韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2013.27.4.357
제 27집 제 4호, 2013. 11. 357-367

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 27, No. 4, Nov. 2013. 357-367

점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$의 일반항에 대하여

노 문 기 (창원과학고등학교)
정 재 훈 (창원중앙고등학교)
강 정 기 (남산중학교)†

교사 위주의 수업보다 학생 중심의 탐구 활동이 지속적으로 강조되고 있지만, 이를 실행하기란 쉽지 않은 것이 현실이다. 학생들의 지적 호기심은 주관적이며, 지적 호기심을 충족해주는 것은 교육 과정에 충실한 교육 못지않게 중요하다. 본 연구는 문제를 해결하는 과정에서 얻은 수열로부터 시작되었다. 이 수열은 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ $(n \geq 4)$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$으로 표현되었는데, 우리는 이 수열의 일반항을 찾아보고자 시도하였다. 주어진 문제의 점화식은 피보나치 수열의 점화식과 형태는 비슷해 보이지만 일반항을 구하는 과정은 결코 비슷하지 만은 않았다. 각고의 노력 끝에 우리는 같지만 서로 다르게 표현되는 두 개의 아름다운 일반항을 얻을 수 있었다. 본 연구와 같은 탐구과정이 교육 현장에 활력을 불어 넣는 데 일조할 수 있기를 기대한다.

Ⅰ. 들어가며

자연 현상이나 실생활 속에 깃든 수학적 규칙을 발견하고 탐구함으로써 수학의 실용성 및 심미성을 경험하는 것은 수학 교수・학습에 대한 이유로 제시되기도 한다. 자연 현상이나 실생활 속에 깃든 규칙은 여러 형태가 있겠으나, 그 중 많은 형태가 수열로서 표현되기도 한다. 따라서 자연 현상 및 실생활 현상에 대한 예측을 위해서는 수열로서 표현된 규칙에 대한 일반적 예측을 가능하게 하는 수단을 찾는 것이 요구된다. 이러한 필요성에 의해 수열 연구에서 그 일반항을 찾는 것은 인식된 규칙성을 예측으로 나아가게 하는 수단으로서 매우 중요하다고 할 수 있을 것이다.

또한 자연 현상이나 실생활의 규칙으로부터 일반항을 찾아가는 과정이 쉽지 않은 경우가 많이 있는데, 이것은 수열의 일반항을 찾는 연구가 정신 도야의 기회를 제공해줄 수 있음을 시사한다. 즉, 수열의 일반항을 찾으려는 노력으로부터 수학의 발전뿐 아니라, 수학적 사고력 신장의 기회를 갖게 되는 것이다. 이런 이유로 자연 현상이나 실생활에서 발견되는 여러 규칙은 수열로서 표현되어 그 일반항을 찾고자 하는 오랜 노력들이 끊임없이 지속되어 왔으며, 피보나치 수열의 일반항과 그것을 구하는 방법에 대한 연구 역시 수학의 발전을 이끌었을 뿐 아니라 수학의 실용성과 심미성 인식 및 정신 도야의 기회가 되기도 하였다.

피보나치(Fibonacci) 수열은 수학에서 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 문제 중 하나이며, 수학의 아름다움을 추구하는 대상이기도 하다. 그럼에도 불구하고 현재 우리나라에는 피보나치 수열과 관련된 연구 자료가 많지 못하며, 또한 고등학교 수학 교과서에서 사고력과 문제 해결 능력을 신장시키기 위해 피보나치

* 접수일(2013년 2월 5일), 심사(수정)일(1차: 2013년 4월 19일, 2차: 2013년 7월 8일), 게재확정일(2013년 7월 28일)
* ZDM 분류 : D54
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 피보나치 수열, 점화식, 일반항, $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ $a_1 = a_2 = a_3 = 1$
† 교신저자 : jeonggikang@gmail.com

수열이 연구과제 또는 수학 산책과 같은 난에 단편적으로 소개되고 있는 실정이다(양영오 · 김태오, 2008).

피보나치 수열의 개념은 1202년에 간행된 피보나치의 유명한 저서 산반서(算盤書, Liber abaci)에 나오는 토끼 문제에서 비롯되었다. 토끼 문제는 "한 쌍의 새끼 토끼가 한 달이 되면 어미가 되고 어미가 되면 매월 한 쌍의 새끼를 낳는다고 하면 처음 한 쌍의 새끼 토끼로부터 1년 뒤에는 모두 몇 쌍의 토끼가 있게 되는가?"이다(Dunlap, 1997). 이 문제로부터 피보나치 수열로 알려진 점화식 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $F_1=F_2=1$이 나타나게 되었다. 피보나치 수열은 지속적으로 연구되었으며, 그 과정에서 다양한 성질이 발견되었다. 이를테면, $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2}-1$, $F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}(m \geq 2,\ n \geq 1)$, $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 등 많은 성질이 발견되었다(Vorob′ev, 1961).

그 중 특별히 관심의 대상이 된 것은 피보나치 수열의 일반항이었다. 피보나치 수열의 정의 $F_1=1$, $F_2=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n \geq 3)$에서 일반항 F_n을 계산하기 위해서는 n보다 작은 항들의 수를 모두 계산해야 하는 번거로움이 있었기 때문에, 이러한 지루함을 해소하기 위해 일반항이 무엇인지 밝혀보고자 하였다. 이러한 요구에 부응하여 1843년 Jacques Philippe Marie Binet은 피보나치 수열의 n번째 항을 찾는 공식을 발견하였으며, 그것은 다음과 같다.

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

피보나치 수열에 대한 연구의 관심이 지속되는 가운데 Edward Lucas는 1860년대에 피보나치 수열을 변형하여 루카스(Lucas) 수열 $L_1=1$, $L_2=3$, $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}(n \geq 3)$을 만들고 연구하기도 하였다(Hoggatt, 1969).

피보나치 수열에 대한 이러한 연구 동향은 1963년에 Hoggatt 박사와 Brousseau 박사를 중심으로 피보나치 협회(The Fibonacci Association)의 창설과 수학 저널 피보나치 쿼털리(The Fibonacci Quarterly)의 간행으로 이어질 만큼 피보나치 수열은 수학에서 관심의 대상이었다(Wikipedia, 2012). 이러한 피보나치 수열은 현재 수학뿐 아니라 자연 현상과 생물체, 예술과 건축물, 음악과 시, 과학과 공학 등의 분야와 연계되어 광범위하게 연구되고 있다. 이에 대해 Garland(1987)는 피보나치 수열은 수학적 연구의 보고라고 지적하기도 하였다.

피보나치 수열이 수학에서 관심의 대상이 되면서 그에 대한 연구의 초점이 피보나치 수열 그 자체에 맞추어져 오고 있다. 피보나치 수열의 다양한 성질이 탐색되고, 피보나치 수열의 일반화가 연구되어 왔다. 그러나 피보나치 수열의 변형에 대한 연구는 많지 않다. 그에 대한 연구로 루카스 수열이 있기는 하지만 보다 많은 변형에 대한 가능성은 남아있다. 따라서 피보나치 수열의 보다 다양한 변형에 대한 연구가 필요해 보인다.

난해한 문제에 대해 많은 학생들은 시간 부족을 호소하며, 고민을 포기하고 넘어가려고 한다. 그들은 주어진 시간 동안 다수의 문제를 해결하기를 원한다. 그러나 자신들이 비교적 쉽게 해결할 수 있는 수준의 문제를 얕게 해결하면서 많은 수의 문제를 해결하는 것은 문제라고 생각된다. 왜냐하면 얕은 탐구는 문제가 함의한 다양한 맥락을 놓치기 쉽기 때문이다. 한 문제를 깊이 있게 탐구하는 것은 수학적으로 중요한 경험이 될 수 있다. 오랫동안 고민하게 되면, 그것이 비록 해결되지 않을지라도 그 문제에 대해 많은 것을 알게 되며, 해결과 관련된 다수의 개념을 적용해보는 기회를 갖게 되므로 진정한 의미에서 수학적 문제 해결력의 상승을 기대할 수 있게 된다. 수학 역사에서도 Fermat의 마지막 문제를 해결하려는 시도는 근대 정수론의 발달과 20세기 모듈성 정리 증명의 촉진(Wikipedia, 2013)을 가져왔다.

이에 본 연구에서는 연구를 위해 엄선한 문제가 아니라, 우리 주위에서 찾을 수 있는 문제로부터 출발하여 이와 같은 탐구를 시도해 보고자 한다. 일반 학생을 대상으로 하기보다, 탐구심이 강하고 지적 호기심이 왕성한

수준급 학생을 염두에 두었으며, 이들에게 탐구의 필요성이나 가치를 인식시키는 기회가 되게 하고자 한다.

본고에서는 어떤 문제를 해결하는 과정에서 이 문제를 보다 일반적으로 해결해 보고자 항 사이의 관계를 기술한 결과 피보나치 수열의 점화식 및 루카스 수열의 점화식과 비슷한 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} (n \geq 4)$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$을 얻었다. 이 점화식으로부터 일반항을 구해보고자 시도하여, 이 점화식의 일반항을 구하는 것을 본 연구의 연구문제로 설정하였다. 연구문제의 설정은 자연스러운 탐구 과정이고, 설정된 문제의 해결 또한 고등학교 수준의 수학적 지식을 활용하여 충분히 가능함을 본고에 제시된 증명을 통해 확인할 수 있었다. 한편 이러한 결과는 학생들의 수학적 탐구력을 자극하고, 새로운 발견에 도달하게 되었을 때의 성취감을 경험할 수 있게 할 것이다. 또한 문제 해결을 보다 정교하게 다듬는 기회를 제공할 수 있는 좋은 자료가 될 수 있을 뿐만 아니라 이런 과정을 목도하는 교사에게도 흥미로운 사실이 될 것이다.

Ⅱ. 피보나치 수열의 일반항을 구하는 방법

본 장에서는 피보나치 수열의 일반항을 구하는 방법 두 가지를 소개한다.

1. 피보나치 수열의 일반항 구하는 방법1

본 절에서는 Binet이 피보나치 수열의 일반항을 구한 방법을 간략하게 소개한다.

점화식 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$에서 $F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta(F_{n+1} - \alpha F_n)$라 두면 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$이다. 그러면 근과 계수와의 관계로부터 방정식 $x^2 - x - 1 = 0$을 얻을 수 있다. 이 방정식의 두 근을 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$라 놓자. 그러면 $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\beta^2 = \beta + 1$이 되며, 다음과 같은 두 개의 식을 얻는다.

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \quad \cdots\cdots \quad ①$$

$$\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n \quad \cdots\cdots \quad ②$$

'(①−②)$\times \frac{1}{\alpha - \beta}$'하면 $\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$이 되며, $H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ 라고 놓으면 $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1$이 된다. 따라서 H_n은 피보나치 수열이며, $F_n = H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right\}$이 된다.

2. 피보나치 수열의 일반항 구하는 방법2

점화식 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = F_1 = 1$의 해를 생성함수를 이용하여 구해 보자. 그 방법은 이지윤(2006)을 참고하였다.

생성함수 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$이라 두면 $xg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n$, $x^2 g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$이 되고

$g(x)-xg(x)-x^2g(x)=F_0+(F_1-F_0)x+\sum_{n=2}^{\infty}(F_n-(F_{n-1}+F_{n-2}))x^n$이 된다. $F_0=F_1=1$이고 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$이므로 $(1-x-x^2)g(x)=x$를 얻는다. 따라서 $g(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$이다. 그런데 $g(x)$의 분모는 $1-x-x^2=(1-\alpha x)(1-\beta x)$와 같이 인수분해 된다. 여기서 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$이다. 한편, $g(x)=\dfrac{A}{1-\alpha x}+\dfrac{B}{1-\beta x}$라 두면 $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $B=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이 된다. 따라서 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\beta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots)-\frac{1}{\sqrt{5}}(1+\beta x+\beta^2x^2+\cdots) \end{aligned}$$

그런데 수열의 일반항은 생성함수 $g(x)$의 x^n항의 계수이므로 다음과 같은 식을 얻는다.

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

Ⅲ. 점화식 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$, $a_1=a_2=a_3=1$의 일반항

본 장에서는 점화식 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}(n\geq 4)$, $a_1=a_2=a_3=1$의 일반항을 구하는 문제의 배경을 소개하며, 이 점화식의 일반항을 구하는 두 가지 방법을 제시하였다.

1. 문제의 배경

점화식 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}(n\geq 4)$, $a_1=a_2=a_3=1$의 일반항을 구하는 문제는 다음 문제로부터 시작되었다.

<문제1>

어떤 조류의 알은 한 달 만에 부화해서 새끼가 되고, 새끼는 두 달 뒤부터는 매달 한 개의 알을 낳는다고 한다. 지금 이 조류의 알에서 부화한 새끼가 한 마리 있다. 지금부터 10개월 뒤 이 조류의 알의 개수를 s, 이 조류의 마리수를 t라 할 때, $10s+t$의 값은 얼마인가? (단, 이 조류는 10개월 동안 죽지 않는다.)

위 문제에 대해 다음의 표를 통해 해결하였다.

s: 알의 개수
t': 알을 낳을 수 없는 새의 마리수
t'': 알을 낳을 수 있는 새의 마리수

월후	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	0	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13
t'	1	0	0	1	1	1	2	3	4	6	9
t''	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19

따라서 10개월 뒤 $s = 13$, $t = 28$이므로 $10s + t = 158$이다.

우리는 이러한 해결에 만족하지 않고, 이 문제의 보다 일반적인 해결에 관심을 가지기 시작했다. 즉, '문제에 주어진 조건 중 10개월을 100개월로 바꾸면 어떻게 될까? 이때에도 위와 같은 표를 만들어 문제를 해결할 수 있을까?'와 같은 문제의식을 가지게 되었다. 그리고 t''이 나타내는 수의 배열을 $\{a_n\}$이라고 하고, 이 수열의 일반항을 찾아보고자 하였다. $\{a_n\}$은 $1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, \cdots$ 와 같은 수열이므로 다음과 같은 점화식으로 표현된다.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-3} \ (n \ge 4) \ \cdots\cdots \ (1) \\ a_1 = a_2 = a_3 = 1 \end{cases}$$

이 수열에 대해 관심을 가지고 그 일반항을 찾아보고자 하였다. 연구자는 서로 다른 두 가지 방법으로 일반항을 구하였으며, 그 일반항의 모양은 각각 다른 형태의 아름다운 식이었다.

2. 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$의 일반항 구하기

1) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} (n \ge 4)$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$의 『일반항 구하기 1』

상수 α, β, γ에 대하여

$$a_n - \alpha a_{n-1} - \beta a_{n-2} = \gamma(a_{n-1} - \alpha a_{n-2} - \beta a_{n-3}) \ (n \ge 4) \ \cdots\cdots \ (2)$$

라고 두면 다음의 식을 얻는다.

$$a_n = (\alpha + \gamma)a_{n-1} + (\beta - \alpha\gamma)a_{n-2} - \beta\gamma a_{n-3} \ \cdots\cdots \ (3)$$

식 (1)과 (3)의 계수를 비교하면 $\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \ \cdots\cdots \ (4) \\ \beta - \alpha\gamma = 0 \ \cdots\cdots \ (5) \\ \beta\gamma = -1 \ \cdots\cdots \ (6) \end{cases}$

이 되고, (4)와 (6)에서 얻은 α와 β를 각각 (5)에 대입하면 $\gamma^3 - \gamma^2 - 1 = 0 \ \cdots\cdots \ (7)$을 얻는다. 지금 식 (2)의 좌변을

$$b_{n-2} = a_n - \alpha a_{n-1} - \beta a_{n-2} \ \cdots\cdots \ (8)$$

이라고 두면, $b_1 = a_3 - \alpha a_2 - \beta a_1 = 1 - \alpha - \beta = 1 - (1 - \gamma) - (-\frac{1}{\gamma}) = \gamma^2$이 되고, 식 (2)에 의해 수열 $\{b_n\} \ (n \ge 1)$은 첫 항이 γ^2이고 공비가 γ인 등비수열이 된다. 따라서 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = \gamma^{n+1} \ \cdots\cdots \ (9)$가 된다. 그러면 식 (8)과 (9)에 의해 $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma^{n-1}$이므로 $a_n = (1 - \gamma)a_{n-1} - \frac{1}{\gamma}a_{n-2} + \gamma^{n-1} \ (n \ge 3) \ \cdots\cdots \ (10)$을 얻는다.

한편, 상수 x, y와 수열 $\{c_n\} \ (n \ge 3)$에 대하여

$$a_n - x a_{n-1} + c_{n-1} = y(a_{n-1} - x a_{n-2} + c_{n-2}) \ \cdots\cdots \ (11)$$

이라고 두면 다음의 식을 얻는다.

$$a_n = (x + y)a_{n-1} - xy a_{n-2} + (y c_{n-2} - c_{n-1}) \ (n \ge 3) \ \cdots\cdots \ (12)$$

식 (10)과 (12)의 계수를 비교하면 $\begin{cases} x+y=1-\gamma \ \cdots\cdots \ (13) \\ xy=\dfrac{1}{\gamma} \ \cdots\cdots \ (14) \\ yc_{n-2}-c_{n-1}=\gamma^{n-1} \ (n\geq 3) \ \cdots\cdots \ (15) \end{cases}$

이 된다. 이제 식 (15)에 주어진 수열 $\{c_n\}\,(n\geq 3)$의 일반항을 구해보자. 식 (15)에서 $c_{n-1}=yc_{n-2}-\gamma^{n-1}\,(n\geq 3)$을 얻는다. 그러면

$$\begin{aligned} c_n &= yc_{n-1}-\gamma^n \\ yc_{n-1} &= y^2c_{n-2}-y\gamma^{n-1} \\ y^2c_{n-2} &= y^3c_{n-3}-y^2\gamma^{n-2} \\ &\vdots \\ y^{n-2}c_2 &= y^{n-1}c_1-y^{n-2}\gamma^2 \end{aligned}$$

위의 식에서 변끼리 더하면,

$$c_n=y^{n-1}c_1-(y^{n-2}\gamma^2+\cdots+y^2\gamma^{n-2}+y\gamma^{n-1}+\gamma^n) \ \cdots\cdots \ (16)$$

이 된다. 한편, $(y^n+y^{n-1}\gamma+y^{n-2}\gamma^2+\cdots+y^2\gamma^{n-2}+y\gamma^{n-1}+\gamma^n)(y-\gamma)=y^{n+1}-\gamma^{n+1}$이고 $y\neq\gamma$이다. 왜냐하면, 지금 $y=\gamma$라고 하면 식 (13)에서 $x=1-2\gamma$, 식 (14)에서 $x=\dfrac{1}{\gamma^2}$을 얻는다. 얻은 두 식으로부터 $2\gamma^3-\gamma^2+1=0$을 얻는다. 식 (7)에 의해 $2(\gamma^2+1)-\gamma^2+1=0$이 되고 $\gamma^2=-3$이 되어 이것은 모순이다. 따라서

$$y^{n-2}\gamma^2+\cdots+y^2\gamma^{n-2}+y\gamma^{n-1}+\gamma^n=\frac{y^{n+1}-\gamma^{n+1}}{y-\gamma}-y^n-y^{n-1}\gamma$$

이므로, 식 (16)으로부터 다음과 같은 수열 $\{c_n\}$의 일반항을 얻는다.

$$c_n=y^{n-1}c_1-\left(\frac{y^{n+1}-\gamma^{n+1}}{y-\gamma}-y^n-y^{n-1}\gamma\right) \ \cdots\cdots \ (17)$$

지금 식 (11)의 좌변을 $d_{n-1}\,(n\geq 2)$ 즉, $d_{n-1}=a_n-xa_{n-1}+c_{n-1} \ \cdots\cdots \ (18)$ 이라고 두면, $d_1=a_2-xa_1+c_1=1-x+c_1$이 되고, 따라서 식 (11)에 의해, 수열 $\{d_n\}\,(n\geq 1)$은 첫 항이 $1-x+c_1$이고 공비가 y인 등비수열이 된다. 따라서 다음과 같은 수열 $\{d_n\}$의 일반항을 얻는다.

$$d_n=(1-x+c_1)y^{n-1} \ \cdots\cdots \ (19)$$

그러면 식 (17), (18) 그리고 (19)에 의해 다음 식을 얻는다.

$$(1-x+c_1)y^{n-2}=a_n-xa_{n-1}+y^{n-2}c_1-\left(\frac{y^n-\gamma^n}{y-\gamma}-y^{n-1}-y^{n-2}\gamma\right)$$

$$(1-x)y^{n-2}=a_n-xa_{n-1}-\left(\frac{y^n-\gamma^n}{y-\gamma}-y^{n-1}-y^{n-2}\gamma\right) \ \cdots\cdots \ (20)$$

식 (20)을 얻기까지의 과정을 보면, x와 y는 대칭성을 가지므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(1-y)x^{n-2}=a_n-ya_{n-1}-\left(\frac{x^n-\gamma^n}{x-\gamma}-x^{n-1}-x^{n-2}\gamma\right) \ \cdots\cdots \ (21)$$

'(20)-(21)'하면,

$$\begin{aligned} &(1-x)y^{n-2}-(1-y)x^{n-2} \\ &=(y-x)a_{n-1}+\left(\frac{x^n-\gamma^n}{x-\gamma}-x^{n-1}-x^{n-2}\gamma\right)-\left(\frac{y^n-\gamma^n}{y-\gamma}-y^{n-1}-y^{n-2}\gamma\right) \end{aligned}$$

그런데 $x\neq y$ 이고 $x+y=1-\gamma$ 이므로

$$\begin{aligned}a_{n-1}&=\frac{1}{x-y}((1-y)x^{n-2}-(1-x)y^{n-2}+(\frac{x^n-\gamma^n}{x-\gamma}-x^{n-1}-x^{n-2}\gamma)\\&\qquad-(\frac{y^n-\gamma^n}{y-\gamma}-y^{n-1}-y^{n-2}\gamma))\\&=\frac{1}{x-y}((1-y-x-\gamma)x^{n-2}-(1-y-x-\gamma)y^{n-2}+\frac{x^n-\gamma^n}{x-\gamma}-\frac{y^n-\gamma^n}{y-\gamma})\\&=\frac{1}{x-y}(\frac{x^n-\gamma^n}{x-\gamma}-\frac{y^n-\gamma^n}{y-\gamma}).\end{aligned}$$

따라서 점화식으로 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n=\frac{1}{x-y}(\frac{x^{n+1}-\gamma^{n+1}}{x-\gamma}-\frac{y^{n+1}-\gamma^{n+1}}{y-\gamma}),$$

여기서 $\gamma^3-\gamma^2-1=0$, $x+y=1-\gamma$, $xy=\frac{1}{\gamma}$ 이다.

2) $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}(n\geq 4)$, $a_1=a_2=a_3=1$의 『일반항 구하기 2』

점화식 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}(n\geq 4)$, $a_0=0$, $a_1=a_2=1$의 해를 생성함수를 이용하여 구해 보자. 생성함수 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$이라 두자. 그러면 $xg(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$, $x^3g(x)=\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-3}x^n$이다. 따라서

$$g(x)-xg(x)-x^3g(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(a_n-(a_{n-1}+a_{n-3}))x^n$$

이다. $a_0=0$, $a_1=a_2=1$이고, $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$이므로 $(1-x-x^3)g(x)=x$이다. 따라서 $g(x)=\frac{x}{1-x-x^3}$이다. 한편 $g(x)$의 분모는 다음과 같이 인수분해 되는데 $1-x-x^3=(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)$ 여기서 $\alpha\beta\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$이다. 지금 $g(x)$를 부분분수로 나타내기 위해

$$g(x)=\frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}=\frac{1}{p(x)}(\frac{1}{1-\alpha x}+\frac{1}{1-\beta x}+\frac{1}{1-rx})$$

라 두면 $p(x)=3-2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2=3-2x$이다. 따라서

$$g(x)=\frac{1}{3-2x}(\frac{1}{1-\alpha x}+\frac{1}{1-\beta x}+\frac{1}{1-rx})=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}x}(\frac{1}{1-\alpha x}+\frac{1}{1-\beta x}+\frac{1}{1-rx})$$

$$=\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{2}{3}x)+\frac{1}{3}(\frac{2}{3}x)^2+\cdots\right\}\{3+(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+\cdots\}.$$

그런데 수열의 일반항은 생성함수 $g(x)$의 x^n항의 계수이므로, 점화식으로 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(\frac{2}{3})^k(\alpha^{n-k}+\beta^{n-k}+\gamma^{n-k}),$$

여기서 $\alpha\beta\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$이다.

3. 점화식 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$, $a_1=a_2=a_3=1$에서 일반항의 의미

어떤 지점 이후 각 항이 선행하는 항들의 선형 결합으로 나타낼 수 있는 그런 수열을 점화수열(recursive sequence)이라 말한다. 피보나치 수열은 수학 연구에서 첫 번째로 알려진 점화수열이다(정옥경·김용구, 2008). 이러한 귀납적 수열은 n번째 항을 구하기 위해 n보다 작은 인접한 항을 구해야 하는 번거로움을 지니고 있기 때문에 수학자들은 이들을 일반항으로 표현하고자 하였다. 이러한 요구에 따라 점화식을 일반항으로 표현하는 많은 방법이 계발되었고, 이들 방법은 현재 학교수학에서 지도되고 있다.

고등학교 수학에서도 주어진 점화식으로부터 일반항을 구하는 많은 문제가 다루어지고 있으며, 이들을 효과적으로 지도하는 방안이 연구될 만큼 학교수학에서 중요하게 다루어지고 있다. 점화식을 유형별로 분류하여 그 일반 해법을 고찰하고자 하는 연구(정관훈, 2003; 조은령, 2008)가 이러한 사실을 잘 보여준다. 이렇게 점화식으로부터 일반항을 구하는 문제가 중요하게 다루어지는 것은 일반항을 구하는 과정을 통해 논리성과 귀납적 사고력의 신장을 도울 수 있기 때문이다(조은령, 2008).

조은령(2008)에 따르면, 고등학교 교과서의 점화식 유형은 8가지로 분류되며, 이들 중 7가지는 이웃한 두 항에 관한 것이며, 이웃한 세 항에 관한 것은 오직 하나뿐이다. 이웃한 세 항에 관한 것은 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0(p+q+r=0)$으로 세 항에 관한 점화식은 협소하게 다루어지고 있다. 항이 많아지거나 식이 복잡한 점화식의 경우 일반항을 구하는 것이 쉽지 않기 때문에 교과서에서는 그 이상의 점화식을 다루지는 않는다. 그러나 논리성과 귀납적 사고력의 신장을 도울 수 있는 있는 소재라는 측면에서 더욱 복잡하고 접해보지 못한 생소한 점화식의 일반항을 구하는 문제에 도전하는 것은 의미있는 일이 될 것이다.

본 연구에서는 점화식으로부터 일반항을 구하는 문제의 이러한 가치에 입각하여 점화식 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$ $(n\geq 4)$, $a_1=a_2=a_3=1$의 일반항을 구하는 두 가지 방법을 모색해 보았다. 일반항을 구하는 두 가지 방법은 피보나치 수열의 일반항을 구하는 방법에서 그 아이디어를 가져오기는 하였으나, 인접한 항들 사이의 점화식으로 이루어진 피보나치 수열과는 달리 점화식 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}(n\geq 4)$, $a_1=a_2=a_3=1$은 인접한 항들 사이의 점화식이 아니기 때문에 그 과정에서 예상하지 못한 어려움이 있었다. 이러한 어려움을 극복해 가면서 일반항을 완성할 수 있었으며, 두 방식으로 구한 일반항은 방법에 따라 다르게 표현되었다.

한편, 일반항을 간략히 표현하려고 노력하였지만, 이들 식을 통해 100번째 항을 구하기는 쉽지 않다. 그러나 피보나치 수열의 일반항도 그 형태가 단순하면서도 아름답지만 이를 통해 100번째 항을 구하기는 어렵다. 마찬가지로 본 연구에서 구한 일반항 역시 비록 다소 복잡한 형태로 표현되어 있는 것은 사실이지만, 점화식 형태로 표현된 수열을 n번째 항으로 재 표현한 것으로 의미를 찾을 수 있다. 또한 일반항의 형태가 단순하고 아름답게 표현되어 있기에 본 연구에서 제시한 일반항의 형태는 가치 있는 것으로 생각되어 진다.

특히 일반항을 구하는 과정에서 사용되고 동원된 여러 기법은 방법적 측면에서 의미 있다고 여겨진다. 이를테면, 『일반항 구하기 1』에 등장하는 (2), (8), (11) 그리고 (18)로 주어지는 식은 수준 높은 수학적 통찰을 요구하는 설정이다. 뿐만 아니라 생성함수를 이용하여 일반항을 구하는 과정에서 '$g(x)=\dfrac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}=\dfrac{1}{p(x)}(\dfrac{1}{1-\alpha x}+\dfrac{1}{1-\beta x}+\dfrac{1}{1-rx})$'라 두고 부분분수로 분해한 아이디어를 보자. $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B})$와 같은 부분분수 분해에서 $B-A$가 언제나 상수이어야 한다는 고정관념을 탈피하고 $p(x)$와 같은 다항식으로 묶어내어 부분분수 분해의 결정적 실마리를 제공하였다는 것에 주목할 필요가 있다. 이와 같은 점에 비추어 볼 때, 위의 기법은 그 자체가 수학적으로 의미 있는 것으로 생각되어 진다.

또한 본 연구에서 제시한 일반화의 과정은 엄선한 문제가 아니라, 주위에서 접하는 문제로부터 시작하여, 그러한 문제에서도 충분히 탐구할 수 있음을 보여주었다. 즉, 주위에 있는 문제에서 출발하여 '100번째 항은?', '일반항은?' 등과 같은 몇 가지 질문으로 흥미있는 탐구를 유발할 수 있었다. 제기된 질문을 해결하기 위해 제시된 수열의 규칙성을 살피고, 이를 점화식으로 표현하여, 그 일반항을 구해보고자 하였다. 사실 점화식 표현과 일반항은 별개의 문제이며, 우리는 점화식에서 일반항을 구해보고자 하는 것이다. 이와 같은 탐구 과정은 배워서 하는 수학이 아니라, 직접 탐구하여 만들어 가는 수학을 재현한 것으로써 자신의 아이디어로 문제를 설정하고 해결하는 가치를 부각할 수 있다. 학생 자신의 아이디어를 이용하여 문제를 설정하고 해결하려는 노력은 학교수학에서 진정으로 추구하는 것이며, 이것은 지적 호기심이 왕성한 학생들에게 반드시 필요한 요소라고 생각된다. 이런 점에서 본 연구는 완성된 것을 학습하는 수학에서 만들어가는 수학의 가치를 일깨움으로써 수학교육에 활력을 불어 넣는 시도로 볼 수 있을 것이다.

Ⅵ. 결론

학교수학에서 피보나치 수열은 수열의 점화식을 다루면서 심화 내용의 소재로 다루어진다. 그리고 이러한 피보나치 수열은 다양한 성질과 응용력으로 인하여 수업에 활용할 수 있는 탐구 요소가 풍부하다. 뿐만 아니라 이 수열의 변형을 생각해 볼 수 있으며, 루카스는 피보나치 수열을 변형하여 루카스 수열을 만들고 이를 탐구하였다. 본고에서는 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} (n \ge 4),\ a_1 = a_2 = a_3 = 1$의 일반항을 구하는 방법과 그 일반항을 탐구해 보았다.

이 점화식의 일반항은 '조류 문제'로부터 비롯되었으며, 이것을 보다 일반적인 시각에서 해결을 모색해 보고자 하였다. 그리고 이 문제가 곧 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} (n \ge 4),\ a_1 = a_2 = a_3 = 1$의 일반항을 구하는 문제임을 확인하였으며, 이것의 일반항을 구하기 위해 유사 문제로 피보나치 수열의 일반항을 구하는 방법을 검토해 보았다. 그리고 이를 통해 두 가지 방법으로 주어진 점화식의 일반항을 구해 보았다.

점화식의 일반항을 구하는 기본 아이디어는 피보나치 수열의 일반항을 구하는 방법에서 가져오기는 하였으나, 일반항을 구하는 것이 쉬운 일은 아니었다. 몇 차례 어려움을 겪기도 하였지만, 이들을 극복해가면서 문제 해결에 도달할 수 있었다. 그리고 간단한 형태로 표현하기 위해 많은 노력을 기울여 주어진 점화식의 일반항을 서로 다른 두 가지 표현으로 제시하였다. 이 두 가지 표현은 Binet이 제시한 피보나치 수열의 일반항처럼 이를 통해 100번째 항을 구하기는 쉽지 않지만 단순하고 아름답게 표현되어 있기에 수학적으로 의미 있다고 생각되어 진다.

본 연구의 결과는 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서 증명의 중요성에도 불구하고, 증명 교육이 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못함에 따라 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추론을 강조하는 시점에서 시사하는 바가 크다. 즉, 본 연구는 객관식 위주의 평가로 학생들의 논리력이 약화되는 현 시점에서 추론과 그것의 검증을 위한 논리의 중요성을 일깨워 준다. 또한 본 연구의 탐구 과정은 지적 호기심이 왕성한 학생들을 대상으로 자신만의 문제제기와 아이디어 설정을 통해 문제 해결을 추구하여, 만들어 가는 수학의 경험을 일깨워 준다는 점에서 수학교육에서 시사하는 바가 크다 하겠다.

교사 위주의 수업보다 학생 중심의 탐구 활동이 지속적으로 강조되고 있지만(Goos, 2004), 이를 실행하기란 쉽지 않은 것이 현실이다. 본 연구는 교사가 아닌 학생이 탐구의 주체가 되는 경험을 제공하였다는 점과 학생들이 자주 접한 익숙한 소재로 시작하여 발전적 내용으로 탐구 주제를 선택하여 이끌어나갔다는 점에서 학교 교육에 시사하는 바가 크며, 이는 익숙한 소재로 시작하여 발전적 내용을 지향해야 한다는 김익표(2010)의 주장과도 일맥상통하다.

한편, 본 연구에서는 학교수학에서 다루지 않는 생성함수의 개념을 통해 일반항을 구하는 과정을 제시하였는데, 이 개념을 지적 호기심이 왕성한 학생들에게 제시하여 탐구를 유발하는 것이 필요하다고 생각된다. 생성함수를 이용한 방법은 부분분수 분해와 무한급수 개념의 연결을 통해 나타난 것이므로, 학교수학에서 교사의 적절한 안내에 의해 충분히 다룰 수 있는 내용이며, 아울러 관련 개념의 응용을 경험할 수 있는 소재가 될 수 있을 것이다. 이때 주어진 무한급수의 수렴값을 구하는 것이 아니라, 수렴값을 무한급수화하는 역의 과정이 필요하므로 무한급수의 수렴성에 대한 등호 구조를 대칭적 구조로서 인식할 수 있는 지도가 수반되어야 할 것이다. 교육 과정에 제시되지 않는 개념이라고 해서 무조건적으로 지도하지 않는 것은 바람직스럽지 못하며, 그 개념을 학습할 준비가 되어 있고 학습 의욕이 충만한 학생들에게는 개념 지도를 통해 새로운 방향의 탐구를 유발할 수 있도록 안내할 필요가 있다. 이러한 안내는 학생의 생각의 폭을 넓히는데 일조할 수 있을 것으로 생각된다. 학생들의 지적 호기심은 주관적이며, 지적 호기심을 충족해주는 것은 교육 과정에 충실한 교육 못지않게 중요하다. 따라서 학습 의욕이 왕성한 학생들의 지적 호기심을 충족시켜주기 위해, 교사들은 교육 과정에서 흔히 접하는 소재들의 발전 가능성을 인식하고 준비해야 할 것이다. 이런 점에서 피보나치 수열이 변형된 점화식을 대상화하여 다룬 본 연구는 학생들의 지적 호기심에 대응하는 교사들의 준비에 도움이 될 수 있을 것으로 생각된다.

본 연구의 소재는 영재 학생들을 위한 좋은 교육적 소재가 될 수 있을 것으로 생각되며, 또한 이 소재를 통한 교육적 경험은 스스로 $a_n = a_{n-2} + a_{n-3} (n \geq 4)$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$와 같은 또 다른 점화식의 일반항을 구하는 문제를 설정하며 해결하는 생각을 갖게 할 수 있을 것으로 기대된다. 뿐만 아니라 본고의 소재가 우수한 영재 학생들의 수학적 탐구력을 자극하고, 새로운 발견에 도달하게 되었을 때의 성취감을 경험할 수 있게 하고, 문제 해결을 보다 정교하게 다듬는 기회를 제공할 수 있는 좋은 자료가 될 수 있음을 확인하였다.

참 고 문 헌

김익표 (2010). 안내된 재발명을 포함한 탐구-중심 수업이 학생들의 수학적 활동에 미치는 영향에 관한 사례연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 49(2), 223-246.

양영오 · 김태호 (2008). 피보나치 수열의 일반화에 관한 고찰. 한국수학사학회지, 21(4), 87-104.

이지윤 (2006). 점화식과 생성함수의 지도 방법에 대하여. 인제대학교 석사학위논문.

정관훈 (2003). 점화식 수열의 효과적인 지도 방안. 충북대학교 석사학위논문.

정옥경 · 김용구 (2008). 피보나치수열을 이용한 학습자료 개발. 과학교육연구지, 32(1), 41-54.

조은령 (2008). 점화식의 유형별 일반해법에 관한 연구. 한국외국어대학교 석사학위논문.

Dunlap, R. A. (1997). *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific.

Garland, T. H. (1987). *Fascinating Fibonaccis: Mystery and Magic in Numbers*. Dale Seymour.

Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquire, *Journal for Research in Mathematics Education,* 35(4), 258-291.

Hoggatt, Jr. Verner E. (1969). *Fibonacci and Lucas Numbers*. Houghton Mifflin Co.

Vorob'ev, N. N. (1961). *Fibonacci Numbers*. New York: Blasidell Pub. Co.

Wikipedia (2012). http://en.wikipedia.org/wiki/The_Fibonacci_Association.

Wikipedia (2013). http://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%8E%98%EB%A5%B4%EB%A7%88%EC%9D%98_%EB%A7%88%EC%A7%80%EB%A7%89_%EC%A0%95%EB%A6%AC

On the general terms of the recurrence relation $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

Roh, Moon Ghi
Changwon Science High School, Chang-Won 641-500, Korea
E-mail: moonghiroh@gmail.com

Jung, Jae Hoon
Changwon Jungang High School, Chang-Won 641-842, Korea
E-mail: math.jung@hanmail.net

Kang, Jeong Gi†
Nam San Middle School, Chang-Won 642-110, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com

It is important to make students do research for oneself. But the practice of inquiry activity is not easy in the mathematics education field. Intellectual curiosities of students are unpredictable. It is important to meet intellectual curiosities of students. We could get a sequence in the process solving a problem. This sequence was expressed in a form of the recurrence relation $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} (n \geq 4)$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. We tried to look for the general terms of this sequence. This sequence is similar to Fibonacci sequence, but the process finding the general terms is never similar to Fibonacci sequence. We can get two general terms expressed in different form after our a great deal of effort. We hope that this study will give the spot of education energy.

* ZDM Classification : D54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : Fibonacci sequence, Recurrence relation, General term, $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.
† Corresponding author