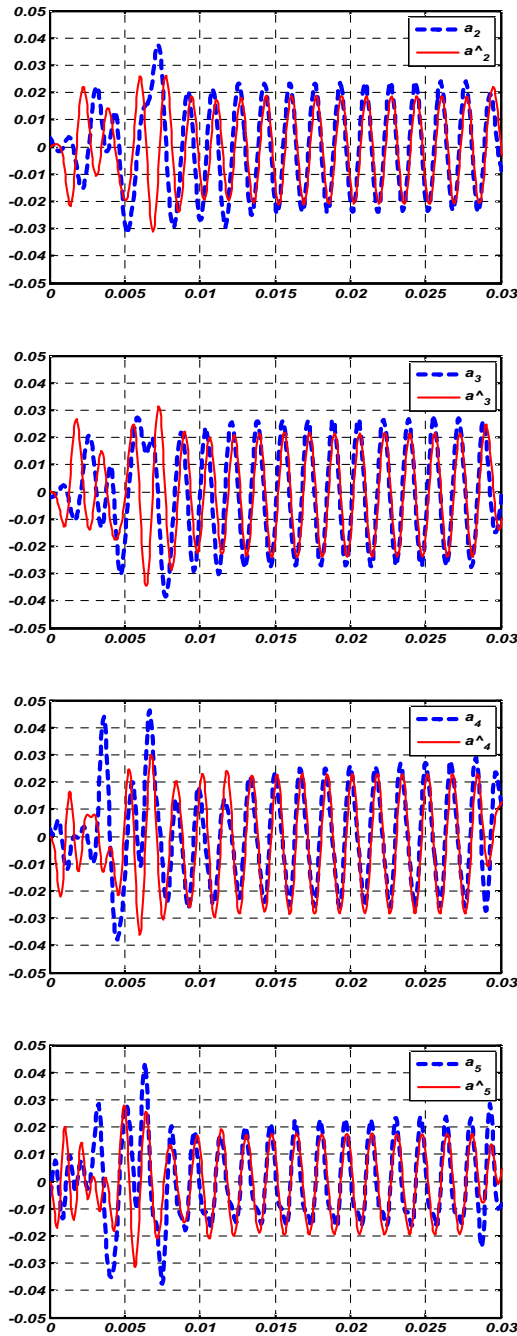


Fig. 7. Results of System ID

다. 즉 모델링 오차는 각각 크기 -20dB 감소, 위상 지연 22도에 해당한다. 참고로, 일반적인 제어 시스템에서 제어기 설계시 이득 여유 6dB, 위상 여유 30도 이상을 확보하는 것이 보편화 되어 있다. 즉 시스템의 플랜트, 구동기 및 센서에 대한 모델링 오차와 외란을 포함하여 이 수준을 상회할 경우 시스템은 발산할 수 있다. 따라서 앞서 정리한 유동장 저차 모델링 결과 신호 크기 오차는 폐루프 제어를 수행할 경우 크게 문제가 되지

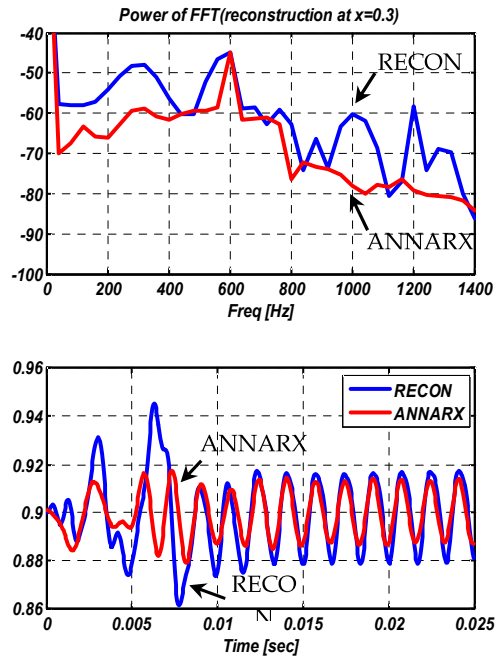


Fig. 8. Reconstruction results by ANN-ARX estimation (Frequency response: top, Time response: bottom)

않을 것으로 예상되며, 위상은 유동 제어기 설계에서부터 위상여유 등 고려해야 할 사항으로 남게 된다.

마지막으로 유동장 모델링 식(2)에 Fig. 7의 추정된 시간모드로부터 유동장을 복원할 수 있다. 복원된 유동장과 CFD 해석으로부터 얻은 데이터 베이스를 비교하자.

Figure 8은 학습결과 시간모드를 이용하여  $x_s = 0.3m$  지점에서의 유동장 복원한 결과이다. 유동은 매우 고주파 운동으로 박리가 발생하고 있으며, 따라서 유동제어 측면에서 플랜트 모델링은 가능한 위상오차가 최소가 되도록 하는 것이 무엇보다도 중요하다.

ANN-ARX로 모델링 한 결과에 의하면 600Hz 입력에 대한 반응은 즉 주파수 영역(Fig. 8의 위쪽)에서 600Hz 근방에서는 비교적 정확히 모델링 되고 있음을 알 수 있다. 또한 Fig. 8의 아래쪽인 시간영역에서는 천이영역을 제외하고는 위상오차가 거의 나타나지 않고 있다. 따라서 제안한 모델링 접근 방식이 타당함을 확인할 수 있다. 만약 식 (4)의 ARX 구조에서 윈도우 크기를 최적화하면 천이영역도 좀 더 나은 결과를 얻을 수도 있으리라 기대된다.

### III. 결 론

본 연구를 통해 후향계단구조의 유동장의 유동 운동을 ARX 구조로 모델링함에 있어서 추정기 설계 파라미터(차수, 계수) 설정방법을 유동장 분석을 통해 체계적으로 정립하였다.

한편, 유동장의 모델링 과정에서 유발된 모델링 오차 중 위상지연 오차가 크기오차 보다는 상대적으로 크을 알 수 있었다. 이는 유동의 운동(와류)에 해당하는 신호가 매우 고주파에 따른 것으로 기인한 것으로 해석된다.

따라서 유동제어기 설계과정에서 위상 오차에 기인한 제어 성능의 강인성을 확인해야 하며, 특히 제어기 설계규격(위상여유도) 설정에 있어서 고려사항이 되어야 함을 제시한다.

### 참고문헌

- 1) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 유동 제어를 위한 ARX 구조의 유동장 모델링 기법," 2011 한국 항공우주공학회 추계학술발표회, 강원도 용평 리조트, 2011.11.
- 2) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 모델의 유동제어를 위한 유동장 스펙트럼 분석," 2011 한국 항공우주공학회 추계학술발표회, 강원도 용평 리조트, 2011.11.
- 3) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 유동장의 제어측면에서의 유동 축약모델링," 2011 한국 항공우주공학회 추계학술발표회, 강원도 용평 리조트, 2011.11.

- 4) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 유동장의 축약 모델링 오차 분석," 2011 한국 전산유체공학회 추계학술대회, 대구 영남대 경산캠퍼스, 2011.11.

- 5) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "다변수 재귀형 최소자승 알고리즘을 이용한 유동 상태 추정기 설계," 2011 한국 전산유체공학회 추계학술대회, 대구 영남대 경산캠퍼스, 2011.11.

- 6) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "유동 상태 추정을 위한 센서위치 최적화 기법에 관한 연구," 2011 한국 전산유체공학회 추계학술대회, 대구 영남대 경산캠퍼스, 2011.11.

- 7) 이진익, "유동능동제어 기술 소개," 2011 항공우주학회 추계학술발표회, 2012 유도항법제어 기술 심포지움, 부산 해운대 한화콘도, 2012.2

- 8) Pierre Gilles Lemarié, 2002, Recent developments in the Navier-Stokes problem, Champman & Hall/CRC.

- 9) Anindya Chatterjee, 2000, "An introduction to the proper orthogonal decomposition", Current Science, Vol.78, No.7. pp.808-817.

- 10) P. J. Holmes, J. L. Lumley, G. Berkooz, J. C. Mattingly, and R. W. Wittenberg, 1997, "Low-dimensional models of coherent structures in turbulence," Physics Reports, Vol.287, Issue 4, pp. 337-384.

- 11) K. J. Åström, B. Wittenmark, 1984, Computer controlled systems: theory and design, Prentice-Hall.