

# Value-at-Risk Estimation of the KOSPI Returns by Employing Long-Memory Volatility Models

Jeongjun Oh<sup>a</sup> · Sunggon Kim<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics, University of Seoul

(Received November 15, 2012; Revised January 9, 2013; Accepted January 23, 2013)

---

## Abstract

In this paper, we investigate the need to employ long-memory volatility models in terms of Value-at-Risk(VaR) estimation. We estimate the VaR of the KOSPI returns using long-memory volatility models such as FIGARCH and FIEGARCH; in addition, via back-testing we compare the performance of the obtained VaR with short memory processes such as GARCH and EGARCH. Back-testing says that there exists a long-memory property in the volatility process of KOSPI returns and that it is essential to employ long-memory volatility models for the right estimation of VaR.

Keywords: VaR estimation, long-memory, volatility model, FIGARCH, FIEGARCH.

---

## 1. 서론

주식, 환, 파생상품, 옵션, 채권 같은 금융자산에 투자하는 사람은 보유한 자산의 미래가치에 관심이 있다. 투자자는 자신의 포트폴리오로부터 수익을 내기를 기대하지만 예상치 못한 일로 인하여 손실을 입을 수 있고, 심지어 파산에 이를 수 있는 위험에 노출되어 있다. 보유한 자산 가치의 미래 불확실성을 시장위험(market risk)이라고 하는데 최근 금융자산의 거래가 급증함에 따라 시장위험도 함께 증가하고 있다. 여기에 1987년 미국에서 발생한 블랙먼데이, 1997년 아시아 외환위기, 1998년 LTCM 사건, 2008년 글로벌 금융위기 등을 겪으면서 시장위험을 관리하는 방법에 대한 관심이 높아졌고 이에 대한 논의가 꾸준히 이루어지고 있다.

Value-at-Risk(VaR)는 시장위험을 측정하기 위한 대표적인 수단이다. 본래 VaR은 J.P. Morgan에서 내부적으로 위험을 측정하기 위한 지표였지만 바젤 위원회가 시장위험을 측정하는 수단으로 VaR을 권고하면서 그 사용이 급격히 확산되었다. VaR은 보유한 포트폴리오로부터 입을 수 있는 손실을 나타내는 위험관리수단으로, 정상적인 시장여건 하에서 신뢰수준(95% 또는 99%)이 주어졌을 때 일정 기간 동안 주어진 신뢰수준하에서 그 포트폴리오로부터 발생할 수 있는 최대손실로 정의된다. 통계적인 관점에서 VaR은 미래의 일정 기간 동안 발생할 수익률 분포의 분위수이므로, VaR을 계산하기 위해서는 수익률의 예측분포를 추정할 필요가 있다. 하지만 수익률의 변동성(volatility)은 시간에 따라 변화하며, 이러한 이분산성(heteroscedasticity)으로 인해, 수익률의 예측분포의 추정이 쉽지 않다.

---

<sup>1</sup>Corresponding author: Associate professor, Department of Statistics, University of Seoul, 163 Siripdaero, Dongdaemun-gu, Seoul 130-743, Korea. E-mail: [sgkim@uos.ac.kr](mailto:sgkim@uos.ac.kr)

수익률의 변동성은 이것이 한 번 증가하거나 감소하면 그 상태가 일정 기간 동안 지속되는 변동성 집중 현상(volatility clustering)을 보이고, 상승시장(bull market)보다 하락시장(bear market)에서 변동성이 더 증가하는 레버리지 효과(leverage effect)와 과거에 어떤 충격이 발생했을 때 변동성에 주는 영향력이 오랜 기간 동안 지속되는 장기기억속성(long-memory property)을 가진다.

변동성은 VaR과 같은 위험관리분야뿐만 아니라 옵션가격결정, 자산배분전략 등에 있어 핵심변수 중 하나이기 때문에 현재까지 이에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. 그 중에서도 Engle (1982)의 ARCH 모형과 이것을 확장시킨 Bollerslev (1986)의 GARCH 모형은 변동성을 다루는데 있어 효과적이라는 평가를 받고 있다 (Hsieh, 1989). ARCH/GARCH 모형은 많은 실증분석을 통해서 변동성 집중현상을 해결할 수 있음을 보였지만, 금융시장의 호재(good news)와 악재(bad news)에 따른 구분없이 변동성의 반응이 동일하게 나타나기 때문에 레버리지 효과를 설명할 수 없으며, 과거에 발생한 충격의 영향력이 지수적인 비율로 빠르게 감소하여 변동성의 장기기억속성 역시 설명하지 못하는 문제가 있다 (Poon과 Granger, 2003). 이러한 문제를 해결하기 위하여 Engle과 Bollerslev (1986)는 Integrated GARCH (IGARCH) 모형을 제안했고, Baillie 등 (1996)은 GARCH 모형에 분수차분(fractional differencing) 과정을 도입한 Fractional Integrated GARCH (FIGARCH) 모형을 제안하였다.

금융시장에서 관찰된 자료는 변동성을 제거한(filtered) 조건부 수익률이 여전히 정규분포보다 두껍고 치우친 꼬리분포를 가진다 (Cont, 2001). 따라서, 정규분포를 조건부 수익률의 분포로 가정하면 수익률의 두꺼운 꼬리분포를 설명하지 못하여 시장위험을 과소평가할 수 있다 (Angelidis 등, 2004). 수익률의 분포가 치우친 모습을 가지는 이유는 수익률의 음양에 따라 변동성이 비대칭적으로 반응하기 때문이라 설명할 수 있다 (Engle과 Patton, 2001). 이러한 변동성의 비대칭적 반응을 설명하기 위해, Glosten 등 (1993)의 GJR-GARCH, Nelson (1991)의 Exponential GARCH(EGARCH), Bollerslev와 Mikkelsen (1996)의 Fractional Integrated Exponential GARCH(FIEGARCH) 같은 모형들이 제안되었다.

국내에서도 변동성의 장기기억속성과 레버리지 효과에 대한 연구가 활발히 이루어졌다. Lee 등 (2002)은 FIGARCH 모형을 이용해 KOSPI 수익률의 변동성에 장기기억속성이 있음을 보였고, 이를 이용한 변동성 예측연구가 필요함을 제기했다. Park과 Lee (2009)는 FIGARCH와 FIEGARCH 모형으로 KOSPI의 변동성을 추정했을 때 그 예측력이 GARCH 모형보다 뛰어난 것을 확인하면서 장기기억속성을 가진 변동성 모형이 VaR 추정에 유용할 것으로 기대했다.

변동성의 레버리지 효과와 관련된 연구는 Ohk (1997), Oh 등 (2000) 등이 있다. Ohk (1997)은 우리나라를 포함한 총 8개국의 주식시장을 GJR-GARCH 모형으로 분석한 결과 미국, 일본 같은 선진형 주식 시장뿐만 아니라 우리나라와 같은 성장형 주식시장에서도 변동성이 음의 수익률에 더 크게 반응하는 것을 보였다. Oh 등 (2000) 역시 GJR-GARCH와 EGARCH 모형을 이용하여 변동성의 레버리지 효과를 확인했다.

국내연구에서 변동성의 장기기억속성과 레버리지 효과를 동시에 고려한 연구는 Kang과 Yoon (2006), Park과 Lee (2009), Park과 Shin (2009) 등이 있다. 또한 Kang과 Yoon (2008)은 장기기억속성과 레버리지 효과가 VaR의 추정에 미치는 영향을 살펴보았다. 하지만 이들의 연구에서는 VaR에 대한 사후검증이 제한적으로 이루어졌으며, 조건부 수익률의 분포를 추정할 때 모수적 방법만을 사용하였다.

본 논문에서는 장기기억속성을 가지는 변동성 모형인 IGARCH, FIGARCH, FIEGARCH를 사용하여 KOSPI 수익률의 VaR을 추정한다. 또한 조건부 수익률의 분포를 추정하기 위해 정규분포, student-*t* 분포, skewed-*t* 분포를 가정하거나, 극단값 이론 (EVT)의 적용 혹은 Filtered Historical Simulation(FHS)으로부터 얻은 잔차의 경험분포를 사용한다. 사후검증을 통해, 추정된 VaR을 GARCH, EGARCH 모형을 가정한 경우와 정확성 및 적절성을 비교한다. 이를 통해, VaR의 추정의 관점에서,

장기기억 변동성 모형의 필요성을 알아본다.

## 2. Value-at-Risk의 추정

$P_t$ 를 시점  $t$ 에서 자산의 증가라 놓으면,  $R_t = \log P_t - \log P_{t-1}$ 은  $t-1$ 시점에서  $t$ 시점까지의 로그수익률이다. 시점  $t-1$ 까지의 정보집합  $\Phi_{t-1}$ 이 주어졌을 때,  $R_t$ 의 조건부 평균  $\mu_t$ 와 조건부 분산 혹은 조건부 변동성  $h_t$ 를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}\mu_t &= E[R_t | \Phi_{t-1}], \\ h_t &= E[(R_t - \mu_t)^2 | \Phi_{t-1}].\end{aligned}\quad (2.1)$$

본 논문에서는  $R_t$ 가 다음의 과정을 따르는 경우를 다룬다.

$$R_t | \Phi_{t-1} = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t, \quad (2.2)$$

여기서  $\{z_t\}$ 는 평균 0, 분산 1인 백색잡음과정이다.

정보집합  $\Phi_{t-1}$ 이 주어진 경우에  $R_t$ 에 대한 신뢰수준  $q$ 인 VaR은 다음처럼 정의된다.

$$r_q^t = \sup \{r \in \mathbb{R} | P(R_t \geq r | \Phi_{t-1}) \geq q\}. \quad (2.3)$$

우리는 본 논문에서 시장이 정보효율적이라 가정한다. 즉, 효율적 시장가설에 따라, 어떠한 자산의 기대 가격의 변동은 새로운 정보에 의해서만 발생하는데, 시장에서는 정보가 빠르게 확산되어, 자산의 가격에 급속히 반영된다고 가정한다. 따라서, 모든 시점  $t$ 에서,  $\mu_t = 0$ 이라 놓는다. 이에 따라, 식 (2.3)은 다음처럼 다시 적을 수 있다.

$$r_q^t = \sqrt{h_t} z_q, \quad (2.4)$$

여기서  $z_q$ 는  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포의  $1-q$ 분위수를 나타낸다.

실제자료를 가지고 식 (2.4)로부터 VaR을 얻기 위해서는 변동성의 모형을 결정해야 한다. 본 논문에서는 FIGARCH, FIEGARCH, GARCH, EGARCH인 경우를 다룬다.  $z_q$ 의 추정을 위해서는  $z_t$ 의 확률분포를 추정하여야 한다. 모수적 방법을 이용하기 위해,  $z_t$ 의 분포가 정규분포,  $t$  분포, skewed- $t$  분포, Johnson 분포 등을 따른다고 가정할 수 있다 (Hansen, 1994; Choi와 Min, 2011; Jung 등, 2012). 하지만 아직까지 어떤 분포를 가정해야 하는지에 대한, 일치된 견해는 없다. McNeil과 Frey (2000)는 GARCH(1,1) 모형으로부터 얻은  $\{\hat{z}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 에 준모수적 방법인 EVT를 적용하여  $z_q$ 를 추정하는 방법을 소개했고, Barone-Adesi 등 (1999), Barone-Adesi와 Giannopoulos (2002)은 같은 모형으로부터 얻은  $\{\hat{z}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 에 비모수적 방법인 붓스트랩(bootstrap)을 적용해  $z_q$ 를 추정하는 FHS를 제안했다. 본 논문에서는 정규분포, student- $t$  분포, skewed- $t$  분포를 이용하는 방법, EVT를 적용하는 방법, 그리고 FHS를 사용하여  $z_q$ 를 추정한다. 또한, 이 방법들이 VaR을 추정할 때 보이는 성능을 비교한다.

### 2.1. 변동성 모형

GARCH( $p, q$ ) 모형에서는 식 (2.1)의 변동성  $h_t$ 가 아래 식을 따른다.

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}, \quad (2.5)$$

여기서  $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$ 이다. 후향연산자  $L$ , 즉,  $L^i x_t \equiv x_{t-i}$ 을 사용하여, 위 식을 아래 식과 같이 바꾸면 GARCH( $p, q$ ) 모형은 ARMA( $\max\{p, q\}, p$ ) 과정으로 해석된다.

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t, \quad (2.6)$$

여기서  $\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i$ ,  $\beta(L) = \sum_{i=1}^p \beta_i L^i$ ,  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ 이다.  $\alpha(1) + \beta(1) < 1$ 이면 GARCH( $p, q$ ) 모형은 약 정상확률과정을 따른다.

GARCH( $p, q$ ) 모형은 많은 실증분석을 통해서 변동성 집중현상을 설명할 수 있음이 보여졌다 (Hsieh, 1989). 그러나, 이 모형은 수익률의 음양에 따른 변동성의 비대칭적 반응을 설명할 수 없다. 식 (2.5)에서 알 수 있듯이, 실현수익률의 음양에 관계없이 변동성은 그 크기에만 영향을 받는다. 하지만 Christie (1982), Engle과 Ng (1993)는 수익률이 변동성과 음의 상관관계를 갖음을 보였다. 즉, 변동성은 금융시장의 호재보다 악재에 민감하게 반응한다. Nelson (1991)은 GARCH( $p, q$ ) 모형을 log변환을 이용해 확장한 EGARCH 모형을 제안하여, 변동성의 비대칭적 반응을 모형화하고자 했다. EGARCH( $p, q$ ) 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \log(h_t) &= \omega + [1 - \varphi(L)]^{-1}[1 + \psi(L)]g(z_{t-1}), \\ g(z_t) &= \theta z_t + \gamma[|z_t| - E(|z_t|)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

여기서  $\varphi_i = \sum_{i=1}^p \varphi_i L^i$ 이고,  $\psi_i = \sum_{i=1}^q \psi_i L^i$ 이다.

GARCH 모형은 과거에 발생한 충격이 지수적인 비율로 빠르게 사라지는 단기기억속성을 가진다. 그러나 Ding 등 (1993)의 연구에 따르면 수익률의 변동성은 장기기억속성을 가진다. Engle과 Bollerslev (1986)는 식 (2.6)에서  $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ 이 단위근을 가지는 IGARCH 모형을 제안했다. 즉,

$$\phi(L)(1 - L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t, \quad (2.8)$$

여기서  $\phi(L)$ 의 모든 근들은 단위원 밖에 있다.

IGARCH 모형은 장기기억속성을 가지지만 영구적으로 충격이 사라지지 않기 때문에 시간이 흐를수록 충격이 사라질 것이라는 직관적인 사실에 반한다. Baillie 등 (1996)은 식 (2.8)에 분수차분과정을 도입하여 장기기억속성을 보이지만 충격이 사라지는 FIGARCH 모형을 제안했다. FIGARCH( $p, d, q$ ) 모형은 다음과 같다.

$$\phi(L)(1 - L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t, \quad (2.9)$$

여기서  $\phi(L)$ 의 모든 근들은 단위원 밖에 있다.  $0 < d < 1$ 이면, FIGARCH( $p, d, q$ ) 모형은 강 정상확률과정을 따르지만, 약 정상확률과정은 따르지 않는다 (Baillie 등, 1996).

FIGARCH 모형의 변동성을 추정하기 위해서 식 (2.9)를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$h_t = [1 - \beta(1)]^{-1}\omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2, \quad (2.10)$$

여기서 FIGARCH(1,  $d$ , 1)인 경우 가중치  $\lambda(L)$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \phi_1 - \beta_1 + d, \\ \lambda_k &= \beta_1 \lambda_{k-1} + \pi_k - \phi_1 \pi_{k-1}. \end{aligned}$$

위 식에서  $\{\pi_k, k = 1, 2, \dots\}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p i_1 &= d, \\ \pi_k &= \pi_{k-1}(k-1-d)k^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

EGARCH 모형에 분수차분과정을 도입하여 Bollerslev와 Mikkelsen (1996)은 아래와 같은 FIEGARCH 모형을 제안하였다.

$$\log(h_t) = \omega + \phi(L)^{-1}(1-L)^{-d}[1 + \psi(L)]g(z_{t-1}). \quad (2.12)$$

$-0.5 < d < 0.5$ 이면, FIEGARCH( $p, d, q$ ) 모형은 약 정상확률과정을 따른다.  $p$ 와  $q$ 가 각각 1인 FIEGARCH(1,  $d$ , 1) 모형은 다음과 같다.

$$\log(h_t) = \omega + \frac{1 + \psi_1 L}{1 - \phi_1 L} (1-L)^{-d} g(z_{t-1}). \quad (2.13)$$

FIEGARCH(1,  $d$ , 1)의 변동성을 추정하기 위해서 식 (2.13)으로부터, 식 (2.10)과 같이 FIEGARCH(1,  $d$ , 1) 모형을  $\{\lambda_k, k = 1, 2, \dots\}$ 를 이용하여 다음과 같이 간단하게 정리할 수 있다.

$$\log(h_t) = \omega + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [\log(h_{t-k}) - \omega] + g(z_{t-1}) + \psi_1 g(z_{t-2}), \quad (2.14)$$

여기서  $\lambda_1 = \phi_1 + d$ ,  $\lambda_k = \pi_k - \phi_1 \pi_{k-1}$ 이며,  $\pi_k$ 들은 식 (2.11)에 정의되어 있다.

## 2.2. 변동성 추정

변동성 모형의 모수는,  $\{z_t\}$ 의 분포가 정규분포를 따를 때, 최대우도추정법을 이용해 추정할 수 있다. 그런데 많은 실증분석에서 알려졌듯이 금융시장에서 관찰되는 수익률의 조건부 분포는 정규분포를 따르지 않는다. 하지만, 이러한 경우에도 역시 조건부 수익률의 분포가 정규분포를 따른다고 가정하여 모수를 추정한다. 이러한 방법을 준최대우도추정법(quasi-maximum likelihood estimation)이라고 하며, Bollerslev와 Wooldridge (1992)에 의하면 이렇게 얻은 추정치도 일치성을 가진다.

FIGARCH, FIEGARCH 모형은 임의의 시점  $t$ 에서의 변동성  $h_t$ 를 추정하기 위해서, 과거의 추가정보 및  $h_t$ 의 추정치의 무한개의 합을 계산하는 분수차분계수  $(1-L)^d$ 를 포함하기 때문에 절삭값을 선택해야 한다. Baillie 등 (1996)은 적어도 1000개 시차 이상에서 절삭했을 때 정확한 추정치를 얻을 수 있음을 보였기 때문에 본 논문에서는 1000개 이상의 자료를 모수추정에 사용한다.

## 2.3. 극단값 이론을 이용한 $z_q$ 의 추정

서로 독립이고 동일한 분포를 따르는 확률변수  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 가 주어졌을 때, 이 중 임의의  $X_i$ 를  $X$ 라 놓자. 충분히 큰 경계점  $u$ 를 선택해,  $X > u$ 라는 조건을 주었을 때  $X - u$ 의 조건부 분포는  $u \rightarrow \infty$ 일 때, Generalized Pareto 분포 (GPD)로 수렴한다 (Coles, 2001). 즉, 적당한  $\xi, \sigma$ 에 대해,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P\{X - u \leq y | X > u\} = 1 - \left[1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{\xi}}. \quad (2.15)$$

만약 식 (2.2)의 수익률 과정 모형이 적절하였다면, 실제자료를 이 식에 적합하여 얻는 잔차  $\{\hat{z}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 은 근사적으로 서로 독립이고 동일한 분포를 가진다. 따라서,  $\{\hat{z}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 으로써

터, 절대값이  $u$ 보다 큰 음의 값들을 택해서 이들을  $\{\hat{z}_{i_1}, \hat{z}_{i_2}, \dots, \hat{z}_{i_k}\}$ 였다고 하자, 여기서  $k$ 는 절대값이  $u$ 보다 큰  $\{\hat{z}_i\}$ 의 음의 값들의 개수이다.  $\{|\hat{z}_{i_1}| - u, \dots, |\hat{z}_{i_k}| - u\}$ 를 식 (2.15)에 적합하여, 최대우도추정치  $\hat{\xi}, \hat{\sigma}$ 를 추정하면, 매우 작은 음의 값을 갖는 잔차가  $z$ 보다 클 확률을 다음처럼 추정할 수 있다.

$$\hat{P}\{Z > z\} = 1 - \frac{k}{n} \left[ 1 + \frac{\hat{\xi}(-z - u)}{\hat{\sigma}} \right]^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}. \quad (2.16)$$

위 식으로 부터  $z_q$ 의 추정치를 다음처럼 얻을 수 있다.

$$\hat{z}_q = - \left( u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{1-q}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \right). \quad (2.17)$$

#### 2.4. Filtered historical simulation을 이용한 $z_q$ 의 추정

FHS는 Historical simulation(HS)과 모의실험 (Monte Carlo simulation)의 장점을 결합한 방법이다. HS는 주어진 자료의 확률분포를 가정하지 않아도 되지만, 수익률 변동성의 자기상관관계를 모형화할 수 없다. 반면에 GARCH 계열의 모형들이 수익률의 변동성  $\{h_t, t = 1, 2, \dots\}$ 를 잘 설명할 수 있음이 다수의 선행연구를 통해 밝혀졌다. 이 점을 이용하여, 식 (2.2)로부터,  $z_t$ 의 분포를 비모수적으로 추정하기 위한 FHS 방법은 다음과 같다. 시점  $t-1$ 까지의 정보집합  $\Phi_{t-1}$ 이 주어졌을 때, 시점  $t-1$ 까지의  $z_i$ 들의 실현치를 아래와 같이 얻는다.

$$\hat{z}_i = \frac{R_i}{\sqrt{h_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, t-1, \quad (2.18)$$

여기서  $\hat{h}_i$ 은  $\Phi_{t-1}$ 를 사용하여 얻은  $h_i$ 의 추정치이다.  $\{z_i\}$ 는 백색잡음과정이라고 가정했기 때문에 변동성을 정확히 추정했다면  $\{\hat{z}_i, i = 1, 2, \dots, t-1\}$ 은 근사적으로 백색잡음과정이 된다. 그러므로 과거의 일정 기간 동안 실현된  $\{\hat{z}_{t-1}, \hat{z}_{t-2}, \dots, \hat{z}_{t-n}\}$ 의 경험적 분포함수를  $z_t$ 의 분포로 사용할 수 있으며, 이로부터  $z_q$ 를 추정할 수 있다.

#### 2.5. Skewed- $t$ 분포를 이용한 $z_q$ 의 추정

Fernandez와 Steel (1998)는 다음의 skewed- $t$  분포를 제안하였다. 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는 확률변수  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 가 skewed- $t$  분포를 따른다면,  $X$ 의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$p(x|\gamma) = \frac{2}{\gamma + 1/\gamma} \left\{ f\left(\frac{x}{\gamma}\right) I_{[0, \infty)}(x) + f(\gamma x) I_{(-\infty, 0)}(x) \right\}, \quad (2.19)$$

여기서  $\gamma \in (0, \infty)$ ,  $f$ 는 student- $t$  분포의 확률밀도함수이다.  $\gamma \neq 1$ 이면, 식 (2.19)는 비대칭적인 모습을 가진다. 근사적으로 백색잡음과정을 따르는 잔차  $\{\hat{z}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 을 이용해 식 (2.19)를 적합하면,  $z_q$ 를 추정할 수 있다.

### 3. 사후검증

VaR의 타당성을 평가하기 위한 사후검증 절차는 두 부분으로 나뉜다. 첫째, 평균적으로 발생한 초과손실의 횟수가 기대했던 횟수와 통계적으로 일치해야 한다. 즉, 추정된 VaR이 실제로 가져야 하는 값보다 과소 추정하거나 과대 추정하지 말아야 한다. 전자의 경우 미래에 금융기관이 발생한 손실을 감당할 수 없는 경우가 있을 수 있으며, 반대로 후자의 경우 주어진 자본을 효율적으로 사용할 수 없는 문제가

있다. 둘째, 초과손실의 발생시점들이 특정 기간에 몰려있지 않아야 한다. 만약 이런 일이 발생했다면, 이는 사용된 변동성 모형이 실제 변동성 과정을 잘 나타내지 못했다는 것을 의미한다.

그런데 어떤 경우에는 두 가지 사후검증 조건을 만족하는 모형이 하나 이상으로 존재해서 가장 효과적인 VaR모형을 선택하기 어려울 수 있다. 따라서 본 논문에서는 손실함수(loss function)를 사용해 초과손실이 발생했을 때 실제 손실값에 대한 VaR의 초과량도 함께 비교해본다.

### 3.1. Unconditional coverage 검정

추정된 VaR이 실제로 계획된 신뢰수준  $q = 1 - p$ 를 갖는지를 판단하기 위해, 다음처럼  $I_t$ 를 정의하자.

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{if } R_t < \hat{r}_q^t, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.1)$$

만약 VaR의 추정에 사용된 모형이 적절하다면  $\{I_t, t = 1, 2, \dots\}$ 들은 성공확률이  $p$ 인 연속된 베르누이 시행이다. Kupiec (1995)과 Christoffersen (1998)은 다음의 가설검정을 고려하였다.

$$H_0 : E[I_t] = p \quad \text{vs.} \quad H_1 : E[I_t] \neq p. \quad (3.2)$$

위 가설검정에서 검정통계량은 다음과 같다.

$$LR_{uc} = -2 \log \left[ \frac{L(p; H_1, \dots, H_T)}{L(\hat{\pi}; H_1, \dots, H_T)} \right], \quad (3.3)$$

여기서  $L(x; H_1, \dots, H_T) = (1 - x)^{n_0} x^{n_1}$ ,  $n_1$ 은 초과손실의 발생횟수이며,  $n_0 = n - n_1$ ,  $\hat{\pi} = n_1/(n_0 + n_1)$ 로  $p$ 의 최대우도추정치다.  $LR_{uc}$ 는 점근적으로 자유도 1인  $\chi^2$ 분포를 따른다. 유의수준  $\alpha$ 에서  $H_0$ 가 기각된다면, 같은 유의수준에서 VaR의 추정에 문제가 있었다고 판단할 수 있다.

### 3.2. Independence 검정

Unconditional coverage 검정에서는 대립가설에서도 초과손실의 발생과정들이 베르누이 시행을 따름을 가정하고 있다. 하지만, 변동성 과정을 제대로 모형에 반영하지 못했다면, 초과손실의 발생시점들이 집중현상을 이룰 수 있다. 이 점을 검정하기 위해, Christoffersen (1998)은 모든  $t$ 에 대해,  $I_t$ 가  $I_{t-1}$ 에만 의존한다고 가정한 후, 다음의 가설검정을 고려하였다.

$$H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \pi_{01} \neq \pi_{11}, \quad (3.4)$$

여기서  $\pi_{ij} = P(I_t = j | I_{t-1} = i)$ 이다. 귀무가설은 오늘 발생할 초과손실의 확률은 어제의 발생 여부에 관계없이 일정함을 의미한다. Christoffersen (1998)의 가정하에서는  $\{I_t\}$ 는 마코프 과정(Markov process)을 따르며, 추이확률행렬(transition probability matrix)은 아래와 같다.

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

대립가설이 맞다면, 우도함수는 아래와 같다. 아래의 식에서  $n_{ij}$ 는  $i$ 가 발생한 후  $j$ 가 발생한 사건의 관측수를 나타낸다.

$$L(\Pi_1; H_1, \dots, H_T) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}. \quad (3.6)$$

귀무가설하에서  $\pi_2 := \pi_{01} = \pi_{11}$ 라 놓으면, 추이확률행렬과 우도함수는 다음과 같다.

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{bmatrix},$$

$$L(\Pi_2; H_1, \dots, H_T) = (1 - \pi_2)^{(n_{00} + n_{10})} \pi_2^{(n_{01} + n_{11})}. \quad (3.7)$$

위로부터 귀무가설을 검정하기 위한 검정통계량은 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\text{LR}_{ind} = -2 \log \left[ \frac{L(\hat{\Pi}_2; H_1, \dots, H_T)}{L(\hat{\Pi}_1; H_1, \dots, H_T)} \right], \quad (3.8)$$

여기서  $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2$ 은 최대우도추정치다.  $\text{LR}_{ind}$ 는 점근적으로 자유도 1인  $\chi^2$ 분포를 따른다.

### 3.3. Conditional coverage 검정

Conditional coverage 검정은 VaR의 정확성과 독립성을 동시에 검정하는 것으로 식 (3.3)과 식 (3.8)을 합하여 검정통계량이 주어진다. 즉,

$$\text{LR}_{cc} = \text{LR}_{uc} + \text{LR}_{ind}, \quad (3.9)$$

여기서  $\text{LR}_{cc}$ 는 점근적으로 자유도 2인  $\chi^2$ 분포를 따른다.

### 3.4. Dynamic quantile 검정

Christoffersen (1998)에서 소개한 사후검증 절차는 마코프 과정을 따르기 때문에 초과손실의 독립성 검정이 1시차로 제한되어 검정력이 낮은 문제가 있다. Berkowitz 등 (2011)은 은행이 실제로 거래하면서 얻은 자료를 이용하여 여러가지 검정방법을 비교했는데 Engle과 Manganelli (2004)의 Dynamic quantile 검정(DQ)이 가장 뛰어난 모습을 보였다.

DQ검정을 소개하기 위해서  $I_t$ 를 다음과 같이 다시 정의하자.

$$I_t(p) = \begin{cases} 1 - p, & \text{if } R_t < r_q^t, \\ -p, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.10)$$

VaR의 정의로부터  $I_t(p)$ 의 기대값은 0이 되고  $I_t(p)$ 는  $I_{t-j}(p), R_{t-j}, j = 1, 2, \dots$  등 과거에 발생한 정보와 상관관계가 없어야 한다. 이러한 검정은 다음과 같은 선형회귀모형을 이용할 수 있다.

$$I_t(p) = \delta + \sum_{j=1}^s \beta_j I_{t-j}(p) + \beta_{s+1} r_q^t + \epsilon_t, \quad (3.11)$$

여기서  $\{\epsilon_t\}$ 는 백색잡음과정이다. 위 선형모형을 통해, 과거  $s$ 일 동안의 초과손실의 발생여부와  $\Phi_{t-1}$ 로부터 얻은  $R_t$ 의 VaR이 현 시점  $t$ 에서의 초과손실의 발생여부에 대한 설명력을 가지는지를 검정할 수 있다. 현시점  $t$ 에서의 초과손실의 발생여부가  $\Phi_{t-1}$ 에 속한 어떤 정보와도 독립이라면, 식 (3.11)의 선형회귀모형은 설명력을 가지지 못한다. 그러므로 다음과 같은 가설검정을 고려할 수 있다.

$$H_0 : \beta = (\delta, \beta_1, \dots, \beta_{s+1})^T = 0. \quad (3.12)$$



그리고 다음과 같은 김정통계량을 유도할 수 있다.

$$DQ_{cc} = \frac{\hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}}{p(1-p)}, \quad (3.13)$$

여기서  $X$ 는 설계행렬(design matrix)이다.  $DQ_{cc}$ 는 점근적으로 자유도  $s + 2$ 인  $\chi^2$ 분포를 따른다. 좀 더 자세한 내용은 Engle과 Manganelli (2004)를 참고하길 바란다. 본 논문에서는 지난 5일 동안 초과손실의 발생여부와  $r_q^t$ 의 값이 현 시점  $t$ 에서의 초과손실의 발생여부에 대한 설명력을 가지는지를 검증하고자,  $s = 5$ 인 경우의 DQ 검정을 실시하였다.

### 3.5. Loss function을 이용한 모형 선택

Lopez (1998)에서 소개된 Magnitude loss function은 다음과 같다.

$$\Omega_t = \begin{cases} 1 + (R_t - r_q^t)^2, & \text{if } R_t < r_q^t, \\ 0, & \text{if } R_t \geq r_q^t. \end{cases} \quad (3.14)$$

초과손실이 발생했을 때 추정된 VaR과 실제손실의 차이가 작을수록 좋은 모형으로 볼 수 있다. 그러므로  $\sum_{t=1}^T \Omega_t$ 가 가장 작은 모형을 찾는다.

## 4. 실증 분석

본 장에서는 장기기억속성을 고려한 변동성 예측이 VaR 추정에 미치는 영향을 알아본다. 이를 위해 수익률의 변동성이 IGARCH(1, 1), FIGARCH(1,  $d$ , 1), FIEGARCH(1,  $d$ , 1) 모형을 따른다고 가정하고, 단기기억속성을 보이는 GARCH(1, 1), EGARCH(1, 1) 모형을 따르는 경우와 비교한다. 또한 표준화된 조건부 수익률  $\{z_t\}$ 의 비정규성이 VaR 추정에 주는 영향을 알아보기 위해서  $\{z_t\}$ 의 확률분포를 정규분포, student- $t$  분포, skewed- $t$  분포를 가정하거나 EVT, FHS를 이용하여 추정한다. VaR의 신뢰수준은  $p = 0.95, 0.99, 0.995, 0.999, 0.9995, 0.9999$ 이다.

분석에는 1995년 1월 3일부터 2012년 7월 5일까지 전체 4461개의 일별 KOSPI 증가를 사용했다. 추정에는 매일 모수를 다시 추정하는 rolling window 방법 (Fama와 MacBeth, 1973)을 적용했고, window 크기는 1500개이다. 2000년 7월 21일부터 2012년 7월 5일까지 2960일에 대해 VaR 추정이 이루어졌다.

Window 크기는 약 6년 동안 자료로 다소 많을 수 있다. 추정에 있어 표본크기가 커지면 모수 추정치의 표준오차가 작아지는 장점이 있지만 그 기간 동안 금융시장에 있었던 구조적인 변화로 인하여 추정된 모수에 편향(bias)이 발생할 수 있다. 그럼에도 불구하고 1500개의 표본크기를 사용하는 이유는 다음과 같다. 우선 FIGARCH, FIEGARCH 모형의 모수를 추정하는데 필요한 최소한의 표본크기를 얻기 위함이다. 그리고 FHS방법이 표본크기에 의존하여 VaR을 지나치게 과소추정하는 것을 방지하기 위해서다 (Pritsker, 2006).

각각의 변동성 모형, 주변확률분포, 신뢰수준의 조합에 대해, 추정된 VaR 값들에 대해, 사후검증을 실시하였고, 손실함수를 얻었다. 사후검증은 앞서 소개한 Unconditional 검정(LR<sub>uc</sub>), Independence 검정(LR<sub>ind</sub>), Conditional coverage 검정(LR<sub>cc</sub>), Dynamic quantile 검정(DQ)을 이용하였다.

### 4.1. 자료 기술

Figure 4.1은 1995년 1월 3일부터 2012년 7월 5일까지 KOSPI 수익률의 산점도를 보여준다. 이 그림에서 변동성 집중현상이 있음을 확인할 수 있다. 특히 1990년대 후반부터 2000년대 초반까지 변동성이

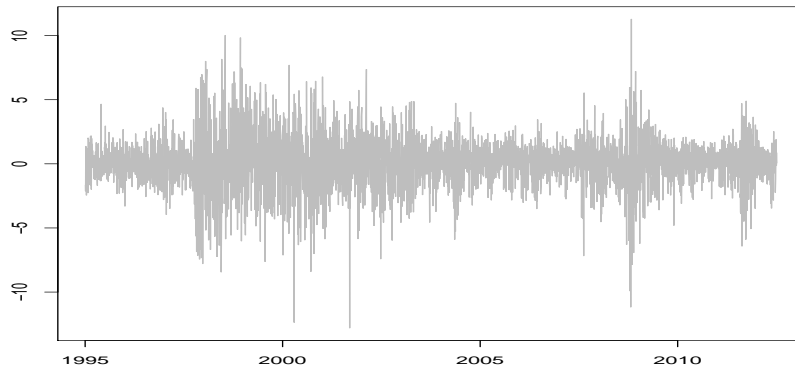
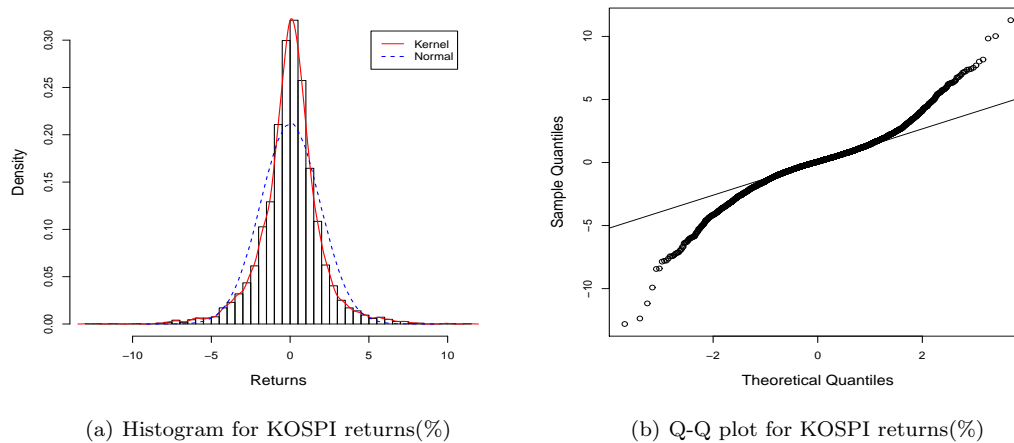


Figure 4.1. Time series plot for KOSPI returns(%)

Table 4.1. Summary statistics for KOSPI returns(%)

Sample size	Mean	Std.Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
4460	0.014	1.887	-0.198	7.029	-12.81	11.28



(a) Histogram for KOSPI returns(%)

(b) Q-Q plot for KOSPI returns(%)

Figure 4.2. Assessing normality

높은 상태를 지속하지만 2000년대 중반에는 변동성이 낮은 상태로 있다. Table 4.1에 해당 KOSPI 수익률의 기초통계량이 나타나있다. 평균은 0에 가까우며, 정규분포에 비해 매우 큰 첨도를 보이고 있다. 또한, 최소값은 -12.81%로 평균으로부터 매우 멀리 떨어진 값이다. 표준편차가 1.887%이므로 수익률의 최소값은 6시그마( $6\sigma$ )를 넘는다. 정규분포에서 6시그마에 해당하는 값은 100만번 중 3.4번가량 발생할 것으로 기대하지만 KOSPI 시장에서는 불과 약 4500번만에 이와 같은 극단적인 손실이 발생하였다. 실제로 KOSPI에서 -5%이하의 손실이 4460일 중 61번 관측되었고, 이는 73일에 1번 -5%이하의 손실이 발생한 것이다. 그렇지만 수익률 분포가 정규분포를 따랐다면 -5%이하의 손실이 발생할 확률은 약 0.004이므로 250일에 1번 -5%이하의 손실이 관측될 것으로 기대한다. 그러므로 KOSPI 시장에서 극단적인 손실이 정규분포보다 빈번하게 발생하고 있다고 볼 수 있다. Figure 4.2로부터도 KOSPI 수익률 분포의 비정규성을 확인할 수 있다. 왼쪽의 히스토그램을 보면 수익률의 분포가 정규분포보다

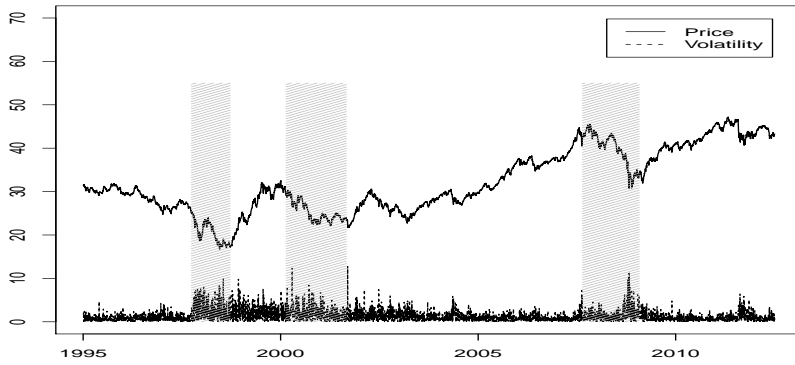
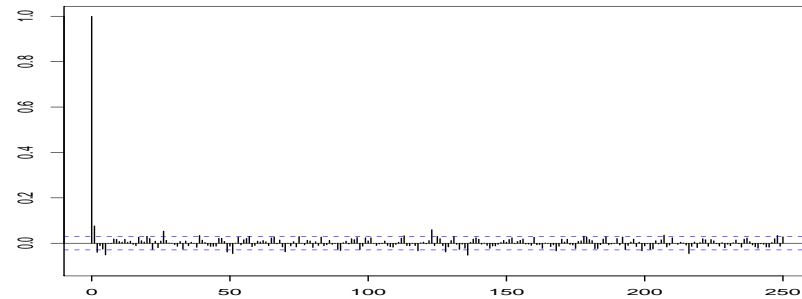
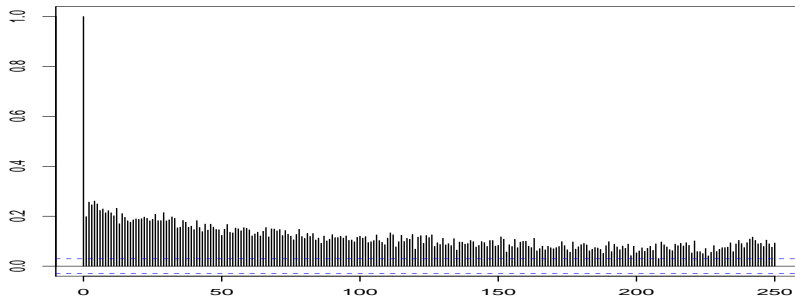


Figure 4.3. Leverage effect for KOSPI returns(%)



(a) Returns(%)



(b) Absolute returns(%)

Figure 4.4. ACF of KOSPI returns(%)

뽀족한 형태이고, 오른쪽 Q-Q plot을 보면 더 두꺼운 꼬리분포를 가지는 것을 알 수 있다. 또한, 꼬리의 양끝에서 분포가 서로 비대칭임을 알 수 있다.

Figure 4.3에서 제공된 변환한 KOSPI 증가( $\sqrt{P_t}$ )와 변동성의 프록시(proxy)인 수익률의 절대값( $|R_t|$ )이 나타나 있다. 그림에서 KOSPI 시장에 레버리지 효과가 존재함을 알 수 있다. KOSPI 증가가 뚜렷한 하락세를 보이는 90년대 후반 외환위기, 2000년대 초반 카드대란, 2000년대 후반 글로벌 금융위기가

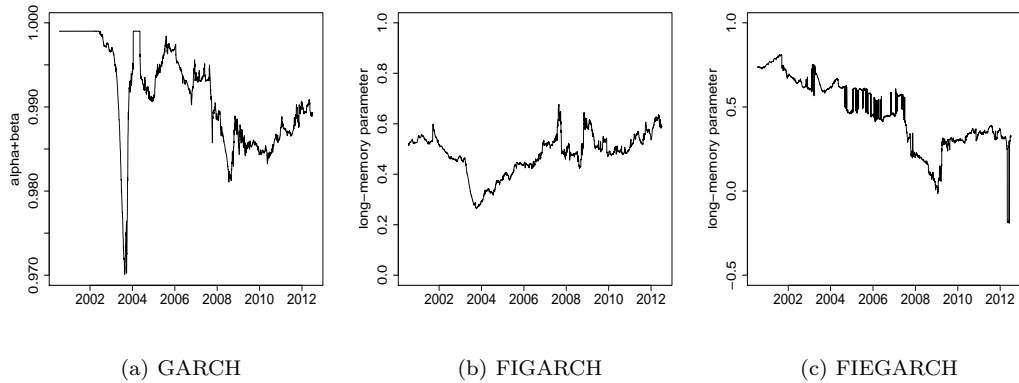


Figure 4.5. Long-memory parameter

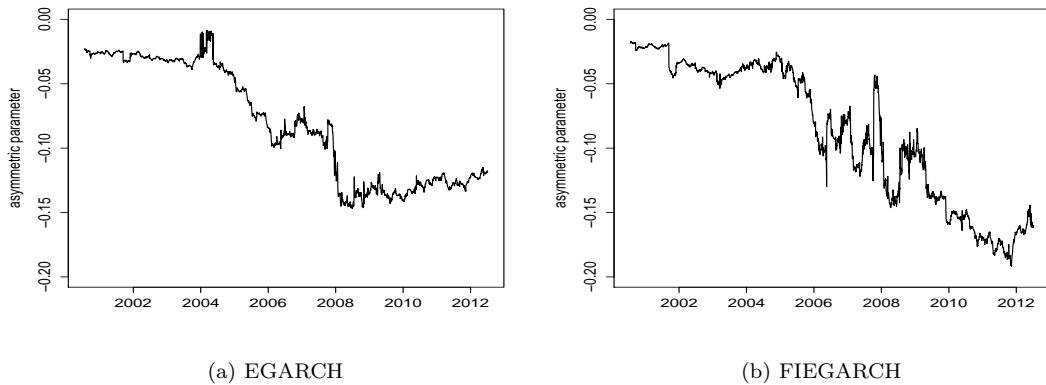


Figure 4.6. Asymmetric parameter

발생했을 시기에 많은 큰 손실들이 발생했고, 이로 인해 변동성이 다른 시기보다 높은 것을 알 수 있다. Figure 4.4는 수익률과 이것의 절대값에 대한 자기상관함수를 보여준다. 원자료의 경우에는 자기상관함수가 급속하게 0으로 수렴하고 있으나, 절대값의 경우 원자료와 다르게 자기상관함수가 매우 천천히 감소하며, 지수적으로 감소한다고 볼 수 없다. 따라서 KOSPI 수익률의 변동성은 장기기억속성을 가진다.

4.2. 추정 결과

KOSPI 수익률의 변동성 과정이 장기기억속성을 가지는 지를 알아보기 위하여, GARCH(1,1) 모형의 모수  $\alpha + \beta$ , FIGARCH(1, d, 1) 모형의 모수  $d$ , 그리고, FIEGARCH(1, d, 1) 모형의 모수  $d$ 를 rolling window 방법을 이용하여 매일 다시 추정하여, Figure 4.5에 나타내었다. GARCH 모형의 모수  $\alpha + \beta$ 가 대부분의 추정에서 1과 거의 차이가 없어 실제로 IGARCH 모형의 성질을 갖고 있음을 알 수 있다. 또한 FIGARCH와 FIEGARCH 모형에서 장기기억속성을 나타내는 모수  $d$ 의 추정치가 시간에 따라 변화하기는 하지만, 대부분의 시점에서 0이 아닌 값을 가진다. 따라서, KOSPI 수익률의 변동성 과정에 장기기억속성이 존재함을 확인할 수 있다.

Figure 4.6은 EGARCH와 FIEGARCH 모형에서 레버리지 효과를 설명하는 모수  $\theta$ 의 추정치를 각각 나타내고 있다. 이 그림에서 역시 모수  $\theta$ 의 추정치가 시간에 따라 변화하기는 하지만, 모수가 0보다 작

**Table 4.2.** The number of violation

Model	Dist.	Confidence level (Expected)					
		0.95 (148)	0.99 (29.6)	0.995 (14.8)	0.999 (2.96)	0.9995 (1.48)	0.9999 (0.30)
GARCH	Normal	171	46	30	14	10	5
	Student's <i>t</i>	147	31	20	8	5	2
	Skewed- <i>t</i>	170	27	14	5	1	1
	EVT	147	31	17	3	2	1
	FHS	151	34	21	3	2	2
EGARCH	Normal	167	47	30	13	12	5
	Student's <i>t</i>	133	29	19	10	5	1
	Skewed- <i>t</i>	149	25	17	2	1	1
	EVT	146	32	19	4	2	1
	FHS	151	35	19	7	5	5
IGARCH	Normal	170	49	30	13	10	5
	Student's <i>t</i>	150	33	20	8	5	2
	Skewed- <i>t</i>	174	29	14	5	1	1
	EVT	151	32	18	3	2	1
	FHS	157	36	20	3	2	2
FIGARCH	Normal	168	49	31	12	9	4
	Student's <i>t</i>	143	34	21	6	4	2
	Skewed- <i>t</i>	163	29	13	4	1	1
	EVT	137	32	16	3	3	1
	FHS	148	33	17	3	2	2
FIEGARCH	Normal	167	47	30	13	12	5
	Student's <i>t</i>	149	33	23	12	5	1
	Skewed- <i>t</i>	164	30	15	2	1	1
	EVT	146	32	19	4	2	1
	FHS	151	35	19	7	5	5

다고 판단할 수 있으므로 KOSPI의 변동성이 수익률의 음양에 따라 비대칭적으로 반응하고 있음을 알 수 있다.

Table 4.2은 각 모형으로부터 실제로 발생한 초과손실의 횟수를 보여준다. 정규분포를  $\{z_t\}$ 의 주변확률 분포로 사용하는 경우에, 변동성 모형 및 신뢰수준에 상관없이 손실의 발생횟수가 기대값보다 많았음을 확인할 수 있다. 즉, 정규분포를 사용하는 경우에 VaR이 과소추정된다. 이는 기존의 연구결과와 일치한다.

신뢰수준 0.99인 경우에 각각 GARCH, EGARCH, IGARCH, FIGARCH, FIEGARCH 모형을 이용한 VaR 추정결과 및 초과손실의 발생시점이 Figure 4.7부터 Figure 4.11에 나타나있다. 이 그림들에서 '○'는 초과손실이 발생했던 시점들을 나타낸다. 신뢰수준 0.99에서는 초과손실이 100일에 한 번 발생할 것으로 기대되는데 GARCH 모형과 IGARCH 모형의 경우 변동성이 낮았던 2000년대 중반에는  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포를 EVT와 skewed-*t* 분포로 놓아 추정했을 때, 대략 500일 이상 동안에 초과손실이 발생하지 않았음을 확인할 수 있다. 평균적으로 초과손실이 발생한 횟수가 기대되는 횟수와 통계적으로 일치했음을 고려한다면, 변동성이 높았던 2000년대 초반과 후반에 초과손실들이 집중되어 있음을 알 수 있다. 반면에 EGARCH, FIEGARCH 모형의 경우에는 같은 방법으로  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포를

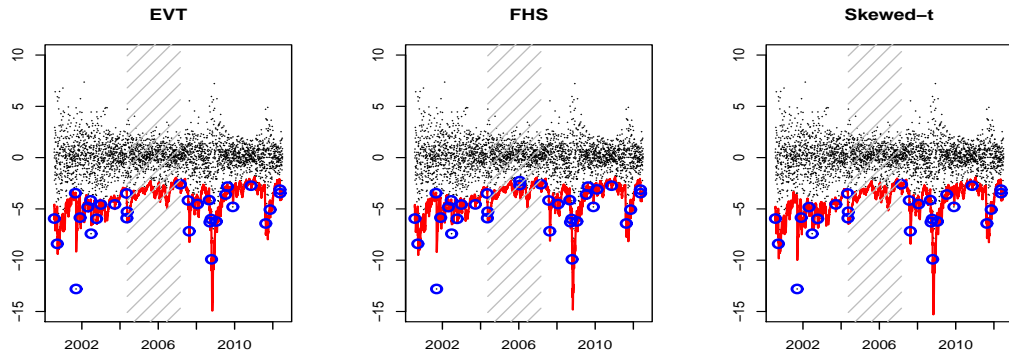


Figure 4.7. 99% VaR estimation for KOSPI returns(%) using GARCH

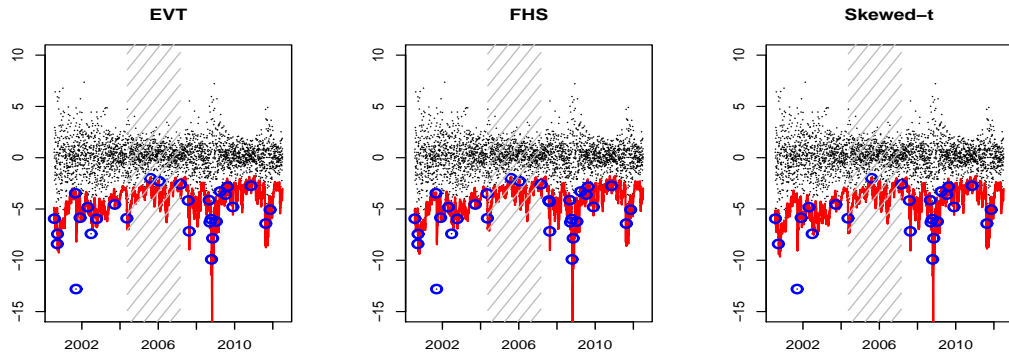


Figure 4.8. 99% VaR estimation for KOSPI returns(%) using EGARCH

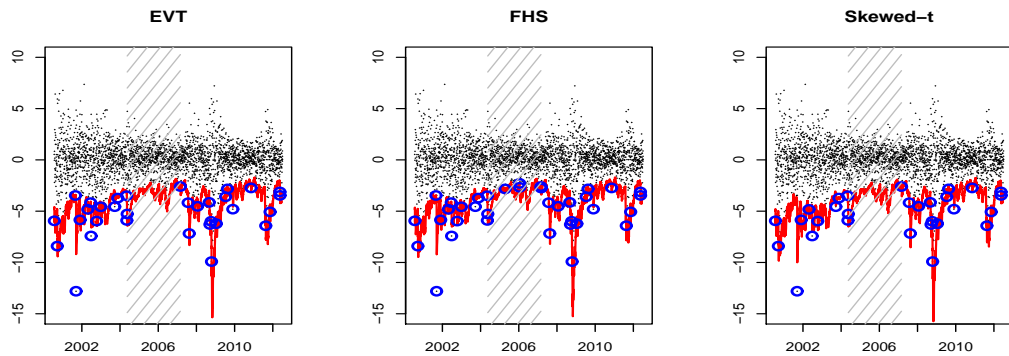


Figure 4.9. 99% VaR estimation for KOSPI returns(%) using IGARCH

추정하였을 때, 초과손실의 발생시점들이 다른 경우에 비해 고르게 분포되어 있다. FHS 방법을 사용한 경우에는, 적용된 변동성 과정에 상관없이 초과손실이 발생시점이 비교적 고르게 분포되어 있다.

KOSPI의 변동성 과정이 GARCH, EGARCH, IGARCH, FIGARCH, FIEGARCH 모형을 따른다고 가정하여 추정된 VaR에 대한 사후검증 결과는 각각 Table 4.3부터 Table 4.7까지에 나타나 있다. 여기

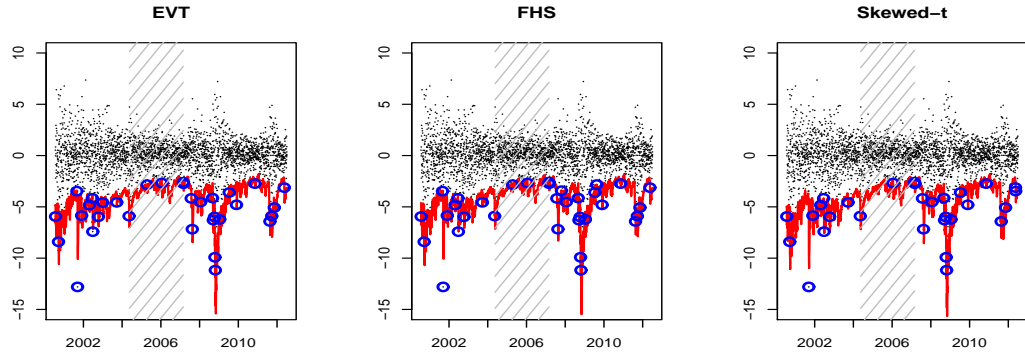


Figure 4.10. 99% VaR estimation for KOSPI returns(%) using FIGARCH

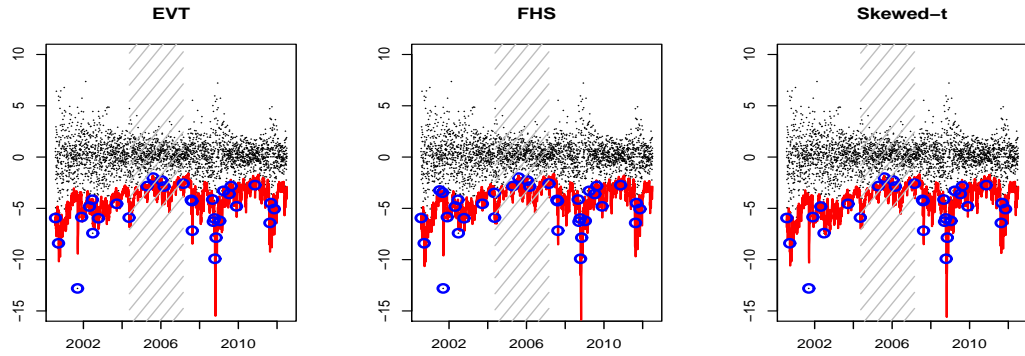


Figure 4.11. 99% VaR estimation for KOSPI returns(%) using FIEGARCH

서는 네 가지 가설검정에 대한  $p$ -value들을 보여주며, 유의수준 0.05에서 귀무가설이 기각된 결과는 진한글씨로 표시했다.

잘 알려져 있는 바와 같이, 정규분포를  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포로 가정한 경우에 대부분의 변동성모형 및 신뢰수준에서 사후검정결과가 유의했다. 하지만, 신뢰수준의 95%인 경우에는 EGARCH, FIEGARCH 모형에서 네가지 검정결과가 모두 유의수준 0.05에서 유의하지 않았다. Student's  $t$  분포를 가정하는 경우는 정규분포를 가정하는 경우에 비해서 사후검정결과가 유의하지 않은 경우가 많았다. 이는 Student's  $t$  분포를 가정하여  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포가 두꺼운 꼬리를 가지는 현상을 반영할 수 있기 때문이다. 변동성 모형으로 GARCH 모형을 사용하는 경우를 제외한다면, 같은 모수적 방법인 skewed- $t$  분포를 가정하는 것이 대부분의 경우에 Student's  $t$  분포를 사용것에 비하여 더 좋은 사후검정결과를 주었다. 이 역시, skewed- $t$  분포를 가정하여  $\{z_t\}$ 의 분포가 두꺼운 꼬리를 가질뿐만 아니라 비대칭적 모양을 가지는 현상을 반영할 수 있기 때문이다. 하지만, FIGARCH 모형을 사용하여 신뢰수준 95% VaR의 추정할 때, skewed- $t$  분포를 사용한다면, DQ 검정의 결과가 유의했지만, Student's  $t$  분포를 사용한다면, 유의하지 않았다.

GARCH 모형과 IGARCH 모형을 변동성 모형으로 사용하여 VaR를 추정하는 경우를 제외한 후, skewed- $t$  분포, EVT, FHS를 사용한 VaR 추정의 사후검정결과를 비교해 보자. 이 두 변동성 모형을 제외하고 논의를 진행할 수 있는 이유는, GARCH 모형은 장기기억 속성과 레버리지효과를 반영하지 못

**Table 4.3.** Significant probability of the testing (GARCH)

Dist.	Test	Confidence level					
		0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
Normal	LR <sub>uc</sub>	0.058	<b>0.005</b>	<b>0.001</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.500	0.762	0.426	0.706	0.785	0.887
	LR <sub>cc</sub>	0.132	<b>0.019</b>	<b>0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	DQ	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
Student's <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.933	0.797	0.198	<b>0.016</b>	<b>0.023</b>	<b>0.040</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.327	0.410	0.593	0.825	0.887	0.949
	LR <sub>cc</sub>	0.616	0.690	0.379	0.053	0.076	0.120
	DQ	<b>0.006</b>	0.078	0.178	0.199	0.282	<b>0.045</b>
Skewed- <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.070	0.626	0.833	0.281	0.675	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.303	0.473	0.706	0.887	0.971	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.113	0.686	0.911	0.553	0.915	0.598
	DQ	<b>0.003</b>	<b>0.026</b>	1.000	0.969	1.000	0.926
EVT	LR <sub>uc</sub>	0.933	0.797	0.575	0.981	0.685	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.535	0.410	0.648	0.928	0.949	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.822	0.690	0.770	0.996	0.919	0.598
	DQ	0.135	<b>0.004</b>	0.999	0.999	0.960	0.932
FHS	LR <sub>uc</sub>	0.801	0.427	0.129	0.981	0.685	<b>0.040</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.414	0.421	0.575	0.928	0.949	0.949
	LR <sub>cc</sub>	0.694	0.528	0.269	0.996	0.919	0.120
	DQ	<b>0.046</b>	<b>0.005</b>	0.900	1.000	0.910	<b>0.002</b>

**Table 4.4.** Significant probability of the testing (EGARCH)

Dist.	Test	Confidence level					
		0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
Normal	LR <sub>uc</sub>	0.866	<b>0.047</b>	<b>0.004</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.802	0.277	0.473	0.686	0.745	0.866
	LR <sub>cc</sub>	0.955	0.077	<b>0.013</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	DQ	1.000	0.097	0.150	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
Student's <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.198	0.911	0.295	<b>0.001</b>	<b>0.023</b>	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.655	0.441	0.611	0.785	0.887	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.396	0.739	0.507	<b>0.006</b>	0.076	0.598
	DQ	0.823	0.984	0.958	<b>0.014</b>	0.260	0.974
Skewed- <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.933	0.383	0.575	0.553	0.675	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.865	0.506	0.648	0.949	0.971	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.982	0.547	0.770	0.837	0.915	0.598
	DQ	0.999	0.965	0.999	1.000	1.000	0.937
EVT	LR <sub>uc</sub>	0.121	0.911	0.420	0.566	0.675	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.421	0.441	0.630	0.907	0.971	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.218	0.739	0.643	0.843	0.915	0.598
	DQ	0.712	0.884	0.994	0.998	1.000	0.924
FHS	LR <sub>uc</sub>	0.443	0.797	0.295	<b>0.046</b>	<b>0.023</b>	<b>0.000</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.812	0.410	0.611	0.846	0.887	0.887
	LR <sub>cc</sub>	0.725	0.690	0.507	0.134	0.076	<b>0.000</b>
	DQ	0.874	0.590	0.955	0.558	<b>0.017</b>	<b>0.000</b>



**Table 4.5.** Significant probability of the testing (IGARCH)

Dist.	Test	Confidence level					
		0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
Normal	LR <sub>uc</sub>	0.070	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.303	0.853	0.426	0.725	0.785	0.887
	LR <sub>cc</sub>	0.113	<b>0.005</b>	<b>0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	DQ	<b>0.001</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
Student's <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.866	0.537	0.198	<b>0.016</b>	<b>0.023</b>	<b>0.040</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.391	0.381	0.593	0.825	0.887	0.949
	LR <sub>cc</sub>	0.683	0.564	0.379	0.053	0.076	0.120
	DQ	<b>0.003</b>	0.101	0.164	0.102	0.284	0.052
Skewed- <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	<b>0.033</b>	0.911	0.833	0.281	0.675	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.241	0.441	0.706	0.887	0.971	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.051	0.739	0.911	0.553	0.915	0.598
	DQ	<b>0.000</b>	0.051	0.981	0.972	1.000	0.935
EVT	LR <sub>uc</sub>	0.801	0.662	0.420	0.981	0.685	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.414	0.396	0.630	0.928	0.949	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.694	0.634	0.643	0.996	0.919	0.598
	DQ	0.068	<b>0.006</b>	0.995	1.000	0.971	0.951
FHS	LR <sub>uc</sub>	0.452	0.253	0.198	0.981	0.685	<b>0.040</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.360	0.474	0.593	0.928	0.949	0.949
	LR <sub>cc</sub>	0.495	0.402	0.379	0.996	0.919	0.120
	DQ	0.057	<b>0.000</b>	0.948	1.000	0.913	<b>0.002</b>

**Table 4.6.** Significant probability of the testing (FIGARCH)

Dist.	Test	Confidence level					
		0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
Normal	LR <sub>uc</sub>	0.098	<b>0.001</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.266	0.853	0.410	0.745	0.805	0.907
	LR <sub>cc</sub>	0.137	<b>0.005</b>	<b>0.001</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.001</b>
	DQ	<b>0.003</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
Student's <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.672	0.427	0.129	0.121	0.088	<b>0.040</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.252	0.367	0.575	0.866	0.907	0.949
	LR <sub>cc</sub>	0.475	0.486	0.269	0.297	0.231	0.120
	DQ	0.332	<b>0.001</b>	0.815	0.859	0.732	0.064
Skewed- <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.213	0.911	0.632	0.566	0.675	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.187	0.441	0.725	0.907	0.971	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.192	0.739	0.838	0.843	0.915	0.598
	DQ	<b>0.004</b>	<b>0.049</b>	0.991	1.000	1.000	0.950
EVT	LR <sub>uc</sub>	0.348	0.662	0.758	0.981	0.273	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.305	0.396	0.667	0.928	0.928	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.380	0.634	0.869	0.996	0.547	0.598
	DQ	0.397	0.708	0.986	1.000	0.923	0.968
FHS	LR <sub>uc</sub>	1.000	0.537	0.575	0.981	0.685	<b>0.040</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.348	0.381	0.648	0.928	0.949	0.949
	LR <sub>cc</sub>	0.643	0.564	0.770	0.996	0.919	0.120
	DQ	0.434	0.754	0.986	1.000	0.915	<b>0.002</b>

**Table 4.7.** Significant probability of the testing (FIEGARCH)

Dist.	Test	Confidence level					
		0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
Normal	LR <sub>uc</sub>	0.116	<b>0.003</b>	<b>0.001</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.869	0.792	0.426	0.725	0.745	0.887
	LR <sub>cc</sub>	0.287	<b>0.012</b>	<b>0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
	DQ	0.904	<b>0.011</b>	<b>0.003</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
Student's <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.933	0.537	<b>0.048</b>	<b>0.000</b>	<b>0.023</b>	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.138	0.381	0.540	0.745	0.887	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.332	0.564	0.118	<b>0.000</b>	0.076	0.598
	DQ	0.949	0.870	0.115	<b>0.000</b>	0.154	0.974
Skewed- <i>t</i>	LR <sub>uc</sub>	0.184	0.941	0.959	0.553	0.675	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.244	0.426	0.686	0.949	0.971	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.210	0.726	0.920	0.837	0.915	0.598
	DQ	0.831	0.879	0.999	1.000	1.000	0.947
EVT	LR <sub>uc</sub>	0.866	0.662	0.295	0.566	0.685	0.311
	LR <sub>ind</sub>	0.354	0.396	0.611	0.907	0.949	0.971
	LR <sub>cc</sub>	0.642	0.634	0.507	0.843	0.919	0.598
	DQ	0.963	0.768	0.952	0.999	1.000	0.929
FHS	LR <sub>uc</sub>	0.801	0.332	0.295	<b>0.046</b>	<b>0.023</b>	<b>0.000</b>
	LR <sub>ind</sub>	0.120	0.353	0.611	0.846	0.887	0.887
	LR <sub>cc</sub>	0.290	0.406	0.507	0.134	0.076	<b>0.000</b>
	DQ	0.914	0.639	0.162	0.570	<b>0.035</b>	<b>0.000</b>

하며, IGARCH 모형은 발생한 충격이 변동성 과정에 미치는 영향이 영원히 지속되어 비현실적이기 때문이다. 이 두 변동성 모형을 제외한 경우에, EVT를 사용하여  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포를 추정하다면, 모든 경우에 사후검정결과가 유의하지 않았다. 또한, skewed-*t* 분포를 사용하는 경우에는 신뢰수준이 낮은 경우에, FHS를 사용하는 경우에는 신뢰수준이 높은 경우에 사후검정결과가 유의한 경우들이 있었다. 이러한 현상이 발생하는 이유는 skewed-*t* 분포는  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포의 꼬리가 감소하는 정도를 잘 반영하는 반면에 그외 부분의 분포들은 잘 나타내지 못하기 때문으로 생각된다. 또한,  $\{z_t\}$ 의 경험분포를 추정에 사용하는 FHS에서는 극단적으로 작은 빈도로 발생하는  $\{z_t\}$ 의 실현치가 부족하여 추정의 분산이 커지기 때문이다.

장기기억속성을 가지는 변동성 모형의 필요성을 알아보자. 우선 레버리지 효과를 고려하지 않는 모형인 GARCH와 IGARCH, FIGARCH를 사후검정결과를 통하여 비교해 보자. 이 때,  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포의 두꺼운 꼬리와 비대칭성을 반영하지 못하는 정규분포와 Student's *t* 분포를 사용하는 경우를 제외한다. Skewed-*t*, EVT 방법, FHS를 사용하는 경우에, 유의수준 0.05에서의 가설검정의 기각여부에 따라서 판단한다면, 모든 신뢰수준 및 사후검정에서 GARCH 모형에 비해, FIGARCH 모형을 사용하는 것이 더 적절했다. 또한, EVT를 사용하여 99% VaR을 추정하는 경우의 DQ 검정결과를 제외한다면, 역시 같은 판단기준에서, 모든 신뢰수준 및 사후검정에서 IGARCH 모형을 사용하는 것에 비해, FIGARCH 모형을 사용하는 것이 더 적절하였다. 하지만, 해당 DQ 검정의 유의확률은 Table 4.5, Table 4.6에서 확인할 수 있듯이, 각각 0.051과 0.049로 그 차이가 미미했다. 따라서, GARCH나 IGARCH 모형보다는 FIGARCH 모형을 사용하여 VaR을 추정하는 것이 사후검정의 관점에서 더 적절하다고 할 수 있다. 레버리지 효과를 고려하는 모형인 EGARCH 모형과 FIEGARCH 모형을 사용한 VaR의 추정결과를 비교하여 보자. 위와 같은 이유로, 비교에서 정규분포와 Student's *t* 분포를 사용하는 경우를 제외한다. Table 4.4, Table 4.7에서 확인할 수 있듯이, Skewed-*t*, EVT, FHS를 사용하는 경우에, 모든 신뢰수준 및 사후검정에서 EGARCH 모형과 FIEGARCH 모형의 사후검정결과가 뚜렷한 차이를 보이지 않았다. 즉, 사후검정의 관점에서는 변동성 모형으로 EGARCH 모형에 비해

**Table 4.8.** Value of the loss function

Model	Dist.	Confidence level					
		0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
GARCH	Normal	560.0	201.8	148.2	88.13	73.83	52.89
	Student's $t$	496.8	159.3	114.9	64.70	52.96	36.11
	Skewed- $t$	556.0	146.5	99.41	53.48	41.05	24.80
	EVT	484.3	164.5	112.2	53.28	40.42	15.40
	FHS	504.3	170.0	122.1	48.42	31.98	31.98
EGARCH	Normal	530.4	194.1	143.6	85.25	71.07	50.18
	Student's $t$	479.5	158.8	114.4	64.58	51.30	34.61
	Skewed- $t$	529.7	146.5	101.4	49.49	40.68	24.57
	EVT	472.0	163.8	113.7	55.27	41.72	18.69
	FHS	496.4	161.6	116.6	55.89	41.88	41.88
IGARCH	Normal	543.6	198.2	144.2	86.23	73.24	52.58
	Student's $t$	489.8	159.1	114.3	65.40	53.67	36.68
	Skewed- $t$	557.5	148.3	100.1	53.71	41.14	24.93
	EVT	490.1	165.4	113.8	53.20	39.79	13.46
	FHS	506.0	170.4	119.9	49.05	32.52	32.52
FIGARCH	Normal	554.2	200.6	144.1	82.65	69.93	49.77
	Student's $t$	488.7	156.3	109.1	58.59	48.19	32.14
	Skewed- $t$	542.0	140.4	92.42	49.14	37.56	21.37
	EVT	469.0	156.4	105.0	46.51	29.64	1.039
	FHS	504.5	160.6	105.8	44.60	33.00	33.00
FIEGARCH	Normal	567.0	207.8	152.4	87.01	74.37	51.54
	Student's $t$	513.2	169.0	123.1	69.48	53.68	36.88
	Skewed- $t$	559.0	154.7	102.1	51.62	42.74	26.75
	EVT	500.3	168.6	116.7	58.77	46.44	23.65
	FHS	522.8	167.4	120.1	55.12	43.63	43.63

FIEGARCH 모형을 고려할 필요가 없다.

Table 4.8은 식 (3.14)에 의한 손실함수 값들의 합을 보여준다. 사각형으로 표시한 부분은 신뢰수준별로 이 값이 최소인 경우를 나타낸다. 모형선택 기준으로 손실함수를 최소화시키는 모형을 선택할 때, FIGARCH 모형이 가장 뛰어났다. 수익률의 변동성 과정이 FIGARCH 모형을 따른다고 가정했을 때, 모든 신뢰수준에서 일관되게 가장 작은 손실함수의 값을 가졌다. 따라서, 손실함수를 최소화하는 관점에도 GARCH 모형보다는 FIGARCH 모형을 사용하는 것이 더 적절하다. 모든 신뢰수준 및  $\{z_i\}$ 의 주변확률분포의 가정에 대해서, EGARCH 모형을 사용한 손실함수가 FIEGARCH를 사용한 경우보다 작았다. 따라서, 가설검정의 관점에서와 마찬가지로 손실함수 관점에서도 EGARCH 모형에 비해 FIEGARCH 모형이 가지는 장점을 발견할 수 없었다.

직관적으로는 레버리지 효과와 장기기억속성을 모두 고려한 FIEGARCH 모형이 가설검정 및 손실함수를 포함한 사후검증 결과가 가장 뛰어날 것으로 기대했지만, 실제로는 그렇지 않았다. Engle과 Ng (1993)에 의하면 EGARCH 모형은 변동성의 값이 상대적으로 큰 경우에 실제보다 과대추정하는 경

향이 있다. 이러한 경향이 FIEGARCH 모형에서 존재할 것임을 유추할 수 있다. 변동성을 과대추정하면  $\{\hat{z}_t\}$ 은 상대적으로 과소추정되며, 이는 분포의 꼬리의 추정이 몇 개의 극단값에 영향을 많이 받는 EVT나 FHS를 이용한 VaR 추정에 영향을 줄 수 있다. 다시 말해, 상대적으로 큰 값을 가지는  $\{\hat{z}_t\}$ 의 값들이 과소추정되어 EVT나 FHS를 이용한  $\{z_t\}$ 의 주변확률분포의 꼬리 추정에 영향을 주었으며, 이로 인해 높은 신뢰수준의 VaR을 실제보다 작게 추정하는 것으로 생각된다. Table 4.6, Table 4.7은 FHS를 이용한 경우에, 신뢰수준 0.999, 0.9995, 0.9999에서, FIEGARCH의 사후검증 결과가 FIGARCH 비해 더 좋지 않았음을 보여준다. 또한, 같은 신뢰수준에서, EVT와 FHS를 사용한 경우에, FIEGARCH 모형의 손실함수가 FIGARCH 모형보다 큰 값을 가지는 것을 Table 4.8에서 볼 수 있다. 따라서 FIEGARCH 모형의 사후검증 결과가 기대에 미치지 못하는 이유를 변동성 과정을 제대로 모형화하지 못하는 데서 찾을 수 있다. 이 점에 대한 연구가 좀 더 필요하다.

## 5. 결론

본 논문에서 우리는 장기기억속성을 고려한 변동성 모형이 VaR 추정에 필요한 지 알아보았다. 이를 위해, 장기기억속성을 가지는 IGARCH, FIGARCH, FIEGARCH 모형을 이용해 KOSPI 수익률의 VaR을 추정하였고, 이 추정을 단기기억속성을 가지는 GARCH와 EGARCH 모형을 이용한 경우와 사후검증을 통하여 비교하였다. 사후검증의 방법으로 unconditional coverage 검정, independence 검정, conditional coverage 검정, dynamic quantile 검정, 그리고, magnitude 손실함수값의 비교를 적용하였다. 아울러 표준화된 조건부 수익률의 비정규성이 VaR 추정에 주는 영향을 살펴보기 위해서, 이것의 주변확률분포를 정규분포, Student's  $t$  분포, skewed- $t$  분포를 따른다고 가정하여 추정하거나, EVT나 FHS를 이용하여 추정한 후, 이로 부터 얻은 VaR 추정결과들을 비교하였다.

비교의 결과로 다음의 사실들을 알 수 있었다. 우선, rolling window 방법으로 얻은 모수의 추정치를 통해서 KOSPI 수익률의 변동성과정에 장기기억속성과 레버리지 효과가 존재하는 것을 확인하였다. 둘째, 레버리지 효과를 고려하지 않는 경우에는 VaR 추정을 정확히 하기 위하여 장기기억속성을 고려한 FIGARCH 모형을 이용하는 것이 적절함을 알았다. 표준화된 조건부 수익률을 skewed- $t$  분포, EVT, FHS를 이용하여 추정하는 경우에, FIGARCH 모형을 이용한 VaR 추정이 GARCH 모형을 이용한 경우보다 네 가지 검정의 결과 더 적절함을 알았고, 손실함수의 값도 역시 더 작았다. 뿐만 아니라, EVT를 적용한 FIGARCH 모형이 다른 모든 모형 조합들과 비교해서 손실함수값을 가장 작았다. 셋째, FIEGARCH 모형이 가설검정이나 손실함수의 최소화 관점에서 EGARCH 모형에 비해 더 좋은 점을 발견하지 못했다. 넷째, 변동성 모형으로 EGARCH, FIGARCH, FIEGARCH를 적용했을 때, EVT방법을 사용하여 VaR을 추정하는 것이 skewed- $t$ 나 FHS를 사용하는 것에 비해 네 가지 검정결과 가장 적절했다. 하지만, 손실함수의 최소화 관점에서는 skewed- $t$ , EVT, FHS를 사용한 방법들 사이에 우열을 가릴 수 없었다.

위 사실들로 부터, 변동성 과정이 FIGARCH 모형을 따른다고 가정하고, 표준화된 조건부 수익률을 EVT를 이용하여 적합했을 때, VaR의 예측력이 가장 뛰어난 것을 알 수 있다. 또한 FIEGARCH 모형을 이용한 VaR의 추정은 기대와 달리 사후검증결과가 좋지 않았다. FIEGARCH 모형 대신에 변동성을 과대추정할 위험이 없으며 변동성의 레버리지 효과를 적절히 반영할 수 있는 장기기억속성을 가지는 변동성 모형을 이용한 VaR 추정에 관한 연구가 필요하다.

## References

- Angelidis, T., Benos, A. and Degiannakis, S. (2004). The use of GARCH models in VaR estimation, *Statistical Methodology*, 1, 105–128.

- Baillie, R. T., Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **74**, 3–30.
- Barone-Adesi, G. and Giannopoulos, K. (2002). Non-parametric VaR techniques; myths and realities, *Economic Notes*, **30**, 167–181.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. and Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolios of derivative securities, *Journal of Futures Markets*, **19**, 583–602.
- Berkowitz, J., Christoffersen, P. and Pelletier, D. (2011). Evaluating Value-at-Risk models with Desk-Level Data, *Management Science*, **57**, 2213–2227.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O. (1996). Modeling and pricing long memory in stock market volatility, *Journal of Econometrics*, **73**, 151–184.
- Bollerslev, T. and Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-Maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances, *Econometric Reviews*, **11**, 143–172.
- Choi, P. and Min, I. (2011). A comparison of conditional and unconditional approaches in Value-at-Risk estimation, *The Japanese Economic Review*, **62**, 99–115.
- Christoffersen, P. (1998). Evaluating interval forecasts, *International Economic Review*, **39**, 841–862.
- Christie, A. A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects, *Journal of Financial Economics*, **10**, 407–432.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns, stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, **1**, 223–236.
- Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1008.
- Engle, R. F. and Bollerslev, T. (1986). Modeling the persistence of conditional variances, *Econometric Reviews*, **5**, 1–50.
- Engle, R. F. and Manganelli, S. (2004). CAViaR: Conditional autoregressive Value-at-Risk by regression quantiles, *Journal of Business and Economic Statistics*, **22**, 367–381.
- Engle, R. F. and Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1749–1778.
- Engle, R. F. and Patton, A. (2001). What good is a volatility model?, *Quantitative Finance*, **1**, 237–245.
- Fama, E. F. and MacBeth, J. D. (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests, *Journal of Political Economy*, **81**, 607–636.
- Fernandez, C. and Steel, M. (1998). On Bayesian modelling of fat tails and skewness, *Journal of the American Statistical Association*, **93**, 359–371.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation, *International Economic Review*, **35**, 705–730.
- Hsieh, D. A. (1989). Modeling heteroscedasticity in daily foreign exchange rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, **7**, 307–317.
- Jung, S. H., Oh, J. J. and Kim, S. G. (2012). GARCH model with conditional return distribution of unbounded Johnson, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 29–43.
- Kang, S. H. and Yoon, S. M. (2006). Asymmetric long memory feature in the volatility of Asian stock markets, *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, **35**, 175–198.
- Kang, S. H. and Yoon, S. M. (2008). Value-at-Risk analysis of the long memory volatility process: The case of individual stock return, *The Korean Journal of Finance*, **21**, 4–18.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, **11**, 122–150.
- Lee, J. H., Kim, D. S. and Lee, H. G. (2002). Long memory in the volatility of Korean stock returns, *Korean*

- Journal of Futures and Options*, **10**, 95–114.
- Lopez, J. A. (1998). Methods for evaluating Value-at-Risk estimates, *Economic Policy Review*, **4**, 119–124.
- McNeil, A. J. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, **7**, 271–300.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347–370.
- Oh, H. T., Lee, H. S. and Lee, C. S. (2000). An empirical study of asymmetric volatility based on market situation in the Korean stock market, *Korean Financial Management Association*, **17**, 45–65.
- Ohk, K. Y. (1997). An empirical study on the asymmetric effect of news on volatility, *Korean Journal of Financial Studies*, **21**, 295–324.
- Park, H. J. and Shin, Y. S. (2009). A study of long-memory trait of Korean stock market, *Korean Academy of Commodity Science and Technology*, **27**, 43–49.
- Park, J. G. and Lee, P. S. (2009). Forecasting stock return volatility by employing the long-memory property, *Journal of Money and Finance*, **23**, 33–62.
- Poon, S. H. and Granger, C. W. J. (2003). Forecasting volatility in financial markets: A review, *Journal of Economic Literature*, **41**, 478–539.
- Pritsker, M. (2006). The hidden dangers of historical simulation, *Journal of Banking and Finance*, **30**, 561–582.

# 장기 기억 변동성 모형을 이용한 KOSPI 수익률의 Value-at-Risk의 추정

오정준<sup>a</sup> · 김성곤<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>서울시립대 통계학과

(2012년 11월 15일 접수, 2013년 1월 9일 수정, 2013년 1월 23일 채택)

---

## 요약

본 논문에서는 장기 기억 변동성 모형의 필요성을 Value-at-Risk(VaR) 추정의 관점에서 알아본다. 이를 위해, KOSPI 수익률의 VaR을 FIGARCH, FIEGARCH와 같은 장기 기억 변동성 모형과 GARCH, EGARCH와 같은 단기 기억 변동성 모형을 적용하여 각각 추정 후, 각 변동성 모형에 따른 추정의 적절성을 사후검증을 통하여 비교해 본다. 사후검증을 통해, KOSPI 수익률 과정이 장기 기억 속성을 가짐을 확인할 수 있으며, 적절한 VaR의 추정을 위해서는 장기 기억 변동성 모형을 적용하는 것이 필요함을 알 수 있다.

주요용어: VaR 추정, 장기 기억, 변동성 모형, FIGARCH, FIEGARCH.

---

<sup>1</sup>교신저자: (130-743) 서울시 동대문구 시립대로 163, 서울시립대 통계학과, 부교수. E-mail: sgkim@uos.ac.kr