

論文

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2012.40.10.853>

우주발사체의 정밀한 외연적 유도 알고리즘 성능 분석

송은정*, 조상범*, 박창수*, 노웅래*

Performance Analysis of a Precise Explicit Guidance Algorithm
for Space Launch Vehicles

Eun-Jung Song*, Sang-bum Cho*, Chang-Su Park* and Woong-Rae Roh*

ABSTRACT

This paper considers one of the explicit guidance algorithms, which has been proposed by Jagers, to determine the closed-loop guidance algorithm for upper stages of a 3-staged space launch vehicle. Its commanded thrust vector is closer to the optimal solution when compared with that obtained by using the well-known Powered Explicit Guidance (PEG), which has been developed through the Space Shuttle program. Its performance is evaluated here by applying for guidance of the launcher during the second and third stages. Furthermore, to generate more precise guidance commands, it is attempted not to use the approximate formulas for the derivation of the original guidance law, and it is shown that performance is improved in comparison with the original.

초 록

본 논문에서는 주어진 3단형 발사체의 상단부 페루프 유도 방식 선정을 위해 널리 알려져 있는 Space Shuttle의 PEG 알고리즘보다 유도명령의 형태가 최적화 해에 가까운 Jagers가 제안한 직접식 유도 방식에 대해서 다루었다. 이 알고리즘을 주어진 발사체의 상단부인 2단 및 3단 비행 구간에 적용할 경우에 대해서 유도 성능을 분석했다. 또한 보다 정밀한 유도를 위해 알고리즘 유도를 위해 사용된 근사식들을 가능한 사용하지 않도록 했으며 원래의 알고리즘에 비해 성능이 개선됨을 확인하였다.

Key Words : Launch vehicle (발사체), Guidance algorithm (유도 알고리즘), Orbit injection accuracy (궤도 투입 정밀도), Explicit guidance (직접 유도)

1. 서 론

본 논문에서는 고도 250 km의 궤도에 투입이 목표인 3단형 발사체의 상단부인 2단 및 3단의 페루프 유도 방식 선정을 위해서 Jagers에 의해

제안된 직접식 유도 방식에 대해서 다루었다^(1,2). 이 알고리즘은 널리 알려져 있는 PEG⁽³⁾와 같이 1970년대 Space Shuttle 프로그램을 통해 개발된 알고리즘으로 PEG와 비교할 때 유도 명령으로 주어지는 추력방향 단위 벡터가 최적 해의 형태에 조금 더 가깝다는 점에서 차이가 있다. 이 알고리즘의 한 형태는 Space Shuttle의 탑재 유도 알고리즘으로 사용됐으며 일본의 H-IIA 발사체에도 적용된 것으로 추정된다⁽⁴⁾. H-II 발사체에는 선형 싸인 유도 방법을 사용했는데, 성능 개선을

† 2012년 6월 21일 접수 ~ 2012년 9월 28일 심사완료

* 정회원, 한국항공우주연구원 체계설계팀

교신저자, E-mail : ejsong@kari.re.kr

대전 유성구 어은동 45번지

위해 H-IIA에서는 좀 더 정밀한 유도 알고리즘을 도입한 것으로 보인다^(4,5).

과거에는 유도 방정식을 가능한 단순화시켜 최적성이 떨어지더라도 온보드 구현이 가능하도록 한 반면에 최근에는 컴퓨터 기술의 발달로 좀 더 복잡한 유도 알고리즘도 사용 가능해졌다. 이에 본 논문에서는 Jagers가 제안한 유도 알고리즘^(1,2)을 주어진 발사체 모델에 적합하도록 적용해 보았다. 또한 여기서 사용한 근사식들을 가능한 사용하지 않도록 했으며, Jagers가 제안한 원래의 알고리즘과 비교를 통해 성능이 개선됨을 확인하였다. 여기에 비슷한 선형 벡터 형태의 유도 명령을 사용하는 PEG와도 성능을 비교하였으며, 선형 자세 명령을 사용하는 Saturn 발사체에 적용되었던 Iterative Guidance Mode (IGM)^(6,7)와도 성능을 비교하였다.

Nominal 및 3σ 섭동 조건에 대해서 3-자유도 모의시험을 수행했으며, 유도 알고리즘의 성능 평가 지표로 사용되는 궤도 투입시점에서의 위치/속도 정밀도 분석 및 추가로 소모된 추진제량 분석을 통해 각 알고리즘의 성능을 비교 평가하였다. 본 논문에 사용된 기호는 Jagers가 사용한 기호⁽¹⁾를 따랐으며 각 기호에 대한 구체적인 설명은 이 문헌에 나와있다.

II. 유도 알고리즘

진공상태에서의 발사체의 점질량 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{v} = a\vec{u} + \vec{g}, \quad a = \frac{T}{m} \quad (1)$$

$$\vec{r} = \vec{v} \quad (2)$$

$$\dot{m} = \frac{T}{V_{ex}} \quad (3)$$

전형적인 추력 구간에서의 발사체 유도 문제는 발사체를 원하는 목표 조건을 만족시키면서 최소의 추진제를 사용할 수 있도록 발사체를 조종할 수 있는 추력 방향 값 \vec{u} 와 이 값의 변화율을 실시간으로 결정하는 문제이다. 일반적으로 엔진 배기 속도 V_{ex} 와 추력 T 또는 가속도 a 가 일정하다는 가정 하에 유도 법칙이 유도 된다.

중력을 $\vec{g} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$ 로 둘 경우 최소 추진제를 사용하는 최적의 추력 방향은 다음과 같은 미분 방정식의 해로 정의된다 [1].

$$\ddot{\vec{\lambda}}_F = -\omega^2 \vec{\lambda}_F + 3\omega^2 \left(\vec{\lambda}_F \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \omega^2 = \frac{\mu}{r^3} \quad (4)$$

여기서 $\vec{u} = \text{unit}(\vec{\lambda}_F)$ 이며 ω 는 반경 r 인 원궤도에 서의 각속도이다. $3\left(\vec{\lambda}_F \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right)\frac{\vec{r}}{r}$ 항이 $\vec{\lambda}_F$ 항 보다 적다고 가정할 경우 위 미분방정식의 해는 다음과 같이 주어지게 된다.

$$\vec{\lambda}_F = \vec{\lambda} \cos \omega(t-K) + \frac{\dot{\vec{\lambda}}}{\omega} \sin \omega(t-K) \quad (5)$$

여기서 $\vec{\lambda}$ 는 단위벡터이며, $\vec{\lambda}$ 와 $\dot{\vec{\lambda}}$ 는 남은 비행 시간동안 일정하다. 여기에 평평한 지구로 가정할 경우, $\vec{u} \approx \vec{\lambda} + \dot{\vec{\lambda}}(t-K)$ 로 선형 탄젠트 유도 법칙이 얻어진다.

Jagers는 식 (5)에서 $\vec{\lambda} \cdot \dot{\vec{\lambda}} = 0$, $\omega = \dot{\lambda}$ 가정을 추가해 추력 방향 단위 벡터를 다음과 같은 형태로 두었다⁽¹⁾.

$$\vec{u} = \vec{\lambda} \cos \lambda(t-K) + \frac{\dot{\vec{\lambda}}}{\dot{\lambda}} \sin \lambda(t-K) \quad (6)$$

$$\text{PEG의 경우 } \cos \lambda(t-K) \approx 1 - \frac{\dot{\lambda}(t-K)^2}{2},$$

$\sin \lambda(t-K) \approx \dot{\lambda}(t-K)$ 에 해당하며, 구체적으로 추력 방향 명령 벡터는 다음과 같이 주어진다⁽³⁾.

$$\vec{u} = \frac{\vec{\lambda} + \dot{\vec{\lambda}}(t-K)}{\sqrt{1 + \dot{\lambda}^2(t-K)^2}} \quad (7)$$

IGM의 경우는 피치와 요 방향의 자세 명령이 다음과 같은 형태로 주어진다⁽⁷⁾.

$$\theta_c = \theta_v - (\theta_p - \dot{\theta}t) \quad (8)$$

$$\psi_c = \psi_v - (\psi_p - \dot{\psi}t)$$

2.1 알고리즘 유도

식 (6)을 식 (1)에 대입하면

$$\vec{v} = a \left\{ \vec{\lambda} \cos \lambda(t-K) + \frac{\dot{\vec{\lambda}}}{\dot{\lambda}} \sin \lambda(t-K) \right\} + \vec{g} \quad (9)$$

이 식을 현재 시점부터 목표 궤도 투입까지 남은 시간 time-to-go (t_{go})까지 적분하여 속도 및 위치를 얻기 위해서는 다음 식에 대한 적분값 계산이 필요하게 된다.

$$L_T \equiv \int_0^{t_{go}} a \cos \lambda(t-K) dt \quad (10)$$

$$J_T \equiv \int_0^{t_{go}} \frac{a}{\lambda} \sin \lambda(t-K) dt \quad (11)$$

$$S_T \equiv \int_0^{t_{go}} \int_0^t a \cos \lambda(s-K) ds dt \quad (12)$$

$$Q_T \equiv \int_0^{t_{go}} \int_0^t \frac{a}{\lambda} \sin \lambda(s-K) ds dt \quad (13)$$

그러나 이 적분값은 일정 추력 모델에 대해서 해석적인 해가 존재하지 않고⁽⁸⁾, 이 값을 계산하기 위해서는 t_{go} 뿐만 아니라 $\dot{\lambda}$ 도 필요하게 된다. 여기서 $\cos \lambda(t-K) \approx 1$, $\sin \lambda(t-K) \approx \lambda(t-K)$ 로 가정할 경우는 다음과 같이 된다.

$$\vec{v} = a\vec{\lambda} + \dot{\lambda}(at - aK) + \vec{g} \quad (14)$$

t_{go} 가 주어질 경우 일정 추력이나 일정 가속도 모델에 대해서 다음 추력적분값에 대해서 닫힌 형태의 해가 주어지게 되어 t_{go} 이후의 추력에 의한 속도 및 위치 변화 계산이 용이하게 된다.

$$L = \int_0^{t_{go}} a dt \quad (15)$$

$$J = \int_0^{t_{go}} at dt \quad (16)$$

$$H = \int_0^{t_{go}} at^2 dt \quad (17)$$

$$S = \int_0^{t_{go}} \int_0^t a ds dt \quad (18)$$

$$Q = \int_0^{t_{go}} \int_0^t as ds dt \quad (19)$$

$$P = \int_0^{t_{go}} \int_0^t as^2 ds dt \quad (20)$$

식 (1)과 (2)의 적분값을 L_T , J_T , S_T , Q_T 로 나타내면

$$\vec{v}_{go} = L_T \vec{\lambda} + J_T \dot{\lambda} = \vec{v}_d - \vec{v} - \vec{v}_{grav} \quad (21)$$

$$\vec{r}_{go} = S_T \vec{\lambda} + Q_T \dot{\lambda} = \vec{r}_d - \vec{r} - \vec{v}t_{go} - \vec{r}_{grav} \quad (22)$$

따라서 \vec{v}_{go} , \vec{r}_{go} 를 계산하기 위해서는 식 (10)~(13)과 같이 주어지는 추력 적분값, 중력에 의한 속도 및 위치 영향을 알기 위한 중력 적분값 \vec{v}_{grav} 와 \vec{r}_{grav} 가 필요하고, 그리고 사전에 가정된 $\dot{\lambda}$ 을 보정하기 위해서는 predictor/corrector 개념이 필요하게 된다.

결과적으로 유도 문제는 궤도 투입시의 위치 및 속도 구속 조건을 만족시키는 유도 파라미터

$\vec{\lambda}$, $\dot{\lambda}$, K 를 결정하는 문제로 이 값들은 다음과 같이 표현된다.

$$K = \frac{J}{L} \quad (23)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{v}_{go}}{|\vec{v}_{go}|} \quad (24)$$

\vec{r}_{go} 가 주어질 경우

$$\vec{\lambda} = \frac{(\vec{r}_{go} - S_T \vec{\lambda})}{Q_T} \quad (25)$$

식 (23)은 \vec{v}_{go} 방향으로의 회전을 제어하지 않도록 $J_T=0$ 이 되도록 선택한 값이다. 그리고 일반적으로 구속조건이 주어지지 않는 \vec{r}_{go} 의 비행거리 방향 요소는 $\vec{\lambda} \cdot \dot{\lambda} = 0$ 으로부터 얻어진다. 즉,

$$S_T = \vec{\lambda} \cdot \vec{r}_{go} \quad (26)$$

Jagers는 식 (26)을 만족시키는 \vec{r}_{go} 의 비행거리 방향 요소를 근사적으로 계산하는 방법을 제안했으나⁽¹⁾ 이럴 경우 $\vec{\lambda} \cdot \dot{\lambda} = 0$ 가 정확히 만족되지 않아 유도 알고리즘의 성능이 많이 떨어져 여기서는 $\vec{\lambda} \cdot \dot{\lambda} = 0$ 을 정확히 만족시키는 \vec{r}_{go} 를 계산하여 사용하였다.

2.2 추력 적분값

추력적분값, t_{go} 는 서로 관련된 값으로 추력적분값과 t_{go} 는 \vec{v}_{go} 나 속도 손실을 포함한 전체 속도 이득 \vec{D}_v 의 직접적인 함수이다. 즉,

$$\vec{D}_v = L\vec{\lambda} \quad (27)$$

\vec{D}_v 는 초기 추정이 필요하며 이를 통해 L , $\vec{\lambda}$ 가 결정되고 t_{go} 는 식 (15)에서와 같이 L 을 사용하여 계산한다.

L_T , J_T , S_T , Q_T 계산을 위해서 평균 값 개념이 도입되었고 이전 단계의 유도 알고리즘 계산에서 얻어진 수렴된 $\dot{\lambda}$ 을 사용할 수 있다고 가정한다. 가속도 프로파일을 다음과 같이 시간에 대한 선형 함수로 가정하여 L_T , J_T , S_T , Q_T 는 해석적으로 얻도록 한다.

$$a \approx A + B(t - K_p) \quad (28)$$

여기서 A 와 B 는 식 (15)와 (18)을 만족하는 값으로 선택했다. 구체적으로 A 와 B 에 대한 연립방정식을 풀어 얻어지는

$$A = \frac{L}{t_{go}} = \frac{L}{2K_p}, \quad B = \frac{12D}{t_{go}^3} = \frac{3D}{2K_p^3}, \quad D = LK_p - S \quad (29)$$

이 경우 sine과 cosine을 포함한 추력적분값은 다음과 같이 주어지게 된다. 구체적인 유도 과정은 참고문헌 [9]에 기술되어 있으며 이후 유도 과정이 생략된 식들도 참고문헌 [9]에 자세히 기술되어 있다.

$$L_T = L_p \cos \delta \quad (30)$$

$$J_T = J_p \cos \delta - \frac{L_p}{\lambda} \sin \delta \approx 0 \quad (31)$$

$$S_T = S_p \cos \delta + \lambda Q_p \sin \delta \quad (32)$$

$$Q_T = Q_p \cos \delta - \frac{S_p}{\lambda} \sin \delta \quad (33)$$

$$\text{여기서 } A_1 \equiv \frac{AK_p}{\theta}, \quad A_2 \equiv A \left(\frac{K_p}{\theta} \right)^2, \quad A_3 \equiv A \left(\frac{K_p}{\theta} \right)^3$$

$$B_1 \equiv B \left(\frac{K_p}{\theta} \right)^2, \quad B_2 \equiv B \left(\frac{K_p}{\theta} \right)^3, \quad B_3 \equiv B \left(\frac{K_p}{\theta} \right)^4$$

$$L_p = 2A_1 \sin \theta \quad (34)$$

$$J_p = -2B_2 (\theta \cos \theta - \sin \theta) \quad (35)$$

$$S_p = 2A_2 \theta \sin \theta - B_2 \{4(\theta \cos \theta - \sin \theta) + 2\theta^2 \sin \theta\} \quad (36)$$

$$Q_p = 2A_3 (\theta \cos \theta - \sin \theta) - 2B_3 \theta (\theta \cos \theta - \sin \theta) \quad (37)$$

$$K_p = \frac{t_{go}}{2}, \quad \theta = \lambda K_p, \quad \Delta K = K - K_p, \quad \delta = \lambda \Delta K$$

L_p, J_p, S_p, Q_p 는 $K \approx \frac{t_{go}}{2}$ ($\equiv K_p$)일 경우의 추력적분값에 해당한다.

Jaggers는 t_{go} 가 0에 접근함에 따라 상대적으로 적은 항은 사라진다는 가정 하에 L_T, S_T, Q_T 를 아래와 같이 L, J, S, Q 로 표현하면서 단순화를 시도하기도 했다⁽¹⁾.

$$L_T \approx F_1 L \quad (38)$$

$$S_T \approx F_3 S \quad (39)$$

$$Q_T \approx F_2 (Q - SK) \quad (40)$$

여기서

$$f_1 = \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad f_2 = \frac{3(f_1 - \cos \theta)}{\theta^2}$$

$$F_1 = f_1 \cos \delta, \quad F_2 = f_2 \cos \delta, \quad F_3 = F_1 \left(1 - \frac{\theta \delta}{3}\right)$$

2.3 중력 적분값

본 논문에서는 중력 적분값은 Delprte가 제안한 중력을 3차 다항식으로 근사해서 적분값을 계산하는 방법⁽¹⁰⁾을 사용하였다. PEG와 IGM의 경우도 비교를 위해서 같은 방법을 사용하였다. Jaggers도 비슷한 방법을 제안했으나 Delprte는 J_2 항까지 포함한 중력 모델을 사용한 반면에 Jaggers는 단순화된 원궤도에 대한 중력 $\vec{g} = -\omega^2 \vec{r}$ 을 사용하고, $\frac{1}{2}(\vec{g}_f + \vec{g}_o)t_{go} \approx \vec{g}_f - \vec{g}_o$ 라고 둔 점이 다르다. Delprte가 제안한 방법을 간략히 기술하면 중력장을 다음과 같이 시간에 대한 3차 다항식으로 모델링하여 수치적분을 피하도록 하였다.

$$\vec{g}(t) = \vec{G}_0 + \vec{G}_1(t-t_o) + \vec{G}_2 \frac{(t-t_o)^2}{2} + \vec{G}_3 \frac{(t-t_o)^3}{6} \quad (41)$$

이 다항식의 계수는 시작과 끝점에서 상태 벡터 값을 사용하여 $\vec{g}(t_o), \vec{g}(t_f), \frac{d\vec{g}}{dt}(t_o), \frac{d\vec{g}}{dt}(t_f)$ 로 나타내도록 했다. 앞의 다항식을 사용하면 중력적분값은

$$\vec{v}_{grav} = \int_{t_o}^{t_f} \vec{g} dt = \frac{\Delta t}{2} (\vec{g}_f + \vec{g}_o) + \frac{\Delta t^2}{12} (\vec{g}_o - \vec{g}_f) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{grav} &= \int_{t_o}^{t_f} \int_{t_o}^t \vec{g} ds dt \\ &= \frac{\Delta t^2}{20} (3\vec{g}_f + 7\vec{g}_o) + \frac{\Delta t^3}{10} \left(\frac{\vec{g}_o}{2} - \frac{\vec{g}_f}{3} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

3차 다항식 모델은 구간이 너무 길지 않은 한 타당하며, 구간이 너무 길 경우는 여러 개의 구간으로 나누어 주어야 한다.

주어진 추력적분값과 중력적분값을 사용하여 궤도 투입 시의 상태 변수는 다음과 같이 예측된다.

$$\vec{v}_p = \vec{v} + \vec{v}_{grav} + \vec{v}_{go} \quad (44)$$

$$\vec{r}_p = \vec{r} + \vec{v}t_{go} + \vec{r}_{grav} + \vec{r}_{go} \quad (45)$$

이렇게 얻어진 \vec{v}_p, \vec{r}_p 를 사용하여 다시 중력적분값을 개선하고 이를 사용하여 \vec{r}_p 가 일정한 값으로 될 때까지 최종 상태 변수를 개선하는 반복 계산이 필요하게 된다.

\vec{r}_p, \vec{v}_p 가 수렴한 후에 유도 방식을 구현하기 위해서 corrector 개념이 사용되는데, 목표 상태를 다음과 같이 개선함으로써 수행된다.

$$\vec{r}_d = r_d \text{unit}[\vec{r}_p - (\vec{r}_p \cdot \vec{i}_{yd}) \vec{i}_{yd}] \quad (46)$$

$$\vec{v}_d = v_d \{ \vec{i}_x \sin \gamma_d + \text{unit}(\vec{i}_x \times \vec{i}_{yd}) \cos \gamma_d \},$$

$$\vec{i}_x = \text{unit}(\vec{r}_d) \quad (47)$$

여기서 $\vec{i}_{yd} = \text{unit}(\vec{v}_d \times \vec{r}_d)$ 로 목표 궤도면에 수직인 단위벡터, $\gamma_d = \sin^{-1} \left(\frac{\vec{r}_d \cdot \vec{v}_d}{r_d v_d} \right)$ 는 목표 수직 비행방향각이다. 이제 0으로 수렴해야 하는 오차항은 다음과 같이 정의되고

$$\vec{v}_{miss} = \vec{v}_d - \vec{v}_p \quad (48)$$

\vec{D}_v 는 다음과 같이 보정 된다.

$$\vec{D}_v = \vec{D}_v + \vec{v}_{miss} \quad (49)$$

2.4 알고리즘 구현

본 절에서는 앞에서 기술된 알고리즘을 구현하는 순서도에 대해서 간략히 기술하였다.

• 알고리즘 초기화

$$\dot{\lambda} = 10^{-5}$$

$\vec{D}_v = \text{nominal}$ 값 사용

$\vec{v}_p = 1.001 \vec{v}$ (이와 같이 초기 추정치에 오차가 커도 충분히 수렴하는 결과 얻어짐)

$$\vec{r}_p = \vec{r}$$

• 반복 계산

① 속도 이득 및 속도 개선

$$\vec{D}_v = \vec{D}_v - \Delta \vec{v}_s, \quad \Delta \vec{v}_s = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_{-1})$$

여기서 $\vec{v}(t_{-1})$ 는 이전 과정에서의 속도로 여기서 유도 명령은 0.5초 마다 계산되어 갱신된다고 두었다. 따라서 $\vec{v}(t_{-1})$ 는 $\vec{v}(t)$ 의 0.5초 이전 값을 나타낸다.

② time-to-go와 추력 적분값 계산

$D_v = |\vec{D}_v|$ 을 사용하여 t_{go} 와 L, J, S, Q 를 계산한다.

③ 적분값 계산

K, L_T, S_T, Q_T 를 계산한다.

④ 유도 파라미터 및 range-to-go 계산

$$\lambda = \frac{\vec{v}_{go}}{|\vec{v}_{go}|}, \quad \vec{r}_{go}, \quad \lambda = \frac{(\vec{r}_{go} - S_T \vec{\lambda})}{Q_T}$$

⑤ 최종 위치 및 속도 예측 (predictor)

\vec{r}_p, \vec{v}_p 를 예측한다.

⑥ 목표 위치 및 속도 보정 (corrector)

$\vec{r}_d, \vec{v}_d, \vec{D}_v$ 가 수렴했는지 평가한다. 수렴했으면 반복 계산을 종료하고 그렇지 않으면 ①로 가서 다시 반복 계산을 수행한다.

• 유도 알고리즘 계산과정의 종료

유도명령의 발산을 막기 위해서 다음과 같은 조건을 만족시키면 반복 계산을 중지하고 피치 및 요 방향의 유도 명령각 변화율 $\dot{\theta}_c, \dot{\psi}_c$ 를 일정한 값으로 유지한다.

If $|\vec{D}_v| \leq v_{hold}$ then $\dot{\theta}_c, \dot{\psi}_c$ 는 고정

v_{hold} 값에 따라 궤도 투입 성능이 영향을 받으므로 신중히 선택해야 되는데, 본 논문에서는 2단의 경우 600 (m/s), 3단의 경우 150 (m/s)를 사용하였다.

2.5 알고리즘 개선

Jaggers는 식 (28)과 같이 가속도 프로파일을 선형으로 가정하여 추력적분값을 계산했는데 이럴 경우 추력 적분값 및 추력에 의해서 얻게 되는 속도 및 위치에 있어서 오차가 발생할 수 있다. 이를 개선하기 위해서 가속도 프로파일을 2차, 3차 다항식으로 근사할 경우 이런 오차들이 얼마나 줄어드는지 알아보았다.

먼저 다음과 같이 2차 다항식으로 근사할 경우

$$a \approx A + B(t - K_p) + C(t - K_p)^2 \quad (50)$$

여기서 계수 A, B, C 는 식 (15), (18), (19)를 만족하도록 선택했다. $J = Lt_{go} - S$ 이므로 위 식을 만족시키는 가속도 프로파일은 J 값도 만족시킨다. 이렇게 계수를 결정하는 이유는 가속도 프로파일과의 차이를 줄이는 것보다 가속도를 사용하여 결과적으로 얻을 수 있는 속도와 위치를 정확히 예측하는 것이 더 중요하기 때문이다. 결과적으로

$$A = -\frac{3L}{2t_{go}} + \frac{15Q}{t_{go}^3}, \quad B = \frac{6L}{t_{go}^2} - \frac{12S}{t_{go}^3},$$

$$C = \frac{30L}{t_{go}^3} - \frac{180Q}{t_{go}^5} \quad (51)$$

다음과 같이 정의하면

$$C_1 \equiv C\left(\frac{K_p}{\theta}\right)^3, \quad C_2 \equiv C\left(\frac{K_p}{\theta}\right)^4, \quad C_3 \equiv C\left(\frac{K_p}{\theta}\right)^5$$

$$L_P = 2A_1 \sin\theta + 2C_1\{\theta^2 \sin\theta + 2(\theta \cos\theta - \sin\theta)\} \quad (52)$$

$$J_P = -2B_2(\theta \cos\theta - \sin\theta) \quad (53)$$

$$S_P = 2A_2 \theta \sin\theta - B_2\{4(\theta \cos\theta - \sin\theta) + 2\theta^2 \sin\theta\} + 4C_2 \theta(\theta \cos\theta - \sin\theta) \quad (54)$$

$$Q_P = 2A_3(\theta \cos\theta - \sin\theta) - 2B_3 \theta(\theta \cos\theta - \sin\theta) - 6C_3\{\theta^2 \sin\theta + 2(\theta \cos\theta - \sin\theta)\} \quad (55)$$

이로부터 L_T, S_T, Q_T 는 식 (30)~(33)을 사용하여 계산하면 된다. 마찬가지로 방법으로 3차 다항식으로 근사할 경우

$$a \approx A + B(t - K_p) + C(t - K_p)^2 + D(t - K_p)^3 \quad (56)$$

식 (15), (16), (17), (20)을 만족시키도록 계수를 선택하면

$$A = -\frac{3L}{2t_{go}} + \frac{15J}{t_{go}^2} - \frac{15H}{t_{go}^3}, \quad (57)$$

$$B = \frac{15L}{t_{go}^2} - \frac{240J}{t_{go}^3} + \frac{630H}{t_{go}^4} - \frac{420M}{t_{go}^5}, \quad M = Ht_{go} - P$$

$$C = \frac{30L}{t_{go}^3} - \frac{180J}{t_{go}^4} + \frac{180H}{t_{go}^5},$$

$$D = -\frac{140L}{t_{go}^4} + \frac{1680J}{t_{go}^5} - \frac{4200H}{t_{go}^6} + \frac{2800M}{t_{go}^7}$$

다음과 같이 정의하면

$$D_1 \equiv D\left(\frac{K_p}{\theta}\right)^4, \quad D_2 \equiv D\left(\frac{K_p}{\theta}\right)^5, \quad D_3 \equiv D\left(\frac{K_p}{\theta}\right)^6$$

$$L_P = L_{p2} \quad (58)$$

$$J_P = J_{p2} + 2D_2[-\theta^3 \cos\theta + 3\{\theta^2 \sin\theta + 2(\theta \cos\theta - \sin\theta)\}] \quad (59)$$

$$S_P = S_{p2} + 2D_2\{-\theta^4 \sin\theta - 4\theta^3 \cos\theta + 12\theta^2 \sin\theta + 24(\theta \cos\theta - \sin\theta)\} \quad (60)$$

$$Q_P = Q_{p2} + 2D_3[-\theta^4 \cos\theta + 3\{\theta^3 \sin\theta + 2\theta(\theta \cos\theta - \sin\theta)\}] \quad (61)$$

여기서 $(\cdot)_{p2}$ 는 식 (52)~(55)를 나타낸다.

아래 그림은 일정 추력 모델에 대해서 nominal

조건에 대해서의 $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}$ 를 사용하여 3단 비행구간 유도 시작 시점부터 연소종료시점 부근까지 각 방법에 대해서 얻어지는 추력에 의한 속도 및 위치 이득값의 오차를 나타낸다 (여기서 N-좌표계는 항법좌표계를 나타낸다). 여기서 'nth order'는 가속도 프로파일을 n차로 근사할 경우 '1st order with approximation'은 식 (38)~(40)을 사용하여 얻어진 결과를 나타낸다. 각 방법의 오차는 수치적분을 통해서 정확히 얻어진 값과 비교함으로써 계산했다. 아래 가속도 프로파일에서 알 수 있듯이 1차와 2차, 또는 1차와 3차는 차이가 다소 있지만 2차와 3차는 크지 않음을 알 수 있다. 차수를 올려줌으로써 추력에 의한 속도 및 위치 예측이 훨씬 더 정확해짐을 알 수 있다.

중력 적분값도 근사식으로 인해 어떻게 영향을 받는지 알아 보았다. Jagers가 제안한 단순화된 원궤도에 대한 중력을 사용하고 $\frac{1}{2}(\vec{g}_f + \vec{g}_o)t_{go} \approx \vec{g}_f - \vec{g}_o$ 라고 가정할 때 '3rd order Approx.

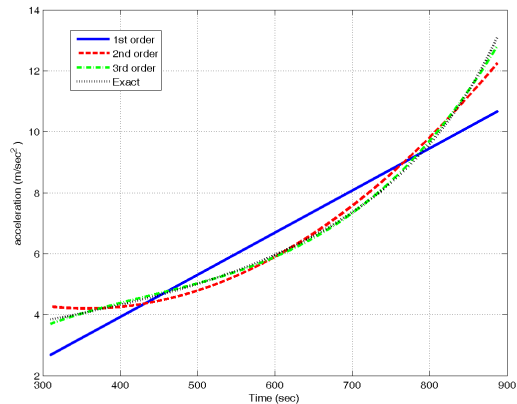


Fig. 1. 3단 구간에서의 가속도 프로파일

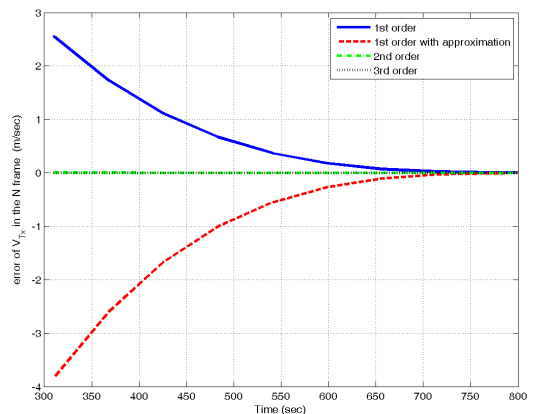


Fig. 2. 추력에 의한 속도이득값 오차

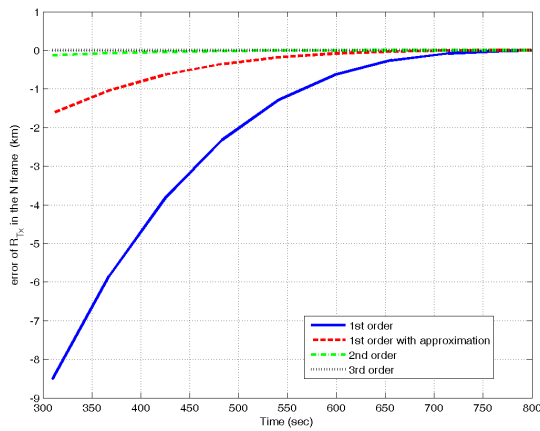


Fig. 3. 추력에 의한 위치이득값 오차

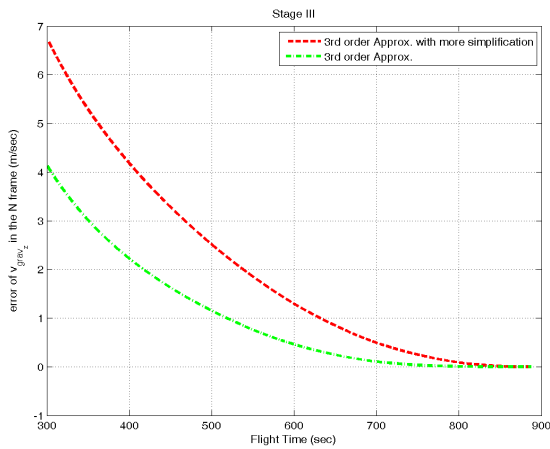


Fig. 4. 중력에 의한 속도이득값 오차

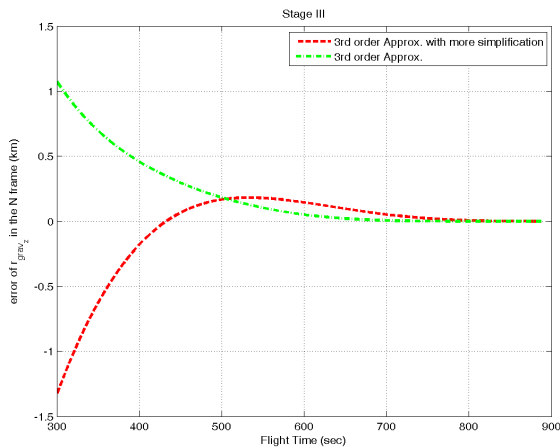


Fig. 5. 중력에 의한 위치이득값 오차

with more simplification'과 보다 정확한 중력 값 및 앞의 가정을 사용하지 않을 때 중력 적분값 '3rd order Approx.'⁽¹⁰⁾을 비교하였다. Fig. 4와 5를

보면 '3rd order Approx. with more simplification'의 예측 오차가 다소 크음을 알 수 있다. Jagers의 경우 이런 단순화를 사용한 이유는 좀 더 단순화된 형태의 최종 위치 및 속도 예측 방정식을 얻기 위해서인 것으로 추정된다.

III. 수치결과

본 절에서는 앞의 유도 알고리즘을 주어진 3단형 발사체의 2단과 3단 유도를 위해 적용한 3-DOF 모의시험 수행 결과에 대해서 기술하였다. 2단 유도가 중단된 이후 3단 유도가 시작 되기 전에는 nominal 명령 각속도를 사용하였으며, 2단과 3단 연소 종료시점에 목표 궤도를 각각 설정하였다. 3단 연소 종료 후 목표궤도는 약 250x700 km의 타원 궤도이다.

앞 절에서 기술했듯이 더 고차 다항식을 사용하여 추력 적분값을 계산하고, 중력 적분값도 단순화하지 않을 경우에 대해서 얻어진 유도 알고리즘 'modified'와 Jagers가 제시한 방법^(1,2)을 그대로 사용할 경우, 즉, 식 (38)~(40)을 사용하여 추력적분값을 계산하고 중력적분값도 단순화된 원궤도에 대한 값을 사용할 경우의 알고리즘 'original'의 성능을 비교해 보았다. 앞의 내용에서 알 수 있듯이 'modified'의 경우 알고리즘 순서도는 'original' 알고리즘과 거의 유사하다.

Table 1은 Jagers가 제안한 알고리즘 'original'과 다음과 같은 알고리즘을 사용한 경우에 대해서 nominal 조건에 대한 모의시험 결과를 나타낸다.

- 'modified+1st' : 'modified'에서 1차 가속도 프로파일로 근사해서 추력 적분값을 얻는 경우
- 'modified+2nd' : 'modified'에서 2차 가속도 프로파일로 근사해서 추력 적분값을 얻는 경우
- 'modified+3rd' : 'modified'에서 3차 가속도 프로파일로 근사해서 추력 적분값을 얻는 경우

여기서 R(PER)은 근지점 고도오차를, R(APO)는 원지점 고도오차를, INC는 경사각 오차를, Mp는 추진제양에 있어서 차이를 나타낸다. 표 1에서 알 수 있듯이 'modified+1st'와 'original'은 미미하지만 'IGM'을 제외한 다른 방법에 비해서 3단 구간에서 추진제 성능 면에서 다소 떨어짐을 알 수 있다. 또 속도나 위치 오차도 'modified+2nd'나 'modified+3rd'에 비해서 미미하지만 약간 더 크음을 알 수 있다. 'modified+2nd'와 'modified+3rd'는 크게 차이가 없음을 알 수 있으며 'PEG'와 비교할 때 작지만 더 오차가 적음을 알 수 있다.

'IGM'⁽⁷⁾의 경우 2단에서는 다른 방법과 크게 차이가 없지만 3단 구간에서는 가장 성능이 떨어짐을 알 수 있다. 이는 'IGM'의 경우 range-to-go를 근사식을 사용해서 계산하기 때문에 비행시간이 큰 임무의 경우 성능이 떨어지기 때문이다. 반면에 'PEG'나 'modified'는 좀더 복잡하지만 추력과 중력의 영향을 모두 고려하여 range-to-go를 정확하게 예측하는 방법을 사용하기 때문에 추진제량에 있어서 크게 변화가 없게 된다.

Figure 6~9는 각 경우에 대한 유도 명령을 나타낸다. 여기서 'modified'는 'modified+3rd'를 나타낸다. 'IGM'의 경우 'open-loop' 명령과 가장 차이가 크며, 'original'은 매우 미미하지만 'modified'나 'PEG' 경우에 비해서 다소 차이가 생김을 알 수 있다.

Table 1. nominal 조건에서의 성능 비교

2단 연소 종료 시점				
유도 방식	R(PER) (km)	R(APO) (km)	INC (deg)	Mp (kg)
modified+1st	0.09342	-0.05159	0.00010	0.00
modified+2nd	0.15203	-0.08185	0.00011	0.00
modified+3rd	0.15202	-0.08185	0.00011	0.00
original	0.07680	-0.04349	-0.00049	0.00
PEG	0.15256	-0.08218	0.00011	0.00
IGM ⁽⁷⁾	0.28788	-0.17982	0.00010	0.00
3단 연소 종료 시점				
유도 방식	R(PER) (km)	R(APO) (km)	INC (deg)	Mp (kg)
modified+1st	-0.01690	0.19715	0.00024	0.39
modified+2nd	-0.04383	0.05136	0.00008	-0.23
modified+3rd	-0.04420	0.04861	0.00007	-0.23
original	-0.04478	0.08529	0.00012	0.23
PEG	-0.02284	0.26273	0.00034	-0.08
IGM ⁽⁷⁾	0.00333	-0.18829	-0.00003	15.08

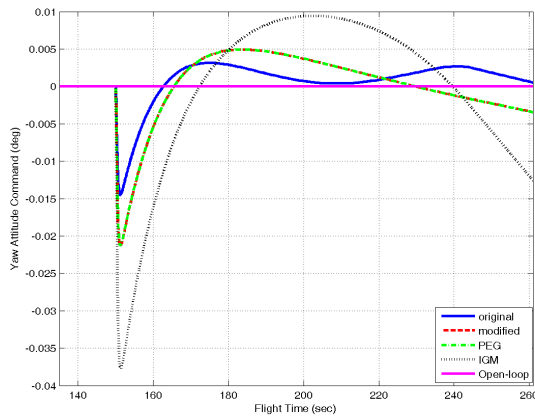


Fig. 6. 2단 비행 구간에서 요각 명령

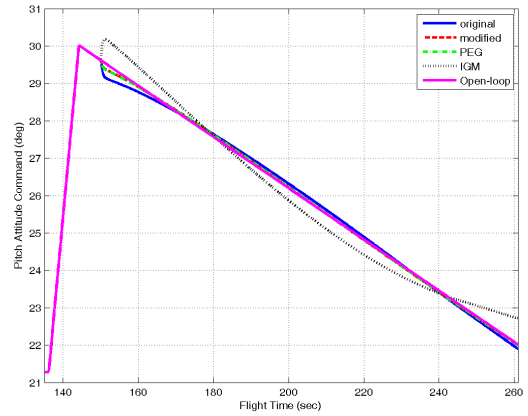


Fig. 7. 2단 비행 구간에서 피치각 명령

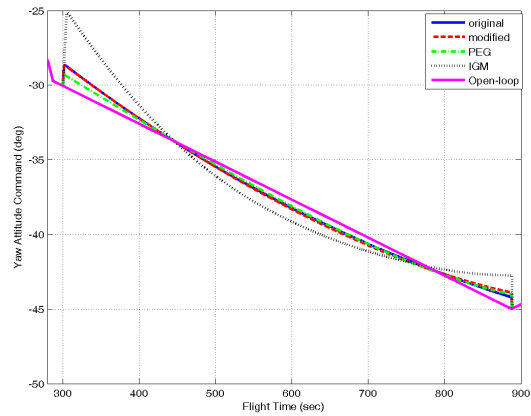


Fig. 8. 3단 비행 구간에서 요각 명령

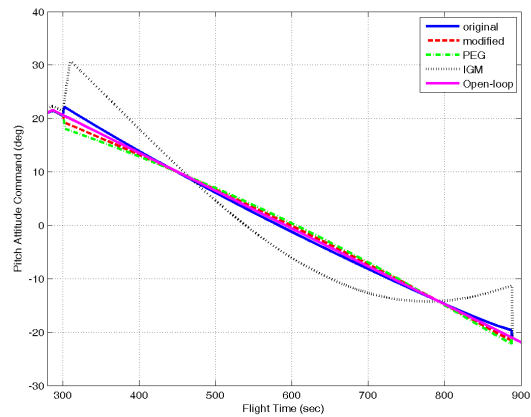


Fig. 9. 3단 비행 구간에서 피치각 명령

각 방법의 성능 비교를 위해서 다양한 3σ 섭동 조건에 대해서도 모의시험을 수행했는데, 이중 큰 차이를 보이는 경우는 1단에서 추력 오차 요인이 있는 경우로 Table 2는 이 경우에 대한 결과

Table 2. 1단 추력오차가 있는 경우 성능비교

2단 연소 종료 시점				
유도 방식	R(PER) (km)	R(APO) (km)	INC (deg)	Mp (kg)
modified	-0.49297	0.24124	0.00168	-8.97
original	-3.09628	1.19962	-0.00028	-8.97
PEG	-0.50941	0.24429	0.00170	-8.97
IGM	0.33367	-0.26010	0.00135	-11.53
3단 연소 종료 시점				
유도 방식	R(PER) (km)	R(APO) (km)	INC (deg)	Mp (kg)
modified	-0.04781	-0.00153	0.00005	2.97
original	-0.05996	-0.07308	0.00003	5.63
PEG	-0.04161	0.07549	0.00016	3.13
IGM	0.01792	-0.10703	0.00011	17.89

를 나타낸다. 'original'과 'modified', 그리고 'PEG' 모두 3단 엔진중단시점에서 궤도 투입 오차가 적어, 목표 궤도 투입이 가능하나 'original'의 경우 다른 경우에 비해 2단 연소 종료 시점에 오차가 크고 이를 보상하기 위해서 3단에 요구 추진제도 다른 경우에 비해서 다소 큼을 알 수 있다. 이는 추력 적분값 계산을 1차 다항식으로 근사해서 발생한 오차로 차수를 올려 줄 경우 오차가 줄어들게 된다. 'modified'의 경우 'PEG'에 비해서 차이는 적지만 더 적은 양을 요구함을 알 수 있어 'modified'가 우수함을 알 수 있다. 따라서 비행시간이 길고 목표 궤도가 현재 위치에 대해서 상대적으로 멀리 떨어진 임무의 경우에는 더 적합할 수 있다고 판단된다.

IV. 결 론

본 논문에서는 주어진 3단형 발사체의 보다 정밀한 유도를 위해 PEG 보다 최적 명령 형태에 가까운 Jagers가 제시한 알고리즘에 대해서 다루었다. 2단 및 3단 유도에 적용하여 nominal 및 off-nominal 조건에서 성능을 분석했으며 PEG, IGM과도 성능을 비교하였다. 또한 기존의 알고리즘을 개선할 수 있는 방법을 제시하였고, 현재 주어진 발사체 모델에 대해서는 차이가 적지만 기존의 Jagers 알고리즘과 PEG보다 성능이 우수함을 확인했다. 따라서 발사체의 유도 알고리

즘 개발시 개발될 유도 알고리즘의 성능 평가를 위한 기준 알고리즘으로 활용될 수 있을 것으로 판단된다. 그리고 보다 복잡한 임무가 주어진 발사체의 경우에 더 적합할 것으로 예상되며, 이에 대해서는 추후 분석할 예정이다.

참고문헌

- 1) R. F. Jagers, "An explicit solution to the exoatmospheric powered flight guidance and trajectory optimization problem for rocket propelled vehicles", AIAA 77-1051.
- 2) R. F. Jagers, "Proposed powered explicit guidance thrust integrals derivation/implementation", NASA CR-147796.
- 3) R. L. McHenry, T. J. Brand, A. D. Long, B. F. Cockrell, J. R. Thibodeau III, "Space shuttle ascent guidance, navigation, and control", J. Astronautical Sciences 27 (1), 1-38, 1979.
- 4) H. Nakagawa, Y. Ikeda, T. Mugitani, H. Suzuki, and H. Nakayasu, "An overview about guidance system for H-IIA Rocket", 제35회 비행기 심포지엄 강연집, pp. 125-128, 1997.
- 5) S. Ikeda and K. Tokita, "Development of H-II launch vehicle guidance software", Proc. of 5th ISCOPS, pp. 761-773, 1993.
- 6) 송은정, 조상범, 박창수, 노용래, "발사체 상단의 외연적 유도 알고리즘 적용 연구", 항공우주기술, 제 10권, 1호, pp.89~97, 2011.
- 7) D. C. Chandler and I. E. Smith, "Development of the iterative guidance mode with its application to various vehicles and missions", J. Spacecraft and Rockets, Vol. 4, No. 7, pp. 898-903, 1967.
- 8) mathworld.wolfram.com/IndefiniteIntegral
- 9) 송은정, "H 유도 알고리즘 연구", KARI-LDT-TM-2011-011, 한국항공우주연구원, 2011.
- 10) M. Delporte and F. Sauvinet, "Explicit guidance law for manned spacecraft", AIAA 92-1145.