

초등학교 4학년 학생들의 수학 문제해결과정에서의 시각적 표현

김 소 희 (한국교원대학교 대학원)

이 광 호 (한국교원대학교)¹⁾

구 미 영 (한국교원대학교 대학원)

본 연구는 초등학교 4학년 학생들의 수학 문제해결 과정에서 나타나는 시각적 표현이 어떠한지를 알아보고, 이를 바탕으로 수학 문제해결에 유용한 시각적 표현을 효과적으로 지도하기 위한 방안을 모색한 것이다. 연구문제 해결을 위해 서울D초등학교 4학년 1개 학급을 대상으로 학생들의 문제해결 과정에서의 시각적 표현이 어떠한지에 관한 검사를 실시하고 분석하였으며, 문제해결과정에서의 시각적 표현에 특징을 보이는 학생 4명을 선정 심층면담을 실시한 후 그 결과를 분석하였다. 학생들의 문제해결에 있어서 성취도와 문제해결과정에서의 시각적 표현의 활용 사이에 깊은 관계가 있는 것으로 나타났다. 또한, 학생들이 문제해결과정에서 시각적 표현을 이용해 성공적인 문제를 해결하는 경향을 갖도록 함으로써 문제해결과정에서의 시각적 표현의 유용성을 인식할 수 있게 되었다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

우리나라 교육과정에서는 제4차 교육과정 이래 지속적으로 수학교육 목표의 하나로 수학적 문제해결능력을 강조해 오고 있다. 특히 문제 해결에 대한 교수·학습 방법의 측면에서 “학생 스스로 문제 상황을 탐색하고, 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결방법을 적절히 활용하여 문제를 해결해 보게 하며, 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정을 중시”할 것을 명시하고 있다. 여기에서 문제란 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준을 넘어서서 다양한 수학적 사고를 요구하는 것이라는 측면에서 생각해 볼 때, 문제해결과정에서 시각적 표현을 나타냄으로써 문제를 해결하는 것은 매우 타당하

다고 할 수 있다. 왜냐하면 문제해결 과정에서의 시각적 표현은 ‘학생 스스로 문제 상황을 탐색’하는 것이 가능하도록 하는, 문제해결을 위한 ‘사고 방법’이 되며, 문제해결의 ‘결과뿐만 아니라 과정을 중시’하도록 하는 방법이 될 수 있기 때문이다.

문제 해결의 중요성이 꾸준히 제기되면서, 수학 문제 해결에서의 다양한 수학적 표현의 중요성도 강조되고 있다. 수학 교육에서 ‘표현(Representation)’은 개념 학습, 의사소통, 현실 상황에 대한 수학적 모델링, 문제 해결 등 다양한 측면에서 그 가치가 인정되고 있다.

NCTM(2000)과 김영국(2008)은 공통적으로 표현이 문제해결에 유용함을 이야기 하고 있는데, 문제해결 과정의 첫 단계는 주어진 문제 상황에 대해 문제를 읽거나 그것을 이루고 있는 표현들을 해석하는 것이다. 문제를 읽거나 해석한 결과 갖게 되는 문제에 대한 표상은 문제 해결과정이 진행됨에 따라 수정되어 문제의 해를 산출할 수 있는 표상으로 변화하게 된다. 이러한 측면에서 문제해결과정은 ‘문제 해결자의 표상에서의 일련의 구조적 변화’라고 할 수 있다(Nunokawa,1994). 즉 문제에서 주어진 표현은 문제해결 과정에서 다양한 표현으로 변환되고 그러한 표현의 변환을 통해 문제해결에 이르게 된다는 것이다. 이러한 관점에서 문제 해결과정에서의 다양한 수학적 표현은 문제해결을 위해 필수적인 것이라 할 수 있다.

하지만, 유클리드적 사고를 강조해 온 우리의 수학 교육은 분석적이고 논리적인 기호적 표현을 선호해 왔으며(이대현, 2003), 이에 따라 다른 표현들은 논리적 사고, 즉 기호적 표현을 이끌어 내기 위해 사용되는 부수적인 역할로만 다루어져 왔다. 하지만 수학교육의 기초가 되는 철학적 바탕이 변화됨에 따라 수학적 표현에 대한 가치와 기준도 변화했다. 전통적인 수리철학이 결과로서의 지식의 확실성에 초점을 맞추었다고 한다면, 준경험주의나 구성주의는 이보다는 수학적 지

* 접수일(2013년 11월 20일), 게재확정일(2013년 12월 16일)

* ZDM분류 : D52

* MSC2000분류 : 97D50

* 주제어 : 문제해결, 시각적 표현

1) 교신저자

식의 형성 과정, 과정으로서의 수학적 지식 쪽에 초점을 맞추고 있다(황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽, 2004). 또한 장혜원(1997)도 학교 수학에서 기호적 표현의 지나친 강조는 기계적인 알고리즘 학습을 초래할 위험이 있음을 제시하면서, 표현의 측면에서 기호적 표현의 지나친 강조는 바람직하지 않으며, 시각적 표현 및 언어적 표현과 대등하게 다룰 것을 제안하고 있다. Polya(1957)는 문제해결 첫 단계인 문제 이해 단계에서 그림을 그릴 것을 제안하면서, 비기하적인 문제에 대한 적절한 기하학적인 표현을 찾아보는 것이 문제해결을 위한 중요한 진전이 될 수 있다고 하였다.

Diezmann(2002)은 다이어그램이 특히 비정형적인 문제(non routine problem)를 해결하는 데 유용한 세 가지 이유를 제시하고 있다. 첫째, 다이어그램이 문제의 내용이나 주어진 조건들에 대해 표상된 아이디어들을 외적인 스케치로 명확히 드러나도록 해준다. 둘째, 다이어그램이 문제에 주어진 정보들을 재조직하기 용이하도록 함으로써 문제에 함축되어 있는 정보를 밖으로 끌어내어 문제해결에 이르도록 한다. 셋째, 다이어그램이 문제의 구조를 드러내주어 문제이해를 촉진시킨다. 여기서는 시각적 표현이 주어진 문제 상황을 추상화시켜 도식적으로 표현된다는 측면에서 'diagram'이라는 용어가 사용되었다. 이러한 관점에서 문제에 대한 도식적 표현, 즉 문제해결과정에서 시각적 표현을 이용하는 것은 문제이해에 도움이 될 뿐만 아니라 시각적 표현 자체가 하나의 문제해결방법이 될 수 있다.

좀 더 최근의 연구에서는 문제 해결에서 학생들이 시각적 표현의 사용에 흥미를 보이며, 학생들뿐만 아니라 전문 수학자들도 시각적 표현의 사용을 선호한다고 밝히고 있다(George, 1999; Stylianou & Silver, 2004). 그러나 여전히 초등학생들이 시각적 표현의 사용을 꺼려한다(Diezmann, 2002; 나일주, 성은모, 박소영, 2010)는 점과 시각적 표현이 반드시 성공적인 문제 해결을 보장하는 것은 아니라는 점(이대현, 2003) 등, 문제해결과정에서의 시각적 표현이 지니는 한계점도 고려해 보지 않을 수 없다.

이러한 점들을 생각해 볼 때, 학생들의 문제해결 과정에서 시각적 표현에 대한 연구는 중요한 의미를 지닌다고 할 수 있다.

이에 본 연구의 목적은 문제해결 과정에서 나타나

는 초등학교 4학년 학생들의 시각적 표현에 대한 질적 분석 결과를 살펴보고, 이를 바탕으로 시각적 표현을 활용한 수업프로그램의 효과성에 대한 질적 분석을 통하여 문제해결에 관한 교수·학습 방법에 시사점을 주고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 문제해결과정에서의 시각적 표현

가. 문제해결에서 시각적 표현의 가치

문제해결에서 시각적 표현의 중요성에 대해 Diezmann(2002)는 그 유용성을 세 가지로 제시하고 있다. 첫째는 시각적 표현이 학생들에게 각각의 정보를 표현하고 연결할 수 있도록 사고를 위한 외부적인 스케치를 제공한다는 것이다. 둘째는 시각적 표현이 정보의 재조직화를 촉진함으로써 내포되어 있던 문제의 정보가 시각적 표현을 통해 명확해질 수 있다는 것이다. 마지막으로 시각적 표현이 문제의 구조가 드러나도록 해주어 문제이해를 촉진시킨다는 것이다. 결국 시각적 표현은 학생들이 문제에 대한 정보의 재조직과 구조를 파악하도록 하여 문제를 이해하는데 도움을 줄 수 있다고 볼 수 있다.

이에 덧붙여 NCTM(2000)에서는 수학의 강점 중의 하나로 추상의 활용을 제시하면서, 문제해결과정에서 문제에 주어진 대상의 꼭 필요하지 않은 특색은 기호화를 통해 없애고 쉽게 계산할 수 있도록 “꾸밈없는 기호(naked symbol)”를 만드는 것이 문제를 분석하는데 도움이 되, 수학적 응용 및 모델링의 강점이 된다고 밝히고 있다. 시각화는 문제해결에서 기호화로 가는 하나의 발판이 될 수 있다고 볼 수 있다.

나. 문제해결과 표상의 관점에서의 시각적 표현

Hayes(1989)는 표상을 내적 표상과 외적표상으로 분류하고 있다. 내적 표상은 문제를 이해하기 위하여 주어진 문제에 대상 및 조건 간의 관계를 마음속에 그려보는 것이다. 외적 표상은 주어진 문제에 대해 그림을 그린다거나 내적 표상과 일치하는 상징기호나 식을 세우는 것으로, 내적 표상이 외적으로 드러나도록 함으로써 문제를 보다 쉽게 이해할 수 있도록 해 준다. 결국 내적 표상을 살펴본다기 보다는 외적 표상을 통

하여 내적 표상을 추측해 보는 것이 필요할 수 있으며 최대한 다양한 외적 표상을 통해 내적 표상을 이해하도록 하는 노력도 필요할 것이다.

다. 문제해결과정에서의 시각적 표현 유형 분류

van Garderen과 Montague(2003)의 연구와 Kell, Gaustad, Porter, & Fonzi (2007)의 연구는 공통적으로 문제해결과정에서 나타나는 시·공간적 표현을 도식표현과 그림 표현으로 구분하여 문제해결에서의 유용성을 이야기하고 있는데, 도식 표현의 이용과 학업 성취도 사이에는 양의 상관관계가 있음을 이야기 하면서 성공적인 문제해결은 도식 표현의 이용과 관련되고, 그림표현은 문제해결과 부정적인 관계가 있다고 밝히고 있다. 또한 Hegarty와 Kozhevnikov(1999)도 시공간적인 표현을 도식 이미지와 그림 이미지로 구분하고 있는데, 도식 표현은 문제에 기술된 공간적 관계를 나타내는 것으로, 그림 표현은 문제에 기술된 대상의 시각적인 외관을 나타내는 것으로 설명하고 있다. Kozhevnikov, Hegarty, & Mayer (2002)는 문제해결과정에서 나타나는 시각적 이미지를 시각 이미지와 공간 이미지로 구분하고, 시각 이미지는 모양, 색깔, 밝기와 같은 대상의 시각적 외관을 표현하는 것인 반면, 공간 이미지는 특정한 공간이나 대상의 움직임에 대해서 대상의 부분과 위치 사이의 공간적 관계를 표현하는 것이라고 하였다.

이들을 종합하여 본 연구에서는 문제해결과정에서의 시각적 표현을 크게 도식 표현과 그림 표현으로 분류하여 학생들의 문제해결과정에서 나타나는 시각적 표현에 대한 이해를 도모하였다.

2. 시각적 표현 관련 교과서 분석

시각적 표현과 관련하여 우리나라 교육과정을 살펴보면, 2007개정 교육과정에서는 “수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 하며, 수학을 표현하고 토론하는 것을 통해 자신의 사고를 명확히 하고 반성”하도록 강조하고 있다(교육과학기술부, 2008). 여기서 표현은 수학적 아이디어를 다른 사람과 의사소통하기 위한 수단으로 그 과정에서 사고를 명확히 할 수 있음을 이야기하고 있다. 하지만 구체적으로 문제해결

과정에서의 시각적 표현의 유용성에 대한 언급은 다루고 있지 않다.

문제해결전략으로 우리나라 초등학교 수학 교과서의 대부분 1학년부터 6학년까지 2학기 마지막 단원에서 문제해결 방법으로 다양한 전략들로 다루고 있다. 그 예를 살펴보면 실제로 해보기, 식 만들기, 규칙 찾기, 거꾸로 풀기, 표 만들기, 예상과 확인, 그림 그리기, 단순화하기 등이다, 이러한 문제해결전략들에 대한 학습은 교육과정에서 문제해결을 매우 강조하며 문제해결의 결과뿐만 아니라 과정을 중시한다는 측면에서 매우 중요한 의미를 가진다고 하겠다. 하지만 교과서에서는 이러한 일련의 전략들을 소개하는 것에 그치고 있으며, 이는 문제해결과정에서 선택한 전략을 어떻게 실행할 수 있는지에 대해 어려움을 갖는 학생들에게 별 도움이 되지 못하고 있다(황현미, 방정수, 2009).

3. 선행 연구 고찰

가. 문제해결과정에서의 시각적 표현 실태에 관한 연구

문제해결과정에 대한 시각적 표현 실태에 대한 연구들은 다양하다. 김유정, 백석운(2004)은 초등학교 4학년을 대상으로 성공적으로 문제를 해결한 아동은 계산식에 의존하기보다 여러 정보를 문제해결을 위해 표현할 수 있고, 문제해결과정을 직관적으로 파악할 수 있을 정도의 명료하고 조직화된 그림을 그릴 수 있음을 밝히고 있다. 또한 이양미, 전평국(2005)은 수학 문제해결과정에서 초등학교 3학년 학생들이 상징적 표상보다 영상적 표상에 익숙하고, 소집단 협력 학습을 통해 개별 표상을 공동의 표상으로 정교화 해 가는 과정을 통해 개개인의 표상에도 변화를 보였다고 밝히고 있다.

김민정, 권혁진(2010)은 고등학교 1학년을 대상으로 상위권 학생들의 표상 활용 능력이 현저히 높게 나타나며, 중·하위권 학생들이 표상 활동을 어려워하는 이유로 문제의 조건을 구조적으로 표현하는 것을 어려워하기 때문이라고 제시하고 있다. Zhaner & Corter(2010)는 특정한 확률 문제를 위해서는 특정 시각적 표현이 이용되어야 하고, 어떤 표현을 선택하느냐 하는 것이 성공적인 문제해결임을 밝히면서, 시각적 표현이 문제를 수학적으로 나타내기 위해, 또한 문

제해결전략을 발견해 내기 위해 매우 중요한 역할을 할 수 있다고 하였다.

이에 문제해결을 위해서는 학생들이 영상적 표상을 좋아하는 것처럼 그림으로 문제를 나타내보도록 유도해야 할 필요가 있으며 개별적으로 실시하기 보다는 공동으로 먼저 실시해 봄으로써 개별적 이해를 도모해야 할 것이며 문제에 따라 다양한 시각적 표현의 중요성을 일깨우도록 해야 할 것이다.

나. 시각적 표현이 문제해결에 미치는 영향에 관한 연구

나일주 외(2010)의 연구에서는 초등학생의 시각화 경향성이 문제해결력과 높은 상관관계가 있는 것으로 확인되었다. 이는 문제해결과정에서 시각적 표현이 문제해결력과 깊은 관련이 있음을 이야기 한다고 하겠다. 윤여주 외(2010)의 연구에서는 초등학교 기하문제의 해결에 미치는 영향을 분석하였는데, 시각화가 문제해결과정에서 도형에 대한 이해와 더불어 문제해결에 결정적인 역할을 했다고 밝히고 있다.

이를 통해 시각적 표현이 문제해결의 결과에 영향을 미친다고 볼 수 있어 시각적 표현의 중요성을 충분히 반영하고 있다.

다. 정형화된 도식을 통한 문제해결 지도에 관한 연구

초등학교 학습부진학생을 대상으로 한 이태수, 유재연(2006)의 연구와 박애란, 김애화(2010)의 연구에서는 문장제 속의 의미구조에 따라 도식을 제공하여 이러한 도식의 이용이 문제해결에 어떤 영향을 미치는지 알아보고 있다. 이 연구들에서 제시되고 있는 도식은 전자에서는 '변화형 문제', '결합형 문제', '비교형 문제'로, 후자에서는 '나란히형', '만세형'으로 이름 붙여진 매우 정형화된 형태를 띠고 있다.

김종백, 이성원(2011)은 초등학교 2학년 일반 학생을 대상으로 Marshall의 스키마 유형을 적용하여 '변화', '그룹', '비교', '제진술', '조건화'의 5가지 정형화된 도식을 제시하고 있다. 문제해결과정에서 학생들은 문제에 적합한 스키마를 선택하여 적용하도록 하고 있는데, 결론은 난이도가 낮은 문제보다는 높은 문제에서 문제의 이해를 돕는 스키마 프로그램이 효과가 더 확연하다는 것이다.

Jitendra 외(2011)는 스키마 기반 교수를 7학년 일반 학생들에게 비례 문제를 해결하는 것을 가르치기 위해 설계하였다. 여기에서 연구자들은 도식적 다이어그램에 수학적 문제의 구조를 넣는 것을 강조하여, 스키마 기반 교수가 수학적 문제 해결에 직접적인 영향을 끼침을 밝혔다.

이 연구들을 통해 볼 때 정형화된 도식을 적용한 문제해결 방법은 분명 학습부진이나 학습장애아, 또는 문장제를 처음 다루는 저학년 학생들에게는 효과적인 방법이라고 하겠다. 하지만 본 연구에서는 초등학교 중학년 일반 학생을 대상으로 하는 만큼 정형화된 도식을 제시하여 단순히 적용하도록 하기 보다는 문제해결과정에서의 시각적 표현을 학생 스스로 구성해 낼 수 있도록 하는 방향으로 진행하였다.

라. 문제해결과정에서의 시각적 표현 지도방안에 관한 연구

Diezmann(2002)은 다이어그램을 이용하는 것이 학생들의 문제해결 능력을 강화시킨다고 하면서 다목적 다이어그램 4종류와 그 다이어그램을 이용하기에 적절한 문제의 예를 제시하고 있다. 첫째, 'network diagram'은 학교로 가기 위해 걸어갈 길을 계획하는 것과 관련된 문제에서 다루게 되고, 둘째, 'matrix diagram'은 바둑판 모양 속에 행과 열 속에 서로 다른 요소들을 관련시키는 문제에서 다루게 되며, 셋째, 'hierarchy diagram'은 학교 조직 구조의 위계를 나타내는 문제와 관련되며, 마지막으로, 'part-whole diagram'은 한 학급 구성원들이 서로 다른 작은 그룹으로 구성되는 문제와 관련된다. Diezmann은 이러한 4가지의 도식에 익숙해지면 이 도식으로 해결할 수 없는 새로운 문제에서도 정보 사이의 관계를 파악할 수 있게 된다고 하였다. 즉 다이어그램을 통한 문제해결의 경험은 문제의 구조를 이해하는 것을 어려워하는 학생들과 문제에 주어진 표면적 세부사항에 치중하는 학생들을 돕는데 유용하다고 하겠다.

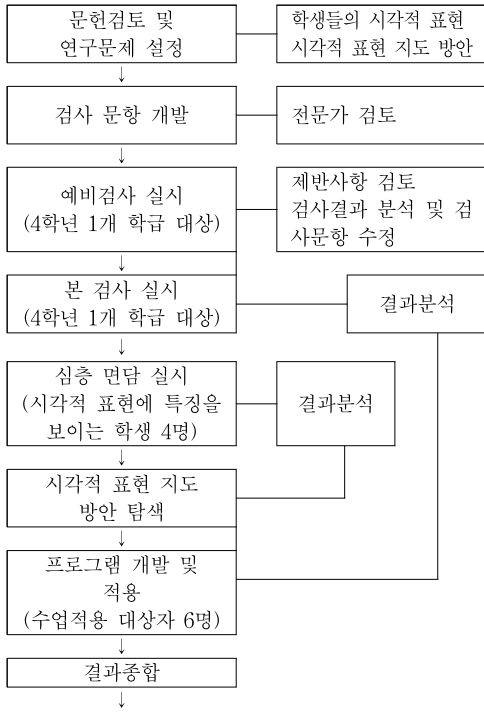
이러한 점을 고려하여 본 연구에서는 문제해결과정에서의 시각적 표현의 지도를 위해서 문제유형을 분류하여 이에 맞는 다이어그램을 개발하고, 이때 다이어그램을 정형화하여 제시하기 보다는 학생 개개인의 표현을 중시할 수 있도록 기본 뼈대로서 역할을 할 수 있도록 제시하였다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구를 수행하기 위한 연구 대상은 서울 D초등학교 4학년 1개 학급이었으며 본 검사를 실시한 후 검사지 분석 결과를 바탕으로 심층면담 대상자 6명을 선정하였다. 이 중 4명은 시각적 표현에 있어서 다양함과 풍부한 반응 등 특징적인 반응을 보인 학생으로 의사표현 능력을 고려해 선정하였다. 다른 2명은 시각적 표현 점수가 중간 정도 되는 학생을 추가 선정하였다. 이는 Patton(2002)이 ‘선정된 사례에 적용된 결과라면 다른 사례에도 적용될 수 있다’라고 한 주장을 바탕으로 정보가 풍부한 결정적 사례를 선정하는 주요대상표집(Critical case sampling) 방법으로 선정한 것이다.

2. 연구절차



연구 문제 해결	
1. 초등학교 4학년 학생들의 문제해결과정에서의 시각적 표현 분석	
2. 문제해결과정에서의 시각적 표현 지도방안 탐색	

[그림 1] 연구절차

[Fig. 1] Research procedures

3. 검사도구

본 연구에서는 초등학교 4학년 학생들이 문제해결 과정에서 시각적 표현을 어떻게 나타내는지에 대한 정보를 얻고, 이를 바탕으로 심층면담 대상자와 수업 프로그램 적용 대상자를 선정하기 위하여 검사지를 제작하였다. 검사지 제작을 위하여 문제해결과정에서의 시각적 표현과 관련된 선행 연구 및 문헌 자료, 초등학교 수학 교과서를 참고로 하여 본 연구의 목적에 맞도록 문항을 재구성하였고, 이를 통해 학생들의 문제해결과정에서 나타나는 시각적 표현을 알아보기 위한 총 8문항으로 구성된 ‘시각적 표현 검사지’를 마련하였다. 제작된 검사지는 전문가 및 초등학교 교사 3인과 함께 타당성에 대한 검사는 실시하였으며 문제들은 기존의 문제를 최소한으로 수정하여 제작하였다.

4. 자료 수집 및 분석

연구문제의 해결을 위한 시각적 표현 검사지와 함께 본 검사 과정에서 학생들의 문제해결과정에 대한 관찰 및 문제에 대한 질문 내용 등을 기록한 현장 일지를 바탕으로 결과를 분석하였다. 심층면담은 면담 대상 학생의 본 검사지에 대한 반응을 바탕으로 이루어졌으며 면담 자료 및 면담 과정에서 학생들의 특징적인 반응을 관찰 기록한 현장 일지, 면담 전 과정을 기록한 녹화자료 등이 분석되었다.

또한 총 7차시로 구성된 시각적 표현 지도 과정이 담긴 수업프로그램 적용 대상 학생들의 활동지와 연구자가 수업을 진행하면서 관찰한 기록이 담긴 현장일지 그리고 수업의 전 과정을 기록한 녹화 자료를 바탕으로 수업프로그램 적용 결과에 대한 분석이 이루어졌다.

IV. 연구 결과

1. 학생들의 문제해결 과정에서 나타나는 시각적 표현

본 연구의 결과를 모든 문항에 대하여 진술하기 보다는 대표적인 하나의 문항을 바탕으로 문제해결 과정에서 나타나는 시각적 표현을 알아본다.

가. 문항1 - 연꽃문제

연못의 연꽃은 매일 2배씩 늘어납니다. 오늘 연못의 $\frac{1}{2}$ 만큼이 연꽃으로 덮였다면, 2일 전에는 연꽃이 연못을 어느 정도 덮고 있었는지 분수로 나타내시오.

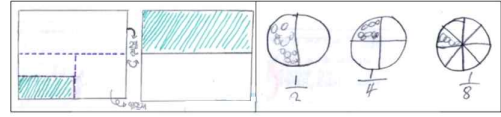
[표 1] 문항 1의 해결 과정에서 나타난 수학적 표현 (N=28)

[Table 1] Mathematical expression of Problem solving #1(N = 28)

	정답	오답	무응답
시각적 표현	4	11	
기호적 표현		1	
언어적 표현		4	
혼합 표현(시각 포함)	1	1	
혼합표현(시각 미포함)		1	
계	5	18	5

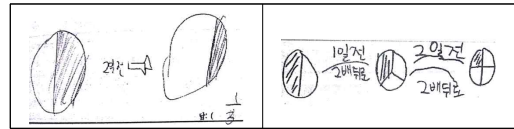
이 문제를 통해서 볼 때 학생들의 오답이 시각적 표현에서 많이 나타남을 알 수 있다. 이는 많은 오답으로 이끄는 하나의 요인이라고 할 수도 있다.

정답을 한 학생들을 보자면 [그림 2]에서의 두 학생은 각각 원과 사각형으로 '연못'의 모습을 나타내어 문제를 해결하였는데, 원과 사각형은 분수 학습에서 주로 다루게 되는 도식 표현으로 별도의 식을 세우는 활동 없이 곧장 답을 이끌어 내고 있다. 이는 정확한 시각적 표현을 통해서 문제를 쉽게 해결할 수 있음을 나타낸다.



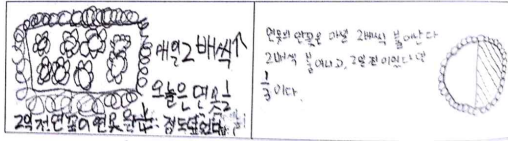
[그림 2] '연못 문제'에 대한 다양한 시각적 표현
[Fig. 2] Various visual representations on 'Pond problem'

시각적 표현을 했지만 올바른 답을 구하지 못한 경우를 살펴보면, 대부분 [그림 3]에 제시된 것과 같은 이유라고 할 수 있는데, 두 경우 모두 표현 방식과 내용은 조금 다르지만 모두 분수 개념을 잘 이해하지 못하고 있기 때문에 올바른 도식 표현에 이르지 못한 것으로 보인다. 절반의 절반이 $\frac{1}{3}$ 이라고 여기는 대표적인 오류라고 볼 수 있다.



[그림 3] '연못 문제'에 대한 잘못된 시각적 표현
[Fig. 3] Wrong visual representation on 'Pond problem'

[그림 4]에서는 문제에 주어진 조건을 추상화하여 표현하기보다는 '그림 표현'을 통해 나타내고 있다. 먼저 왼쪽 그림을 살펴보면, 사각형 연못의 가장자리를 표현했으며 연꽃으로 가득 덮여 있는 모양을 그렸다. 그러나 이러한 시각적 표현이 문제해결에는 전혀 도움이 되지 않음을 알 수 있다. 이는 문제해결보다는 꾸미는 것에 오히려 더 많은 노력을 들여 문제해결의 본질을 훼손하고 있다고 볼 수 있다. 오른쪽 그림은 왼쪽 그림에 비하면 비교적 도식 표현의 요소를 많이 갖추고 있지만 역시 시각적 표현이 문제해결에 아무런 영향을 미치지 못하고 있음을 알 수 있다. 이는 현란한 시각적 표현보다는 간략하고 핵심적인 시각적 전략의 필요성을 나타내고 있음을 알 수 있다.



[그림 4] '연못 문제'에 대한 그림 표현
 [Fig. 4] Picture representation for 'Pond problem'

시각적 표현 검사 결과 가장 두드러지게 나타난 것은 학생의 성취도와 시각적 표현의 빈도 사이에 아주 강한 상관관계가 있다는 것이다. 시각적 표현을 위한 검사지는 총 8문항으로, 각각의 학생들의 정답 개수를 계산하였다. 이와는 별도로 정답의 여부와는 관계없이 문제해결에서 시각적 표현을 시도했는지의 여부에 따라 한 문항 당 1점씩 부여하여 시각적 표현 점수를 계산하였다.

결과를 살펴보면, 정답의 수가 적을수록 문제해결에서 시각적 표현의 시도여부를 나타내는 시각적 표현점수 또한 낮았다. 반대로 정답의 개수가 6-8개로 많은 문제를 해결한 학생일수록 시각적 표현 점수 또한 대부분 6-8점으로 높게 나타났다. 이는 성취도가 우수한 학생일수록 수학 문제 해결에서 시각적 표현을 많이 이용한다는 선행연구의 결과와도 일치한다고 할 수 있다.

[표 2] 본 검사의 '정답 개수'와 '시각적 표현 점수'와의 관계(N=28)

[Table 2] The relationship between 'The number of right answer' and 'the score of visual expression'(N = 28)

표현점수 맞은 개수	표현점수		
	0-2점	3-5점	6-8점
0-2개	14	4	0
3-5개	1	2	2
6-8개	0	1	4

다른 관점으로 볼 때, 성취도가 우수한 학생들은 시각적 표현이 문제해결을 위한 전략의 하나가 될 수 있음을 알고 있다는 것이고 이를 문제 해결에 활용하고 있다는 것이다. 반면에 성취도가 낮은 학생들은 시각적 표현을 문제해결을 위해 활용하지 못하고 있으며, 이는 두 가지 관점에서 생각해 볼 수 있다. 하나는 시

각적 표현에 어려움이 있기 때문에 맞은 것이 낮게 나오는 경우이고, 다른 하나는 시각적 표현을 할 줄 알더라도 시각적 표현이 문제 해결에 어떻게 활용될 수 있는지에 대해 알지 못하기 때문에 시각적 표현을 시도하지 않는 경우이다. 어떠한 결과이든 두 경우 모두 시각적 표현이 학생들의 성취도와 관련이 있다는 것이다.

2. 시각적 표현에 대한 심층면담 분석

시각적 표현에 대한 심층면담은 6명의 학생 중 보통의 학생 2명을 집중적으로 조사하여 기술하며 특별한 경우 상위권의 학생들의 시각적 표현에 대한 분석을 보통학생들의 시각적 표현과 비교해 봄으로써 문제 해결에 있어서의 시각적 표현의 중요성을 알아본다.

가. 학생 A의 문제해결과정에서의 시각적 표현

학생 A의 본 검사 결과는 맞힌 점수 2점, 시각적 표현 점수 4점이다. 시각적 표현을 이용하지 않은 4문제 중 3문제는 언어적 표현과 기호적 표현을 함께 활용하여 문제 해결을 시도하였고, 1문제에 대해서는 무응답을 보였다. 이 학생은 시각적 표현 점수도 비교적 높은 편이고, 문제 해결을 위해 나타난 언어적 표현을 살펴보아도 문제에 대한 내적 표상이 잘 이루어진 아동으로 판단됨에도 불구하고 문제해결과정에서 시각적 표현을 적절히 활용하지 못한다는 측면에서 특징적이라 할 수 있다. 학생 A와의 면담 과정에서 나타난 특징적인 부분은 다음과 같다.

1) 문제 해결 경험을 통한 시각적 표현의 가치 인식

학생 A는 시각적 표현을 이용해 문제를 해결하는 경험을 통해서 문제해결과정에서의 시각적 표현의 가치를 스스로 인식해 감을 알 수 있었는데, 이는 <에피소드1>에 나타나 있다. 학생 A는 시각적 표현이 언어적 표현에 비해 시간이 조금 걸리고, 한눈에 알아볼 수 있다는 점을 이야기하고 있다.

<에피소드1 - 학생 A의 시각적 표현의 가치 인식>
 연구자: A가 말로 표현해서 풀었던 울타리 문제를 그

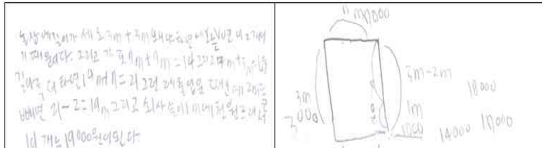
림으로 다시 풀어 보았잖아. 어떤 것이 더 좋아?

학생 A: 그림이요.

연구자: 왜?

학생 A: 말은요, 시간도 오래 걸리고 한 눈에 알 수 없는데, 그림은요 한 눈에 알 수 있어서 좋고 시간도 조금 걸렸어요.

이는 학생 A가 [그림 5]에 제시된 것처럼 언어적 표현으로 문제 해결을 시도했다가 오답에 이르렀던 것을 시각적 표현을 이용함으로써 간단하고 명확한 방법으로 정답에 이를 수 있음을 체득했기 때문이다.



[그림 5] 학생 A의 '울타리 문제'에 대한 표현의 변화
[Fig. 5] Student A's Changes in the representation of the 'fence issue'

2) 문제해결 경험을 통한 시각적 표현에서의 문제점 파악 및 개선

<에피소드 2>에서 볼 수 있는 것처럼, 학생 A는 여러 문제를 시각적 표현을 통해 해결하는 경험을 통해 자신의 시각적 표현에서의 문제점을 스스로 파악하고 개선 방향을 제시하는 모습도 엿볼 수 있었다.

<에피소드2 - 학생 A의 시각적 표현에서의 문제점 파악 및 개선>

연구자: 식탁 문제에서는 A가 사람을 한 명 한 명 그렸는데 이러면 안 좋은 점이 있지 않을까?

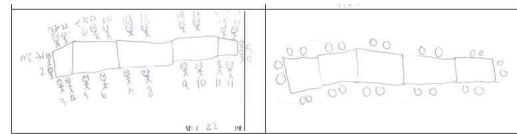
학생 A: 시간이 오래 걸려요.

연구자: 그럼 다른 방법은 없을까?

학생 A: 동그라미나 다른 모양을 그려요.

이에 대한 학생 A의 시각적 표현의 변화를 살펴보면, [그림 6]에서 볼 수 있는 것처럼 문제 상황에 대한 이해를 잘 했음에도 사람을 그리는데 치중한 나머지

실수를 범하여 오답에 이르렀다. 하지만 면담과정에서 학생 A는 앞에서 다른 문제를 도식 표현으로 해결한 경험을 통해 스스로 자신의 표현에서의 문제점을 찾아내고 개선방안을 제시하여 복잡한 사람 그림을 원으로 간단히 표현하고 있다. 학생 A의 시각적 표현과 그의 변화를 통해 시각적 표현의 구조 및 간결성을 함께 고려하도록 지도할 필요가 있음을 알 수 있다.



[그림 6] 학생 A의 '식탁 문제'에 대한 표현의 변화
[Fig. 6] Student A's Changes in the representation of the 'table issues'

3) 문제해결 경험을 통한 시각적 표현의 유용성 체득

학생 A는 본 검사에서 무응답을 보였던 문제를 시각적 표현을 활용하여 혼자 힘으로 잘 해결해 내는 모습을 보였고, <에피소드3>을 볼 때 학생 A가 시각적 표현을 이용해 문제를 해결하는 경험을 바탕으로 문제 해결과정에서의 시각적 표현의 유용성을 알게 되었고, 다른 문제에도 이를 적용함을 알 수 있다. 이는 특정 문제에서 시각적 표현에 대한 학습 경험이 다른 문제의 해결에서도 이어진다는 선행연구의 결과와도 일치하는 것이다.

<에피소드3- 학생 A의 시각적 표현의 유용성 체득>

연구자: ('박물관 문제'를 가리키며) 이 문제는 어떻게 풀면 될까?

학생 A: 그림을 그려서

<중략>

연구자: 지난 번 시험(본 검사)에서는 못 풀었는데 어떻게 풀 수 있게 된 거야?

학생 A: 그때는 그림을 그릴 줄 몰라서요. 어떻게 풀지 몰랐는데요. 지금은 그림을 그리니까 풀 수 있게 되었어요.

연구자: 앞으로 이런 문제 아노면 어떻게 할 것 같

아?

학생 A: 잘 모르겠으면 그림을 그려서요, 최대한 맞게 할 있을 것 같아요.

나. 학생 B의 문제해결과정에서의 시각적 표현

학생 B의 본 검사 결과는 맞힌 점수 4점, 시각적 표현 점수 0점이다. 문제해결을 시도한 5문제에 대해서는 모두 언어적 표현과 기호적 표현만을 나타내었으며, 나머지 3문제에 대해서는 무응답을 보였다. 이 학생은 맞힌 점수가 4점으로 비교적 높았음에도 불구하고 모든 문제 해결 과정에서 시각적 표현을 전혀 이용하지 않았다. 본 검사지가 시각적 표현이 문제 해결에 결정적인 역할을 하는 문제들로만 구성되었다는 측면에서 생각해 볼 때 이 중 50%에 해당하는 문제를 시각적 표현 없이 언어적 표현만으로 성공적으로 해결하였다는 점, 학생 본인이 언어적 표현으로 나타낼 수 없는 3문제에 대해서는 무응답을 보였다는 점은 매우 특징적이라 하겠다. 학생 B와의 면담 과정에서 나타난 특징적인 부분은 다음과 같다.

1) 문제해결과정에서 기호적 표현에만 치중

면담 결과 학생 B는 문제해결에서 식을 세워서 문제를 푸는 기호적 표현만을 주로 이용하는데, 본 검사에서 문제풀이 과정을 ‘구체적’으로 쓸 것을 강조하여 언어적 설명을 덧붙였다.

<에피소드 4 - 학생 B의 시각적 표현을 하지 않은 이유에 대한 면담>

연구자: (‘식탁 문제’를 가리키며) B는 이 문제를 왜 풀려는 시도도 안했을까?

학생 B: 음…….모르겠어요.

연구자: B는 다른 더 어려운 문제도 잘 풀었는데?

학생 B: 막 뒤죽박죽 헛갈려서 식을 못 쓰겠어요.

연구자: 식을 세우는 거 말고 다른 방법은 없을까?

학생 B: 잘 모르겠어요.

연구자: 문제가 머릿속에서 이해하기가 복잡하니까 그림을 그려 봤으면 어땠을까?

학생 B: 어떻게 하는지 잘 몰라요.

학생 B가 평소에 문제를 풀 때 제일 먼저 시도하는 것이 식을 세우는 것이고 식을 세울 수 없으면 문제 해결을 포기한다는 것을 알 수 있다. 또한 시각적 표현이 문제해결을 위한 유용한 수단이 될 수 있음을 깨닫지 못하고 있었다.

2) 성취도가 높은 학생들의 시각적 표현에 대한 인식

문제해결과정에서 시각적 표현을 전혀 이용하지 않은 학생 B의 특성과 비교하기 위해 본 검사에서 시각적 표현 점수가 가장 높았던 두 학생을 대상으로 추가 면담을 실시하였다.

<에피소드 5 - 학생 1과의 시각적 표현에 대한 면담>

연구자: 검사지에 표현을 정말 잘 했는데, 평소에도 문제 풀 때 이렇게 하니?

학생 1: 네…….아니요. 그냥 식 세워서 풀어요.

연구자: 평소에도 그림으로는 안 나타나?

학생 1: 보통은 그냥 식으로 푸는데 문제가 어려우면 그럴 수도 있겠죠.

연구자: 이번에는 그림을 잘 그렸는데, 그림을 그리면 뭐가 좋아? 왜 그림을 그릴까?

학생 1: 그림으로 그리면요, 보고서도 알 수 있으니까요.

연구자: 문제 풀 때 그림을 그리면 좋다는 걸 어떻게 알았어?

학생 1: 모르겠어요. 그냥 원래부터요.

<에피소드 6 - 학생 2와의 시각적 표현에 대한 면담>

연구자: 평소에도 문제 풀 때 이렇게 그림을 그려?

학생 2: 이런 식으로 된 문제는 그림을 그리는데요.

연구자: 이런 식으로 된 문제가 뭐야?

학생 2: 그림을 그릴 필요가 있는 문제들이요. 이런 문제는 그림을 그리는데요. 그냥 풀 수 있는 거는 식으로도 하는 데요.

연구자: 어떤 문제가 그림을 그릴 필요가 있는 문제지?

학생 2: 순서를 타나내고 이런 거요?

연구자: 그림을 왜 그려?

학생 2: 그러면 더 쉬우니까.

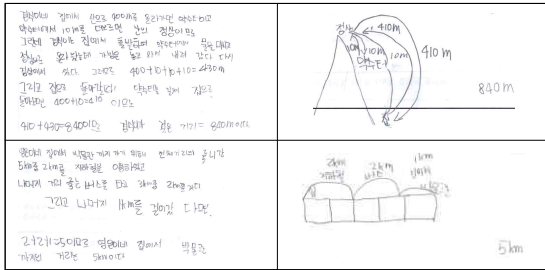
연구자: 그림을 그리면 더 쉽다는 걸 어떻게 알았어?

학생 2: 문제를 풀다보니까요. 그림을 그리면 잘 풀

리고 그래가지고요.

학생 1과 학생 2와의 면담 결과를 분석해 보면, 문제 해결 능력이 우수한 학생이 평소에는 식을 세워서 문제를 해결하지만, 식을 세워 풀기 어려운 문제에 대해서는 시각적 표현을 통해 문제를 해결할 수 있음을 체득하고 있는 것으로 나타났다. 이는 주로 식을 세워서 문제를 해결한다는 학생 B의 반응과 동일하지만, 차이점은 학생 B는 시각적 표현이 문제해결을 위한 전략이 될 수 있음을 알지 못한다는 것이다.

3) 문제해결 경험을 통한 시각적 표현의 유용성 인식



[그림 7] 학생 B의 ‘등산 문제’와 ‘박물관 문제’에 대한 표현의 변화

[Fig. 7] Student B's ‘Climbing issues’ and ‘Museum of the problem’ the change of expression

학생 B의 언어적 표현을 통한 문제 해결을 통해, 학생 B가 문제에 대한 내적 표상을 어느 정도 형성하고 있다는 것을 짐작할 수 있었지만, 문제 상황을 시각적 표현으로 나타내는 활동을 매우 부담스러워하고 자신 없어 하는 모습을 엿볼 수 있었다. 이는 문제 상황을 시각적 표현으로 나타내 본 경험이 부족하기 때문이라고 할 수 있다. 하지만 학생 B는 일단 시각적 표현에 성공하고 나면 시각적 표현에 매우 흥미를 느끼는 모습을 보였는데, 학생 B가 문제 상황에 대한 내적 표상을 형성하고 있기 때문에 내적 표상과 시각적 표현을 관련시켜 쉽게 수용하고 있음을 보여주는 것이다.

3. 문제해결과정에서의 시각적 표현 지도방안 마련 및 적용

문제해결과정에서 나타나는 학생들의 시각적 표현에 대한 연구 결과 분석을 통해 도출된, 지도 방안 마련에 있어서의 시사점과 교육과정 분석, 선행 연구 및 관련 문헌 검토 결과를 토대로, 초등학교 4학년을 대상으로 한 문제해결과정에서의 시각적 표현 지도방안을 마련하여 적용하였다.

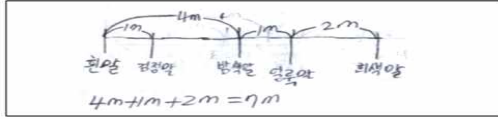
[표 3] 지도방안의 차시별 학습 내용

[Table 3] Class' learning content of teaching methods

차시	주제	학습 내용
1	도식 표현의 의미	- 도식 표현의 뜻과 방법 알기 - 도식 표현을 이용하는 이유 (유용성) 알기
2	간단한 도식 표현 다루기	- ‘중요한 것’ 찾아 나타내기 - 도식표현이 결정적인 역할을 하는 문제 해결하기
3	도식표현유형1 - 화살표 도식	- 친숙한 시나리오를 통한 ‘화살표 도식’ 도입 - 문제해결과정에서 화살표 도식 활용하기
4	도식표현유형2 - 선 도식	- 친숙한 시나리오를 통한 ‘선 도식’ 도입 - 문제해결과정에서 선 도식 활용하기
5	도식표현유형3 - 바둑판 도식	- 친숙한 시나리오를 통한 ‘바둑판 도식’ 도입 - 문제해결과정에서 바둑판 도식 활용하기
6	도식표현유형4 - 부분·전체 도식	- 친숙한 시나리오를 통한 ‘부분·전체 도식’ 도입 - 문제해결과정에서 부분·전체 도식 활용하기
7	다양한 도식 표현 다루기	- 앞 차시에 배운 도식 표현을 활용할 수 있는 문제 해결하기 - 새로운 도식 표현을 만들어 내야 하는 문제 해결하기

그 과정에서 나타난 결과를 종합하면 다음과 같다.

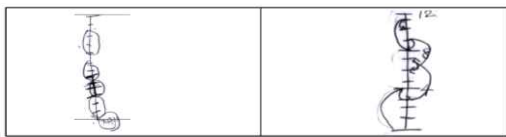
첫째, 1차시 수업에서는 도식 표현의 의미를 인식시키기 위해 그림 표현의 반대 개념으로 도식 표현의 의미를 도입하였다. 특정 대상에 대한 그림 표현과 도식 표현을 비교해 보는 활동과 문제 상황에 대한 그림 표현과 도식 표현의 예를 제시하고 이를 바탕으로 문제를 해결해 보는 활동을 통해 학생들은 도식 표현의 의미와 방법 및 문제해결에 있어서의 유용성에 대해 인식하게 되었다.



[그림 8] 학생 E의 '경마장 문제'에 대한 도식 표현
 [Fig. 8] Student E's Schematic representation of 'Racetrack problem'

둘째, 2차시 수업에서는 도식 표현의 의미 이해를 더욱 공고히 하기 위해 동일 대상이 포함된 여러 문제를 해결함으로써, 동일한 대상이 문제 상황에 따라 다르게 표현되어야 함을 인식하게 되었다. 또한 도식 표현의 결과가 문제에 주어진 대상의 외적 특성을 나타낼 필요가 없음을 깨닫게 됨으로써, 도식 표현의 추상적 특성을 인식하게 되었다. 도식 표현만으로 해결이 가능한 문제를 해결해 보는 경험을 통해 학생들은 문제해결에 있어서의 시각적 표현이 지니는 유용성을 느끼고, 시각적 표현을 문제해결을 위한 하나의 방법으로 수용하게 되었다.

셋째, 3차시 수업에서는 도식표현유형으로 '화살표 도식'을 제시하였는데, '화살표 도식'은 어떤 공간적인 틀 속에 대상의 움직임을 표현함으로써 해결할 수 있는 문제에서 활용할 수 있다. 학생들은 문제에 주어진 공간적인 요소를 추상화시켜 도식으로 표현하고, 그 위에 대상의 움직임에 대한 세부조건들을 서로 관련지어 표현하는 과정을 통해 문제를 해결하는 경험을 하였다.



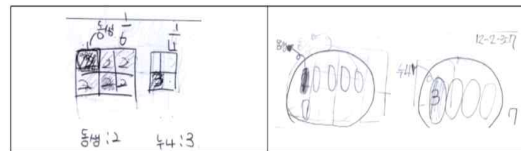
[그림 9] 학생 C의 '청개구리문제'에 대한 Re-arrange를 통한 도식 표현 수정
 [Fig. 9] Student C's modification of schematic representation for the 'frog problem' through the Re-arrange

넷째, 4차시 수업에서는 도식표현유형으로 '선 도식'을 제시하였는데, '선 도식'은 문제에 주어진 조건들의 순서나 위치 관계를 다루는 문제에서 활용할 수 있다. 여기서 다른 문제들은 도식의 기본적인 틀이 '선'으로

이루어져 학생들이 쉽게 도식표현에 대한 시도를 하는 습을 보여주었지만, 주어진 조건 간의 순서나 위치 관계를 나타내는 데는 여러 차례의 're-arrange'의 단계를 거쳐야 했다. 이러한 과정을 통해 학생들이 자신의 도식 표현을 명확히 해 가는 모습을 확인할 수 있었다.

다섯째, 5차시 수업에서는 도식표현유형으로 '바둑판 도식'을 제시하였는데, '바둑판 도식'은 주어진 조건들 간의 관계를 파악하거나 경우의 수를 구하는 문제에서 활용할 수 있다. '바둑판 도식'은 매우 정형화된 도식표현으로, 학생들은 격자무늬 속에 문제에 주어진 조건들을 관련시켜 표현함에 있어서 어려움 없이 해결하는 모습을 보였다. 또한 '바둑판 도식'을 통해 몇몇의 문제를 다루어보는 경험을 통해 '바둑판 도식' 표현으로 해결할 수 있는 문제의 특성을 쉽게 파악하였다.

여섯째, 6차시 수업에서는 도식표현유형으로 '부분-전체 도식'을 제시하였는데, '부분-전체 도식'은 문제에 주어진 대상의 부분과 전체 사이의 관계를 파악함으로써 해결할 수 있는 문제에서 활용할 수 있다. '부분-전체 도식'에서 다루어지는 문제들이 다른 도식표현유형에서 다루어지는 문제보다 좀 더 포괄적이기 때문에, 학생들의 도식 표현에 있어서도 자신만의 독자적인 도식표현을 다양하게 구성하는 모습을 보였다.



[그림 10] 학생 C와 학생 D의 '연필 문제'에 대한 '부분-전체 도식' 표현
 [Fig. 10] Student C and Student D, 'part-whole schematic representation' for the 'pencil problem'

일곱째, 각각의 문제를 해결하는 과정에서는 '문제해결과정 5단계' 중 특히 '문제 읽기'의 단계와 '시각화하기'의 단계를 강조하여 학생들이 문제 상황에 대한 올바른 시각적 표현을 이끌어낼 수 있도록 하였다. '문제 읽기' 단계에서 학생들은 문제 상황을 머릿속에 떠올려 인지하도록 하고, '시각화하기' 단계에서는 표현해야 할 것이 무엇인지를 찾아 도식으로 나타내고, 그 위에 주어진 조건들을 관련시켜 표현할 수 있도록 하였다. 학생들이 이러한 과정을 통해 문제 상황에 대한 자신

의 시각적 표현을 명확히 수정해 감을 확인할 수 있었다.

여덟째, 7차시 수업은 앞에서 배운 도식 표현의 의미와 4가지 도식표현 유형에 대한 학습을 평가하기 위해 다양한 도식 표현이 가능한 문제를 학생 스스로 풀어보도록 하였다. 여기서 학생들은 앞에서 학습한 4가지 도식 표현 유형 중 주어진 문제에 적합한 것을 찾아 문제해결에 적용하는 모습을 보였으며, 한 발 더 나아가 자신만의 독특한 도식 표현을 구성하는 모습을 보였다. 또한, 학습한 4가지 도식표현유형을 적용할 수 없는 문제에 대해서도 새로운 도식표현을 만들어 낼 수 있음을 확인하였다.

V. 결론

문제해결과정에서 나타나는 학생들의 시각적 표현을 분석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 성공적인 문제해결을 위해서는 시각적 표현을 잘 활용할 수 있도록 도와야 한다. 학생들의 문제해결에 있어서의 성취도와 문제해결과정에서의 시각적 표현의 활용 사이에는 깊은 관계가 있었다. 본 검사의 점수가 높은 학생일수록 시각적 표현 점수는 더 높게 나왔는데, 이는 상위 학생일수록 문제해결에서 시각적 표현을 더 자주 사용한다는 선행연구의 결과와도 일치하는 것이다(황현미, 방정숙, 2006; 김민경, 권혁진, 2010; van Garderen & Montague, 2003). 이처럼 성공적인 수학 문제의 해결과 시각적 표현의 활용사이의 상관관계가 명백한 만큼, 학생들에게 문제해결을 위한 방법으로 문제해결과정에서 시각적 표현을 지도하는 것은 의미 있는 일이다.

둘째, 문제해결에 있어 식 세우기를 우선적으로 하기 보다는 시각적 표현을 우선하도록 해야 할 필요가 있다. 학생들은 문제해결에서 식 세우기에 치중하는 경향이 있는 것으로 드러났다. 본 검사에서 제시된 문항이 문제해결에 시각적 표현이 필수적이라 할 수 있는 문제들임에도 불구하고 성취도가 낮은 학생일수록 시각적 표현 없이 기호 표현만을 이용함으로써 오답에 이르는 경우가 많았다. 또한 시각적 표현을 했다고 하더라도 기호적 표현을 통해 답에 대한 전제를 미리 가지고 시각적 표현을 함으로써 시각적 표현을 통해 기호적 표현이 끌어내리지 못해 오답에 이르는 경우도

있었다.

셋째, 문제해결에서의 시각적 표현의 중요성에 대한 인식의 전환이 필요하다. 성취도가 높은 학생들이 수학 문제해결과정에서 시각적 표현의 유용성을 알고 스스로 문제해결에 시각적 표현을 활용할 수 있음에 반해, 성취도가 낮은 학생들은 시각적 표현이 문제해결을 위해 이용될 수 있음을 인식하지 못하고 있다. 수학문제해결능력이 양호함에도 불구하고 본 검사에서 시각적 표현을 전혀 이용하지 못해, 머릿속 표상만으로는 해결하기 어려운 복잡한 문제에 대해서는 무응답 반응을 보였던 학생 B와의 면담에서 나타난 것처럼, 학생 B는 시각적 표현을 통해 문제해결을 할 수 있다는 것을 알지 못하기 때문에, 문제를 읽고 다음 단계에서 식을 세울 수 없으면 문제를 포기해 버린 것이다. 본 검사에서 무응답 반응을 보였던 많은 경우가 학생 B와 같다고 할 수 있는데, 시각적 표현이 문제해결을 위한 방법이 될 수 있음을 지도한다면 무응답 반응을 보인 학생들이 문제 상황을 시각적으로 표현해 봄으로써 최소한 문제해결을 시도해 보도록 할 수 있다는 측면에서 긍정적이라 하겠다.

넷째, 시각적 표현도 어느 정도 추상화가 필요함을 인지하도록 지도해야 할 필요하다. 선행연구에서는 시각적 표현을 도식 표현과 그림 표현으로 나누어 그림 표현을 도식 표현과 같은 비중을 두고 다루었던 것에 반해, 본 검사에서는 그림 표현이 차지하는 비중이 그리 크기 않았다. 이는 학생들이 시각적 표현에 대해 잘 모른다고 하더라도 일단 시각적 표현을 통해 문제해결을 시도하는 학생이라면, 문제해결과정에서의 시각적 표현이 주어진 대상을 있는 그대로 그림으로 나타내면 안 되고, 어느 정도의 추상화 과정을 거쳐 도식적으로 표현해야 함을 은연중에 인지하고 있기 때문으로 보인다. 그러므로 학생들이 문제 상황을 그림 표현으로 나타내는 문제에 대해서는 도식 표현의 의미를 지도함으로써 해결할 수 있겠고, 시각적 표현 지도는 도식 표현의 방법에 초점을 맞추어 이루어져야 하겠다.

다섯째, 시각적 표현의 과정에 대한 지도가 필요하다. 학생들이 문제해결을 위해 시각적 표현을 한다고 하더라도 성공적인 문제해결에 이르지 못하는 경우가 많은데, 이는 학생들이 문제에 주어진 조건 중 '무엇을' 표현해야 할지, 또 주어진 조건들을 '어떻게'서로 관련 지어 세부적으로 표현할지 판단을 내리지 못하기 때문

이다. 이에 대해 선행연구에서는 문제 상황을 시각적으로 나타낼 때 시각적 표현의 과정을 강조하도록 하고 있다(Nunokawa, 2006; van Garderen, 2007). 왜냐하면 문제 상황에 대한 시각적 표현을 한 번에 즉각적으로 완벽하게 구성할 수 없기 때문이다. 따라서 문제 해결과정에서의 시각적 표현은 단계적인 과정을 통해 이루어지도록 지도하는 것이 바람직하다.

문제해결과정에서의 학생들의 시각적 표현의 활용을 촉진시키기 위해 수업프로그램을 개발하여 적용한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 학생들이 문제해결과정에서 시각적 표현을 이용해 성공적으로 문제를 해결하는 경험을 갖도록 함으로써 문제해결과정에서의 시각적 표현의 유용성을 인식할 수 있도록 하였는데, 이는 학생들이 문제해결을 위한 올바른 시도를 할 수 있는 하나의 방법을 제시했다는 측면에서 매우 긍정적인 의미를 갖는다고 하겠다.

둘째, 도식 표현 유형을 도입할 때 학생들에게 친숙한 시나리오를 제시하였는데 이는 학생들이 도식 표현에 대한 수용을 용이하게 하였다. 이는 학생들에게 친숙한 상황을 제공하는 것은 학생들이 시각적 표현을 위한 새로운 도식유형을 학습하는데 초점을 맞출 수 있게 해 줄 뿐만 아니라(Diezmann, 2002), 문제 상황이 학생들에게 친밀한 것일수록 문제에 대한 내적 표상이 쉽게 형성 될 수 있기 때문이다. 따라서 문제해결과정에서의 시각적 표현에 대한 지도는 학생들에게 친숙한 것으로 시작할 필요가 있겠다.

셋째, 학생들에게 4가지 도식표현유형을 제시하여 문제해결과정에서 시각적 표현을 활용하는 방법을 지도한 결과, 학생들이 다양한 문제의 해결에서 시각적 표현을 활용할 수 있게 되었다. 도식표현유형에 대한 학습을 하면 문제에 주어진 정보 사이의 관계를 파악할 수 있는 능력을 기르게 되어, 특정 도식으로 해결할 수 없는 새로운 문제에서도 시각적인 표현을 할 수 있게 된다는 선행연구의 결과와도 일치하는 것이다(Diezmann, 2002). 따라서 도식표현유형을 통해 학생들이 문제해결과정에서 시각적 표현을 이용해 문제를 해결하는 경험을 갖도록 하는 것은 학생들의 앞으로의 문제해결에 긍정적인 영향을 미칠 수 있다. 학생들은 기존에 학습한 도식표현유형으로 해결할 수 있는 문제라고 하더라도 자신만의 독특한 방법으로 도식 표현을 구성하여 문제를 해결해 가기도 했다. 이를 통해 문제

에 대한 시각적 표현의 경험이 다른 문제의 해결에서도 유용하게 적용될 수 있음을 알 수 있다. 그러므로 학생들이 문제해결과정에서 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하는 경험을 할 수 있도록 하는 것은 학생들의 문제해결능력을 신장시킬 수 있는 매우 효과적인 방법이라고 하겠다.

넷째, 학생들이 보이는 문제해결과정에서의 시각적 표현에 있어서의 문제점 중의 하나인 그림 표현의 문제는, 문제해결과정에서의 시각적 표현 지도의 시작 단계에서 특정 대상에 대한 그림 표현과 도식 표현을 비교하여 도식 표현의 의미를 지도함으로써 쉽게 해결할 수 있었다. 즉 학생들은 도식 표현의 의미를 명확히 인식하게 됨으로써 문제 상황을 그림 표현으로 표현하는 것이 문제를 해결하는데 전혀 도움이 되지 않음을 쉽게 수용하게 되었다. 문제해결과정에서의 시각적 표현을 지도한 결과, 지도 방법이라는 측면에서 내릴 수 있는 결론은 문제해결과정에서의 시각적 표현의 유용성에 대한 인식과 시각적 표현을 이용한 성공적인 문제해결의 경험이 모두 중요하다는 것이다. 이는 학생들이 문제해결과정에서의 시각적 표현의 유용성을 알고 이를 다양한 문제를 해결할 때 활용할 수 있도록 하는 것과, 시각적 표현을 통해 성공적으로 문제를 해결하는 경험을 통해 시각적 표현의 유용성을 체득해 가는 것이 서로 상보적인 역할을 하기 때문이다. 이렇게 함으로써 학생들이 앞으로 문제를 해결할 때 시각적 표현을 문제해결을 위한 하나의 방법으로 자발적으로 활용할 수 있게 될 것이다.

다섯째, 문제해결과정에서 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 지도한 결과, 본 검사와 심층면담에서 학생들의 문제해결 과정에서 나타나는 문제점의 하나인 '성급한 식 세우기'의 문제를 개선할 수 있었다. '문제 읽기'와 '식 세우기' 사이에 '시각적 표현하기' 활동을 추가시킴으로써 문제에 대한 내적 표상이 외적인 표현으로 구체적으로 드러나도록 함으로써 문제에 대한 명확한 이해 및 해결 방법의 발견을 가능하게 했기 때문인데, 이를 통해 학생들은 문제 해결 방법으로 시각적 표현을 활용하면서 식 세우기에 대한 지나친 의존에서 벗어날 수 있게 되었다. 이처럼 학생들이 문제해결과정에서 기호적 표현에 치중하는 것은 다양한 문제해결방법을 경험하지 못했기 때문으로, 문제해결과정에서 시각적 표현과 같은 다양한 문제해결 방법들

학습할 기회가 제공되어야 하겠다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부 (2008). 초등학교 교육과정 해설(IV)-수학, 과학, 실과. 광주: 한솔사
- Ministry of Education (2008). *Elementary curriculum commentary (IV) - Mathematics, science, and practical course*. Kwangju: Hansolsa.
- 김민경 · 권혁진 (2010). 수학 문제 해결에서 학업성취도에 따른 표상 활용 능력과 특징 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **24(2)**, 475-502.
- Kim, M. & Kwon, H. (2010). An analysis of representation usage ability and characteristics in solving math problems according to students' academic achievement. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Series E*, **24(2)**, 475-502.
- 김영국 (2008). 수학적 표현의 교수학적 의의. 한국수학교육학회 <전국수학교육 연구대회 프로시딩>, 제 41회, (pp. 21-32.)
- Kim, Y. (2008). On the pedagogical significance of mathematical representations. *Proceedings of the 41st National Mathematics Education Research Conference, Korea*, (pp. 21-32.)
- 김유정 · 백석윤 (2004). 초등 수학 문제해결 과정에 사용되는 표현 방법에 대한 연구. 한국초등수학교육학회지, **9(2)**, 85-110.
- Kim, Y. & Beak, S. (2004). A study of the representation in the elementary mathematical problem-solving process. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **9(2)**, 85-110.
- 김종백 · 이성원 (2011). 시각적 스키마 프로그램이 문장제 표상과 문제해결력에 미치는 효과. 대한수학교육학회지 <학교수학>, **13(1)**, 155-173.
- Kim, J. & Lee, S. (2011). Effects of the schema-based instructional program on word problem representation and solving ability. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, **13(1)**, 155-173.
- 나일주 · 성은모 · 박소영 (2010). 초등학생의 시각화 경향성이 문제해결력에 미치는 효과. 초등교육연구, **23(4)**, 509-534.
- Rha, I., Sung, E. & Park, S. (2010). Relationships between elementary students' visualization tendency and problem-solving ability. *Research of Elementary Education*, **23(4)**, 509-534.
- 박애란 · 김애화 (2010). 도식을 활용한 표상전략이 수학학습부진학생의 곱셈과 나눗셈 문장제 문제해결에 미치는 효과. 학습장애연구, **7(3)**, 105-122.
- Park, E. & Kim, E. (2010). The effects of schema-based representation strategy in multiplication and division For students with mathematical difficulties. *Learning Disabilities*, **7(3)**, 105-122.
- 윤여주 · 강신포 · 김성준 (2010). 시각화가 초등기하문제 해결에 미치는 영향. 한국학교수학회논문집, **13(4)**, 655-677.
- Yoon, Y., Gang, S. & Kim, S. (2010) An influence of visualization on geometric problem solving in the elementary mathematics. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education*, **13(4)**, 655-677.
- 이양미 · 전평국 (2005). 초등학교 3학년 학생의 수학적 문제 해결에서의 표상과 표상의 정교화 과정 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **44(4)**, 627-651.
- Lee, Y. & Jeon, P. (2005). 3rd grade students' representation in mathematical problem solving and analysis of the refinement the process of representation. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series A*, **44(4)**, 627-651.
- 이태수 · 유재연 (2006). 의미구조에 따른 표상기법이 수학학습부진 및 수학학습 장애아동의 문장제 문제 해결능력에 미치는 효과. 특수교육저널 : 이론과 실천, **7(2)**, 1-21.
- Lee, T. & You, J. (2006). Effects of

- semantics-based-representation instruction on the arithmetic word problem solving performance of students with low achievement and mathematics learning disabilities. *Journal of Special Education : Theory and Practice*, 7(2), 1-21.
- 장혜원 (1997). 수학학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구 - 표상 모델 개발을 중심으로. 서울대학교 박사학위 논문.
- Jang, H. (1997). *A study on the representations in mathematics learning : Focused on the development of a representation model*. Unpublished doctoral dissertation, Seoul National University, Seoul.
- 황현미·방정숙 (2009). 수학 문제 해결과정에서 초등학교 6학년 학생들의 시각적 표현에 관한 연구. 한국수학교육학회 시리즈 C <초등수학교육>, 12(2), 81-97.
- Hwang, H. & Pang, J. (2009). A study on the 6th graders' use of visual representations in mathematical problem solving. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series C*, 12(2), 81-97.
- 황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2004). 수학교육학 신론. 서울: 문음사.
- Hwang, H., Rha, G., Choe, S., Park, K., Yim, J. & Seo, D. (2004). *Theology of mathematics education*. Seoul: Muneumsa.
- Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 7(3), 4-8.
- George, E. A. (1999). Male and female calculus students; use of visual representation. In O. Zaslavsky (Ed). *Proceedings of the 23rd annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education 1*, (pp. 17-25.) Haifa, Israel: PME.
- Hayes, J. R. (1989). *The complete problem solver* (2nd ed.) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684-689.
- Jitendra, A. K., Star, J. R., Rodriguze, M., Lindell, M & Someki, F. (2011). Improving students' proportional thinking using scheme-based instruction. *Learnig and Instruction*, 21, (pp. 731-745.)
- Kell, R. R., Gaustad, M., Porter, J. & Fonzi, J. (2007). *Visual-Spatial representation in mathematical problem solving by deaf and hearing students*. NY: Oxford University Press Inc.
- Kozhevnikov, M., Hegarty, M., & Mayer, R. E. (2002). Revising the visualizer/verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition & Instruction*, 20, 47-77.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬·조완영·이경화·나귀수·김남균·방정숙 공역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 기준. 서울: 경문사.
- Nunokawa, K. (1994). Solver's structures of a problem situation and their global restructuring, *Journal of Mathematical Behavior* 13, 275-297.
- Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving process. *Eurasia Journal of Mathematical, Science & Technology Education* 2(3), 33-54.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation method*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. 우정호 역 (2002). 어떻게 문제를 풀 것인가. 서울: 교우사.
- Stylianous, D. A. & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: an examination of expert-novice similarities and difference. *Mathematical Thinking and Learning* 6(4), (pp. 353-387.)

- van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities*, 40(6), 540-553.
- van Garderen, D. & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(4), (pp. 246-254.)
- Zhaner, D. & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, (pp. 177-204.)

The Fourth Graders' Visual Representation in Mathematics Problem Solving Process

Kim, So Hee

Graduate School of Korea National University of Education
Chungbuk, Korea
E-mail: rkatns77@naver.com

Lee, Kwangho

Korea National University of Education
250 Taeseong abyeon-ro Gangnaemyon, Cheongwonkun, Chungbuk, 363-791 Korea
E-mail: paransol@knue.ac.kr

Ku, Mi Young

Graduate School of Korea National University of Education
Chungbuk, Korea
E-mail: start75@naver.com

The purpose of the study is to analyze the 4th graders' visual representation in mathematics problem solving process and to find out how to teach the visual representation in mathematics problem solving process. on the basis of the results, this study gives several pedagogical implication related to the mathematics problem solving. The following were the conclusions drawn from the results obtained in this study.

First, The achievement level of students and using visual representation in the mathematics problem solving are closely connected. High achieving students used visual representation in the mathematics problem solving process more frequently.

Second, high achieving students realize the usefulness of visual representation in the mathematics problem solving process and use visual representation to solve mathematical problem. But low achieving students have no conception that visual representation is one of the method to solve mathematical problem.

Third, students tend to especially focus on ‘setting up an equation’ when they solve a mathematical problem. Because they mostly experienced mathematical problems presented by the type of ‘word problem-equation-answer’.

Fourth even though students tried visual representation to solve a mathematical problem, they could not solve the problem successfully in numerous instances. Because students who face a difficulty in solving a problem try to construct perfect drawing immediately. But generating visual representation to represent mathematical problem cannot be constructed at one swoop.

* ZDM Classification : D52

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

* Key Words : Problem solving, Visual representation