대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 4, 785 ~ 799. Dec 2013

중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교수 · 학습 자료의 개발 및 적용: 쓰나미를 소재로

서 지 희* · 윤 종 국** · 이 광 호***

본 연구는 수학적 모델링 수업이 수학 영재 학생들에게 문제해결의 기회를 제공하고 수학적 모델링 활동을 통해 다양한 수학적 사고력을 발전시킬 수 있다는 가정 하에 중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교수 · 학습 자료를 개발하였다. 개발된 교수 · 학습 자료를 적용하여 사례연구를 통해 수학적 모델링의 단계별 활동과정을 살펴보고 각 단계에서 어떠한 수학적 사고능력이 나타나는지 분석하였다. 수학적 모델링 과정에서 다양한 수학적 사고능력이 나타났는데 문제를 이해하는 실세계 탐구과정에서는 정보의 조직화 능력이, 상황모델을 개발하는 과정에서는 직관적 통찰능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추론 능력, 반성적 사고 능력이 나타났다. 수학모델 개발과정에서는 수학적 추상화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추론 능력, 반성적 사고가 나타났으며 모델적용 과정에서는 일반화 및 적용 능력과 반성적 사고가 나타났다. 모델링 수업이 진행됨에 따라 반성적 사고능력이 더 많이 나타나는 것을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

현대사회는 '지식'이 생산의 중요 요소가 되는 지식정보기반사회로 지식을 단순 암기하기 보다는 주어진 지식을 활용하여 문제를 해결하는 능력을 요구하게 되었다. 지식정보기반사회에 대처하기 위하여 새로운 지식을 창조할 수 있는 인재육성을 위한 교육패러다임이 대두되고 있으며 이러한 교육패러다임에 맞춰 평등성에서 수월성으로, 평준화에서 개별화로, 전통에서 혁신으로 교육이 변화하고 있다.

이러한 변화에 발맞춰 우리나라에서는 2002년 5개년 영재교육진흥종합 계획에 따라 전국적으로 각 지방자치 단체에 과학영재 교육원을 설치하게 되었으며, 현재까지 운영하고 있다. 교육과학기술부(2007)에 따르면 영재교육은 지식정보기반사회에서 가장 요구되는 창의적 · 생산적 문제해결력을 최대로 자극 · 신장해야 하며, 이러한 능력을 계발할 수 있는 프로그램을 마련하여 실시해야 하고, 학생 스스로 문제를 탐구하고 문제해결 방법을 모색해 갈 수 있는 능력과 태도를 함양시켜 주어야 한다고 하였다.

수학적 모델링은 실세계 맥락을 탐구하고 실세계 맥락을 단순화하면서 비형식적으로 상황을 모델화하고, 상황모델을 수학구조와 관계에 따라 조직하여 수학모델을 만든 후에 수학모델을 실세계 맥락에 반영하여 해석, 수정, 정교화 하여 일반화 가능한 모델을 개발하는 단계를 거치는 학습 과정으로 학생들은 어떻게 목표 상태에 도달해야하는지 이해해야할 뿐만 아니라 목적과 주어진 정보를 이해해야만 문제를 해결할 수 있

* 한국교원대학교 대학원, lsjj48@naver.com
** 한국교원대학교, jgyun69@knue.ac.kr
*** 한국교원대학교, paransol@knue.ac.kr (교신저자)

다(Lesh, R., & Zawojewski, J. 2007). 따라서 수학적 모델링 수업을 통해 영재 학생들은 스스로 문제를 탐구하고 문제 해결 방법을 모색해 나갈 수 있다. 신은주, 권오남(2001)에 따르면 모델링 학습은 모델화 된 상황의 복잡성을 이해하여 단순화 시킬 수 있고, 상황으로부터 현실화된 모델을 만들고, 다양한 수학적 표현을 사용하여 수학적 모델을 구성하고 해결한 후 해가 가진 잠재적 의미를 인식할 수 있게 해주기 때문에 수학적 모델링 수업은 영재학생들의 수학적 사고능력을 길러주는데 좋은 수업방향을 제시할 수 있다고 하였다.

본 연구에서 모델링 수업의 소재로 쓰인 쓰나미는 다양한 수학적 문제해결을 요구하는 내용을 포함하고 있으며 최근 2004년 인도네시아, 2011년 일본에서 쓰나미가 발생하여 쓰나미에 대한 관심이 높아지고 있다. 따라서 학생들의 흥미를 유발할 뿐만 아니라 무늬만 실세계 상황이 아닌 자연재해라는 진짜 실세계 상황을 제시할 수 있다. 이에 따라 본 연구에서는 쓰나미 재난 상황을 소재로 수학적 모델링 교수·학습 자료를 개발하였고, 모델링 수업이 영재 학생들의 수학적 사고능력을 확장 또는 발전시키는 기회를 제공하는지 알아보고자 한다. 이를 위하여 질적 사례연구 방법으로 중학교 3학년 수학 영재학생들의 수학적 모델링 활동 과정을 살펴보고 모델링 활동에서 영재 학생들의 수학적 사고능력이 어떻게 나타났는지 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학 영재아

수학 영재아에 대한 정의는 각 연구마다 다소간 차이가 있다. 한국교육개발원(1996)은 수학 영재를 '수학 영역에서 뛰어난 업적을 이루었거나 이룰 가능성이 있는 사람으로 정규 학교 프로그램 이상의 교육프로그램과 서비스를 필요로 하는 사람'으로 정의한다. 또한 송상헌(1996)은 수학영재아를 수학적 영재성을 가지고 수학분야에서 탁월한 성취를 보이고 있거나 보일 가능성이 있는 자라고 정의하였으며, 여기서 '수학적 영재성'이란 수학에 대한 기초 지식을 배경으로 수학 문제를 해결하고자 하는 정의적인 내/외적 성향이 수학적 사고 기능과 긍정적으로 조화롭게 작용하여 특별한 수학적 과제를 수행해 낼 수 있는 잠재적 가능성을 말한다.

본 연구에서는 이를 바탕으로 종합하여 수학 영재아를 수학 영역에서 능력이 평균 이상인 자들로 학업 성적이 뛰어나고 창의적 문제 해결력이 뛰어난 학생으로 특별한 수학 프로그램을 필요로 하는 사람이라고 하였다.

2. 수학영재 교육을 위한 교수·학습 모형

영재 교수·학습 모형은 영재 교육 프로그램을 구체적으로 설계할 수 있는 이론적인 틀을 제공하는데 도움이 된다.

Renzulli의 심화학습 3단계 모형은 가장 많이 사용되는 모형으로, 1단계 '일반적 탐색 활동', 2단계 '소집단 단위의 학습 활동', 3단계 '개인 또는 소집단 단위의 문제해결 및 연구 활동'으로 구성된다. 또한 Purdue의 3단계 심화학습 모형은 창의성 신장에 초점을 두며 제 1단계는 교사주도하에 이루어지며 기본적인 수렴적, 확산적 사고력 계발에 중점을 둔다. 제 2단계는 창의적 문제해결력의 개발 단계로서 창의적 사고기법, 창의적 문제해결(CPS) 모형, 미래문제의 해결, 정신 오디세이 등이 포함된 좀 더 복합적이고 실질적인 전략과 체제에 중점을 둔다. 제 3단계는 독립적인 연구 기술의 개발을 목표로 문제의 정

확한 정의, 자료 수집, 결과 해석, 창의적인 결과 전달법 고안 등에 영재아들이 참여한다.

한국교육개발원에서는 학습자의 창의적인 문제해결력 향상을 목표로 Parnes(1988)의 창의적 문제해결모형, Treffinger(1975)의 자기 주도적 학습모형, Renzulli(1977)의 3부 심화학습모형을 바탕으로 주제중심의 프로젝트 형태의 학습과 고급화, 세계화 추세에 적응 할 수 있는 자기 주도적 학습능력의 신장 방안, 학생들이 의식적으로 자신의 시간과 자원을 효율적으로 사용할 수 있도록 자신의 학습 과정을 계획, 점검, 평가할 수 있는 내용, 개방적 활동을 위한 비구조화 되고 덜 정의된 내용, 활동과 과정 중심적인 내용을 제시하고 있다(한국교육개발원, 1997). 이러한 교수·학습 모형들에 바탕으로 두고 본 연구에서 실시할 수 있는 프로그램을 개발하였다.

3. 수학적 모델링

수학적 모델링에 관해 일치한 견해는 아직 없으나 국내에서 가장 많이 사용되는 정의를 학자별로 소개하고자 한다. Lesh 와 Lehrer(2003)는 모델링을 특수한 상황에서 특수한 목적을 위하여 표현을 발전시키는 과정으로 테스트와 수정(revision)의(분류하고 통합하면서 점차 이해하며, 수정, 개선, 거절되면서 기술되고 설명되어지는) 반복적인 사이클을 거치는 과정으로 정의하였다.

NCTM(1991)에서는 현상의 특징을 가늠하게 하는 수학적인 구조를 수학적 모델이라고 하였으며 이러한 모델을 고안해 내는 4단계의 과정을 수학적 모델링이라고 정의하였다. 1단계에서는 현상을 관찰하고 문제 상황을 서술하며 문제에 영향을 주는 중요한 요소(변수, 모수)를 찾아내고, 2단계에서는 요소들 사이의 관계를 추측하고 그 관계들을 수학적으로 해석하며, 3단계에서는 모델에 적절한 수학적인 분석을 하며 4단계에서는 수학적 결과를 얻고 실제 상황에 결과를 적용하여 해석하고 결론을 내린다.

김수미(1993)는 수학적 모델링 과정을 다음의 6 단계로 정리하였다.

1) 문제 이해 단계 : 제시된 문제를 읽고 이해하는 단계이다. 이 단계에서 구하고자 하는 것과 주어진 것들을 확인한다.
2) 문제의 이상화 단계 : 실세계 상황 문제에서 중요한 특성을 찾는다. 현실 문제에서 유용한 요소를 추출하여 문제를 단순화하여 정확하고 간결한 형태로 표현한다. 상황을 구조화하고, 고려할 측면과 질문하고 있는 것을 명확하게 하는 것이 필요하며 이 단계에서 나타난 결과가 실제 모델이다.
3) 수학적 모델 형성 단계 : 실제 모델을 수학적 모델로 바꾸는 단계이다. 실제 모델에서의 일상용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바뀌는 단계로 비수학적 상황에서의 일상적인 질문들이 수학적 질문들로 바뀌게 된다.
4) 수학적 추론 단계 : 수학적 방법을 이용하여 수학적 결과와 결론을 도출한다. 즉, 형성된 수학적 모델에 수학적 방법과 기술(추론, 분석, 풀이, 평가 등)을 사용하여 모델에 근거한 결론을 유추한다.
5) 재해석 단계 : 앞 단계에서 추론된 결과를 원래 문제 상황과 연관시켜서, 그 상황의 결과와 결론으로 해석한다.
6) 실제와의 비교 : 앞 단계에서 만약, 수학적 결론이 상황에 적합하지 않다면, 모델 자체를 수정한다. 즉, 1-5단계를 다시 되풀이해야 하는데 반드시 순서대로 할 필요는 없다. 가능하면, 다른 모델과도 비교하고, 이미 확립되어 있는 이론과 연결 지어 봄으로써 모델을 평가한다.

신은주(2005)는 모델링 활동 과정을 학생들이 자신의 경험을 기반으로 하여 실세계 맥락을 탐구하는 실세계탐구과정, 실세계 탐구과정에서의 사고를 기반으로 하여 실세계 맥락을 단순화하면서 비형식적인 상황모델을 개발하는 상황모델 개발과정, 상황모델에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하여 수학모델을 개발하는 수학모델 개발과정, 수학모델을 실세계 맥락에 반영하여 해석하고, 수정과 정교화를 거쳐 일반화 가능한 모델을 개발하는 모델적용 과정으로 규정한다.

이상의 수학적 모델링에 대한 여러 학자들의 다양한 정의 중 본 연구에서는 김수미(1993)와 신은주(2005)의 수학적 모델링 과정을 본 연구에 맞게 단계는 신은주(2005)의 모델링 과정 4단계로 정의하였고, 각 모델링 단계의 활동내용은 김수미(1993)를 따랐다.

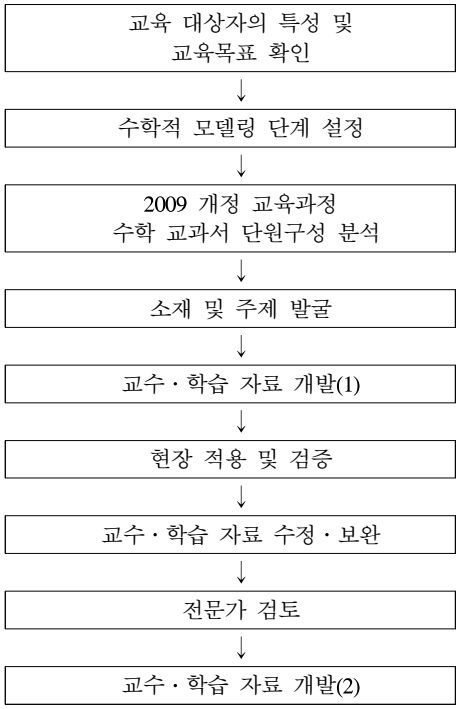
Ⅲ. 방법 및 절차

본 연구는 중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교수·학습 자료를 개발하고 개발된 자료를 적용하여 학생들의 수학적 모델링 활동과정과 활동과정에서 나타난 수학 영재 학생들의 수학적 사고능력을 분석하였다.

1. 수학적 모델링 교수·학습 자료 개발

가. 연구 절차

본 연구는 중학교 수학영재 학생들을 위한 수학적 모델링 프로그램을 개발하기 위하여 최종현(2004)과 백은정(2000)의 개발 절차를 수정·보완하여 다음과 같은 절차로 이루어졌다.



[그림 Ⅲ-1] 교수·학습 자료 개발 절차 모형

나. 수학적 모델링 과정의 단계 설정

본 연구에서는 수학적 모델링 과정을 실세계 탐구 과정, 상황모델 개발과정, 수학모델 개발과정, 모델적용 과정의 4단계로 제시하였다.

1) 실세계 탐구과정 : 실세계 문제 상황을 제시하여 학생들이 문제를 읽고 이해하는 활동이 이루어지며 구하고자 하는 것과 주어진 것들을 확인하는 과정이다. 실세계 문제는 현실세계를 반영하고 학생들이 흥미 있어할만한 내용으로 구성하였다.
2) 상황모델 개발과정 : 실세계 상황 문제에서 중요한 특성을 찾아 상황을 구조화하고, 고려할 측면과 무시되어야 하는 것에 대한 이유들이 언급되어야하며 상황모델을 개발하는 활동이 이루어진다. 이 단계에서는 먼저

개인이 상황모델을 개발하도록 하고 그 뒤 모둠별 토론을 통해 모둠별 상황모델을 개발하도록 프로그램을 구성하였다.

3) 수학모델 개발과정 : 상황모델을 수학모델로 바꾸는 단계이다. 상황모델에서 사용한 일상용어와 개념을 기호와 표현으로 바꾼다. 즉, 비수학적 상황에서의 일상적인 질문들이 수학적 질문들로 바뀌게 되는 단계이다.

4) 모델적용 과정 : 수학모델을 적용하여 수학적 결과와 결론을 도출하고 이를 실세계 문제 상황에 연관시켜 해석하는 활동이 이루어진다. 또한 수학모델은 현실세계에 적용할 수 있는 일반화 가능한 모델로 개발하도록 하였다.

2. 사례연구

가. 연구 대상

본 연구는 원주교육지원청 영재 교육원에 입학하여 영재프로그램에 참여하고 있는 중학교 3학년 수학영재학생 3명을 대상으로 선정하였다. 수학적 모델링 활동에서는 의사소통이 이루어지는 상호작용이 중요한 역할을 한다. 따라서 소그룹 활동을 통해 의사소통이 이루어지고 연구자가 이를 심도 있게 연구하기 위하여 연구 대상자를 3명으로 선정하였다.

나. 연구 방법

본 연구는 2012년 7월 대전 서부교육지원청 영재교육원에 재학 중인 중학교 3학년 학생 40명(20명씩 2개반)을 대상으로 예비검사를 실시했으며, 이를 수정·보완하여 원주교육지원청 영재교육원 수학영재반 중학교 3학년 학생 3명을 대상으로 본 검사를 실시하였다. 4개의 주제를 8차시(1차시는 45분)에 걸쳐 수업을 실시하였다. 연구자는 연구참여자이면서 관찰자로서 중재자, 안내자, 조언자 역할을 하였다.

수학적 모델링 프로그램을 적용한 수업에서 모델링 단계별 학생들의 활동과정과 수학모델을 분석하고, 학생들의 수학적 사고력을 분석하기 위하여 관찰, 학생들의 활동지 기록물, 심층면접을 실시하고 이를 비디오 촬영, 녹음하여 정보를 기록하였다. 학생들의 모델링 활동과정과 수학적 사고과정을 보다 구체적으로 조사하기 위하여 면담을 수시로 실시하였고 이를 녹음하여 자료를 수집하였다.

활동 과제별 녹음 자료를 전사한 후에 주제 목록을 만들어 자료를 주제별로 범주화한 뒤 비디오 녹화물에서 얻은 데이터와 학생들의 활동지를 함께 비교하면서 파일을 재조직하여 각각의 범주에 속한 자료들의 의미를 해석하고, 범주를 종합하였다.

학생들의 수학적 사고능력을 분석하기 위하여 한국교육개발원(1997)의 수학적 사고능력을 참고하였다. 수학적 사고능력은 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 수학적 추론 능력(연역적, 귀납적 사고능력), 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고능력과 같은 하위 능력들이 포함되는데 이들의 정의는 <표 Ⅲ-2>에 제시하였다.

Ⅳ. 결 과

1. 자료 개발

학생들에게 흥미로운 주제를 제공하여 수학적 사고능력을 신장시키는 것을 목표로 수학적 모델링 4단계를 거치도록 4가지 프로그램을 개발하였다.

<표 Ⅲ-2> 수학적 사고능력

구분		정의
직관적 통찰 능력		주어진 정보나 조건들 사이의 관계나 구조의 본질적인 핵심을 직감적으로 파악해 내며, 문제 해결의 결정적 단서를 순간적으로 떠오르게 하는 능력
정보의 조직화 능력		주어진 문제에서 필요한 정보를 수집하고, 문제 해결의 전략을 사용할 수 있도록 이를 분류하고 조직하는 능력
공간화/시각화 능력		주어진 정보를 머릿속에서 가시화하여 그려 볼 수 있는 능력
수학적 추상화 능력		비 구조화된 수학적 문제 상황을 적당한 수학적 개념이나 수학적 상징 기호나 수식, 그림 등으로 표현함으로써 형식화 해내는 능력
수학적 추론 능력	귀납적 사고 능력	하위의 구체적인 사례들을 종합하여 상위의 일반적 원리나 법칙을 구성할 수 있는 능력
	연역적사고 능력	상위의 일반적 원리나 법칙을 하위의 구체적 상황에 적용하여 넓게는 주어진 몇몇의 명제로부터 논리적 규칙을 써서 필연적인 결론을 엄밀하게 도출하는 능력이며, 좁게는 일반적인 주장으로부터 특수한 주장으로 나아가는 능력
일반화 및 적용 능력		수학적인 문제를 해결하는 과정에서 수나 문자, 기호로 표현된 수적, 공간적 대상이나 관계, 공식 등을 빠르고 광범위하게 조작하여 일반화시키고, 더 나아가 얻은 결과를 유사하거나 다른 상황의 새로운 문제에까지 확장하여 적용하는 능력
반성적 사고능력		문제해결의 매 단계 또는 전 과정에서 나타나는 메타인지적 사고 능력

2. 활동과제 1 : 쓰나미의 속력은 얼마였을까?

가. 실세계 탐구과정

2004년 12월 26일 수마트라섬 북서부의 반디아체에서 $431km$ 떨어진 인도양에서 발생한 해저지진으로 인해 쓰나미가 인도네시아, 태국, 스리랑카를 강타했다. 진앙지에서 바다깊이는 10km였다고 한다. 이때 진앙지에서 쓰나미의 속도는 얼마였을까?

Depth (meters)	Velocity (km/h)	Wave length (km)
7000	943	282
4000	713	213
2000	504	151
200	159	48
50	79	23
10	36	10.6

쓰나미 속도를 구하기 위한 문제를 제시했을 때 실세계 탐구과정에서 정보들을 수집하여 문제를 이해하는 과정이 필수적이라고 볼 수 있다.

JH: 쓰나미의 속력을 구하는 건가?
EB: 응. 인도네시아 진앙지에서 쓰나미의 속력. 동영상 보니까 엄청 빠르던데.
SR: (표의 숫자 자료들을 보며)이거 봐. 속력이 900이 넘어. 엄청 빨라. 주어진 정보가...
JH: 바다깊이, 속력, 파장, 파고.

학생들은 문제를 이해하는 과정에서 동료들 간 의사소통을 통하여 구하고자 하는 것이 무엇인지 파악하고 문제해결을 위해 필요한 정보들을 동영상을 보았던 경험과 표의 숫자 그리고 문제에서 제시된 바다깊이, 속력, 파장, 파고 등의 용어들을 통하여 정리하고 조직하였다. 실세계 탐구과정에서 학생들은 선험지식과 문제에서 주어진 정보들을 종합하여 문제를 이해하려는

<표 IV-1> 수학적 모델링을 위한 프로그램

주제	내용
쓰나미의 속력 구하기	바다깊이와 쓰나미 속력에 관한 자료를 보고 둘 사이의 관계를 찾아 2004년 인도네시아 쓰나미 발생 당시 진앙지에서의 쓰나미 속력을 구한다.
쓰나미의 도달시간 예측하기	경사진 구간에서의 속력을 정의하여 일본에서 동해안까지 쓰나미가 도달하는데 걸리는 시간을 구한다.
쓰나미의 처오름높이 구하기	파고와 처오름 높이의 관측 자료를 분석하여 둘 사이의 관계를 찾아 3.5m의 파도가 몰려올 때의 처오름 높이를 구한다.
대피소의 적합성 판단하기	기사를 읽고 대피소 설치의 문제성을 인식하고 대피소의 선정 기준을 세워 기존 대피소의 적합성을 판단한다.

경향이 있었으며 문제에서 주어진 정보를 매우 빠르게 정리하는 것을 볼 수 있었다. 이로써 학생들의 실세계 탐구 과정에서는 자료를 종합하는 능력이 나타남을 알 수 있었다.

나. 상황모델 개발과정

상황모델 개발 과정에서 학생들은 주어진 정보들로부터 어떤 관계가 있을지 추측해보는 활동을 하였다.

JH: 둘 사이에 어떤 증가하는 관계가 있는 것 같은데...(표를 보고 증가관계를 파악하기 쉬웠으나 그 이상의 관계를 찾기 어려워한다.)
연구자: 우리 둘 사이에 관계를 정의할 수 있는 거 뭐 배웠던 거 없을까?
SR: 음... 함수?
연구자: 함수? 왜?
SR: 증가하는 관계가 있는 것 같은데 그럼 두 변수사이의 관계를 함수로 정의했었던 것 같아요. 그래! 일단 그래프를 그려보자.
EB: 어떻게?
SR: 주어진 정보를 좌표평면 위에 나타내보면...(geogebra 소프트웨어를 활용하여 자료를 입력해 보고 있다.)

JH는 표를 보고 주어진 정보들을 조직하여, 직관적으로 바다깊이와 속도 사이의 증가관계가 있다는 것을 추측하였으나 아직은 구체적으로 어떤 관계인지 알아보는데 무엇을 해야 하는지에 대하여 어려움을 겪었다. 이 때 SR은 관계라는 말에서 두 변수의 관계를 떠올려 함수를 생각해 내었고 활동지에 그래프를 그려 살펴보고자 함으로써 시각적으로 나타내어 둘 사이의 함수적 관계를 확인하고자 하였다. 이를 통하여 이 단계에서 학생들은 직관적 통찰 능력과 공간화/시각화 능력이 나타남을 알 수 있었다.

[그림 Ⅳ-1] 활동과제1의 상황모델

다. 수학모델 개발과정

이 단계에서 학생들은 비수학적 상황에서의 상황모델을 기호와 수식을 사용하여 수학모델로 바꾸는 활동이 이루어졌다.

SR: 곡선 같은데 이렇게 생긴 모양은 본 적이 없어.
JH: (돌려보더니) 이렇게 하면 이차함수 모양 같지 않아?(속력을 x로, 깊이를 y로 바꾸어 입력한다.)

EB: (좌표평면 위의 점들을 보며) 이차함수 모양 같아.

SR: 응. 나도. 이차함수니까...($y=ax^2$이라는 식을 활동지에 쓴다. 다른 학생들도 아무 생각 없이 SR의 식을 활동지에 적고 있다.)

연구자: 이차함수는 이 식일까? 왜?

EB: (이상함을 발견하고)아~$y=ax^2+bx+c$(활동지에 다시 적고 있다.)

JH는 그래프를 돌려보고 직감적으로 이차함수 그래프의 모양임을 파악하였다. 수학모델로 이차함수 식을 구하기 위하여 SR은 상황모델 [그림 Ⅳ-1]을 보고 반성적 사고 없이 비구조화된 상황모델로부터 수학모델로 $y=ax^2$ 식을 생각하였다. 다른 학생들도 비판 없이 식$y=ax^2$을 받아들이기에 연구자는 이차함수의 식을 다시 한 번 생각해보도록 발문하였다. 이에 EB는 $y=ax^2$이 자신이 구하려는 수학모델에 적합하지 않음을 깨닫고 이차함수의 일반식을 생각해내었다. 첫 번째 수학적 모델링 과제를 해결하는 과정에서 타인의 사고를 비판 없이 받아들이고 사용하려 하였으나 교사의 발문을 통해 반성적 사고를 이끌어 낼 수 있었다. 이 단계에서 직관적 통찰 능력과 반성적 사고 능력, 수학적 추상화 능력이 나타남을 알 수 있었다.

라. 모델적용 과정

이 단계에서는 수학적 모델을 적용하여 수학적 결론을 구하며, 구한 수학적 결론을 현실세계에 반영하여 해석하고, 일반화 가능한 모델을 개발하는 활동이 이루어졌다.

JH: (식에 대입해보려다가) 근데 우리 속도가 x지?

EB: 응.

JH: 그럼 식을 x에 관한 식으로 둬야 맞지 않을까? 그럼 속도 구할 때 바로 구할 수 있을 것 같아.

SR: 응 그래야 쓸 때 더 편하겠다. 그럼 $x=\pm\sqrt{10y}$ 아! 속도는 음수가 없으니까 $x=\sqrt{10y}$겠다.

JH는 수학모델에 주어진 정보를 대입해보는 과정에서 반성적 사고를 통해 구하고자하는 것이 속도이므로 x에 관한 식으로 고쳐야 함을 문제제기하였다. 학생들은 속도는 음수가 나올 수 없기 때문에 현실세계를 반영하여 자신들이 얻은 수학모델을 다른 상황의 새로운 문제에까지 확장하여 적용 시킬 수 있는 $x=\sqrt{10y}$라는 일반화 가능한 모델을 개발하였다. 이를 통해 모델적용 과정에서는 반성적 사고능력과 일반화 및 적용 능력이 나타남을 알 수 있었다.

종합하여보면 활동과제 1에서는 실세계 탐구과정에서 동료들 간 의사소통을 통하여 문제를 이해하고 문제에 제시된 용어들을 통하여 정리하며 숫자들을 조직하는 정보의 조직화 능력이 나타났다. 상황모델 개발과정과 수학적 모델 개발과정에서 그리고 표를 그래프로 나타내는 과정에서 공간화/시각화 능력이 나타났으며 그래프를 보고 직관적으로 수학모델을 떠올렸고 일반화 및 적용단계에서 일반화 가능한 수학모델을 완성하는 것을 알 수 있었다. 모델적용 과정에서는 모델링 단계에서 수나 문자, 수적이나 공간적 대상이나 관계, 공식 등을 빠르고 광범위하게 조작하는 일반화 및 적용 능력이 나타났으며 현실세계에 수학적 모델을 적용하는 단계에서는 반성적 사고가 나타났다.

3. 활동과제 3: 쓰나미가 도달하는데 걸리는 시간을 예측하자!

가. 실세계 탐구과정

흔히 10m 높이의 쓰나미가 몰려올 때 침수되는 지역이 해발 10m라고 생각하면 큰 오산이다. 2011.03.11 일본 쓰나미 발생 당시(최고 파도높이 14m) 해발 30m지역이 안전하리라 생각하고 3층짜리 건물 안에서 쓰나미에 대한 대책회의를 하던 소방대원 전원이 쓰나미에 휩쓸려 목숨을 잃었다. 또한 안전하리라 믿고 그보다 더 높은 지역의 대피소에 대피해 있던 주민 몇 백 명도 쓰나미에 휩쓸렸다. 현재 3.5m 높이의 쓰나미가 우리나라 동해안을 향해 몰려오고 있다. 건물의 몇 층 이상으로 대피해야 쓰나미를 피할 수 있을까?(단, 동해안의 해안 경사각은 10°라 가정하자)

H(파고)	R(처오름 높이)
0.050	0.1512
0.056	0.1702
0.064	0.1956
0.068	0.2083
0.072	0.2211
0.074	0.2275
0.076	0.2339
0.082	0.2532
0.086	0.2661
0.088	0.2725
0.091	0.2822
0.095	0.2952
0.098	0.3049
0.104	0.3244
0.107	0.3341
0.109	0.3406
0.114	0.3569

해안경사각이 10°일 때 고립파(지진해일)의 최대 처오름높이

출처 : 조용식, 이봉희 (1997). 단일파의 최대 처오름높이. 한국수자원학회논문집 30(5) 487-493

EB: (동영상을 본 후) 그럼 파고 높이보다 해안에 오면 더 높이 올라오겠네요.

SR: 아마 3.5m 보다는 높이 올라오겠지? 동영상 보니까 해안에 올 때 파고보다 높이 올라오던데~ 그럼 더 높이 대피해야겠다. 문제가 몇 층으로 대피하나? 이거지?

EB와 SR은 영상을 보고 직관적으로 해안에 도착하는 처오름의 높이가 파고의 높이만큼 오는 것이 아니라 더 높이 올라옴을 인식하였으며 이를 위하여 대피소의 높이가 더 높아야 한다는 사실을 이해하고 구하고자 하는 문제를 먼저 이해하려는 모습을 확인할 수 있었다.

나. 상황모델 개발과정

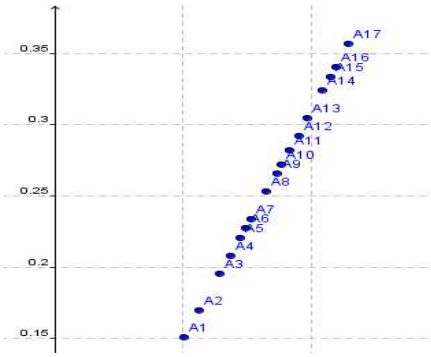
JH: 표를 보니까 얼추 3배정도인데

SR: 응. 파고가 증가하면 처오름이 증가하는데 그 정도 나올 것 같아.

JH: 둘 사이에 어떤 관계니까 함수를 사용해 보는 게 어때?

SR: 응 일정하게 증가하는 거 같으니까 어떤 함수 관계일 것 같아.

EB: 그래프를 그려보자. 저번시간에 했던 것처럼 geogebra를 이용하는 게 어때?



[그림 Ⅳ-2] 활동과제 2의 상황모델

JH와 SR은 주어진 수리모형실험 관측 자료를 보고 구체적인 값들을 종합하여 처오름 높이가 파고높이의 3배 정도일 것이라고 추측하였다. 학생들은 geogebra를 활용하여 자료를 입력하여 상황모델인 [그림Ⅳ-2]를 얻어낼 수 있었다. 활동과제 3은 현실세계를 일차함수로 해석할 수 있는데 학생들은 표의 파고와 처오름의 높이 관계를 귀납적 사고에 의해 둘 사이에 3배 관계를 얻어냈다. 이는 활동과제 1의 활동처럼 함수가 수학모델인 과제였기 때문에 학생들은 활동과제 1보

다 상황모델을 개발하는데 더 쉽게 접근하는 모습을 확인할 수 있었다.

다. 수학모델 개발과정

이 단계에서는 상황모델을 수학적 모델로 바꾸는 과정에서 그래프로 표현하는 활동과 그래프를 함수식으로 표현해보는 활동이 이루어졌다.

JH: 이거 직선모양이야. 일차함수 관계로 봐야 할 것 같아.
SR: 직선이니까 식으로 나타내면 $y=ax$.
EB: 원점을 지나는지 안 지나는지 모르니까 $y=ax+b$로 해야지.
SR: (산점도를 보고 선을 연결해 본 뒤) 어 원점을 지나지 않는구나?
JH: 응. 그리고 일차함수의 기본형은 $y=ax+b$니까. 그냥 $y=ax$를 쓰면 안 될 것 같아. 일단은 이걸($y=ax+b$)로 해야 하지 않을까?

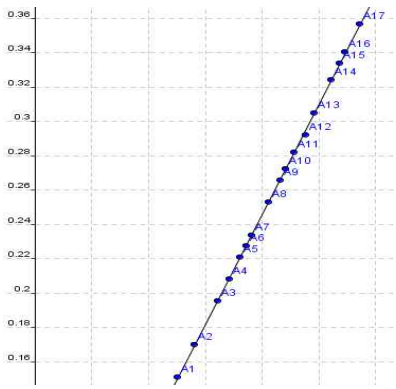
학생들은 수학적 모델을 개발하는 과정에서 주어진 자료를 시각화 한 뒤, 그래프를 보고 일차함수임을 추론하여 수학모델로 일차함수식을 세웠다. SR은 그래프로 보고 일차함수 식을 직관적으로 $y=ax$라고 생각하는 오류를 범하였다. EB의 문제제기에 SR은 자신의 사고과정을 되짚어보고 그래프를 다시 확인하는 과정에서 반성적 사고가 나타났다. 학생들은 수학적 추상화 능력을 사용하여 그래프로부터 $y=ax+b$라는 식을 세웠다. 주어진 자료의 값을 대입하여 미지수 a, b를 찾아 $y=3.2x-0.01$이라는 수학모델을 개발하였다.

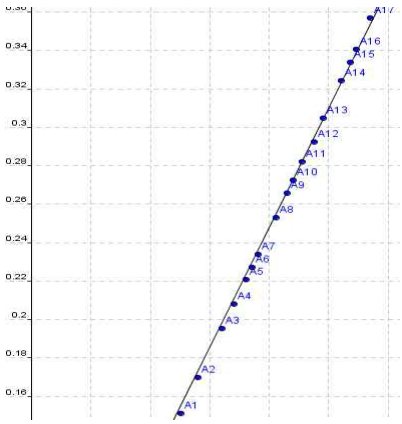
라. 모델적용 과정

수학적 결과를 도출하고 실세계에 적용하는 활동이 이루어졌다.

SR: 파고가 0이면 아주 잔잔한 것 아닌가?
EB: 그럼 처오름도 0아닐까? 그럼 b=0이라고 두어야 하는데... 우리가 구한식이 현실세계에 딱 맞을까? b값이 -로 나온 것도 좀 걸리고...
JH: b가 -로 나온 이유가 뭘까? 파고가 0일 때 높이가 없어야 하는 게 상식적이잖아. 우리 b=0으로 두고 $y=ax$ 식에 주어진 값들은 한 번 더 대입해 보자.(식을 대입하여 a의 값들을 구하고 있다.)
EB: (다른 친구들이 구한 a값들을 살펴본 뒤) a값이 3.08~3.2 사이인데? 평균을 구해 볼까?
SR: 3.088 정도 나와. 반올림 하더라도 3.1 정도? 우리가 구한 a값이랑 다른데?
JH: (점들이 찍힌 좌표평면 위에 $y=3.1x$그래프를 그려본다.) 이것 봐 아까 그래프보다 벗어난 점들이 더 많아 우리가 구한 식이 현실세계를 더 잘 반영하는 게 맞는 것 같아.

EB는 수학모델을 현실세계에 반영해보는 과정에서 b값이 음수가 나오는 상황에 문제제기를 하였고 SR또한 파고가 0이면 처오름의 높이도 0일 것이라 생각하였다. 학생들은 자신들이 구한 수학모델이 적합한 것인지 확인하고 의문을 느끼는 점을 해소하기 위하여 또 다른 수학모델을 만들어보고 비교하여 가장 적합한 수학모델을 일반화하는 것을 볼 수 있었다. 학생들은 첫 활동과제를 해결 할 때보다 자신이 가지고 있는 상식과 경험을 통해 현실을 분석하는 활동이 자연스러워짐을 알 수 있었다.





[그림Ⅳ-3] $y=3.2x-0.01$과 $y=3.1x$의 그래프

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 상황모델을 개발하는 과정에서 처음에는 실세계로부터 비 수학적인 모델을 예측하는데 어려움을 겪었으나, 활동과제가 진행됨에 따라 직관적으로 모델을 떠올리며 이를 시각화 하려는 모습이 관찰되었으며 더욱 쉽고 빠르게 상황모델을 개발하였다. 학생들이 능력이 부족해서 처음에 어려워한 것이 아니라 실세계 상황을 수학적으로 표현하는 기회가 없었기 때문이며, 앞으로 영재학생들에게 필요한 수학적 모델링 과제들을 많이 개발하여 영재학생들에게 필요한 실세계 문제를 해결할 기회를 제공할 필요가 있다.

둘째, 모델링 활동 첫 시간에 학생들이 수학적 결론만 도출하고 구한 해가 현실세계에 적합한지 확인하는 과정을 생략하는 것을 관찰할 수 있었다. 이러한 현상은 학교와 영재학급에서의 수업에서 수학적 결과가 나오면 반성의 과정 없이 다음 문제로 넘어가는 경험이 누적되어 자신들이 구한 수학적 결과를 현실세계에 적용하고 해석해보는 경험이 부족하였기 때문이다. 이러한 문제점은 수학적 모델링 수업이 진행되면서 해소되었다. 첫 번째 수학적 모델링 과제를 해결하는 과정에서 타인의 사고를 비판 없이 받아들이고 사용하려는 모습이 많이 나타났는데 이것은 정규수업에서 교사위주의 수학수업으로 인하여 타인의 사고가 옳은 것으로 반성적 사고 없이 지식과 문제풀이를 받아들이는 것이 익숙했기 때문인 것으로 보인다. 모델링 과제가 진행되면서 구한 수학적 결과를 현실세계에 반영하고 더 적합한 모델을 구하는 과정에서 반성적 사고 능력이 많이 나타났는데 학생들에게 익숙하지 않은 모델적용 과정에서 교사는 발문을 통해 학생들이 반성적 사고를 할 수 있도록 주의해야 한다.

셋째, 수학영재 학생들을 위한 모델링 자료를 개발할 때 통합교과적 지식을 필요로 하는 비구조화 된 소재를 선택할 필요가 있다. 본 연구의 모델링 활동과제에서 학생들은 수학적 지식뿐만 아니라 과학적 지식과 경험적 지식을 활용하여 문제를 해결하였다. 장인옥(2010)은 여러 분야의 지식을 통합적으로 적용할 수 있는 능력은 수학영재교육의 중요한 목표라고 하였는데 이 연구에서 학생들은 통합교과적 지식을 사용하여 문제를 해결하였다. 과학적 소재인 쓰나미는 실세계 문맥이 풍부한 문제로써 구조화되지 않은 다양한 수학적 개념들을 포함하고 있다. 이러한 문제를 해결하면서 학생들은 수학의 가치를 경험하였고 자연현상을 수학적으로 해석하고 예측하며 수학적 결론을 다시 현실세계에 반영하는 과정을 통해 실세계 상황을 수학적으로 보는 시각을 기를 수 있었다.

이를 바탕으로 본 연구에는 다음을 제언하고자 한다.

첫째, 본 연구는 하나의 소집단만을 대상으로 사례연구를 하였다. 수학적 모델링 수업은 모둠활동 후 학급 논의가 이루어지는데 본 연구에서는 이러한 과정이 이루어지지 않았다. 수학 영재학급

에 적용하여 모둠별로 수학적 모델을 발표하고 서로 비교 평가하여 더 정교하고 일반화된 모델로 수정하는 과정에 대한 후속 연구가 필요하다.

둘째, 수학적 모델링 과정 중 학생들의 사고능력이 많이 나타날 수 있도록 하는데 교사의 발문이 중요한 역할을 하였으나 본 연구에서는 교사의 발문에 대하여 연구하지 않았다. 모델링 단계별 학생들의 사고과정이 활발하기 위한 교사의 발문과 역할에 대한 연구가 필요하다.

셋째, 수학적 모델링 단계에서 나타난 학생들의 사고 과정이 과제에 따라 다르게 나타났는데, 과제 자체의 특성이 모델링 단계별 사고과정에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 연구가 이루어져지지 않았다. 이에 대한 후속연구가 이루어져야 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2007). **제 2차 영재교육진흥종합계획**. 서울: 교육과학기술부.

김수미(1993). **중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

송상헌(1996). 수학 영재 교육 프로그램을 위한 수학적 영재성의 정의와 판별의 이론적 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 6**(2), 271-294.

백은정(2000). **수학적 모델링 지도를 위한 프로그램의 개발과 적용 : 중학교 2학년 부등식 단원을 중심으로**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

신은주(2005). **모델링 활동 사례분석 연구-중학교 수학을 중심으로-**. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

신은주, 권오남(2001). 탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구. 대한수학교육학회지 **수학교육학연구, 11**(1), 157-177.

이경화(2003). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. 대한수학교육학회지 **수학교육학연구, 13**(3), 365-382.

이경화, 최병연, 박숙희(역)(2009). **영재교육**. 서울: 박학사.

장인옥(2010). **LOGO프로젝트 학습에서 나타난 초등 수학 영재 학생들의 전략적 사고와 교사 역할**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

조용식, 이봉희(1997). 단일파의 최대 처오름높이. **한국수자원학회논문집, 30**(5), 487-493.

주미경(1991). **학교수학에서의 응용과 모델링 지도에 관한 고찰**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

최종현(2004). **주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

한국교육개발원(1996). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ)-기초연구편(연구보고 No. CR 96-26)**. 서울: 김홍원, 김명숙, 송상헌.

_____(1997). **수학 영재판별 도구 개발 연구(Ⅱ)(수탁연구 CR9750)**. 서울: 한국교육개발원.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2&3), 109-129

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook og research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

NCTM(1991). Mathematical Modeling in the secondary School Curriculum,in Frank Swetz and J. S. Hartzle(Eds.). Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

Development and Application of Teaching-Learning Materials for Mathematically-Gifted Students by Using Mathematical Modeling -Focus on Tsunami-

Seo, Ji Hee (Graduate School, Korea National University of Education)
Yeun, Jong Kook (Korea National University of Education)
Lee, Kwang Ho (Korea National University of Education)

The researchers developed the teaching-learning materials for 9th grade mathematically gifted students in terms of the hypothesis that the students would have opportunity for problem solving and develop various mathematical thinking through the mathematical modeling lessons. The researchers analyzed what mathematical thinking abilities were shown on each stage of modeling process through the application of the materials. Organization of information ability appears in the real-world exploratory stage. Intuition insight ability, spatialization/visualization ability, mathematical reasoning ability and reflective thinking ability appears in the pre-mathematical model development stage. Mathematical abstraction ability, spatialization/visualization ability, mathematical reasoning ability and reflective thinking ability appears in the mathematical model development stage. Generalization and application ability and reflective thinking ability appears in the model application stage. The developed modeling assignments have provided the opportunities for mathematically-gifted students' mathematical thinking ability to develop and expand.

* Key Words : Mathematically-gifted students(수학 영재), Mathematical modeling(수학적 모델링), Tsunami(쓰나미)

논문접수 : 2013. 10. 30
논문수정 : 2013. 12. 15
심사완료 : 2013. 12. 20

<부록 1> 학생용 학습 자료

활동과제1

쓰나미의 속력을 구해보자!

쓰나미란 말은 일본어 진파(津波)의 발음을 그대로 쓴 것으로 영문명은 'tsunami'이다. 지진, 화산 폭발, 단층 운동, 빙하의 붕괴, 핵폭발등 기상 이외의 다양한 원인으로 인해 바닷물이 상하로 진동하고, 이것이 대규모 파동이 되어 발생하는 해일을 지진해일 즉, '쓰나미'라고 한다. 연못에 돌을 던지면 파동이 생겨 동그란 모양의 물결이 일어나는데 이 지진해일은 바다 아래 지각 변동으로 이런 물결이 생겨 나타난 결과라고 생각할 수 있다. 일반적으로 바닷물의 파동현상이 심해에서는 파장과 비교하여 파고가 작아 눈에 잘 띄지 않지만, 해안 근처의 얕은 곳에서는 파고가 수심과 같아지고 높아진 파도의 벽은 내륙을 침범하여 많은 피해를 입힌다. 지진해일은 태풍 등의 기상 현상으로 생기는 폭풍해일과 달리 파동에 의해 높은 파도가 해안에 수평으로 이동해오기 때문에 고지대도 순식간에 침수된다. 약 10분 간격으로 반복되는 지진해일은 보통 제 3파나 제 4파가 최대 크기이며, 이 상태가 약 3-4시간 계속되다가 약화된다.

우리나라에서는 1741년(영조 17)년 강원도 평해와 1940년 나진묵호, 1983년 동해안 일대에서 지진해일이 발생하여 많은 민가와 배가 유실되었다는 기록이 있다. 특히 동해는 다른 지역에 비해 수심이 깊고 지진이 자주 발생하는 일본에 인접해 있어 지진해일 발생 가능성이 높다. 실제로 1983년과 1993년에 일본 혼슈 아키다현 서쪽과 홋카이도 오쿠시리섬 북서해역에서 발생한 지진으로 생긴 지진해일이 동해안의 여러 지역에 많은 피해를 주었다.

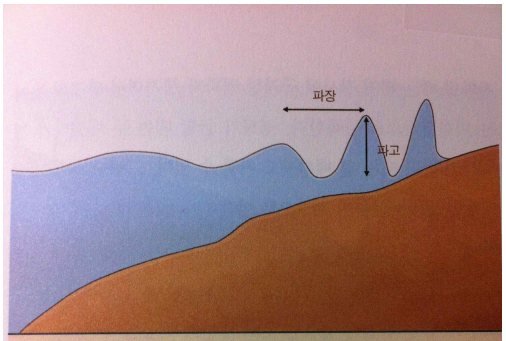
(http://navercast.naver.com/contents.nhn?contents_id=4043)

이처럼 쓰나미는 먼 남의나라에서만 발생하는 자연재해가 아니다. 따라서 우리나라에서도 쓰나미에 대비하여 준비를 해야 할 것이다.

여름방학이 다가오고 있다. 여름방학을 맞이하여 강릉에 놀러 갔는데 쓰나미가 발생하였다. 그럼 우리는 무엇을 해야 할 것인가? 대피할 때 필요한 정보들은 무엇인지 적어보자.

Q. 2004년 12월 26일 수마트라섬 북서부의 아체주(州) 주도 반디아체에서 $431km$ 떨어진 인도양에서 발생한 해저지진으로 인해 거대한 쓰나미가 인도네시아, 태국, 스리랑카를 강타했다. 진원지에서 바다 깊이는 10km이었다고 한다. 이때 진원지에서 쓰나미의 속력은 얼마였을까? 주어진 정보는 아래와 같다.

("쓰나미를 예측할 수 있을까?"참고)



바다 깊이(m)	속도 (km/h)	파장 (km)	파고 (cm)
7000	943	282	2~5
4000	713	213	3~7
2000	504	151	4~10
200	159	48	12~30
50	79	23	30~100
10	36	10.6	100~500

1. 해결해야하는 문제는 무엇인가? 이 문제를 해결하는데 주어진 정보는 무엇인가?
2. 주어진 정보가 문제를 해결하기 위해 어떤 관계가 있는가? 쓰나미의 속력을 구하기 위하여 어떤 정보를 어떻게 사용해야하는가? 또한 그 이유는 무엇인가?

   자신의 의견 :

   모둠의 의견 :
3. 문제를 해결하기 위한 수학적 모델(식, 표, 그래프 등)을 만들고, 그렇게 생각한 이유를 쓰시오.

자신의 의견 :

모둠의 의견 :

4. 수마트라섬 북서부의 아체주(州) 주도 반디아체에서 $431km$ 떨어진 인도양에서 발생한 해저지진의 바다 깊이는 10km이었다고 한다. 이때 진원지에서 쓰나미의 속력은 얼마였을까?