

분수 나눗셈의 문장제에 대한 초등 교사들의 전문화된 내용지식(SCK) 분석

강 영 란 (유강초등학교)

조 정 수 (영남대학교)

김 진 환 (영남대학교)[†]

Ball, Thames, Phelps(2008)는 수학을 가르치는 교사에게는 특별히 수학 가르침을 위한 지식(MTK)이 필요하다고 주장을 하면서 그 하위 영역으로 학생들이 분수의 나눗셈을 수행하는 것에 대해 평가할 수 있는 교사의 능력과 같이 특정 영역에 대한 지식과 기술을 의미하는 전문화된 내용 지식(SCK)을 제시하였다. 본 연구에서는 초등 6학년 학생들에게 교과서에서 유일하게 제시된, 문장제 만들기, 즉 분수 나눗셈 $9/10 \div 2/5$ 에 알맞은 문장제 문제를 만들게 하였고, 이들이 제시한 답의 유형을 네 가지의 유형으로 분류하였다. 각 대표적인 유형의 답들을 선택하여 초등 6학년을 지도한 경험이 있는 10명의 교사들에게 제공하였고, 이 답들에 대한 평가를 하는 과정에서 나타나는 오류와 분수 나눗셈에 대한 문장제의 의미를 통해 교사들의 전문화된 내용 지식(SCK)을 분석하였다.

I. 서론

‘교육의 질은 교사의 질을 증가할 수 없다’는 말은 교사 전문성에 대한 중요성을 단적으로 드러낸 말이다. NCTM(2000)은 학교수학을 위한 원리와 규준에서 교사의 학생에 대한 이해와 수학 내용에 대한 이해를 강조하면서 질 높은 수학 교육을 학생들에게 제공하기 위해서는 끊임없는 교사의 전문성 개발의 필요성을 강조하였다. 2010년 교육과학기술부 주요업무 계획 발표에서도 학교교육의 만족도를 높이기 위한 방안으로 교사의 전문성 강화를 대안으로 제시하였다(교육과학기술부, 2009). 이처럼 학생들의 수학 학습에 영향을 미치는 결정적인 요소로 교사의 지식이 부각되었다(방정숙, 2002; Ma, 1999). 이 후 수학교육에서 교사 지식에 대한 연구는 국내외에서 활발히 이루어져 오고 있다.

먼저 국내에서는 Shulman(1987)이 제안한 교수법적 내용 지식(Pedagogical Content Knowledge, PCK)에 기초하여 특정 내용에 관한 교사의 지식에 대한 연구가 많이 이루어졌다. 분수에 대한 교사 지식(김상룡, 2004; 박교식·송상현·임재훈, 2004; 방정숙·Li, 2008; 이종욱, 2005), 나눗셈(김민경, 2003), 덧셈과 뺄셈(이종욱, 2003), 소수(송근영·방정숙, 2008), 평면도형(곽주철·류희수, 2008; 안선영·방정숙, 2006)에 대한 교사 지식의 연구가 있었다. 선행 연구들에서 분수와 관련된 연구가 많은 관심을 끌어 왔으며 특히 Ma(1999)의 후속연구로써 분수의 나눗셈을 지도하기 위한 예비 초등교사 지식이 어떠한지에 초점을 두어 연구하였다.

국외에서는 교사가 갖추어야 할 지식을 분류하는 연구(Ball, 1990; Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008), 교사 지식과 교수 학습 방법의 실제에 대한 연구(Ball, 1990; Tompson, 1992)가 있었다.

* 접수일(2012년 8월 20일), 수정일(1차: 2012년 8월 20일, 2차: 2012년 9월 11일), 게재확정일자(2012년 9월 18일)

* ZDM분류 : F42

* MSC2000분류 : 97D70

* 주제어 : 분수 나눗셈, 문장제, MTK, SCK

† 교신저자 : kimjh@ynu.ac.kr

Olanoff(2011)는 분수의 곱셈과 나눗셈 사례로 수학을 가르치기 위한 수학적 지식 연구를 하였으며, 수학 가르침을 위한 지식(Mathematics Knowledge for Teaching, MKT)의 이론을 적용하고 있다. 수학 가르침을 위한 지식(MKT)은 Shulman(1987)이 제시한 PCK를 토대로 기존의 교사 지식을 수학 교과 관점에서 재개념화한 이론으로 교사 지식을 판가름하는데 활용될 수 있음을 시사하고 있다.

본 연구는 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 의미에 관심을 두고 출발하지만, 선행연구와는 다음 세 가지 측면에서 차이가 있으며 초등학교의 실제적 수학교실에 대한 연구 필요성에 기초한다.

첫째, 연구 대상과 관련하여 거의 모든 선행 연구의 주된 대상은 예비초등 교사를 대상으로 하고 있다. 그러나 본 연구는 문제해결자인 학생들과 실제 학교 현장에서 분수 나눗셈을 가르친 경험이 있는 초등 교사들을 대상으로 한다.

둘째, 지금까지 연구 대상자가 ‘가르치는 것’에 초점을 둔 교사 지식 연구를 하였다. 그러나 본 연구는 수학 가르침을 위한 지식(MKT)의 세부 항목 중 ‘가르치는 것’ 외에 ‘평가하는 것’에 초점을 두어 교사의 수학 내용 자체에 대한 개념적 이해보다는 학생들이 수학을 어떻게 이해하고 있는지에 대한 교사의 평가에 대한 분석이다.

셋째, 검사 도구 개발에 있어 기존연구 문헌에 의존하고 있어 실제 교사들이 수학을 가르치는데 있어서 필요한 수학적 지식과 피리가 있었다. 본 연구는 교과서에 제시된 평가 문제를 대해 학생들이 제공한 답과 반응에 대한 평가를 통해 교사의 지식을 분석한다.

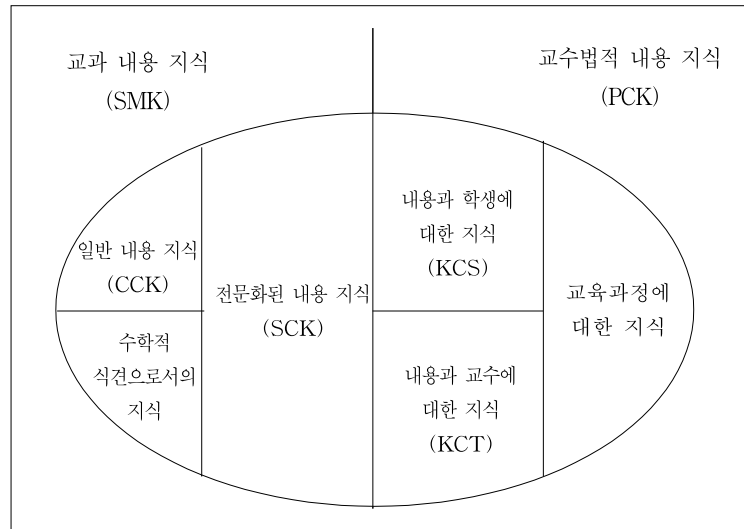
본 연구는 위의 관점에 따라 교과서에 제시된 분수 나눗셈에 대해 학생들이 진술한 문장제를 평가하는 과정을 탐색하여 교사가 가지고 있는 전문화된 내용 지식(Specialized Content Knowledge, SCK)을 분석하고자 한다.

이들 문제를 해결하기 위해 먼저 이론적 배경으로 수학 가르침을 위한 지식(MKT)과 분수 나눗셈에 대한 선행 연구를 고찰한다. 그리고 초등 6학년 1학기 수학 교과서(교육과학기술부, 2011) 17쪽에 제시된 ‘분수 나눗셈 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ ’에 대해 초등 6학년 학생들이 적합한 문장제 문제들을 만들게 하고 이들을 분석하여 유사유형으로 분류하며, 학생들이 제시한 문장제에 대해 교사들이 평가하고 오류에 대한 침삭을 하는 과정을 통해 6학년 초등교사의 전문화된 내용 지식(SCK)을 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수학 가르침을 위한 지식(MKT)

수학 가르침을 위한 지식(MKT)은 Ball, Hill & Bass(2005)의 동료들이 수학을 가르치는데 필요한 지식이 무엇인가에 대한 고찰을 통해 Shulman(1987)이 제시한 교과 내용 지식(Subject Matter Knowledge, SMK)과 교수법적 내용 지식(PCK)을 토대로 기존의 교사 지식을 수학 교과 관점에서 재개념화한 것이다. Ball, Thames & Phelps(2008)은 <그림 II-1>과 같이 수학 가르침을 위한 지식(MKT)을 교과 내용 지식(SMK)과 교수법적 내용 지식(PCK)의 2개의 큰 범주로 두고, 각각 3개의 하위영역으로 범주화하였다.



<그림 11-1> MKT의 하위 범주(Ball, Thames & Phelps, 2008)

교과 내용 지식(SMK) 영역은 일반 내용 지식(Common Content Knowledge, CCK), 전문화된 내용 지식(SCK), 수학적 식견으로서의 지식(Knowledge at the mathematical horizon)으로 분류되어 있으며, 교수법적 내용 지식(PCK) 영역은 내용과 학생에 대한 지식(Knowledge of Content and Student, KCS), 내용과 교수에 대한 지식(Knowledge of Content and Teaching, KCT), 교육과정에 대한 지식(Knowledge of Curriculum)으로 세분화된다.

수학 가르침을 위한 지식(MKT)의 하위 영역의 지식 중 일반 내용 지식(CCK), 내용과 학생에 대한 지식(KCS), 전문화된 내용 지식(SCK), 내용과 교수에 관한 지식(KCT)에 대해 구체적으로 살펴보면 다음과 같다 (Ball, Hill & Bass, 2005).

일반 내용 지식(CCK)은 전문가로서 수학교사가 갖추어야 할 지식이라기보다는 일반적인 수학적 지식을 의미한다. 수학적 용어나 개념에 대해 알거나 단순 계산을 통해 답을 구할 줄 아는 것은 일반 내용 지식이라 할 수 있다.

반면에, 전문화된 내용 지식(SCK)은 교사가 학생을 가르치는데 필요한 수학적 지식과 기술을 의미한다. 학생들에게 수학을 가르치기 위해서는 교사가 압축되어 있는 지식을 풀어서 제시할 수 있어야 하며 수학 교사가 가르치기 위한 목적에서 실행하는 지식이다. 전문화된 내용 지식(SCK)은 구체적으로 다음 사항이 포함된다.

- 수학적 아이디어를 정확하게 표상하기
- 학생들이 갖는 ‘왜’라는 의문에 대답하기
- 압축되어 있는 지식을 풀어서 제시할 수 있는 적절한 예를 찾기
- 표상과 핵심 아이디어 및 표상과 표상 사이를 연결하기
- 동일 주제에 대해 전시 학습과 후속 학습 사이의 연결성 찾기
- 수학 교과서 내용 평가하여 과제를 수준에 맞게 재구성하기
- 수학적 기호, 언어를 사용하여 설명하기
- 수학적 규칙과 절차에 대해 개념적으로 설명하기

- 학생 활동, 결과물에 대한 평가하기
- 학생이 제시한 대안이나 비표준화된 수학적 방법의 타당성 결정하기 등

<표 II-1>은 전문화된 내용 지식(SCK)을 측정하기 위한 문항의 예이다(Ball, Hill & Bass, 2005).

<표 II-1> 전문화된 내용 지식(SCK) 측정 문항의 예

다음에 제시된 학생들의 곱셈 계산에 사용한 방법들 중 어떠한 두 정수를 가져와 곱셈 계산을 하더라도 사용될 수 있는 방법은 어느 학생의 것입니까?

학생 A	학생 B	학생 C
$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ + 75 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 175 \\ + 700 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 25 \\ 150 \\ 100 \\ + 600 \\ \hline 875 \end{array}$

내용과 학생에 대한 지식(KCS)은 학생에 대한 것과 수학 내용에 관한 것이 결합된 형태의 지식으로 수학 내용에 대하여 학생들이 어떻게 이해하는지에 대한 지식을 의미한다. 교사는 학생들이 생각하는 경향과 혼란스러워 하는 부분에 대해 미리 고려하고, 학생들의 흥미를 끌며 동기를 유발할 수 있는 절직한 예를 선택할 수 있어야 한다. 과제를 부여할 때도 학생들이 하고 싶어 하는 것이 무엇인지 어떤 것을 쉽다고 생각하는지 어떤 것을 어렵다고 생각하는지를 예측할 수 있어야 한다. 무엇보다 내용과 학생에 대한 지식(KCS)에서 가장 중요한 것은 특정한 수학적 내용에 대해 학생들이 가지고 있는 일반적인 개념 또는 오개념을 파악하는 것이다. <표 II-2>은 내용과 학생에 대한 지식(KCS)을 측정하기 위한 문항의 예이다(Ball, Hill & Bass, 2005).

<표 II-2> 내용과 학생에 대한 지식(KCS) 측정 문항의 예

다음 문제에 대해 학생들의 답에서 4가지 오류 유형이 나타났다.

$$8 + 4 = \underline{\quad} + 5$$

오류 유형 ①	12
오류 유형 ②	17
오류 유형 ③	답이 없다
오류 유형 ④	1

다음 중에서 학생들이 겪고 있는 어려움에 대해 가장 잘 설명한 것은 무엇인가?
(한 개만 골라라.)

- 기본적인 덧셈을 모른다.
- 덧셈의 교환법칙을 모른다.
- 등호의 의미를 이해하지 못한다.

마지막으로 내용과 교수에 관한 지식(KCT)은 가르치는 것과 수학에 대해 아는 것이 결합된 형태의 지식 영역으로 어떻게 학생들을 위한 수학적 사고에 기초해 가르칠 것인가 또는 어떻게 학생들의 오류를 수정할 것인가와 관련되어 있다. 계획 단계에서는 특정 내용을 지도하기 위해 선택한 교구들의 장단점을 판단할 수 있어야 하며, 특정 내용을 지도하기 위해 적절한 예를 선택할 수 있어야 한다. 실행 단계에서는 선택된 과제와 교구가 학생들의 흥미나 수준에 적합한지 어려워하거나 쉽게 생각할 때에는 어떻게 해야 하는지 등의 수많은 교수학적인 결정을 내려야 한다.

2. 분수 나눗셈에 대한 선행 연구

분수 나눗셈의 의미에 대한 수학적 지식에 관한 대표적인 연구로 Ma(1999)의 연구를 들 수 있다. Ma의 연구는 초등 교사를 대상으로 이루어졌고, 국내에서는 이 연구를 토대로 분수 나눗셈에 적합한 문장제를 만들도록 하는 연구가 예비 초등교사 그리고 학생들을 대상으로 진행되어 왔다.

우선 선도적인 연구인 Ma(1999)의 연구를 살펴보면 미국의 초등교사 23명에게 분수 나눗셈 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 을 식으로 제시하고, 이 식에 적합한 문장제를 여러 가지 만들어 보도록 하였다. 23명 중 16명의 미국 교사들이 만든 잘못된 문장제를 만들고 이 분수나눗셈을 제대로 해석하지 못하고 있다. Ma는 그들이 범한 오류를 ‘ $\frac{1}{2}$ 로 나누기를 2로 나누기로 오해’, ‘ $\frac{1}{2}$ 로 나누기를 $\frac{1}{2}$ 을 곱하기로 오해’, ‘ $\frac{1}{2}$ 로 나누기, 2로 나누기, $\frac{1}{2}$ 을 곱하기를 모두 동일한 것으로 보는 오해’의 세 가지 유형으로 구분하여 분석하였다. 또, 중국 초등교사 72명에게도 똑같은 분수 나눗셈을 제시하고, 그 식에 적합한 문장제를 만들어 보게 한 후, 65명의 중국 교사들이 만든 올바른 문장제를 분석하였다. 특히, 문장제의 유형을 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘곱과 인수 모델’의 세 가지로 나누어 분석하였다.

예비 초등교사를 대상으로 한 분수 나눗셈에 대한 국내의 선행연구를 살펴보면 다음과 같다.

서관석과 전경순(2000)은 우리나라 예비 초등교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식 수준을 ‘ $3 \div \frac{1}{2}$ 의 상황을 설명하는 문장제’를 기술하게 하여 조사하였다. 이에 의하면, 57%의 예비초등 교사들이 부적절한 예를 기술하거나 예를 들지 못했다.

김민경(2003)은 나눗셈 개념에 대한 예비 초등교사의 이해도를 자연수 나눗셈 문장제, 분수 나눗셈 문장제, 자연수÷분수, 나눗셈 알고리즘에 대해 조사하였는데 ‘ $\frac{3}{5}$ 을 $\frac{1}{5}$ 로 나누는 문장제’를 만들라는 과제에 대한 조사 결과 정답율은 54.5%로 나타났다.

박교식, 송상현, 임재훈(2004)은 예비 초등교사 3학년 71명을 대상으로 Ma와 같이 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 에 적합한 문장제를 최대 10개까지 만들게 하고 이 때 나타나는 오류 유형과 문장제 유형을 분석하였다. 이에 의하면 71명 중 문장제를 하나라도 적어낸 학생이 48명이었고, 이들이 만들어 낸 150개의 답안 중 88개(약 67%)가 오류를 포함한 것으로 드러났다.

방정숙과 Li (2008)는 예비 초등교사를 대상으로 분수 나눗셈에 대한 내용 지식 측면과 분수 나눗셈에 대한 교수 내용 지식 측면에서 분석하였는데, 20%의 예비초등 교사들이 분수 나눗셈의 기본적인 의미를 이해하지 못하였고, 68%가 계산 과정에서 왜 제수의 역수를 취해 곱하는 형태가 되는지 설명하였지만 예비 초등교사는 분수 연산 간의 관계 및 대안적인 알고리즘에 대해 매우 취약한 교수 내용 지식을 가지고 있다고 설명하였다.

다음은 초등학생들을 대상으로 분수 나눗셈에 관련된 선행연구이다.

김민경(2009)은 분수 나눗셈에 관하여 초등 6학년생을 대상으로 표현 능력에 대한 연구를 하였는데 2점 만점에 평균 0.76점으로 분수 형태의 제수가 어떻게 피제수를 나누는지에 관해 충분히 이해하지 못함으로써 알고리즘만 기계적으로 적용하는 문제점을 드러내고 있다고 지적하였다.

김경미와 황우형(2011)은 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 초등 5, 6학년생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석에서 분수의 나눗셈 평가 결과 11명의 학생 중에서 등분할 상황의 문제를 맞은 학생은 9명, 측정 상황의 문장제를 맞은 학생은 7명, 곱셈적 비교 상황의 문장제를 맞은 학생은 7명, 곱셈의 역 상황의 문장제를 맞은 학생이 10명, 직사각형 넓이 상황의 문장제를 맞은 학생이 9명, 비율 상황의 문장제를 맞은 학생이 2명으로 등분할의 의미로만 이해하려는 학생들의 사례를 지적하였다.

이와 같은 일련의 연구 결과를 종합해 볼 때, 첫째 분수 나눗셈과 문장제 문제와의 연결은 초등교사, 예비 초등교사 그리고 학생들에게 개념적으로 이해하기 어려운 주제라는 점이다. 둘째, 우리나라의 예비 초등교사, 학생이라는 연구 대상은 달리 하였으나 공통적으로 Ma(1999)의 연구를 토대로 이루어진 계산 절차나 기능과 관련된 일반 내용 지식(CCK)과 적절한 문장제 만들거나 표상과 의미에 관련된 전문화된 내용 지식(SCK)의 연구가 이루어졌다고 볼 수 있다.

본 연구는 연구 대상을 실제로 교육을 받고 있는 6학년 학생과 이 내용을 지도하는 현재 초등 6학년 교사들과 전 학년도에 분수의 나눗셈을 지도한 경험이 있는 교사들로 하였다. 초등교사가 일반 교실 수업 장면에서 분수 나눗셈에 대한 학생들의 활동과 그 결과물에 대한 평가 및 학생들이 제시한 대안이나 비표준화된 수학적 방법의 타당성을 결정하는 과정에 초점을 두어 평가에서 나타나는 교사의 전문화된 내용 지식(SCK)을 조사 분석하였다.

III. 연구방법

1. 연구대상

본 연구에는 초등학교 6학년 29명의 학생이 분수 나눗셈에 대한 적합한 문장제 문제를 만드는 과제에 참여하였으며, 이 문장제 문제를 평가하는데 현재 초등 6학년을 가르치고 있는 초등 교사 8명과 전년도에 6학년을 지도한 교사 2명을 포함하여 모두 10명의 교사들이 참여하였다. 초등 6학년생은 포항시에 소재하는 ○○초등학교에서 1반부터 8반 중 담임의 제비뽑기를 통해 선택되어진 반이다. 담임은 30대 중반의 여교사로 초등사회교육 심화과정을 전공한 교사이며 특별히 수학에 대해 더 많은 시간을 할애하거나 정해진 교육과정 이상을 이수하지 않는 반이다. 이 반이 다른 반과 다른 점이 있다면 문제 풀이를 할 때 반드시 공책을 활용하게 하였으며, 학생은 남학생 16명과 여학생 13명으로 구성되어 있다. 경상북도에서 학기마다 한 번씩 치르는 도학력 교사의 수학과 평균은 문항 25개 중 약 19개로 중간 이상의 수학과에 대한 기초를 갖춘 반이다. 연구 참여 교사들은 학생들과 동일한 초등학교에 근무하고 있다. 이 중 대학교 때 초등수학교육 심화과정을 전공했던 교사는 1명이며, 20대가 2명, 30대가 6명, 40대가 2명이고, 남자 교사가 2명, 여자 교사가 8명이다.

2. 자료수집 및 분석

자료는 문제지를 통해 수집되었는데, 이 문제지 문항은 6학년 1학기 수학 교과서 17쪽에 제시된 내용으로 분

수 나눗셈 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 에 알맞은 다양한 상황의 문장제 문제를 5개 이상 만들어, 각 문장제에 대해 그 답을 구하는 것으로 구성되었다. 이 때, 다양한 상황이란 단순히 상황만 바꾸는 것, 예를 들어 음료수 $\frac{9}{10}$ L, 주스 $\frac{9}{10}$ L, 콜라 $\frac{9}{10}$ L...이 아니라 수학의 여러 영역에서 적용할 수 있는 상황 제시임을 명시하였다. 먼저 분수의 나눗셈에 대해 학습을 마친 6학년 29명을 대상으로 문제지를 주고서 분수 나눗셈 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 에 알맞은 문제를 5개 만들고, 각각 풀이와 답을 구하도록 하였다. 그 후 학생이 작성한 문장제와 풀이 방법을 분석하여 Sinicrope, Mick & Kolb(2002)가 분수 나눗셈의 의미로 제시한 유형을 토대로 분류하였다. 그러나 이들이 제시한 유형 중 ‘사탕 10개를 2명에게 똑같이 나누어 줄 때 1인당 몇 개씩 주어야 하는가’에서 자연수로 등분하는 것에 주목하는 대신 ‘1인당 얼마씩 주어야 하는가에 주목한다면 등분제의 본질을 단위량에 해당하는 양을 구하는 것으로 볼 수 있게 되어 단위비율결정 맥락이 된다(임제훈, 2007). 따라서 본고에서는 ‘단위 비율 결정’을 제외한 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘곱셈의 역’, ‘카테시안 곱의 역’의 네 가지 유형으로 분류하였다. 그런 다음 각 유형에서 문장제 답안을 취사선택하였다. 분수 나눗셈에 대한 학생 활동과 결과물에 대한 평가 및 수학적 방법의 타당성을 결정하는 과정에 초점을 둔 초등 교사의 전문화된 내용 지식(SCK)을 분석하는 것이 본 연구의 목적이므로 취사선택된 답안지는 오답으로 구성하였다. 이 때, 학생 표집상의 문제로 네 가지 유형이 충분히 고르게 나타나지 않는 제한점이 있었다. 분수 나눗셈의 의미가 네 가지 유형으로 재구성된 답안지를 초등 교사 10명에게 각기 5장씩 제공하였고, 답안지를 채점하고 틀린 경우 왜 오답 처리하였는지 부연설명이나 바른 문장제로 수정하도록 하였다. 초등 교사가 채점한 답안지를 바탕으로 교사들이 갖고 있는 분수 나눗셈의 상황을 재현하는 문장제의 구성에 대해 SCK 분석을 한 후 교사들의 채점과 수정에 대한 피드백을 제공하였다.

IV. 결과 및 논의

이 장에서는 학생들의 문장제 문제 구성능력에 대해 “포함제”, “등분제”, “곱셈의 역”, “카테시안 곱의 역”의 네 가지 유형으로 분석한다. 그리고 학생들이 만든 분수 나눗셈의 문장제를 평가하는 동안 드러나는 초등 교사 10명의 전문화된 내용 지식(SCK)을 이 네 가지 유형으로 나누어 분석하고자 한다.

1. 초등학교 6학년생의 문장제 문제 구성 능력

본 연구 참여자 초등학교 6학년생 29명이 나타난 문장제 145개에 대한 문제 구성 능력을 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘곱셈의 역’, ‘카테시안 곱의 역’의 네 가지 유형으로 나누어 보면 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 초등학교 6학년의 분수 나눗셈에 대한 문장제 구성 유형

유형	포함제	등분제	곱셈의 역	카테시안 곱의 역
문항수	116	1	1	27

네 가지 유형 중 ‘포함제’에 해당하는 문항수가 가장 높으며 ‘등분제’와 ‘곱셈의 역’에 해당하는 문항의 수는 ‘포함제’에 비해 매우 적다는 것을 알 수 있다.

분수 나눗셈 식의 문장제 구성에 관한 오답을 분석하면 다음과 같다. 145개 중 ‘포함제’는 17개, ‘등분제’는 1개, ‘곱셈의 역’은 1개, ‘카테시안 곱의 역’은 4개가 문장제 진술에서 오류를 보이고 있다.

포함제의 경우 ‘ $\frac{2}{5}$ 로 나누기를 $\frac{2}{5}$ 를 빼기로 오해’하여 포함제 상황으로 제시하였는데 대표적인 형태는 다음과 같다.

① 한 농부의 땅이 $\frac{9}{10}$ 가 있었습니다. 그런데 친한 친구에게 $\frac{2}{5}$ 를 나누어 주었습니다. 남은 땅은 얼마인가요?

② 콜라 $\frac{9}{10}$ L가 있었는데 그걸 동생에게 $\frac{2}{5}$ L 나누어 따르면 내가 얻을 수 있는 것은? 등

오류를 보이지 않았던 포함제 유형을 좀 더 자세히 분석을 하면 개념적으로는 옳으나 해의 분수 표현이 실제 상황의 답(자연수)과 그대로 일치하는 것과 일치하지 않는 것으로 분류되었다. 또 일치하지 않는 예에서는 분수에 대해 올림을 하거나 내림을 하여 자연수 형태를 답을 제시하였다.

① 해의 분수 표현과 실제 상황의 답이 일치하는 예 :

영민이는 영민이 케이크의 $\frac{9}{10}$ 만큼을 먹었고, 광민이는 광민이 케이크의 $\frac{2}{5}$ 만큼을 먹었다. 두 사람의 케이크는 크기가 같을 때 영민이는 광민이의 몇 배를 먹었습니까?

② 해의 분수 표현과 실제 상황의 답이 일치하지 않는 예

(분수 해의 올림 상황)

우유 $\frac{9}{10}$ L가 있다. 컵에 $\frac{2}{5}$ L씩 나누어 담으려고 할 때, 컵은 몇 개가 필요한가?

풀이 : $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5} = 2\frac{1}{4}$

답 : 3개

(분수 해의 내림 상황)

민우는 이름표를 만들려고 $\frac{9}{10}$ m²의 도화지를 $\frac{2}{5}$ m²의 종이로 자르려고 한다. 적어도 몇 개의 이름표를 만들 수 있을까요?

풀이 : $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5} = 2\frac{1}{4}$

답 : 2개

(나머지를 묻는 상황)
 우유가 $\frac{9}{10}$ L가 있습니다. $\frac{2}{5}$ L씩 나누어 담으면 몇 컵이 되고, 몇 L가 남습니까?
 풀이 : $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5} = 2\frac{1}{4}$
 답 : 2컵, $\frac{1}{4}$ L가 남는다.

카테시안 곱의 역 유형에서는 측정 영역에서 도형의 넓이와 관련하여 문장제 문제를 만들었으며 학생들의 대표적인 반응은 다음과 같았다.

- ① 넓이가 $1\frac{3}{4}$ cm² 평행사변형에서 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}$ cm라면 높이는 얼마일까?
- ② 직사각형이 있는데 넓이가 $1\frac{3}{4}$ cm² 이다. 가로 길이가 $\frac{1}{2}$ cm라면 세로 길이를 구하라. 등

카테시안 곱의 역 유형에서 오류를 보이는 문장제는 다음과 같이 단위에 대한 오류, 나눗셈 상황을 곱셈 상황으로 문장제를 진술하였다.

부피가 $\frac{9}{10}$ m³인 직육면체가 있다. 한 밑면의 넓이가 $\frac{2}{5}$ m²일 때, 높이를 구하여라.
 가로의 길이가 $\frac{9}{10}$ 이고, 세로의 길이가 $\frac{2}{5}$ 라면 넓이를 구하시오.

유형 분류에 제시되었던 등분제는 ‘폐휴지를 $\frac{9}{10}$ t을 $\frac{2}{5}$ 씩 똑같이 나누면 ...’에서 분수로 똑같이 나눌 수 없는 상황을 이용하여 등분제 상황으로 진술하였고, 곱셈의 역의 유형으로 분류한 문장제는 곱셈의 역조작으로서 나눗셈의 관점에서 문장제를 진술해야 하나 주어진 정보 외에 다른 정보가 포함된 문장제를 기술하였다.

이러한 오류가 있는 문장제 진술문들이 교사의 SCK 분석에 이용되었다.

2. 교사의 분수 나눗셈 문장제에 평가에 대한 SCK 분석

가. 포함제

포함제는 주어진 양과 같은 종류의 양으로 나누는 경우에 해당된다. Ma(1999)에 따르면, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 에 적합한 포함제 상황은 ‘ $1\frac{3}{4}$ 안에 포함된 $\frac{1}{2}$ 의 개수 알아내기’ 또는 ‘ $1\frac{3}{4}$ 은 $\frac{1}{2}$ 의 몇 배인지 알아내기’이다.

학생들의 대부분이 포함제에 해당하는 답을 기술하였다. Siebert(2002)는 수 체계 확장에서 오는 인지적 장애의 이유로 분수의 나눗셈을 지도할 때 등분제보다는 포함제 상황으로 지도할 것을 권장하고 있으며 2007 개정 수학과 교육과정에 의거한 현 교과서 6학년 1학기 1단원 분수의 나눗셈에 나타난 문장제 문제를 분석해 보면 문장제 전체 25개 중 18개가 포함제이다. 학생들은 포함제 유형에 대한 경험이 많고 친숙하기 때문에 포함제를 많이 기술한 것으로 분석된다.

학생이 만든 유형 중 포함제에 해당하는 답안지로 선택한 것은 다음과 같다.

콜라 $\frac{9}{10}$ L가 있었는데 그걸 동생에게 $\frac{2}{5}$ L 나누어 따르면 내가 얻을 수 있는 것은?

이 학생은 Ma(1999)가 분석한 오류 유형에서는 제시되지 않은 것으로 ‘ $\frac{2}{5}$ 로 나누기를 $\frac{2}{5}$ 를 빼기로 오해’하여 포함제 상황으로 제시하였다.

초등 교사 10명 중 1명은 잘못된 답안지에 대해 정답으로 채점하였고, 나머지는 모두 학생이 잘못 만든 포함제 상황을 바르게 수정하였다. 그들이 수정하여 제시한 문장제 중 일부이다.

- ① 콜라 $\frac{9}{10}$ L가 있다. 친구들에게 $\frac{2}{5}$ L씩 나누어 준다면 몇 명에게 줄 수 있을까?
- ② 콜라 $\frac{9}{10}$ L가 있다. $\frac{2}{5}$ L씩 똑같이 컵에 나누어 따르면 몇 컵에 나누어 담을 수 있을까?
- ③ 나는 $\frac{9}{10}$ L의 콜라를 마셨고, 동생은 $\frac{2}{5}$ L의 콜라를 마셨다면 나는 동생보다 콜라를 몇 배 더 마신 것인가?

그런데 그들이 만든 포함제 상황의 문장제 중 ③을 제외한 상당수가 개념적으로는 옳으나 해의 분수 표현이 실제 상황의 답(자연수)과 그대로 일치하지 않는 것이었다. $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 의 계산 결과가 자연수가 아닌 분수가 되어 $\frac{9}{4}$ 라는 것을 미처 생각하지 않은 채 문장제를 만들었다. 지도서에 제시된 문장제는 ‘ $\frac{9}{10}$ m짜리 철사를 한 사람에게 $\frac{2}{5}$ m씩 나누어준다면 몇 명에게 나누어줄 수 있습니까? 답 2명’으로 제시하고 있어 자연수 나눗셈의 포함제 구조를 분수 나눗셈의 포함제 구조로 확장하여 포함제를 만들고 있지만, 몫이 이산량으로 주어지는 경우 그것이 자연수이어야 한다는 것을 간과하고 있는 것으로 보인다.

포함제 유형 평가에 대한 피드백을 받은 교사들의 반응은 다음과 같았다.

첫째, ‘ $\frac{2}{5}$ 로 나누기를 $\frac{2}{5}$ 를 빼기로 오해’하여 맞다고 한 교사에게 왜 맞다고 평가를 했는지 질문을 하니 학생의 문장제 문장 중 ‘나누어’라는 것이 눈에 띄어 분수의 나눗셈으로 간주하였다고 했다. 문장제에서 ‘나누어’라는 말을 뺀 후에도 여전히 분수의 나눗셈 상황인지에 대해 생각해보도록 독려를 했으며, 그 문장 상황에서는 나누기가 아니라 빼기로 자신이 잘못 채점하였음을 알게 되었다.

둘째, 교사들의 개념적으로는 옳으나 해의 분수 표현이 실제 상황의 답(자연수)과 그대로 일치하지 않는 수정한 문장제에 대해서는 두 가지 측면을 따로 고려해 볼 수 있음을 제시하였다. 즉, 분수 답이 실제 답과 그대로 일치하는 상황과 그렇지 않은 상황이 존재하며, 각각에 해당하는 문장제 진술을 제공하였다. 그러나 교사들의 대부분은 ‘콜라 $\frac{9}{10}$ L를 $\frac{2}{5}$ L씩 나누는 상황’ 즉, 실제 상황의 답과 분수 표현이 그대로 일치하지 않으나 이러한 문장이 더 친숙하다는 반응을 보였다

나. 등분제

등분제는 주어진 양을 그 양과는 다른 종류의 양으로 나누는 경우에 해당한다. Ma(1999)에 따르면, 분수 나눗셈 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 에 적합한 등분제 상황은 ‘어떤 수의 $\frac{1}{2}$ 이 $1\frac{3}{4}$ 이 되는 그 어떤 수 알아내기’이다. 그러나 배종수(2002)에 따르면 포함제의 경우는 나머지가 나타날 경우에도 확대 적용이 가능하지만 등분제의 경우는 나머지가 생길 경우 자연수의 범위에서는 의미를 갖지 못하므로 나누는 수가 분수인 분수의 나눗셈의 경우에는 등분제를 생각할 수 없다. 따라서 Ma와는 달리 분수로 똑같이 나누는 관점으로는 지도할 수 없다는 견해를 갖고 있다.

학생이 만든 유형 중 등분제에 해당하는 답안지로 선택한 것은 다음과 같다.

한 학교에 폐휴지를 $\frac{9}{10}$ t를 모았다. 이 폐휴지를 $\frac{2}{5}$ 씩 똑같이 나누려고 한다. 몇 t씩 나누어야 하는가?
 풀이 : $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5} = 2.25L$

이 학생은 나누는 수가 자연수인 경우 2등분, 3등분이라는 말이 잘 어울리지만 분수인 경우 $\frac{2}{5}$ 등분한다는 말은 일상적으로 성립하지 않음에도 불구하고 배종수(2002)가 언급한 바와 같이 분수로 똑같이 나누라는 형태의 문장제를 기술하였다.

그러나 초등 교사 10명 중 4명은 잘못된 답안지에 대해 정답으로 채점하였고, 1명은 문장제에 대한 잘못된 지적하지 않고 풀이방법에 대해 잘못 계산한 값을 지적하며 2.75t으로 수정하였고, 10명 중 5명만 학생이 잘못된 등분제 상황을 다음과 같이 수정하였다. 이는 Sinicrope, Mick & Kolb(2002)는 예비 초등교사들 대부분이 나눗셈을 등분제로 이해하기 때문에 포함제의 상황을 잘 연결시키지 못한다고 하였는데, 평가에 있어 초등 교사 역시 분수 나눗셈을 개념적으로는 옳으나 의미상으로는 문제점을 가지고 있다고 볼 수 있다. 그들이 수정하여 제시한 문장제 중 일부이다.

① $\frac{9}{10}$ t의 $\frac{2}{5}$ 는 $\frac{5}{25}$ t이므로 식이 성립하지 않을 것 같구나. 이와 비슷한 문제를 만들려면, 한 학교에서 $\frac{9}{10}$ t의 폐휴지를 모았다. $\frac{2}{5}$ t씩 나누어 자루에 담으면 몇 자루가 나올까? 가 좋겠구나.

② $\frac{2}{5}$ 씩 똑같이 나누다? 이 표현이 잘못 되었던 것 같네. 한 학교에 폐휴지 $\frac{9}{10}$ t을 모았다. $\frac{2}{5}$ t씩 똑같이 나누어 담는다면 몇 봉지에 나눌 수 있을까?

그러나 제시된 문장제는 모두 포함제였으며, 앞서 언급하였듯이 교과서에 72%가 분수:분수를 포함제 상황으로 진술되어 교사에게도 포함제가 친숙한 것으로 보인다. 따라서 Ma(1999)가 제시한 등분제 상황은 ‘어떤 수의 $\frac{1}{2}$ 이 $1\frac{3}{4}$ 이 되는 그 어떤 수 알아내기’와 같은 형태의 예제가 교과서와 수학 익힘책에 언급될 필요성이 있다.

등분제 유형 평가에 대한 피드백을 받은 교사들의 반응은 다음과 같았다.

첫째, 오류를 맞다고 채점한 4명의 교사들은 문제 상황과 관계없이 주어진 문제를 그대로 식으로 나타내면 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 가 되므로 오류가 없다고 생각하였다. 그러나 분수인 경우 $\frac{2}{5}$ 등분한다는 말 자체가 어울리지 않기 때문

에 $\frac{2}{5}$ 씩 똑같이 나눈다는 문장제 진술 자체가 잘못되었다고 하였다. 한 교사는 6학년에서 나오는 분수의 나눗셈은 모두 분수와 분수 사이의 나눗셈이기 때문에 ‘등분제 유형의 문장제는 만들 수 없겠다.’라는 반응을 보였다. 둘째, 분수의 나눗셈의 경우 등분제 유형을 만들 수 없다는 교사와 포함제 유형으로 문장제 문제를 만든 나머지 교사에게 등분제 유형으로서 ‘어떤 수의 $\frac{2}{5}$ 가 $\frac{9}{10}$ 가 되는 그 어떤 수 알아내기’를 제시하였다. 이러한 유형은 문장제보다는 미지수가 포함된 수식에서 본 유형이라고 설명을 덧붙였다.

다. 곱셈의 역

곱셈의 역 상황은 곱셈의 역조작으로서 나눗셈하기를 의미한다. 예를 들어 나눗셈 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 의 경우 이용률 (2001)에 따르면 이 문제는 ‘ $\frac{2}{5}$ 에 얼마를 곱하면 $\frac{9}{10}$ 이 되는가?’ 또는 ‘ $\frac{2}{5}$ 의 몇 배가 $\frac{9}{10}$ 이 되는가?’이다. 학생이 만든 문장제중 곱셈의 역에 해당하는 답안지로 선택한 것은 다음과 같다.

$\frac{9}{10}$ m를 가는데 10분이 걸린다. $\frac{2}{5}$ m를 갈려면 몇 분이 걸리는가?
 풀이 : $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5} \times 10 = 4\frac{4}{9}$ 분

물론 정확하지는 않아 오답으로 분류되었지만 이러한 유형을 제시한 학생은 1명으로 145문항 중 단 1문항이었다. 이 역시 2007 개정 수학과 교육과정에 의거한 현 교과서 6학년 1학기 1단원 분수의 나눗셈에 나타난 문장제 문제를 분석해 보면 문장제 전체 25개 중 2개로 교사나 학생에게 익숙하지 않은 유형이다. 교과서에 보다 많은 유형을 제공할 필요성이 있다.

초등 교사 10명 중 3명은 잘못된 답안지에 대해 정답으로 채점하였고, 바르게 채점한 7명은 3명은 곱셈의 역에 해당하는 상황으로 학생의 오답에 대해 문장을 수정하였고, 4명은 문장제를 고치기보다는 비례식으로 문제를 해결해야 하기 때문에 바르지 않다고 하였다. 그들이 제시한 문장제 유형은 다음과 같다.

① $\frac{2}{5}$ m를 가는데 1분이 걸린다. $\frac{9}{10}$ m를 가려면 몇 분이 걸릴까?

이 유형에서 교사들의 곱셈의 역조작으로서 나눗셈에 관한 문장제를 만드는 전문화된 내용 지식(SCK)과 비례식을 이용해서 알고리즘적으로 해결하는 일반 내용 지식(CCK)을 동시에 볼 수 있었다.

곱셈의 역 유형 평가에 대한 피드백을 받은 교사들의 반응은 다음과 같았다.

곱셈의 역에서 주어진 분수 나눗셈 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 을 고려하지 않은 잘못된 답안지를 정답으로 채점한 3명의 교사는 학생들이 만든 문제와 풀이 및 답이 맞았기 때문에 오류가 일어났다. 따라서 처음의 주어진 문제의 상황에 맞는지에 대한 점검의 필요성을 인식했다.

자연수에서 곱셈과 나눗셈을 관계를 가르치듯이 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 는 ‘ $\frac{2}{5}$ 의 몇 배가 $\frac{9}{10}$ 이 되는가?’와 같이 분수에서도 곱셈과 나눗셈의 관계를 다루어 준다면, 이러한 유형의 문장제는 진술하는 데 도움이 될 것이라 하였다.

라. 카테시안 곱의 역

양과 양의 곱 또는 차원과 차원의 곱은 동수누가나 배와는 구분되는 상황으로, 카테시안 곱의 상황에 해당된다. 예를 들어 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 에 적합한 카테시안 곱의 역은 ‘넓이가 $1\frac{3}{4}$ cm²인 직사각형의 땅이 있는데 이 땅의 가로 길이가 $\frac{1}{2}$ cm일 때 세로의 길이 구하기’이다. 제 7차 교육과정과 2007 개정 교육과정의 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서를 분석하면 제 7차 교육과정에서 카테시안 곱의 역 상황에 해당하는 문장제가 8.6%이었지만(방정숙·이지영, 2009), 2007 개정 교육과정에서는 20%로 카테시안 곱의 역에 대한 문장제 제시 빈도가 높아졌다. 이에 학생들의 카테시안 곱의 역 상황에 해당하는 문장제로 직사각형의 넓이 외에 밑넓이와 높이 관계를 통하여 기둥의 부피를 구하는 문제, 삼각형 넓이, 평행사변형의 넓이 등 교과서에서 배운 것을 활용하여 문제를 만들었다.

학생이 만든 문장제 중 곱셈의 역에 해당하는 답안지로 선택한 것은 다음과 같다.

부피가 $\frac{9}{10}$ m³인 직육면체가 있다. 한 밑면의 넓이가 $\frac{2}{5}$ m²일 때, 높이를 구하여라.

초등 교사 모두 넓이의 단위만 m가 아닌 m³로 수정하면 맞다고 채점을 한 것으로 보아 이 유형에서는 교사들이 카테시안 곱의 역에 대한 문장제를 평가하는 전문화된 내용 지식(SCK)이 있다고 볼 수 있다.

카테시안 곱의 유형 평가에 대한 피드백을 받은 교사들의 반응은 다음과 같았다.

먼저, 분수 나눗셈에 대한 다양한 유형의 문장제가 있으므로 해설서의 목표 진술에서 5학년 때는 등분제, 6학년 때는 포함제라는 말이 빠져야겠다는 반응을 보였다. 특히, 카테시안 곱의 유형이라는 말 자체가 어렵기 때문에 친숙하지 않았지만 예제를 통해 교과서에서 많이 접했음을 언급하였다. 그리고 단위가 물론 잘 못 되었지만 대부분 넓이, 한 변의 길이 그리고 나머지 한 변의 길이를 구하라는 형태가 아닌 부피를 이용한 문장제를 만든 학생의 생각에 대해 기특하다고 하였다

V. 결론 및 제언

본 연구에는 초등학교 6학년 29명의 학생이 6학년 1학기 수학 교과서에 제시된 분수 나눗셈 $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$ 에 대한 적합한 문장제 문제를 만드는 과제에 참여하였고 이 문장제 문제를 평가하는데 현재 초등 6학년을 지도하고 있거나 지도했던 10명의 교사들이 참여하였다. 교사들은 학생들이 제시한 문장제 문제를 제공받아 평가와 수정을 하였으며, 이러한 과정 동안 드러나는 전문화된 교사 지식(SCK)을 분석하였다. 본고에서는 Sinicrope, Mick, Kolb(2002)가 분수 나눗셈의 의미로 제시한 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘곱셈의 역’, ‘카테시안 곱의 역’의 네 가지 유형에 초점을 두어 분석하였다. 연구 결과를 바탕으로 얻을 수 있는 시사점은 다음과 같이 요약된다.

첫째, 초등 교사들은 학생들의 오답을 수정하는 동안 분수÷분수 상황에 대하여 자연수 나눗셈의 포함제 구조를 분수 나눗셈의 포함제 구조로 확장하여 포함제를 만들고 있지만, 몫이 이산량으로 주어지는 경우 그것이 자연수이어야 한다는 것을 간과하고 있어 개념적으로는 옳으나 해의 분수 표현이 실제 상황의 답(자연수)과 그대로 일치하지 않는 것이었다. 교과용 지도서 역시 이러한 형태의 풀이와 답을 제공하고 있어 교사들이 평가함에 있어 오류를 범할 수 있도록 하고 있다. 따라서 교과용 지도서에 ‘분수÷분수’에 대한 문장제를 만들고 풀이를 하

도록 유도하는 문제에 대해서 ‘...의 ...배’ 형태의 포함제 문장제를 제시할 필요가 있다.

둘째, 초등교사의 경우 포함제와 등분제에 대한 개념이 다소 혼동을 보이고 있으며, 학생의 오답에 대해 ‘분수÷분수’를 모두 포함제 형태로 수정하는 것으로 보아 ‘분수÷분수’에 대한 등분제 형태의 문제 진술 및 두 연산 간의 공통점과 차이점을 명확하게 인지할 수 있도록 해야 할 것이다.

셋째, 학생들의 문장제 구성에서 포함제나 카테시안 곱의 역에 대한 유형은 상대적으로 많았으나 등분제 유형과 곱셈의 역 유형이 각 하나인 것으로 나타났다. 이것은 분수 나눗셈을 다루는 교과서 활동의 경험이 중요하게 작용하였다. 학생들이 네 가지 유형에 대해 모두 인지하고 있어야 할 것은 아니지만 수학적 사고의 다양성을 위해 단원 전반에 걸쳐 다양한 맥락의 문제 상황이 제시되어야 할 필요가 있어 보인다.

마지막으로, 곱셈의 역작용을 활용하여 문장제를 만드는 전문화된 내용 지식(SCK)이 미흡하게나마 있긴 하다. 초등 교사들에게 학생들이 만든 문장제에 대한 평가를 하도록 하였으나 학생들의 문장제 풀이 방법에 대해 더 초점을 두으로써 학생의 풀이에 대해 단순히 수정하는 정도에 그쳤다. 이것으로 보아 이들 교사들의 경우 분수 나눗셈의 의미에 초점을 둔 평가가 아니라 알고리즘에 초점을 둔 평가를 한 것으로 판단된다. 따라서 계산의 수정과 풀이 방법에 대한 알고리즘을 제시하는 일반 내용 지식(CCK)를 넘어서서 학생들에게 틀린 이유와 그에 대한 올바르게 의미 있는 이해가 가능하도록 하는 설명을 제시할 수 있는 전문화된 내용 지식(SCK)을 쌓을 필요가 있다고 본다. 이를 위해 이러한 지식을 예시하는 교사용 지도서의 개발과 교사교육 프로그램이 필요하다고 본다.

참 고 문 헌

- 곽주철·류희수 (2008). 평면도형에 대한 교사의 PCK와 수업 실제의 비교 분석. 학교수학, **10(3)**, 423-441.
- 교육과학기술부 (2009). 2010년 주요업무 계획발표.
http://curri.mest.go.kr/me_kor/news/notice/broadcast/1261079_11163.html에서 인출.
- 교육과학기술부 (2011). 수학 지도서 6-1. 서울: 대한교과서주식회사.
- 김경미·황우형 (2011). 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **50(3)**, 337-354.
- 김민경 (2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. 학교수학, **5(2)**, 223-240.
- 김민경 (2009). 초등학생의 분수 이해 분석: 6학년의 분수 개념 및 분수 나눗셈을 중심으로. 한국학교수학회논문집, **12(2)**, 151-170.
- 김상룡 (2004). 예비교사의 초등수학 내용지식에 관한 연구. 대구교육대학교 논문집, **39**, 169-186.
- 박교식·송상헌·임재훈(2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. 학교수학, **6(3)**, 235-249.
- 방정숙 (2002). 수학교사의 교수방법에 영향을 미치는 요소에 관한 소고. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **47(3)**, 291-310.
- 방정숙·Li, Y. (2008). 예비 초등교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **47(3)**, 257-271.
- 방정숙·이지영 (2009). 사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석. 학교수학, **11(1)**, 71-91.
- 배중수 (2002). 초등수학교육내용지도법. 서울: 경문사.
- 서관석·전정순 (2000). 예비 초등교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사 교육적 관점. 대한수학교육학회지 <수학교육학 연구>, **10(1)**, 103-113.

- 송근영·방정숙 (2008). 소수연산에 관한 예비 초등교사의 교수내용지식 분석. 한국초등수학교육학회지, **12(1)**, 1-25.
- 안선영·방정숙 (2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제 분석. 대한수학교육학회지 <수학교육학 연구>, **16(1)**, 25-41.
- 이용률 (2001). 지도내용의 핵심과제 99. 서울: 정문사.
- 이종욱 (2003). 예비 초등교사의 덧셈과 뺄셈에 관한 교과 지식과 교수학적 지식. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **16**, 331-344.
- 이종욱 (2005). 초등교사의 분수 지식 실태 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **44(1)**, 67-85.
- 임재훈 (2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. 학교수학, **9(1)**, 13-28.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. Elementary School Journal, **90(4)**, 449-466.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade and how can we decide? American Educator, 14-46.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? Journal of Teacher Education, **59(5)**, 389-407.
- NCTM (2000). Principle and standards for school mathematics, VA: The Author. 류희찬·조완영·나귀수·김남균·방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 기준. 서울: 정문사.
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 신현용·승영조 공역(2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. 서울: 승산.
- Olanoff, D. E. (2011). Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of multiplication and division of fractions. Mathematics-Dissertations and Thesis, Paper 64. Syracuse University.
- Shulman, L. (1987). Knowing and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Education Review, **57(1)**, 1-22.
- Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of fraction. In Litwiller, B., & Bright, G. (Eds), Making sense of fractions, ratios and proportions: 2002 yearbook. Reston, VA: NCTM, 247-256.
- Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), Making sense of fractions, ratios and proportions. Reston, VA: NCTM, 153-161.
- Tompson, A. (1992). Teacher's belief and conceptions: A synthesis of the reasearch. In D. A. Grouws(ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning,(pp. 127-146). NY: Macmillan.

Analysis of Elementary Teachers' Specialized Content Knowledge(SCK) for the word problems of fraction division

Kang, Young-Ran

Yugang elementary school, Pohang Korea, 790-885

E-mail : yr3027@hanmail.net

Cho, Cheong Soo

Department of Mathematics Education, Yeungnam University, Gyungsan, Korea, 712-749

E-mail : chochs@ynu.ac.kr

Kim, Jin Hwan[†]

Department of Mathematics Education, Yeungnam University, Gyungsan, Korea, 712-749

E-mail : kimjh@ynu.ac.kr

Ball, Thames & Phelps(2008) introduced the idea of Mathematical Knowledge for Teaching(MKT) teacher. Specialized Content Knowledge(SCK) is one of six categories in MKT. SCK is a knowledge base, useful especially for math teachers to analyze errors, evaluate alternative ideas, give mathematical explanations and use mathematical representation.

The purpose of this study is to analyze the elementary teacher's SCK. 29 six graders made word problems with respect to division fraction $9/10 \div 2/5$. These word problems were classified four sentence types based on Sinicrope, Mick & Kolb(2002) and then representative four sentence types were given to 10 teachers who have taught six graders. Data analysis was conducted through the teachers' evaluation of the answers(word problems) and revision of students' mathematical errors.

This study showed how to know meanings of fraction division for effective teaching. Moreover, it suggested several implications to develop SCK for teaching and learning.

* ZDM Classification : F42

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

* Key Words : fraction division, word problem, MTK, SCK.

[†] Corresponding author