

## 복소 모드해석을 이용한 회전체의 안정성 분석

한동주\*

### Stability Investigation of Rotor Systems by Complex Modal Analysis

Dongju Han\*

#### ABSTRACT

Identifying the stability of rotor systems is prerequisite for clear determination of the parameter identification and safety, through which operating conditions may be rationally ascertained. For this purpose, the complex modal analysis of periodically time-varying system has been introduced by transforming the relation between periodic eigen-vectors and the corresponding adjoint vectors into the latent value problem. Stability investigation associated with modal features for rotor systems is performed using numerical simulation based upon the analysis model.

Key Words: Rotor Systems, Complex Modal Analysis, Stability, Critical Speed

#### 1. 서 론

회전체는 항공기 제트엔진은 물론 일반 산업 기계를 포함하여 실생활에 보편적으로 사용되는 주요 기계시스템으로서, 성능 및 내구성 향상을 위해서는 정확한 시스템의 특성 규명과 이론적인 해석이 선결되어야 한다. 특히 회전체의 공진(resonance) 또는 임계속도(critical speed)로 인한 파손을 방지하고 안전 운전을 위한 회전체의 안정성(stability) 파악은 회전체 운용에 있어 필수적으로 해결하여야 할 부분이다[1,2,3].

일반적으로 회전체의 동특성 규명을 위한 이론적인 해석모형을 크게 네 가지로 대별하면, 정지부(stator)와 회전부(rotor)가 대칭(symmetric)인 등방회전체(isotropic rotor), 정지부가 비대칭(asymmetric)이고 회전부가 대칭인 비등방회전체(anisotropic rotor), 정지부가 대칭이고 회전부가 비대칭인 비대칭회전체(asymmetric rotor), 정지부와 회전부가 모두 비대칭인 일반회전체(general rotor)가 있다[4,5].

복소 모드를 이용한 일반적인 회전체 해석은 단순 회전체와는 달리 비 자기수반(non-self-adjoint) 특성과 방향성(directionality)의 개념이 부가되어 방향성 스펙트럼 및 방향성 주파수응답 함수(directional spectrum and frequency response: dFRFs) 개념으로 발전됨으로써 일반

†2013년 11월 11일 접수 ~ 2013년 11월 14일 심사완료

\* 정회원, 극동대학교 항공정비학과

연락처, E-mail: djhan5960@hanmail.net

구조물과는 확연히 구분되는 특성을 갖는 일반적인 회전체의 정확한 모드분석이 가능한 것이 특징이다[3,4,5].

단순 회전체 또는 단순히 축강성이나 회전체 질량 또는 관성모멘트 등의 비대칭 불균형, 열린 균열(open crack) 등에 의한 비대칭 회전체의 경우 시불변 특성을 가짐으로써 비교적 저속에서 자이로 효과를 무시할 경우 실제적으로는 일반 구조물의 해석 경향과 별 차이가 없으나 일반적인 회전체는 주기적 시변계(periodically time-varying system)의 고유 특성을 갖고 있어 해석 방법에 있어서는 근본적인 차이가 있다.

여기서 일반적인 시변계는 계의 고유특성을 일반적으로 정할 수 없으나 주기적인 경우에는 여러 해석적인 방안이 제시되었다. 천이함수(transition function)를 이용한 플로케(Floquet) 이론을 기초한 연구와[6,7] 좌표 치환기법에 의해 시불변계로 변환하는 방안[8] 등 여러 시도가 있었으나 시변 우.좌 고유벡터(time-varying right.left eigen-vector) 간의 모드관계, 모드변수를 통한 해의 존재, 주파수응답함수의 분명한 형태 등이 부족하여 정확한 모드 해석에는 한계가 있었다. 여기서 주기적 시변계의 모드해석을 위해서는 각각 모드에 대한 독립적인 분리가 가능하여야 하므로 이를 위해서는 수반문제로부터 고유벡터(eigen-vector)와 그의 수반벡터(adjoint vector)가 직교성이 보장되어야 한다.

본 연구에서는 이러한 주기적 시변계로 대변되는 일반적인 회전체의 모드해석으로부터 종류별 회전체들의 모드특성을 분석하여 각 모드를 특성 별로 분류(classification)하고 이들 모드의 동특성을 분석하여 안정 운전영역 및 경향을 살펴보기로 한다.

## 2. 회전체의 복소 모드해석

### 2.1 운동방정식의 설정

베어링 질량효과를 무시한 Fig. 1과 같은 xyz 좌표계와 비대칭 축과 원판, 비대칭 베어링부로

구성된 일반회전체의 복소 운동방정식은 다음과 같다[3,4,5,8].

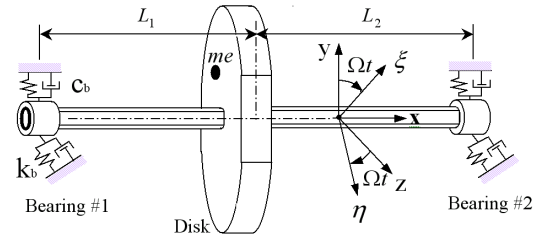


Fig. 1 Analysis Model of Rotor System

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{p}(t) + [\mathbf{C}_b \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K}_b \bar{\mathbf{p}}(t)] + e^{j2\Omega t} [\mathbf{M}_r \ddot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K}_r \bar{\mathbf{p}}(t)] = \mathbf{g}(t). \quad (1)$$

여기서  $\bar{\mathbf{p}}(t)$ 는 복소 좌표벡터  $\mathbf{p}(t)$ 의 복소 공액을 표시하며 각 변수와 구성요소는 부록에 명시하였다. Nx1 응답벡터  $\mathbf{p}(t)$ 와 입력벡터  $\mathbf{g}(t)$ 는 다음과 같은 실수성분의 응답벡터  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ 와 입력벡터  $\mathbf{f}_y(t)$ ,  $\mathbf{f}_z(t)$ 로 이루어진다.

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{y}(t) + j\mathbf{z}(t), \quad \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{y}(t) - j\mathbf{z}(t), \\ \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}_y(t) + j\mathbf{f}_z(t), \quad \bar{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{f}_y(t) - j\mathbf{f}_z(t) \quad (2)$$

단,  $j$ 는 허수부,  $\Omega$ 는 회전수,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ 는 NxN 복소 질량, 감쇠, 탄성행렬을 각각 표시하는데, 이때 하첨자  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{r}$ 은 등방, 비등방, 비대칭 성분을 각각 의미하고,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_r^d + \mathbf{C}_r^b - j\Omega \mathbf{G}^d$ ,  $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_r^s - j\Omega \mathbf{C}_r^d$ 에서  $\mathbf{C}_r^d$ ,  $\mathbf{C}_r^b$ ,  $\mathbf{G}^d$ ,  $\mathbf{K}_r^s$ 는 각각 내부 감쇠계수, 구조감쇠계수, 선형감쇠계수, 자이로효과, 탄성계수 등을 나타낸다.

등방회전체(isotropic rotor system)일 경우  $\mathbf{C}_b = \mathbf{K}_b = \mathbf{M}_r = \mathbf{C}_r = \mathbf{K}_r = \mathbf{0}$ 가 되고 비등방회전체(anisotropic rotor system)일 경우  $\mathbf{M}_r = \mathbf{C}_r = \mathbf{K}_r = \mathbf{0}$ 가 되며, 비대칭회전체(asymmetric rotor system)일 경우  $\mathbf{C}_b = \mathbf{K}_b = \mathbf{0}$ 가 된다.

(1)식을 다시 정리하면

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3)$$

단,

$$\mathbf{q}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \bar{\mathbf{p}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \bar{\mathbf{g}}(t) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r e^{j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{M}}_r e^{-j2\Omega t} & \bar{\mathbf{M}}_r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_b + \mathbf{C}_r e^{j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{C}}_b + \bar{\mathbf{C}}_r e^{-j2\Omega t} & \bar{\mathbf{C}}_r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_r & \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_r e^{j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{K}}_b + \bar{\mathbf{K}}_r e^{-j2\Omega t} & \bar{\mathbf{K}}_r \end{bmatrix}$$

(3)식을 상태공간형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{F}(t) \quad (4)$$

여기서,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{C}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

## 2.2 고유 및 수반 벡터(eigen and its adjoint vector)의 유도

식(4)와 같은 주기적 시변계에 대해 플로케이론으로부터 모드응답 형태의 해를 유도한다. 천이함수,  $\Phi(t)$ 를 이용하여  $4N \times 1$  상태벡터  $\mathbf{w}(t)$ 의 다음과 같은 근본해로부터 [5, 6, 7]

$$\mathbf{w}(t) = \Phi(t, 0) \mathbf{w}(0) \quad (6)$$

여기서  $\Phi(t, 0)$ 는 다음과 같은 천이식을 만족하며

초기값은  $\Phi(0, 0) = \mathbf{I}_{4N \times 4N}$  을 갖는다.

$$\dot{\Phi}(t, 0) = [\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)] \Phi(t, 0) \quad (7)$$

이 식에 대해서 플로케이론을 적용하면  $\Phi(t, 0)$ 가 다음과 같이  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{J}$  로 분리되고 [5, 7]

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{R}(t) e^{\mathbf{J}t} \mathbf{R}^{-1}(0) \quad (8)$$

$\mathbf{J}$ 는 대각항이  $\lambda_i$  ( $i=1-4N$ )로 구성된 조르단 형태의 행렬이고 이때의  $\lambda_i$ 는 Poincare 지수(exponent)로서, 시불변계에서는 고유값의 역할을 하게 된다. 이때 행렬,  $\mathbf{R}(t)$ 는 식(6)의 계의 주기와 같은 주기를 갖게 되며 시불변계일 경우는 고유 벡터로 구성된 행렬이 된다.

식(8)은 주기  $T(\pi/\Omega)$ 에 대해  $\mathbf{R}(t)$ 의 주기성의 관계인  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$ 와  $\lambda_i$ 로 구성된 조르단 행렬,  $\mathbf{J}$ 에 대해 다음과 같다.

$$\Phi(T, 0) = \mathbf{R}(0) e^{\mathbf{J}T} \mathbf{R}^{-1}(0) \quad (9)$$

여기서,  $\mathbf{J}$ 는 조르단 형태로 대각성분  $\mu_i, i=1, 2, \dots, 4N$ 이 Poincare 지수를 표시하고 시불변계에서는 고유치에 해당한다.

식(6), (8)를 식(4)에 대입하면 다음과 같고

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = [\mathbf{A}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)] \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t)\mathbf{J} \quad (10)$$

이 식은 시불변계일 경우  $\lambda_i$ 는 고유치가 되며 일반적인 고유치문제에 귀착된다.

$-\left[\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t)\right]^T$ 와 결부시킨(단,  $T$ 는 전치를 표시하며 이하 같다) 수반문제(adjoint problem) [4, 5]

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = -\left[\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t)\right]^T \mathbf{z}(t) \quad (11)$$

로부터 수반행렬(adjoint matrix)  $\mathbf{L}(t)$ 를

$$\dot{\bar{\mathbf{L}}}(t) = -[\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t)]^T \bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}(t) \bar{\mathbf{J}} \quad (12)$$

로부터 구할 수 있고, 여기에  $\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{-1}(t) = \mathbf{I}$  를 미분하고 이를 식(10)에 대입하면

$$\dot{\mathbf{R}}^{-1}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)[\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)] + \mathbf{J}\mathbf{R}^{-1}(t) \quad (13)$$

로부터  $\mathbf{R}^{-1}(t)$  구할 수 있다. 이를 식(12)와 비교하면  $\mathbf{L}(t)^T \mathbf{R}(t) = \mathbf{I}$  [7]의 직교관계(orthonormality condition)로부터

$$\mathbf{L}(t)_i^T \mathbf{r}(t)_j = \delta_{ij} \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{r}_j(t)$ ,  $\mathbf{L}(t)_i$ ,  $\mathbf{L}(t)_i$  는 각각  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{L}(t)$ ,  $\mathbf{L}(t)$  의 j-th, i-th 열벡터 이고  $\delta_{ij}$  는 Kronecker 델타이다.

식(4)의 제차방정식(homogeneous equation)에

$$\mathbf{w}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{r}(t)\boldsymbol{\eta}(t) \quad (15)$$

로부터 얻어진  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}_c(t)\boldsymbol{\eta}(t)$  를 식(12)와 함께 대입하면 고유값에 대해서는

$$\mathbf{r}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_c(t) + \lambda \mathbf{u}_c(t) \\ \mathbf{u}_c(t) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

이고, 식(12)는 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = [(\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)) - \mu \mathbf{I}]\mathbf{r}(t) \quad (17)$$

마찬가지로 수반벡터에 대해서도  $\mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{I}}(t)\boldsymbol{\zeta}(t)$  과 같은 관계로부터  $\bar{\mathbf{I}}(t) = \bar{\mathbf{A}}^T(t)\bar{\mathbf{I}}(t)$  로 정의할 경우 식(12)와 함께 식(11)에 대입하면 다음과 같고

$$\mathbf{I}(t) = \begin{Bmatrix} -\dot{\bar{\mathbf{v}}}_c(t) + \left( \lambda - [\dot{\mathbf{M}}(t)\mathbf{M}^{-1}(t)]^T \right) \bar{\mathbf{v}}_c(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_c(t) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

식(12)는 다음과 같다.

$$\dot{\bar{\mathbf{I}}}(t) = -\left[ (\bar{\mathbf{A}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{B}}(t))^T - \bar{\lambda} \mathbf{I} \right] \bar{\mathbf{I}}(t) \quad (19)$$

여기서 고유 및 수반벡터는 각각

$$\mathbf{u}_c(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_c(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{Bmatrix} \text{로 표시된다.}$$

### 2.3 안정성 분석을 위한 모드해석

복소 상태벡터는

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{r=1}^{4N} \{ \mathbf{r}(t)\boldsymbol{\eta}(t) \}_r = \sum_{i=B,F} \sum_{r=-N}^N \{ \mathbf{r}(t)\boldsymbol{\eta}(t) \}_r^i \quad (20)$$

와 같이 정의된다. 여기서,  $\boldsymbol{\eta}(t)$  는 주좌표계(principal coordinates)이고, 상첨자 B와 F는 각각 전후방(forward and backward)모드, 합 기호에서의 '는  $r=0$ 를 의미 한다[4,5].

입력항에 대해서 유도한 직교성에 관한 식(14)를 적용하면

$$\dot{\eta}_r^i(t) = \lambda_r^i \eta_r^i(t) + \bar{\mathbf{v}}_c(t)_r^{iT} \mathbf{f}(t), \quad ; r = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N ; i = B, F \quad (21)$$

과 같은 4N개의 모드방정식을 구할 수 있다.

여기서, 고유벡터  $\mathbf{r}(t)(\mathbf{u}_c(t))$ , 수반벡터(adjoint vector)  $\mathbf{I}(t)(\bar{\mathbf{v}}_c(t))$ 는  $T = \frac{\pi}{\Omega}$ 의 주기를 갖는 주기적 시변계이므로,  $\mathbf{u}_c(t)$ ,  $\mathbf{v}_c(t)$ 는 다음과 같은 푸리에 급수(Fourier series)로 나타낼 수 있다[9].

$$\mathbf{u}_r^i(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_{r(m)}^i e^{j2m\Omega t}, \mathbf{v}_r^i(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_{r(m)}^i e^{j2m\Omega t} \quad (22)$$



해 특성별로 분리하고 식별하여 정리한 것이다.

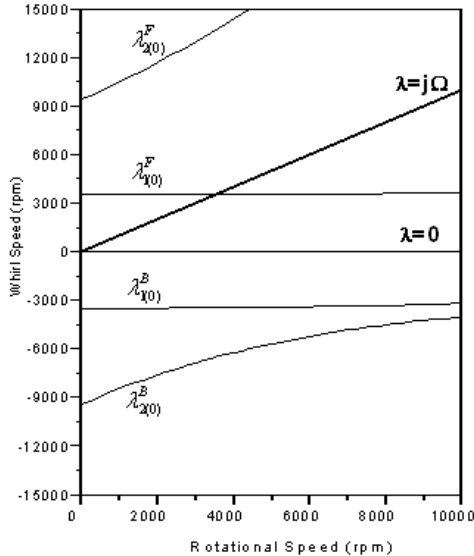


Fig. 2 Whirl Chart of Isotropic Rotor System

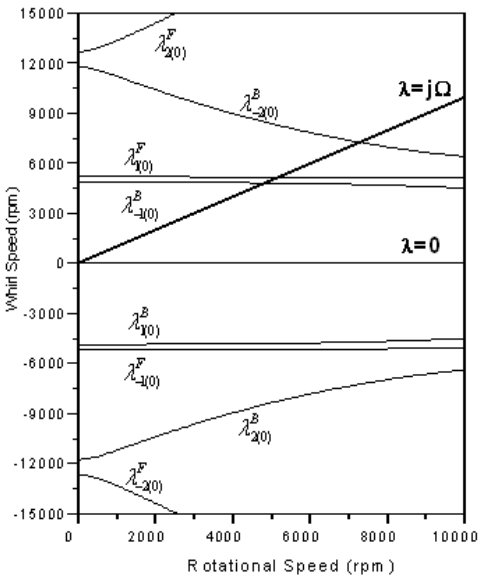


Fig. 3 Whirl Chart of Anisotropic Rotor System

이로부터, 등방회전체의 경우는 기준 모드 (basic mode)인 단일 모드로 각각 구성되어 있고, 비등방회전체의 경우는 등방회전체의 기준 모드에 대해 각 쌍(± pair)으로 구성됨을 알

수 있다. 이들 회전체는 단일항(index m=0)에 대해 분명하게 모드가 구분되고 있다.

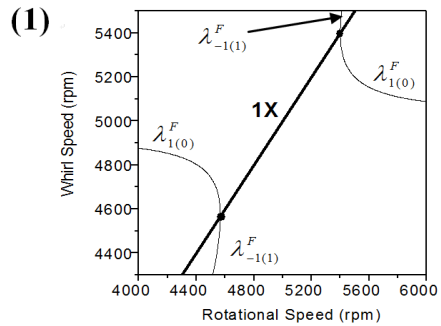
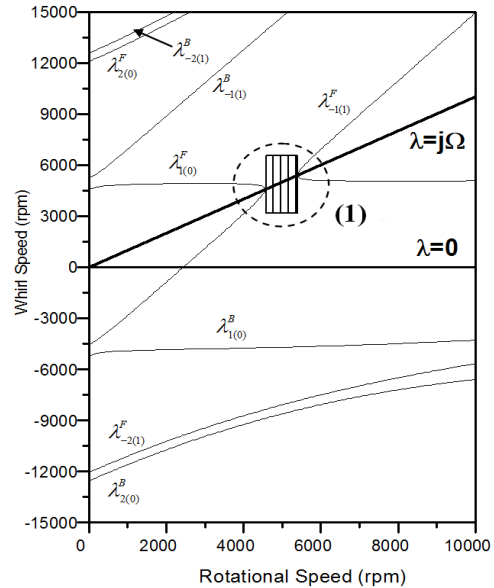


Fig. 4 Whirl Chart of Asymmetric Rotor System (Unstable region is shaded, (1) is magnified view)

주기적 시변계인 일반회전체의 경우 힐스행렬 (Hill's matrix) 중 3항의 근사식(three-term approximation, index, m=-1,0,1)을 사용했을 경우 각 항 각각에 대한 모드형상을 나타내고 있다. 여기서 비대칭회전체(m=0,-1)의 경우 각 모드 간 회전수의 2배속 차이(shift)의 모드 분리 경향을 보이고 있고, 일반회전체의 경우에는 3항 근사식으로 도출된 모드값 상호간 짝수배의 분리 경향을 보이고 있어, 모드해석을 통해 유

도된 해석결과와 일치되고 있음을 알 수 있다.

안정성과 관련해서 불안정 영역(unstable region)은 회전수에 대해 각 모드별 구간 불연속 영역을 의미한다.

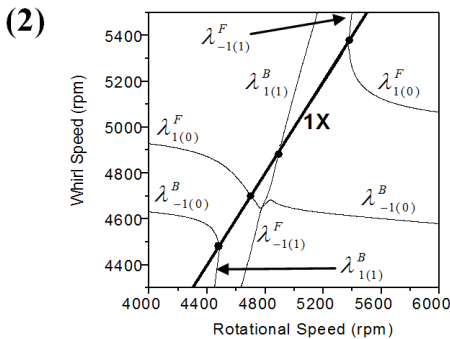
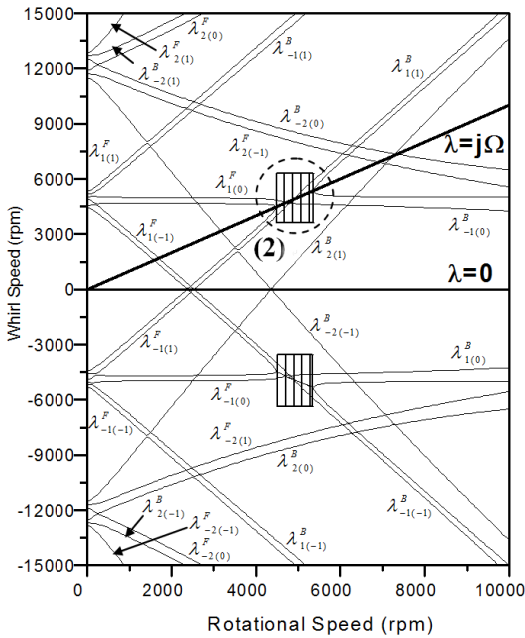


Fig. 5 Whirl Chart of General Rotor System (Unstable region is shaded, (2) is magnified view)

이러한 판단기준으로부터 시불변계인 등방회전체(Fig. 2) 및 비등방회전체(Fig. 3)의 경우에는 모든 모드가 연속이 되어 이들 회전체는 고유특성 상 공진으로 인한 불안정 운전 영역이 없음을 알 수 있다. 모든 경우 1차 모드(basic mode)에서 1X 가진 모드와 교차함으로써 임계속

도가 발생하고 있어 역시 1차 모드가 지배적인 모드임을 알 수 있다. 반면에 비대칭 특성(rotating asymmetry)을 갖는 비대칭회전체(Fig. 4) 및 일반회전체(Fig. 5)의 경우에는 5,500 rpm 부근에서 모드 각 구간의 별 차이 없이 불연속 구간(marked by hatched region in Fig. 4, Fig. 5)이 나타나고 있어 이 구간이 불안정 영역임을 알 수 있다[5]. 특히 이 불연속 시점에서 모드 분리(split) 또는 모드 확산/집중 등의 모드방향 바뀜(veering) 현상이 발생됨을 알 수 있다. 등방 및 이방 회전체의 경우와 마찬가지로 1차 모드에서 1X 가진 모드와 교차함으로써 임계속도가 발생하고 있고 주목할 것은 불연속 구간을 통과하여 이 구간에서 교차하고 있다. 이부분 확대된 양상(Fig. 4의 (1) 및 Fig. 5의 (2))을 통해서 극명하게 확인할 수 있다. 따라서 불균형이 존재할 경우 임계속도와 공진으로 인한 불안정과 결부되어 불안정 효과가 더욱 증폭될 것임을 알 수 있다. 이는 축의 열린 또는 개폐 균열, 질량 또는 관성모멘트 등의 비대칭 등 로타의 비대칭성이 회전체의 불안정성을 유발시키는 요인임을 나타내는 것이다.

### 5. 결 론

등방, 비등방, 비대칭 특성을 포함하는 주기적 시변계인 일반회전체에 대한 안정성 분석을 위해 복소 모드해석을 수행하였다. 고유벡터와 수반벡터의 주기성과 직교성을 유도하여 완전한 복소 모드해석을 정립하였고, 이로부터 각 회전체에 대한 모드해석을 통해 각 모드특성별로 구분하고 분리함으로써 각각의 모드를 식별하였다. 이들 모드의 형상으로부터 불안정 영역 기준을 도출하여 각 회전체에 대한 운전 안정성 여부를 분석하였다.

본 연구는 일반적인 회전체의 모드해석 및 운용 안전성 판단 기법에 활용될 수 있다.

Table 3 Eigenvalues @ 4,000 rpm

Rotor types				Mode classification	Mode equivalence	Remark
Isotropic rotor	Anisotropic rotor	Asymmetric rotor	General rotor*			
-69.6+j1770.6	-73.3+j1764.0	-55.9+j1752.7	-58.8+j1742.1	$\lambda_{2(0)}^F$	$\mu_2^F$	Basic modes; (m=0)
-	-73.3-j1764.0	-	-58.8-j1742.1	$\bar{\lambda}_{2(0)}^F$	$\bar{\mu}_2^F (\mu_{-2}^F)$	
-	-55.0+j938.5	-	-78.6+j958.2	$\bar{\lambda}_{2(0)}^B$	$\bar{\mu}_2^B (\mu_{-2}^B)$	
-8.0-j519.8	-55.0-j938.5	-74.10-j968.6	-78.6-j958.2	$\lambda_{2(0)}^B$	$\mu_2^B$	
-5.1+j536.5	-5.2+j542.1	-4.4+j510.6	-5.8+j516.1	$\lambda_{1(0)}^F$	$\mu_1^F$	
-	-5.2-j542.1	-	-5.8-j516.1	$\bar{\lambda}_{1(0)}^F$	$\bar{\mu}_1^F (\mu_{-1}^F)$	
-	-9.6+j505.2	-	-10.2+j485.0	$\bar{\lambda}_{1(0)}^B$	$\bar{\mu}_1^B (\mu_{-1}^B)$	
-51.4-j952.2	-9.6-j505.2	-10.2-j498.8	-10.2-j485.0	$\lambda_{1(0)}^B$	$\mu_1^B$	
-	-	-	-58.8+j904.2	$\lambda_{2(-1)}^F$	$\sim \mu_2^F - j2\Omega$	(m=-1)
-	-	-55.9-j914.9	-58.8-j904.2	$\bar{\lambda}_{2(-1)}^F$	$\sim \bar{\mu}_2^F - j2\Omega$	
-	-	-74.1+j1806.3	-78.5+j1796.1	$\bar{\lambda}_{2(-1)}^B$	$\sim \bar{\mu}_2^B - j2\Omega$	
-	-	-	-78.5-j1796.1	$\lambda_{2(-1)}^B$	$\sim \mu_2^B - j2\Omega$	
-	-	-	-5.8-j310.4	$\lambda_{1(-1)}^F$	$\sim \mu_1^F - j2\Omega$	
-	-	-4.4+j327.2	-5.8+j310.4	$\bar{\lambda}_{1(-1)}^F$	$\sim \bar{\mu}_1^F - j2\Omega$	
-	-	-10.3+j1336.5	-11.1+j1327.3	$\bar{\lambda}_{1(-1)}^B$	$\sim \bar{\mu}_1^B - j2\Omega$	
-	-	-	-11.1-j1327.3	$\lambda_{1(-1)}^B$	$\sim \mu_1^B - j2\Omega$	
-	-	-	-73.4+j2601.8	$\lambda_{2(1)}^F$	$\sim \mu_2^F + j2\Omega$	(m=1)
-	-	-	-73.4-j2601.8	$\bar{\lambda}_{2(1)}^F$	$\sim \bar{\mu}_2^F + j2\Omega$	
-	-	-	-55.1+j100.6	$\bar{\lambda}_{2(1)}^B$	$\sim \bar{\mu}_2^B + j2\Omega$	
-	-	-	-55.1-j100.6	$\lambda_{2(1)}^B$	$\sim \mu_2^B + j2\Omega$	
-	-	-	-5.8+j1374.8	$\lambda_{1(1)}^F$	$\sim \mu_1^F + j2\Omega$	
-	-	-	-5.8-j1374.8	$\bar{\lambda}_{1(1)}^F$	$\sim \bar{\mu}_1^F + j2\Omega$	
-	-	-	-8.1-j343.5	$\bar{\lambda}_{1(1)}^B$	$\sim \bar{\mu}_1^B + j2\Omega$	
-	-	-	-8.1+j343.5	$\lambda_{1(1)}^B$	$\sim \mu_1^B + j2\Omega$	

\* Hill's matrix of order 6N



### 참고 문헌

- [1] I. Iman, S.H. Azzaro, R.J. Bankert, "Development of an On-Line Rotor Crack Detecting and Monitoring System", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 111, 1989, pp. 241-250.
- [2] S.S. Davis, "Vibration Analysis of Rotating Machinery Using the Spectral Distribution Function", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 214, No.5, 1998, pp. 805-815.
- [3] Kwon, K. S. and Lee, C. W., "Random Excitation for Modal Testing of Rotating Machinery: Use of Modulation Technique," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, 2000, pp. 297-309.
- [4] C.W. Lee, "Vibration Analysis of Rotors", Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [5] C.W. Lee, D.J. Han, S.W. Hong, "Modal Analysis of Periodically Time-varying Linear Rotor Systems Using Floque Theory", 7th IF To MM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, 25-28, Sept., 2006.
- [6] Sinha, S. C., Pandiyan, R. and Bibb, J.S., 1996, "Liapunov - Floque Transformation : Computation and Applications to Periodic Systems", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.118, pp. 209-217.
- [7] Robert, A. C., William, E., 1984, "Control of Time-Periodic Systems", *J. GUIDANCE*, Vol. 7, No.6, pp. 671-676.
- [8] B. Genta, "Whirling of Unsymmetrical Rotors: A Finite Element Approach Based on Complex Co-ordinates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124, No.1, 1988, pp. 27-53.
- [9] H. Irretier, "Mathematical Foundations of Experimental Modal Analysis in Rotor Dynamics", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 13, No. 2, 1999, pp.183-191.
- [10] P. Lancaster, M. Tismenetsky, "The Theory of Matrices with Application", Academic Press, Second Edition, 1985.