Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2013) 19(9):827-833
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2013.13.1911 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

# 르장드르 웨이블릿을 이용한 쌍일차 시스템 수치 해석

# Numerical Method for the Analysis of Bilinear Systems via Legendre Wavelets

김 범 수*
(Beomsoo Kim[1])
[1]Mechanical System Engineering, Gyeongsang National University

**Abstract:** In this paper, an efficient computational method is presented for state space analysis of bilinear systems via Legendre wavelets. The differential matrix equation is converted to a generalized Sylvester matrix equation by using Legendre wavelets as a basis. First, an explicit expression for the inverse of the integral operational matrix of the Legendre wavelets is presented. Then using it, we propose a preorder traversal algorithm to solve the generalized Sylvester matrix equation, which greatly reduces the computation time. Finally the efficiency of the proposed method is discussed using numerical examples.

**Keywords:** bilinear systems, Legendre wavelets, Sylvester matrix equation, preorder traversal algorithm

## I. 서론

직교 기저 함수들로 구성된 함수 공간 내에 속하는 임의의 함수를 이들 기저 함수와 내적하면 각 기저 함수에 대응되는 계수들은 유일하게 구해지고, 그 임의의 함수를 직교 기저함수들의 1차 선형 결합으로 표현할 수 있어서 직교 기저 함수는 공학, 물리학, 수학 등 여러 분야에서 매우 중요한 역할을 한다. 일반적으로 직교 함수들은 크게 세 개의 그룹으로 분류된다. 첫 번째 그룹은 부분 상수(piecewise constant) 함수들로서 Haar 함수, 월쉬(Walsh) 함수, 블록 펄스(block pulse) 함수 등이 이에 속한다. 두 번째 그룹은 르장드르(Legendre) 다항식, Laguerre 다항식, Chebyshev 다항식 등이 포함된 직교 다항식그룹이며, 세 번째 그룹은 Fourier 함수, Hartley 함수 등 sine-cosine 함수들로 이루어진 그룹이다[1].

직교 기저 함수인 웨이블릿은 다중해상도 및 받침(support) 특성 등을 갖고 있어 최근 공학, 물리학, 수학 등 다양한 분야에서 활발히 연구 및 응용 되고 있다[2]. 특히 동적 시스템, 미분 방정식, 편미분 방정식 등에서 주어진 함수를 웨이블릿 직교 기저 함수의 선형 결합으로 근사화하여 해석하는 여러 가지 방법이 연구되고 있다[3-5]. 이 방법들은 주어진 웨이블릿 기저 함수를 적분 또는 미분했을 때 적분 또는 미분된 함수를 해당 웨이블릿의 적분 연산 행렬을 이용하여 다시 그 기저 함수로 표현함으로써 동적 문제를 대수 행렬 방정식 문제로 변환하여 쉽고 편리하게 해석할 수 있는 장점을 갖고 있지만, 일반적으로 대수 행렬 방정식을 Kronecker 곱을 이용하여 해를 구하는 과정에서 매우 큰 행렬에 대한 역변환 과정을 거치게 되어 많은 계산량과 저장공간이 필요하다.

쌍일차 시스템(bilinear systems)은 상태 변수와 입력이 결합된 항이 있는 비선형 시스템으로 상태 변수만 있거나 입력만 있을 때는 선형 시스템이다. 생물학적 프로세스, 전력 시스템, 자동차 브레이크 시스템, 연속 교반 탱크 반응기(CSTR) 등 많은 물리적 시스템이 쌍일차 시스템으로 표현된다[6,7]. 또한 일부 비선형 시스템은 Carleman 선형화 등으로 쌍일차 시스템으로 근사화 될 수 있어 쌍일차 시스템 해석에 관한 폭넓은 연구가 필요하다[8]. 쌍일차 시스템을 Haar 웨이블릿을 이용한 방법[9]과 르장드르 다항식을 이용한 방법[10]에서는 변환된 대수 행렬 방정식의 해를 Kronecker 곱을 이용하여 구하므로 많은 연산량을 필요로 한다. 쌍일차 시스템을 월시 함수를 이용한 방법[11]과 블록 펄스 함수를 이용한 연구[12]에서는 각각 고속 월시 변환 및 단일 항 전개 기법을 이용하여 연산량을 줄이는 알고리즘을 제시하였다.

본 연구는 직교 다항식인 르장드르 다항식을 척도함수로 사용하여 구성한 르장드르 웨이블릿과 그 적분 연산 행렬(operational matrix of integration)을 이용하여 르장드르 웨이블릿 기저 함수를 적분했을 때 이를 다시 르장드르 웨이블릿 기저 함수로 표현함으로써 쌍일차 시스템을 Sylvester 행렬 방정식 문제로 변환하여 해를 근사적으로 구한다. 다른 웨이블릿을 사용한 방법과 마찬가지로 좀 더 정확한 해를 구하기 위해서는 웨이블릿의 해상도를 증가시켜야 하며 이는 Sylvester 행렬 방정식의 차원이 매우 커져서 계산량 증가 및 연산의 복잡성을 수반하게 된다. 따라서 이를 개선하기 위해서 르장드르 웨이블릿 적분 연산 행렬의 역행렬을 해석적으로 구할 수 있는 방법을 제시하고 이 역행렬을 이용하여 변환된 Sylvester 행렬 방정식을 저차의 행렬 방정식들로 분할한다. 분할 과정은 이진 트리 구조 형태를 갖게 되며 각 노드 역시 Sylvester 행렬 방정식 구조를 갖는다. 이 트리 구조에서 전체 해는 전위 순회(preorder traversal) 알고리즘[13]으로 구할 수 있다. 따라서 저차화된 말단 노드로부터 해를 구함으로써 전체 해를 효율적으로 구할 수 있다.

## II. 르장드르 웨이블릿

르장드르 다항식은 힐버트 공간 $L_2[-1,1)$ 에서 완전 직교(complete orthogonal)로서 다음과 같이 재귀적으로 정의 된다

* 책임저자(Corresponding Author)
Manuscript received April 18, 2013 / revised July 10, 2013 / accepted July 15, 2013
김범수: 경상대학교 기계시스템공학과(kimbs@gnu.ac.kr)

Copyright© ICROS 2013

[14].

$$\begin{aligned} &P_0(t)=1,\\ &P_1(t)=t,\\ &P_{m+1}(t)=\tfrac{2m+1}{m+1}tP_m(t)-\tfrac{m}{m+1}P_{m-1}(t),\\ &\quad m=1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

르장드르 웨이블릿은 르장드르 다항식을 척도함수(scaling function)로 사용하여 이 함수들을 척도구성(dilation)과 평행이동(translation)하여 구성한 기저 함수들의 집합으로서 식 (2)와 같이 정의된다[14].

$$\phi_{nm}(t)=\begin{cases}\sqrt{m+\frac{1}{2}}\,2^{K/2}P_m(2^K t-2n+1), & \frac{2n-2}{2^K}\le t<\frac{2n}{2^K},\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{2}$$

여기서 $P_m(t)$ 는 차수가 $m$ 인 르장드르 다항식이고, $K$ 는 양의 정수 값을 갖는 척도 파라미터이며, $n=1,2,\ldots,2^{K-1}$ 은 평행이동 구간을 나타낸다. 척도함수로 사용할 르장드르 다항식의 최대 차수가 $M$ 이면 $m=0,1,\ldots,M$ 이다. 예를 들어 $M=4$ 인 르장드르 다항식을 이용하여 척도 파라미터 $K=3$ 이면 구간 $\frac{3}{4}\le t<1$ 에서 르장드르 웨이블릿은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\phi_{4,0}(t)=2,\\ &\phi_{4,1}(t)=2\sqrt{3}(8t-7),\\ &\phi_{4,2}(t)=2\sqrt{5}\left(96t^2-168t+73\right),\\ &\phi_{4,3}(t)=2\sqrt{7}\left(1280t^3-3360t^2+2928t-847\right),\\ &\phi_{4,4}(t)=2\sqrt{9}\left(17920t^4-62720t^3+82080t^2-47600t+10321\right). \end{aligned} \tag{3}$$

구간 $[0,1)$ 에서 적분 가능한 함수 $f(t)$ 를 르장드르 웨이블릿의 1 차 선형 결합으로 나타내면 다음과 같다.

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}f_{nm}\phi_{nm}(t). \tag{4}$$

여기서 계수 $f_{nm}=\langle f(t),\phi_{nm}(t)\rangle$ 이고 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 는 함수의 내적을 나타낸다. 식(4)에서 무한 급수로 전개된 함수 $f(t)$ 를 유한개의 기저 함수들로 근사화 하면

$$f(t)\simeq\sum_{n=1}^{2^{K-1}}\sum_{m=0}^{M}f_{nm}\phi_{nm}(t)=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Psi}(t), \tag{5}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서

$$\mathbf{\Psi}(t)=[\underbrace{\phi_{10}(t)\ \cdots\phi_{1M}(t)}_{n=1}\ \ \underbrace{\cdots\phi_{2^{K-1}0}(t)\ \cdots\phi_{2^{K-1}M}(t)}_{n=2^{K-1}}]^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

$$\mathbf{F}=[f_{10}\ f_{11}\cdots f_{1M}\ f_{20}\ \ f_{21}\cdots f_{2M}\ \ \cdots f_{2^{K-1}0}\ \ f_{2^{K-1}1}\cdots f_{2^{K-1}M}]^{\mathrm{T}},$$

이며 계수 벡터 $\mathbf{F}$ 는 르장드르 웨이블릿이 직교 기저함수이므로 유일하게 구해진다. 식 (6)의 기저함수를 적분하여 이를 다시 르장드르 웨이블릿 기저함수로 표현하면 다음과 같다[15].

$$\int_0^t\mathbf{\Psi}(\tau)d\tau\simeq\mathbf{P}_m\mathbf{\Psi}(t). \tag{7}$$

여기서 $m=2^{K-1}(M+1)$ 이고 적분연산행렬 $\mathbf{P}_m$ 은 $m\times m$ 차원인 블록 상부 삼각 행렬 구조를 갖는다.

$$\mathbf{P}_m=\frac{1}{2^K}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{M+1} & \mathbf{L}_{M+1} & \mathbf{L}_{M+1} & \cdots & \mathbf{L}_{M+1}\\ 0 & \mathbf{D}_{M+1} & \mathbf{L}_{M+1} & & \mathbf{L}_{M+1}\\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{M+1} & & \mathbf{L}_{M+1}\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}_{M+1}\end{bmatrix}. \tag{8}$$

(8)에서 블록 행렬 $\mathbf{D}_{M+1}$ 과 $\mathbf{L}_{M+1}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_{M+1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots & & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{15}} & 0 & & & 0\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{15}} & 0 & & & & 0\\ 0 & 0 & & \ddots & & \vdots & 0\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ & & & & -\alpha & 0 & \beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & -\beta & 0\end{bmatrix},$$

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{4M^2-16M+15}},\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{4M^2-8M+3}}, \tag{9}$$

$$\mathbf{L}_{M+1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0\end{bmatrix}.$$

적분 연산 행렬의 역행렬은 임의의 행렬이 두 행렬의 합으로 표현되면 이 행렬의 역행렬을 구하는 방법인 정리 1을 사용하여 구한다.

정리 1 [16]: $\mathbf{A}$ 와 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 가 각각 정칙 정방행렬이고 $\mathbf{B}$ 가 양의 계수(rank) r을 갖으며, $\mathbf{B}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+..+\mathbf{E}_r$ 와 같이 각각 계수 1을 갖는 $\mathbf{E}_i,\ i=1,2..r$ 의 합으로 표현된다고 하자. $\mathbf{D}_{k+1}=\mathbf{A}+\mathbf{E}_1+\cdots+\mathbf{E}_k,\quad k=1,2,\ldots,r$ 인 행렬이 모든 $k$ 에 대해서 정칙행렬이면, $\mathbf{D}_1=\mathbf{A}$ 로 놓았을 때 $\mathbf{D}_{k+1}$ 의 역행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{D}_{k+1}^{-1}=\mathbf{D}_k^{-1}-v_k\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{E}_k\mathbf{D}_k^{-1},\ \ k=1,2..r. \tag{10}$$

여기서

$$v_k=\frac{1}{1+tr(\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{E}_k)}$$

이다. ■

참고1 [17]: 단일 항 행렬(single entry matrix) $\mathbf{J}^{ij}\in R^{n\times m}$ 은 $(i,j)$ 요소는 1이고 나머지는 0인 행렬로서 $\mathbf{A}\in R^{p\times n}$ 인 행렬과의 곱은 $\mathbf{AJ}^{ij}=[0\ 0\ \cdots\ \mathbf{A}_i\cdots 0]$ 이 되어 $\mathbf{A}$ 의 $i$ 번째 열 $\mathbf{A}_i$ 을 $\mathbf{AJ}^{ij}$ 의 $j$ 번째 열로 옮기고 나머지 열은 모두 0인 행렬로 한다. $\mathbf{A}\in R^{m\times p}$ 인 행렬과의 곱 $\mathbf{J}^{ij}\mathbf{A}$ 는 $\mathbf{A}$ 의 $j$ 번째 행 $\mathbf{A}_j$ 을 $\mathbf{J}^{ij}\mathbf{A}$ 의 $i$ 번째 행으로 옮기고 나머지 행은 모두 0인 행렬로 만든다.

보조정리 1: (11) 형태로 주어진 반대칭 행렬(skew symmetric

matrix)의 역행렬은 $n=2i,\ i=1,2,3..$ 일 때 (12)와 같이 재귀적으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}_n=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & & & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathbf{A}_n^{-1}=\left[\begin{array}{cccc|cc} & & & & 0 & \eta_1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & \mathbf{A}_{n-2}^{-1} & & & 0 & \eta_2 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a_{n-1}} \\ -\eta_1 & 0 & -\eta_2 & \cdots\ 0 & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right], \tag{12}$$

$$\eta_1=\tfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\mathbf{A}_{n-2(n-2,1)}^{-1},\quad \eta_2=\tfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\mathbf{A}_{n-2(n-2,i)}^{-1}.$$

여기서 $\mathbf{A}_2^{-1}=\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 이다. ■

증명: 반대칭 행렬은 크기(dimension)가 홀수이면 행렬식(determinant)이 0이 되어 역행렬이 존재하지 않으며, 역행렬이 존재하면 그 역행렬도 반대칭이다[18]. 따라서 여기서는 $\mathbf{A}_n$ 의 크기가 짝수인 $n=2i,\ i=1,2,3..$ 인 경우를 고려한다. $n=2$인 경우 $\mathbf{A}_2$ 의 역행렬은 다음과 같이 간단하게 구해진다.

$$\mathbf{A}_2^{-1}=\tfrac{1}{a_1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$n=4$ 일 때 $\mathbf{A}_4$ 를 다음과 같이 블록 행렬로 나누고

$$\mathbf{A}_4=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ \hline 0 & -a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right],$$

역행렬 보조정리(matrix inversion lemma)를 이용하면

$$\mathbf{A}_4^{-1}=\begin{bmatrix} F_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}F_{22}^{-1} \\ -F_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & F_{22}^{-1}\end{bmatrix},$$

$$F_{11}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},\quad F_{22}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12},$$

로 구할 수 있다. $A_{22}$는 2x2 행렬이고 반대칭 행렬이므로 $A_{22}^{-1}$가 존재한다. 그리고 $A_{12}$는 (2,1) 요소가 $a_2$이고 나머지는 0인 단일항 행렬이며 $\mathbf{A}_4$가 반대칭 행렬이므로 $A_{21}=-A_{12}^T$ 이고 반대칭 행렬의 역행렬도 반대칭 행렬이므로 $\left(-A_{11}^{-1}A_{12}F_{22}^{-1}\right)^T=F_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$ 가 성립하여 $\mathbf{A}_4^{-1}$ 의 비대각 블록은 하나만 구하면 된다. $F_{11}$ 의 구성요소인 $A_{12}A_{22}^{-1}$ 는 참고1에 의해서 $A_{12}\to\mathbf{J}^{21}$ 인 단일 항 행렬이므로 행렬 연산에 의해 다음과 같이 된다.

$$A_{12}A_{22}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ a_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{a_3}\\ \frac{1}{a_3} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{-a_2}{a_3}\end{bmatrix}.$$

여기서 $A_{22}^{-1}$ 의 (1,1) 요소가 0이므로 $A_{12}A_{22}^{-1}$ 의 첫 번째 열은 0 벡터가 된다. 마찬가지로 $\left(A_{12}A_{22}^{-1}\right)A_{21}$ 는 $A_{21}\to\mathbf{J}^{12}$ 이므로 $A_{12}A_{22}^{-1}$ 의 첫 번째 열에 $A(1,2)=-a_2$ 를 곱한 것을 2 번째 열로 하고 나머지는 모두 0인 행렬이다. 그러데 $A_{12}A_{22}^{-1}$ 의 첫 번째 열이 0 벡터이므로 $A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}=0$ 이 된다. 따라서 $F_{11}=A_{11}$ 이고 $F_{22}=A_{22}$ 이 되며,

$$-A_{11}^{-1}A_{12}F_{22}^{-1}=\tfrac{-1}{a_1a_3}\begin{bmatrix}0 & a_2\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

이므로

$$\mathbf{A}_4^{-1}=\left[\begin{array}{cc|cc} & & 0 & \frac{-a2}{a_1a_3} \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a_3} \\ \frac{a2}{a_1a_3} & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array}\right],$$

으로 구해진다. 임의 짝수 n 에 대해서 행렬 $\mathbf{A}_n$ 을 아래 2개 행 및 우측 2개 열을 기준으로 분할하고

$$\mathbf{A}_n=\left[\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & \mathbf{A}_{n-2} & & & \vdots \\ & & & a_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_{n-2} & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & -a_{n-1} & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{n,11} & A_{n,12} \\ \hline A_{n,21} & A_{n,22} \end{array}\right],$$

$A_{n,11}\in R^{n-2\times n-2},\ A_{n,12}\in R^{n-2\times 2},\ A_{n,21}\in R^{2\times n-2},\ A_{n,22}\in R^{2\times 2}$, 역행렬 보조정리를 이용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}_n^{-1}=\begin{bmatrix} F_{n,11}^{-1} & -A_{n,11}^{-1}A_{n,12}F_{n,22}^{-1} \\ -F_{n,22}^{-1}A_{n,21}A_{n,11}^{-1} & F_{n,22}^{-1}\end{bmatrix},$$

$$F_{n,11}=A_{n,11}-A_{n,12}A_{n,22}^{-1}A_{n,21},$$

$$F_{n,22}=A_{n,22}-A_{n,21}A_{n,11}^{-1}A_{n,12}.$$

$A_{n,12}$ 는 $\mathbf{J}^{1,n-2}$ 인 단일 항 행렬이므로 $A_{n,12}A_{n,22}^{-1}A_{n,21}$ 와 $A_{n,21}A_{n,11}^{-1}A_{n,12}$ 는 위와 마찬가지 정리하면 0인 행렬이 됨을 알 수 있다. 따라서 $F_{n,11}=A_{n,11}$ 이 되고, $F_{n,22}=A_{n,22}$ 이 되어 역행렬의 대각 블록 행렬은 각각 다음과 같이 구해진다.

$$F_{n,11}^{-1}=A_{n,11}^{-1}=\mathbf{A}_{n-2}^{-1},\quad F_{n,22}^{-1}=A_{n,22}^{-1}=\tfrac{1}{a_{n-1}}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

비대각 블록 행렬 $-A_{n,11}^{-1}A_{n,12}F_{n,22}^{-1}$ 에서 $A_{n,12}F_{n,22}^{-1}$ 는 $F_{n,22}^{-1}$ 의 첫 번째 행에 $a_{n-2}$ 을 곱한 것을 $n-2$ 번째 행으로 하고 나머지는 모두 0인 행렬로 만들어 $\mathbf{J}^{n-2,2}$ 인 단일 항 행렬이 된다. 여기서 $A_{n,12}F_{n,22}^{-1}$ 의 $(n-2,2)$ 요소는 $\frac{-a_{n-2}}{a_{n-1}}$ 이다. 따라서

$A_{n,11}^{-1}A_{n,12}F_{n,22}^{-1}$ 는 $A_{n,11}^{-1}(=\mathbf{A}_{n-2}^{-1})$ 의 $n-2$ 번째 열에 $\frac{-a_{n-2}}{a_{n-1}}$ 을 곱한 것을 2번째 열로 하고 나머지는 0인 행렬이다. ■

보조정리 1은 2×2 행렬의 역행렬 계산만 필요하므로 (11) 형태를 갖는 고차의 반대칭 행렬에 대한 역행렬 계산을 쉽게 하고 또한 식을 해석적으로 전개하는데 편리성을 준다.

**보조정리 2**: (8)에서 정의된 적분연산 행렬 $\mathbf{P}_m$은 M 이 홀수일 때 역행렬은 다음과 같이 재귀적 형태를 갖는다.

$$\mathbf{P}_m^{-1} = 2^K \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{M+1}^{-1} & -\mathbf{G}_{M+1} & \cdots & -\mathbf{G}_{M+1} \\ 0 & \mathbf{D}_{M+1}^{-1} & & -\mathbf{G}_{M+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}_{M+1}^{-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

여기서 $\mathbf{G}_{M+1} = \mathbf{D}_{M+1}^{-1}\mathbf{L}_{M+1}\mathbf{D}_{M+1}^{-1}$ 이고, $\mathbf{D}_{M+1}^{-1}$ 은 (16)에 주어져 있다. ■

**증명**: (8)에 주어진 블록 상부 삼각 행렬의 역행렬은 역행렬 보조정리를 이용하면 (13)과 같이 표현되며 (13)에서

$$\mathbf{D}_{M+1} = \mathbf{H}_{M+1} + \mathbf{S}_{M+1}, \tag{14}$$

로 놓자. 여기서

$$\mathbf{S}_{M+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{15}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{15}} & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{M+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 보조정리 1에 의해서 $\mathbf{S}_{M+1}$의 역행렬을 재귀적으로 구하고, 정리 1을 이용하면 (14)의 역행렬은 다음과 같이 행렬 2개의 합의 역행렬로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{M+1}^{-1} &= (\mathbf{S}_{M+1} + \mathbf{H}_{M+1})^{-1} \\ &= \mathbf{S}_{M+1}^{-1} - \frac{1}{1+g}\mathbf{S}_{M+1}^{-1}\mathbf{H}_{M+1}\mathbf{S}_{M+1}^{-1}, \\ g &= trace(\mathbf{H}_{M+1}\mathbf{S}_{M+1}^{-1}). \end{aligned} \tag{15}$$

여기서 $\mathbf{H}_{M+1}$의 계수(rank)는 1이고 $\mathbf{S}_{M+1}$ 은 $\mathbf{S}_{M+1}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{S}_{M+1}$ 인 반대칭 행렬이므로 행렬의 크기가 홀수이면 행렬식 0 이다 [18]. 여기서는 $\mathbf{S}_{M+1}$의 크기가 짝수일 때 즉 르장드르 다항식의 차수 M이 홀수인 경우만 고려한다. 반대칭 행렬의 역행렬도 반대칭 행렬이므로 $\mathbf{S}_{M+1}^{-1}$ 의 대각요소는 모두 0인 구조를 갖는다. 단일 항 행렬 $\mathbf{J}^{11}$ 인 $\mathbf{H}_{M+1}$ 와 $\mathbf{S}_{M+1}^{-1}$ 곱은 참고1에 따라

$$\mathbf{H}_{M+1}\mathbf{S}_{M+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_{M+1}^{-1}\right)_{1\text{st row}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

이 되고 $\left(\mathbf{S}_{M+1}^{-1}\right)_{1\text{st row}}$ 의 첫 번째 요소가 0 이므로 $\mathbf{H}_{M+1}\mathbf{S}_{M+1}^{-1}$ 의 대각요소는 모두 0 이고 따라서 대각요소 합 $g=0$ 이다. (15) 를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_{M+1}^{-1} = \mathbf{S}_{M+1}^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{M+1}\mathbf{S}_{M+1}^{-1}\right) \tag{16}$$

$\mathbf{D}_{M+1}^{-1}$ 의 첫번째 열을 $\mathbf{d}_{M+1}$ 이라 놓고, 비대각 행렬 $\mathbf{G}_{M+1} = \mathbf{D}_{M+1}^{-1}\mathbf{L}_{M+1}\mathbf{D}_{M+1}^{-1}$ 은 $\mathbf{L}_{M+1}$ 은 $\mathbf{J}^{11}$ 인 단일 항 행렬이므로 $\mathbf{D}_{M+1}^{-1}\mathbf{L}_{M+1}$ 은 $\mathbf{d}_{M+1}$ 에 $\mathbf{L}_{M+1}$ 의 (1,1) 요소(여기서는 2)를 곱한 것을 첫 번째 열로 하고 나머지가 0인 행렬이다. 따라서 $\mathbf{D}_{M+1}^{-1}\mathbf{L}_{M+1}\mathbf{D}_{M+1}^{-1} = 2\mathbf{d}_{M+1}\mathbf{d}_{M+1}^{\mathrm{T}}$ 이다. ■

**정리 2** [19]: 르장드르 웨이블릿 함수 $\phi_{nm}(t)$, $\phi_{ns}(t)$ 의 곱은 $m \le s$ 이면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\phi_{nm}(t)\phi_{ns}(t) = \frac{2^{k/2}}{2}\sqrt{(2m+1)(2s+1)}\sum_{j=0}^{m}\frac{\gamma_j}{\sqrt{\frac{2\xi+1}{2}}}\phi_{n\xi}(t), \\ &\xi = m+s-2j \end{aligned} \tag{17}$$

여기서

$$\gamma_j = \frac{a_{m-j}a_j a_{s-j}}{a_{m+s-j}}\left(\frac{2m+2s-4j+1}{2m+2s-2j+1}\right), \quad a_j = \frac{(2j-1)!!}{j!},$$

이며 $x!!$ 는 $x$ 의 멱계승(double factorial) [20]이다. ■

## III. 쌍일차 시스템 해석 알고리즘

다음과 같은 쌍일차 시스템을 고려하자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{x}(t)u_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\,. \tag{18}$$

여기서 $\mathbf{x}(t) \in R^{n\times 1}$, $\mathbf{u}(t) \in R^{r\times 1}$ 는 각각 시스템의 상태 및 입력 변수이고 계수 행렬 $\mathbf{A}, \mathbf{N}_i, \mathbf{B}$ 는 알맞은 차원을 갖는다. 상태 변수와 입력 변수를 르장드르 웨이블릿 기저 함수의 선형 결합으로 전개하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{X}\mathbf{\Psi}(t), \;\; \mathbf{u}(t) \simeq \mathbf{U}\mathbf{\Psi}(t)\,. \tag{19}$$

여기서 $\mathbf{U} \in R^{r\times m}$ 이고, $\mathbf{X} \in R^{n\times m}$ 는 구해야 할 미지 행렬이다. 쌍일차 시스템 (18)을 대수 행렬 방정식으로 전개하기 위해 (18)의 양변을 적분하면

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\int_0^t \mathbf{x}(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\int_0^t \mathbf{x}(\tau)u_i(\tau)d\tau \\ + \mathbf{B}\int_0^t \mathbf{u}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

이다. 초기값을 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}_0\mathbf{\Psi}(t)$ 로 표현하고 계수 행렬 전개식 (17)을 이용하면

$$\int_0^t \mathbf{x}(\tau)u_i(\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{X}\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}_i d\tau \simeq \mathbf{X}\tilde{\mathbf{U}}_i\mathbf{P}_m\mathbf{\Psi}(t)\,, \tag{21}$$

와 같이 되고, 적분 연산 행렬과 (19)를 (20)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X\Psi}(t)-\mathbf{X}_0\mathbf{\Psi}(t)=\mathbf{AXP}_m\mathbf{\Psi}(t)+\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}\tilde{\mathbf{U}}_i\mathbf{P}_m\mathbf{\Psi}(t)+\mathbf{BUP}_m\mathbf{\Psi}(t). \tag{22}$$

(21)에서 $\tilde{\mathbf{U}}_i$ 는 입력 $u_i(t)$ 에 해당되는 $\mathbf{U}$ 의 $i$ 번째 행이다.

식 (22) 양변에서 $\mathbf{\Psi}(t)$ 를 소거하면 다음과 같이 쌍일차 시스템을 일반화된 Sylvester 행렬 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{X}=\mathbf{AXP}_m+\sum_{i=1}^{r}N_i\mathbf{X}\tilde{\mathbf{U}}_i\mathbf{P}_m+\mathbf{X}_0+\mathbf{BUP}_m \tag{23}$$

일반적으로 Sylvester 행렬 방정식 (23)의 해는 Kronecker 곱을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$vec(X)=\left(\mathbf{I}-\left(\mathbf{P}_m^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{A}+\sum_{i=1}^{r}\left(\tilde{\mathbf{U}}_i\mathbf{P}_m\right)^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{N}_i\right)\right)^{-1}\times vec\left(\mathbf{X}_0+\mathbf{BUP}_m\right) \tag{24}$$

여기서 $vec(\cdot)$ 는 주어진 행렬의 열을 순차적으로 쌓아 벡터로 표현하는 연산자로서 다음과 같이 정의된다.

$$vec(\mathbf{X})=\left[x_{11}\ \cdots x_{n1}\ x_{12}\ \cdots\ x_{n2}\cdots\ x_{1m}\ \cdots\ x_{nm}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Kronecker 곱을 이용하여 정확한 해에 근접한 해를 구하기 위해서는 르장드르 다항식의 차수를 증가시키거나 웨이블릿 스케일링 파라미터를 증가시켜 해상도를 높여야 하며 이는 고차의 역행렬 계산을 필요로 한다.

본 연구에서는 르장드르 웨이블릿 적분 연산 역행렬과 블록 대각 행렬인 계수 행렬의 구조를 이용하여 고차의 Sylvester 행렬 방정식을 저차의 행렬 대수 방정식들로 분할하여 계산량을 줄이고 연산 속도를 높일 수 있는 알고리즘을 제시한다.

식 (23)의 양변에 $\frac{1}{2^K}\mathbf{P}_m^{-1}$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$\mathbf{XP}_m^{-1}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}\tilde{\mathbf{U}}_i+\mathbf{F}_m, \tag{25}$$

여기서 $\mathbf{F}_m:=\frac{1}{2^K}\mathbf{BU}+\mathbf{X}_0\mathbf{P}_m^{-1}$ 이다. 그리고 정리 2 를 이용해서 구한 계수 행렬 $\tilde{\mathbf{U}}_i$ 는 르장드르 웨이블릿 함수가 구간별로 상호독립(disjoint)이므로 블록 대각 행렬 $\tilde{\mathbf{U}}_i=blockdiag(\tilde{\mathbf{U}}_{i,1},\ldots,\tilde{\mathbf{U}}_{i,2^{K-1}})$ 구조를 갖는다. 따라서 다음과 같이 행렬을

$$\mathbf{X}:=\left[\mathbf{X}_{1,1}\ \mathbf{X}_{1,2}\right],\ \mathbf{P}_m^{-1}:=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{\frac{m}{2}}^{-1} & -\mathbf{G}_{\frac{m}{2}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\frac{m}{2}}^{-1}\end{bmatrix},\ \mathbf{F}:=\left[\mathbf{F}_{1,1}\ \mathbf{F}_{1,2}\right],$$

$$\mathbf{X}_{1,i},\mathbf{F}_{1,i}\in\mathbf{X}^{n\times\frac{m}{2}},i=1,2.$$

로 분할하면 (25) 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\left[\mathbf{X}_{1,1}\ \mathbf{X}_{1,2}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{\frac{m}{2}}^{-1} & -\mathbf{G}_{\frac{m}{2}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\frac{m}{2}}^{-1}\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2^K}\left[\mathbf{AX}_{1,1}\ \mathbf{AX}_{1,2}\right]+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\left[\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{1,1}\ \mathbf{N}_i\mathbf{X}_{1,2}\right]\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{U}}_{1,1} & 0\\ 0 & \tilde{\mathbf{U}}_{1,2}\end{bmatrix}+\left[\mathbf{F}_{1,1}\ \mathbf{F}_{1,2}\right]. \tag{26}$$

따라서 (25)는 아래와 같이 차수가 반으로 줄어든 2개의 Sylvester 행렬 방정식으로 분할된다.

$$\mathbf{X}_{1,1}\mathbf{P}_{\frac{m}{2}}^{-1}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{1,1}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{1,1}\tilde{\mathbf{U}}_{1,1}+\mathbf{F}_{1,1}, \tag{27}$$

$$\mathbf{X}_{1,2}\mathbf{P}_{\frac{m}{2}}^{-1}-\mathbf{X}_{1,1}\mathbf{G}_{\frac{m}{2}}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{1,2}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{1,2}\tilde{\mathbf{U}}_{1,2}+\mathbf{F}_{1,2}. \tag{28}$$

식 (28)을 아래와 같이

$$\mathbf{X}_{1,1}:=\left[\mathbf{X}_{2,1}\ \mathbf{X}_{2,2}\right],\ \mathbf{P}_{\frac{m}{2}}^{-1}:=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{\frac{m}{4}}^{-1} & -\mathbf{G}_{\frac{m}{4}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\frac{m}{4}}^{-1}\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{1,1}:=\left[\mathbf{F}_{2,1}\ \mathbf{F}_{2,2}\right]$$

행렬을 분할하면

$$\mathbf{X}_{2,1}\mathbf{P}_{\frac{m}{4}}^{-1}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{2,1}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{2,1}\tilde{\mathbf{U}}_{2,1}+\mathbf{F}_{2,1}, \tag{29}$$

$$\mathbf{X}_{2,2}\mathbf{P}_{\frac{m}{4}}^{-1}-\mathbf{X}_{2,1}\mathbf{G}_{\frac{m}{4}}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{2,2}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{2,2}\tilde{\mathbf{U}}_{2,2}+\mathbf{F}_{2,2} \tag{30}$$

로 (27)은 차수가 반으로 줄어든 2개의 Sylvester 행렬 방정식으로 분할된다. 식 (28)은 (27)에서 구해진 $\mathbf{X}_{1,1}$ 을 상수항으로 처리하여 $\mathbf{X}_{1,2}:=\left[\mathbf{X}_{2,3}\ \mathbf{X}_{2,4}\right]$, $\mathbf{X}_{1,1}\mathbf{G}_{\frac{m}{2}}+\mathbf{F}_{1,2}:=\left[\mathbf{F}_{2,3}\ \mathbf{F}_{2,4}\right]$ 로 재구성하면

$$\mathbf{X}_{2,3}\mathbf{P}_{\frac{m}{4}}^{-1}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{2,3}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{2,3}\tilde{\mathbf{U}}_{2,3}+\mathbf{F}_{2,3}, \tag{30}$$

$$\mathbf{X}_{2,4}\mathbf{P}_{\frac{m}{4}}^{-1}-\mathbf{X}_{2,3}\mathbf{G}_{\frac{m}{4}}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{2,4}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{2,4}\tilde{\mathbf{U}}_{2,4}+\mathbf{F}_{2,4} \tag{31}$$

로 분리된다. 이 과정을 반복하면 (25)는 이진 트리 형태로 분할되면서 최종적으로 각 말단 노드는 다음과 같은 행렬 방정식을 갖게 된다.

$$\mathbf{X}_{k,2i-1}\mathbf{P}_{M+1}^{-1}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{k,2i-1}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{k,2i-1}\tilde{\mathbf{U}}_{k,2i-1}+\mathbf{F}_{k,2i-1}, \tag{32}$$

$$\mathbf{X}_{k,2i}\mathbf{P}_{M+1}^{-1}=\tfrac{1}{2^K}\mathbf{AX}_{k,2i}+\tfrac{1}{2^K}\sum_{i=1}^{r}\mathbf{N}_i\mathbf{X}_{k,2i}\tilde{\mathbf{U}}_{k,2i}+\mathbf{F}_{k,2i}+\mathbf{X}_{k,2i-1}\mathbf{G}_{M+1}. \tag{33}$$

여기서 첫 번째 아래 첨자 $k=2^{K-1}-1$ 는 분할 단계이며, 두 번째 첨자는 각 분할 단계에서 전체 행렬중 $2i-1$, $2i$, $(i=1,2,\ldots,2^{K-1})$ 번째에 해당되는 블록 행렬 인덱스이다. 따라서 (32), (33)으로 표현된 이진 트리 말단의 행렬 방정식에서 $\mathbf{X}_{k,2i-1}$, $\mathbf{X}_{k,2i}$ 을 구하고 이를 전위 순회(preorder traversal) 알고리즘[13]을 이용하여 전체 해를 구한다.

## IV. 수치 예

예 1: 다음과 같은 파라미터를 갖는 쌍일차 시스템을 고려하자.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.21 & 0.32\\ -2.73 & -1.64\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2.31 & 3.45\\ 1.23 & 4.11\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_1=\begin{bmatrix}-0.23 & 0.14\\ 0.32 & -0.56\end{bmatrix},\ \mathbf{N}_2=\begin{bmatrix}-0.43 & -0.57\\ 0.61 & -0.35\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}0.3\\ 1.2\end{bmatrix}.$$

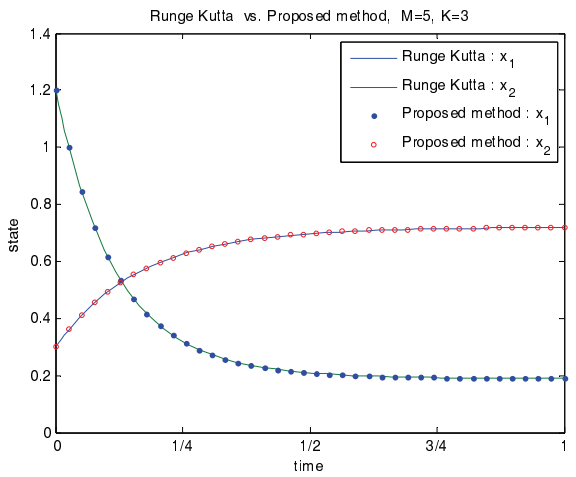


그림 1. M = 5, K = 3 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 1. State trajectories at M = 5, K = 3.

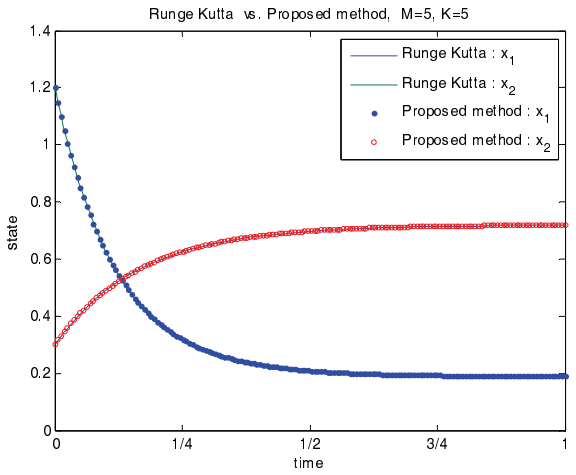


그림 2. M = 5, K = 5 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 2. State trajectories at M = 5, K = 5.

그림 1과 2에 M = 5, K = 3 및 M = 5, K = 5 일 때 $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = 0.5$ 를 인가해서 제안된 방법(작은 원)과 Runge-Kutta 방법(실선)으로 구한 해를 나타내었다.

M 과 K 가 증가할수록 르장드르 웨이블릿 방법을 이용해서 구한 해가 Runge-Kutta방법으로 구한 해와 차이가 거의 없음을 알 수 있다.

예 2: 다음과 같은 파라미터를 갖는 쌍일차 시스템을 고려하자[9].

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

그림 3과 4에 입력이 $u(t) = e^{-t}$ 이고, M=5, K=3 및 M=5, K=5 일 때 제안된 방법(작은 원)으로 구한 해와 해석적 해를 나타내었다. 해석적 해는 다음과 같다.

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}e^{\left(-t-e^{-t}+1\right)} + \tfrac{1}{2}e^{\left(-3t-e^{-t}+1\right)},$$
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}e^{\left(-t-e^{-t}+1\right)} - \tfrac{1}{2}e^{\left(-3t-e^{-t}+1\right)}.$$

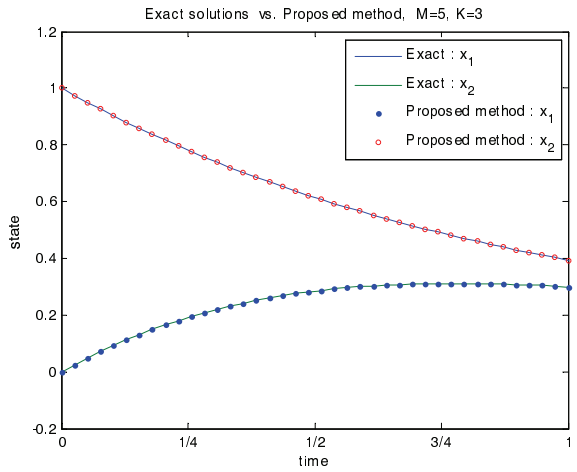


그림 3. M = 5, K = 3 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 3. State trajectories at M = 5, K = 3.

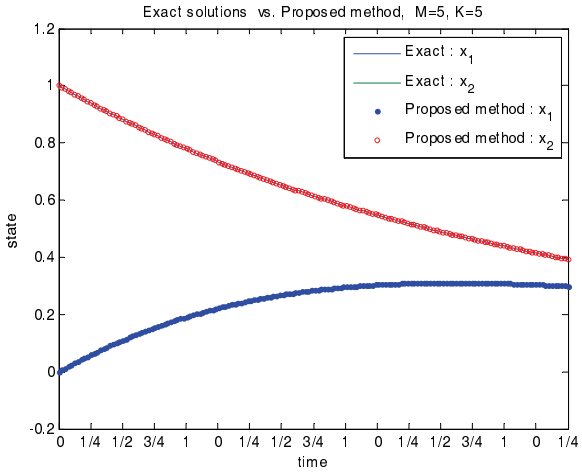


그림 4. M = 5, K = 5 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 4. State trajectories at M = 5, K = 5.

표 1. 해석적 해와 제안된 방법의 해 비교(M = 3, K = 3).
Table 1. Comparison of the proposed solution against the exact solution (M = 3, K = 3).

| t | 해석적 해 | | 제안된 방법 | | 오차 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_{e1}$ | $x_{e2}$ | $x_{p1}$ | $x_{p2}$ | $x_{e1}-x_{p1}$ | $x_{e2}-x_{p2}$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $-9.9\times10^{-6}$ | $-7.7\times10^{-6}$ | $9.9\times10^{-6}$ |
| 0.128205 | 0.879953 | 0.1122 | 0.879955 | 0.112197 | $-2.7\times10^{-6}$ | $3.5\times10^{-6}$ |
| 0.25641 | 0.775594 | 0.194624 | 0.775594 | 0.194624 | $-5.0\times10^{-9}$ | $-6.4\times10^{-7}$ |
| 0.384615 | 0.685413 | 0.251347 | 0.685413 | 0.251348 | $1.9\times10^{-8}$ | $-4.4\times10^{-7}$ |
| 0.512821 | 0.607537 | 0.286843 | 0.607537 | 0.286844 | $4.5\times10^{-7}$ | $-9.6\times10^{-7}$ |
| 0.641026 | 0.540076 | 0.305466 | 0.540075 | 0.305467 | $7.1\times10^{-7}$ | $-1.5\times10^{-6}$ |
| 0.76923 | 0.481311 | 0.311159 | 0.481311 | 0.311159 | $-1.5\times10^{-7}$ | $3.5\times10^{-7}$ |
| 1 | 0.39294 | 0.299261 | 0.392938 | 0.299266 | $2.1\times10^{-6}$ | $-4.9\times10^{-6}$ |

표 1과 2에 해석적 해와 여기서 제시된 방법과의 오차를 나타내었다. M 과 K 를 증가시키면 오차가 아주 적음을 볼 수 있다.

Kronecker 곱을 이용한 Haar 웨이블릿 방법[9]에 $O(m^3n^3 + m^2n^2)$, $m = 2^{K-1}(M+1)$ flop이 필요하지만 본 연구에서 제

표 2. 해석적 해와 제안된 방법의 해 비교(M = 7, K = 6).

Table 2. Comparison of the proposed solution against the exact solution (M = 7, K = 6).

| t | 해석적 해 | | 제안된 방법 | | 오차 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_{e1}$ | $x_{e2}$ | $x_{p1}$ | $x_{p2}$ | $x_{e1}-x_{p1}$ | $x_{e2}-x_{p2}$ |
| 0 | 1 | 0 | 1.00001 | $8{,}8\times10^{-19}$ | $3.3\times10^{-16}$ | $-8.8\times10^{-19}$ |
| 0.125392 | 0.882414 | 0.110071 | 0.882414 | 0.110071 | 0 | $2.7\times10^{-17}$ |
| 0.250784 | 0.779864 | 0.191578 | 0.779864 | 0.191578 | $2.2\times10^{-16}$ | 0 |
| 0.376176 | 0.69095 | 0.248315 | 0.69095 | 0.248315 | $2.2\times10^{-19}$ | $-8.3\times10^{-17}$ |
| 0.501567 | 0.613929 | 0.284463 | 0.613929 | 0.284463 | $1.1\times10^{-16}$ | $-5.5\times10^{-17}$ |
| 0.626959 | 0.547024 | 0.304121 | 0.547024 | 0.304121 | $1.1\times10^{-16}$ | $-5.5\times10^{-17}$ |
| 0.752351 | 0.488606 | 0.311022 | 0.488606 | 0.311022 | $1.6\times10^{-16}$ | $1.1\times10^{-16}$ |
| 1 | 0.39294 | 0.299261 | 0.39294 | 0.299261 | $5.5\times10^{-17}$ | $5.5\times10^{-17}$ |

시된 방법은 $O(m(2n^3+2n^2))$ 로서 계산량을 줄이면서도 동일한 결과를 얻을 수 있다.

## V. 결론

쌍일차 시스템을 르장드르 웨이블릿의 적분 연산 행렬을 이용하여 미분 방정식의 문제를 Sylvester 행렬 방정식 문제로 변환한 후 본 연구에서 증명한 적분연산 역행렬을 이용해서 이를 다시 저차의 행렬 방정식들로 분할하여 이진 트리 구조를 구성한 후 말단 노드로부터 해를 구하여 전체 해를 효율적으로 구할 수 있음을 보였다.

## REFERENCES


[1] K. K. B. Datta, *Orthongonal Functions in Systems and Control*, World Scientific, 1995.

[2] H. Akca, M. H. Al-Lail, and V. Covachev, "Survey on wavelet transform and application in ODE and wavelet networks," *Advances in Dynamical Systems and Applications*, vol. 1, no. 2, pp. 129-162, 2006.

[3] C. Chen and C. Hsiao, "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*-, pp. 87-94, 1997.

[4] B. S. Kim and I. J. Shim, "Study for state analysis of linear systems using haar wavelet," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 14, no. 10, pp. 977-982, 2008.

[5] B. S. Kim, "An efficient computational method for linear time-invariant systems via legendre wavelet," *(to appear in) Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 19, no. 7, pp.577-582, 2013.

[6] R. R. Mohler, *Nonlinear Systems, Volume II: Applications to Bilinear Control*, Englewood-Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

[7] J. Juang, "Generalized bilinear system identification," *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 57, no. 1-2, pp. 261-273, 2009.

[8] X. Wang and Y. Jiang, "On model reduction of K-power bilinear systems," *Int. J. Syst. Sci*., pp. 1-13, 2013.

[9] C. Hsiao and W. Wang, "State analysis and parameter estimation of bilinear systems via Haar wavelets," *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 2, pp. 246-250, 2000.

[10] C. Hwang and M. Chen, "Analysis and parameter identification of bilinear systems via shifted Legendre polynomials," *Int J Control*, vol. 44, no. 2, pp. 351-362, 1986.

[11] J. Shim and D. S. Ahn, "A study on the analysis and state estimation of bilinear systems via orthogonal functions," *The Transactions of KIEE (in Korean)*, vol. 39, no. 6, pp. 598-606, 1990.

[12] B. Cheng and N. Hsu, "Analysis and parameter estimation of bilinear systems via block-pulse functions," *Int J Control*, vol. 36, no. 1, pp. 53-65, 1982.

[13] B. Kim, I. Shim, M. Lim, and Y. Kim, "Combined preorder and postorder traversal algorithm for the analysis of singular systems by Haar wavelets," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2008, 2008.

[14] F. Khellat and S. Yousefi, "The linear Legendre mother wavelets operational matrix of integration and its application," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 343, no. 2, pp. 181-190, 2006.

[15] M. Razzaghi and S. Yousefi, "The Legendre wavelets operational matrix of integration," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 32, no. 4, pp. 495-502, 2001.

[16] K. S. Miller, "On the inverse of the sum of matrices," *Mathematics Magazine*, vol. 54, no. 2, pp. 67-72, 1981.

[17] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*, Technical University of Denmark, 2006.

[18] W. Ledermann, "A note on skew-symmetric determinants," *Proc. Edinburgh Math. Soc*, pp. 335-338, 1993.

[19] H. Jaddu, "Optimal control of time-varying linear systems using wavelets," *School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Submitted for Publication*, 1998.

[20] H. Gould and J. Quaintance, "Double fun with double factorials," *Mathematics Magazine*, vol. 85, no. 3, pp. 177-192, 2012.

**김 범 수**

1987년 고려대학교 전기공학과. 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학석사). 2002년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학박사). 1989년~1998년 LG산전연구소 선임연구원. 2005년~현재 경상대학교 기계시스템공학과 부교수.