

유용방향법 최적화 알고리즘을 사용한 고유진동수에 대한 구조 최적설계 FEA 모듈 개발

조희근*

(Manuscript received: Aug, 31, 2012 / Revised: Nov, 7, 2012 / Accepted: Nov, 28, 2012)

Structure Optimization FEA Code Development Under Frequency Constraints by Using Feasible Direction Optimization Method

Hee Keun Cho*

Abstract

In order to find the optimum design of structures that have characteristic natural frequency range, a numerical optimization method to solving eigenvalue problems is a widely used approach. However in the most cases, it is difficult to decide the accurate thickness and shape of structures that have allowable natural frequency in design constraints. Parallel analysis algorithm involving the feasible direction optimization method and Rayleigh-Ritz eigenvalue solving method is developed. The method is implemented by using finite element method. It calculates the optimal thickness and the thickness ratio of individual elements of the 2-D plane element through a parallel algorithm method which satisfy the design constraint of natural frequency. As a result this method of optimization for natural frequency by using finite element method can determine the optimal size or its ratio of geometrically complicated shape and large scale structure.

Key Words : Design optimization(최적설계), Structure(구조), Feasible direction method (유용방향법), Natural frequency(고유진동수), Finite element analysis(유한요소해석)

1. 서론

우주선, 항공기, 잠수함 혹은 다양한 기계 구조물은 모든 설계과정에서 정역학적 혹은 동역학적 해석 과정을 거치게 된다. 이것은 구조물이 정역학적 하중을 지지할 수 있게 설계되어야 하며 또한 동역학적 측면에서는 구조물 설계에 적절한 진동특성을 가지고 있어야 한다. 이러한 진동 특성 중 가장 중요한 것 중의 하나는 구조물 특유의 고유진동수(natural frequency)

라 하겠다. 자동차의 설계에 있어서도 엔진의 고유진동수와 차체의 고유진동수가 일치하면 문제가 발생한다. 이렇듯 설계에 있어서 고유치(eigenvalue)의 해석은 필연적이며 이를 고려한 설계가 이루어지게 된다. 먼저 구조물을 설계 할 때 공진을 피하기 위하여 특정한 주파수 영역의 진동수를 피하여 설계해야 되는 경우가 많다. 이러한 경우 구조물의 원하는 주파수대의 고유진동수를 가지는 구조물을 설계하기 위해서는 구조물 각 부분의 두께 비(thickness ratio)나 치수를 결정하여야 한다. 이

* 안동대학교 기계교육과
주소: 경북 안동시 경동로 1375 안동대학교 기계교육과

✉ Corresponding Author E-mail: hkcho@andong.ac.kr

러한 문제를 효과적이고 정확하게 결정하기 위해서는 최적화 알고리즘과 구조해석 알고리즘의 효과적이고 유기적인 결합에 의해서만 가능하다. 복잡한 구조물인 경우에는 특히 이러한 설계가 어려우며 먼저 설계한 다음 원하는 주파수대의 고유치를 얻기 위하여 부분적으로 설계를 변경하거나 혹은 부속 구조물의 설계를 변경하여 전체 시스템을 구성하여왔다.

본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 최적화 개념을 도입하였다. 유한요소법(Finite Element Method)을 사용하여 Rayleigh-Ritz Method^(1~3)(Subspace Iteration Method)에 의해 구조물의 고유치를 구한 다음 이와 평행하게 반복 계산되어지는 경사도기법의 구조 최적화 알고리즘(Structural Optimization Algorithm)에 의해 설계 조건으로 주어진 특정한 주파수대의 고유치를 가진 구조물 설계가 가능하였다^(4~10). 선형 혹은 비선형 최적화 알고리즘은 다양한 공학적 문제 혹은 구조물의 최적화에 적용되어왔다^(11~13). 본 연구에서는 경사도기법의 최적화 알고리즘의 대표적 방법이며 그 효과성이 입증된 유용방향법(Feasible Direction Method) 최적화 알고리즘을 FEM 코드와 결합하여 통합 해석 모듈을 개발하였다^(14,15). 많은 설계변수를 사용한 평판두께의 최적화 예제를 통하여 개발된 고유진동수에 대한 구조최적화 코드의 정확성과 효과성을 입증하였다.

2. 고유치 해석 유한요소 평행방정식

고유치를 구하는 해법은 여러 가지가 있다. Vector Iteration Method, Rayleigh-Ritz(Subspace Iteration) Method, Lanczos Method, Determinant Search Method 등이 있다. 여기서는 Rayleigh-Ritz method로 고유치를 구하였다. 구조물의 동적평행방정식 으로부터 해당 구조물이 갖는 고유성질인 고유진동과 고유벡터라는 구조물의 진동패턴을 분석하기 위해서는 고유치 문제와 직면하게 된다. 동적평행방정식에서 감쇄가 없고 ($[C]=0$), 외력이 작용하지 않는 경우($\{R(t)\}=0$)에 있어서 자유진동 지배방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{U}\} = [K]\{U\} = 0 \tag{1}$$

이 식의 일반해를 $\{\ddot{u}\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$ 라고 하면 표준적인 고유치 형태의 식 (2)로 표현될 수 있다.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{u\} = 0 \tag{2}$$

여기서 $\omega^2 = \lambda$ 로 두면 λ 에 대한 n차 다항식의 고유치계산 평형식으로 표현될 수 있다.

$$([K] - \lambda_i[M])\{\phi_i\} = 0 \tag{3}$$

일반적으로 대형구조시스템을 유한요소법으로 해석하고자 할 경우에는 많은 절점과 그와 관련한 많은 자유도를 갖게 된다. 그러나 구조물의 거동에 대해 일반적으로 저차 모드 몇 개의 기여만이 크고 고차모드의 기여는 상대적으로 무시될 수 있을 정도로 작으므로 이러한 특성을 활용하여 구조물을 해석하는 것이 효율적이다. 이러한 목적으로 주요한 몇 개의 저차모드만을 구하여 전체 구조의 거동을 근사적으로 구할 수 있는 방법이 Rayleigh-Ritz Method이며 기본 수식은 다음과 같다.

고유벡터의 근사치 $\{X_i\}$ 를 Ritz 시험벡터 \bar{X} 의 선형조합으로 나타내면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \{X_i\} &= a_1\{\bar{X}_1\} + a_2\{\bar{X}_2\} + \dots + a_q\{\bar{X}_q\} \\ &= [\bar{X}]\{a\} \end{aligned} \tag{4}$$

이를 모드행렬로 나타내면 식 (5)가 된다.

$$[X] = [\bar{X}][A] \tag{5}$$

Rayleigh-Ritz Method는 계산 시간, 비용을 줄이면서 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있다.

3. 유용방향법에 의한 최적화 알고리즘

3.1 경사도 계산

화학공정설계, 항공동력학 최적화, 비선형 제어 시스템 설계, 기계부품 및 구조물 설계 등 많은 부분에서 최적화가 공학적으로 응용되고 있다. 일반적인 의미로 공학적 최적화는 비선형 제약조건이 주어진 문제를 해결한다. 미지의 설계변수 $x_i, i=1, N$ 와 제약 함수 벡터 X 로 구성되며 다음과 같다.

$$\text{Minimize } F(x)$$

Subject to :

$$g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, M \tag{6}$$

$$h_k(X) = 0 \quad k = 1, L \tag{7}$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \quad i = 1, N \tag{8}$$

주어진 유용영역 내에서 최소의 값을 찾기 위해서는 먼저 목적함수(Object Function)의 경사도를 계산해야 한다.

$$\nabla F(X) = \begin{pmatrix} \frac{F(X+\delta X_1) - F(X)}{\delta X_1} \\ \frac{F(X+\delta X_2) - F(X)}{\delta X_2} \\ \dots \\ \frac{F(X+\delta X_N) - F(X)}{\delta X_N} \end{pmatrix} \quad (9)$$

목적함수의 경사도는 식 (9)와 같다. 식 (9)는 서로 독립적인 설계 변수들에 대한 목적함수(Object Function)의 편미분 벡터를 나타낸다. 이러한 목적함수의 경사도를 따라서 최소점으로 이동하는 방향을 결정하게 된다.

여기서 S 를 탐색방향 벡터라고 하면 $S = -\nabla F(X)$ 가 된다. 처음의 반복계산에서는 S^1 의 방향으로 이동하고 다음반복계산에서는 새로운 S^2 를 찾게 된다. 이동한 점의 위치는 식 (10)과 같이 표현된다.

$$X^1 = X^0 + \alpha * S^1 \quad (10)$$

여기서 α 는 최적의 이동 파라미터가 된다. 목적함수의 최소값을 찾기 위해서는 유효영역과 유용영역을 찾아야 한다. 유효영역이라는 것은 목적함수가 감소하는 방향을 가지는 영역이며 유용영역은 제약 조건에 의해서 주어진 경계(Boundary)내에 있는 영역을 말한다. 유효영역의 수학적 정의는 식 (11)과 같다.

$$\nabla F(X)^T S \leq 0 \quad (11)$$

식 (11)은 유효영역이 목적함수의 경사도 벡터와 탐색방향 벡터 S 의 스칼라 내적이 0보다 작아야 한다는 것을 의미한다. 또한 최소점을 찾아가는 과정에서 제약조건에 의해 결정된 유용영역을 벗어나면 안 된다. 유용영역을 만족하는 필요조건은 식 (12)와 같이 유도되었다.

$$\nabla g_j(X)^T S \leq 0 \quad (12)$$

반복계산을 하면서 최소점으로 이동하게 하는데 이때 가장 중요한 것은 탐색방향 벡터를 찾는 것이다. 최적의 탐색방향 벡터를 찾기 위한 부가적인 하부 최적화 작업을 수행하기 위해 유효영역 조건과 유용영역의 조건을 결합한다.

3.2 유용 방향법(Feasible Directions Algorithm)

유용방향법(The Method of Feasible Direction)은 제약 최

적화 문제를 푸는 가장 먼저 개발된 기본법의 한 가지이다. 이 방법의 기본원리는 한 유용설계에서 보다 개선된 유용설계로 이동시키는 것이다. 따라서 유용설계 $X^{(k)}$ 가 주어지면 개선하는 유용방향 $S^{(k)}$ 를 결정하여 충분히 작은 이동거리 $\alpha > 0$ 에 관하여 다음의 두 성질을 만족하도록 한다.

- i) 새로운 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha * S^{(k)}$ 는 유용이고,
- ii) 새로운 목적함수는 지난번 것보다 작다.
즉 $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$.

일단 $S^{(k)}$ 가 결정되면 $S^{(k)}$ 방향으로 얼마나 진행하여야 하는지를 정하는 선 탐색을 수행한다. 이렇게 하여 새로운 유용설계 $X^{(k+1)}$ 을 얻게 되고 그곳에서 이 과정을 반복한다. 이 방법은 3.1절에서 설명한 일반적인 알고리즘에 기초하는데 설계변화 결정은 탐색방향과 이동거리 결정의 부분제로 나누어진다. 방향은 현 유용점에서 선형화시킨 부분제를 정의하여 정해지고 이동거리는 유용성을 유지하면서 목적함수(Object Function)를 감소하도록 정한다. 선형근사가 이용되므로 등호제약에 관하여 유용성을 유지하기가 어렵지만 변형된 방법에서는 등호제약을 취급할 수 있다. 현 설계 점에서 개선되는 유용방향을 얻을 수 있는 부분제를 정의하여 계산한다. 개선되는 유용방향은 작은 이동거리에서 엄격히 유용 영역 내에 남으면서 목적함수를 감소할 수 있게 결정되어야 한다. 따라서 유용영역 내부에 존재하면서 목적함수의 강하방향이 된다. 개선되는 유용방향 S 는 조건 $\nabla F^T S < 0$ 와 $g^{(i)T} S < 0$ 을 만족한다. 이것은 $\nabla F^T S < 0$ 와 $g^{(i)T} S < 0$ 최대화시키는 최소화를 통하여 구한다. 이것을 β 로 최대화를 나타내면 다음과 같이 방향 탐색 부분제가 정의된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \beta \\ & \text{Subject to :} \\ & \nabla F(X)^T S \leq \beta \quad (13) \\ & \nabla g_j(X)^T S \leq \beta \\ & -1 \leq S_j \leq 1 \quad j=1, n \end{aligned}$$

식 (13)의 마지막 부등식의 정규화 제약은 유계 해를 얻기 위하여 도입하였다. 다른 정규화 제약의 형식도 가능하다. (β, S) 를 앞 문제의 최적해라고 하자. 만약 $\beta < 0$ 이면 S 는 개선되는 유용방향이다. 만약 $\beta = 0$ 이면 현 설계점이 쿤-터커 필요조건을 만족한다.

변형된 유용방향법 알고리즘은 다음과 같다. 제약조건이 있는 최적화 문제를 풀려고 하면 먼저 목적함수 $F(X)$, 제약조건 $g_j(X) \leq 0, j=1, M$ 그리고 설계변수의 상한과 하한을 정의한다.

Minimize $F(x)$

Subject to :

$$g_j(X) \leq 0 \quad j=1, M \quad (14)$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \quad i=1, N \quad (15)$$

최적알고리즘은 어떤 문제를 풀고있는지 모르며 단지 주어진 제약조건하에서 목적함수를 최소화 할 뿐이다. 초기의 X^0 벡터가 주어지면 식 (21)에 따라서 설계를 계속 변경해 나간다. 이러한 최적화 프로세서는 다음과 같은 반복적 계산에 의한 절차이다.

$$X^q = X^{q-1} + \alpha * S^q \quad (16)$$

전반적인 최적화 프로세스는 다음과 같이 구성되었다.

1. Start $q=0, X=X^0$
2. $q=q+1$
3. $F(X^{q-1}), g_j(X^{q-1})$ 을 계산
4. 결정적인 제약벡터를 확인
5. $\nabla F(X^{q-1}), \nabla g_j(X^{q-1})$ 을 계산
6. 탐색 방향 S^q 를 결정
7. α 를 결정하기 위한 1차원 탐색
8. $X^q = X^{q-1} + \alpha * S^q$ 계산
9. 수렴성 확인(수렴(x) 2번 복귀)
10. 계산 완결

4. 고유진동수에 의한 구조물 최적화

구속조건으로 주어진 고유치에 대한 구조물의 최적화 수치해석은 크게 두 가지로 나누어진다. 첫째는 최적화 알고리즘의 수치해석이며 둘째는 고유치 해석인 Rayleigh-Ritz 알고리즘 해석이다. 최적화 알고리즘에 구속조건으로 주어진 구조물의 고유치는 단순한 1차원 빔이나 2차원 정방형의 판재를 제외하고는 보통 일반적인 수식의 형태로 나타나지 않는다.

따라서 최적화 알고리즘인 유용방향법은 목적함수를 최적화하기 위한 경사도를 계산하기 위하여 두께, 치수, 형상 그리고 밀도 등에 의존적인 고유치 구속조건 함수 $f(t_1, t_2, t_3, \dots, l_1, l_2, \dots, \rho_1, \rho_2, \dots)$ 를 Rayleigh-Ritz 알고리즘으로 넘겨주게 된다. Rayleigh-Ritz Method는 고유치를 반복계산하면서 식 (17)의 고유치 수렴조건을 만족하면 그 값을 반환하게 된다.

$$\frac{\lambda_{k+1}^i - \lambda_k^i}{\lambda_{k+1}^i} \leq \delta \quad (17)$$

최적화 알고리즘에서 반환되어온 고유치를 다시 제약조건 식으로 검토한다. 반환된 고유치를 가지고 최적화 알고리즘은 새로운 경사도 벡터를 계산하고 유용방향과 크기를 결정한다. 이러한 반복과정을 통하여 결국 목적함수의 최소점에 이르게된다. 알고리즘의 구속조건 제약식은 미지의 함수이며 대부분의 구조물인 경우 예측하기가 곤란하므로 고유치 함수 $f(t_i, l_i, \rho_i, i=1, N)$ 를 하부의 함수로 넘겨주게 되는 것이다. Fig. 1는 고유치에 구속조건에 의한 최적화 알고리즘의 계산순서를 나타낸다.

목적함수는 원하는 설계요구 맞게 임의의 구성될 수 있다. 구조물의 고유진동수는 구조물 각 부분의 두께 비 혹은 형상의 해 결정된다. 형상이 일정한 구조물이라면 고유치는 구조물 각 부분의 두께 비에 의해서 결정이 된다. 따라서 최적화 알고리즘은 구속조건으로 주어진 각 구조물의 두께 범위 내에서 가장 작은 두께 비를 계산하게 되는 것이다. 즉 예를 들면 2 : 4 : 6의 두께 비를 계산하는 것이 아니라 1 : 2 : 3의 두께 비를 계산한다.

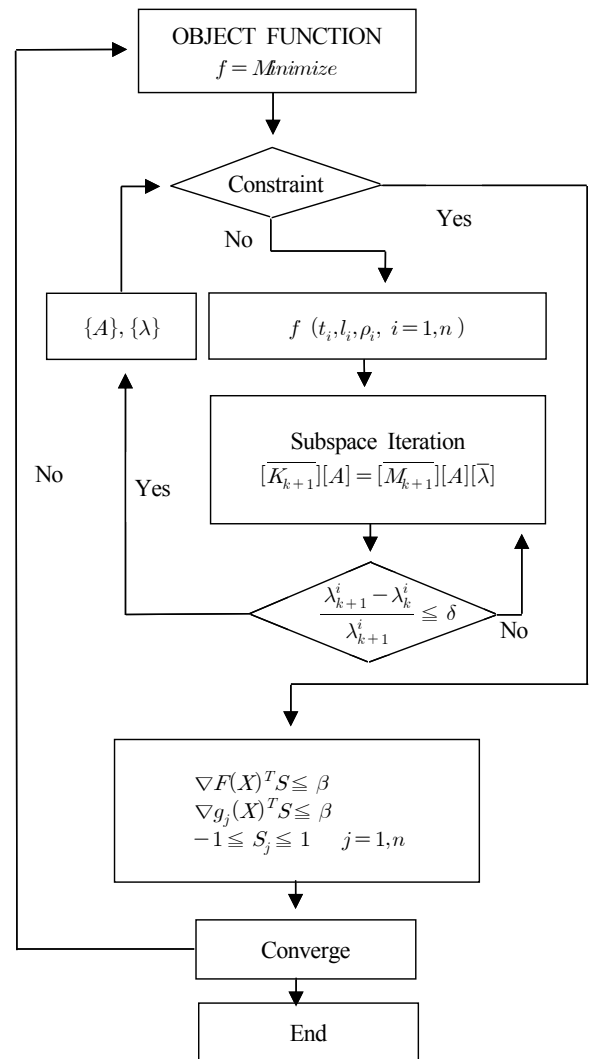


Fig. 1 Optimization algorithm for natural frequency

이것이 무게를 최소화하는 목적에 합당하기 때문이다. 반대로 목적함수를 최대로 정한다면 가장 높은 두께 비를 계산할 수 있다.

최적화 반복 계산중 설계변수가 제약조건의 범위를 벗어나는 경우가 발생하면 유한요소해석에서 계산이 불가능한 경우가 발생한다. 그러나 본 연구에서 적용한 유용방향법 최적화 알고리즘은 주어진 구속조건 내에서만 해를 찾기 때문에 이러한 경우는 발생하지 않는다.

5. 고유치에 의한 구조 최적화 해석

5.1 Rayleigh-Ritz Method

본 연구에서 개발한 FEA 해석 프로그램에(Rayleigh-Ritz Method 고유치 계산) 대한 신뢰성을 가지기 위하여 상용패키지 NISA II와 해석 값을 비교하였다. Fig. 2는 이 비교 모델이며, 평판의 고유치 계산 결과 값을 비교하였다. 경계조건은 좌측 부분을 고정된 상태에서 평판의 자유진동 고유치를 구하는 것이다.

Fig. 2의 모델은 각 요소의 두께가 1mm로 일정할 때 Rayleigh-Ritz Method와 상용 패키지 NISA II의 결과 값을 서로 비교하였다. 그 결과 값을 Table 1에 제시하였다. 평판의 고유치 계산 값의 비교로 개발된 프로그램의 신뢰성을 입증한다.

Table 1의 결과에서 알 수 있듯이 두 결과 계산 값이 매우 유사함을 알 수 있다. 고유치를 계산하는 방식에 따라서 계산한 값이 어느 정도의 오차를 나타낼 수 있으며 상용패키지에 따라

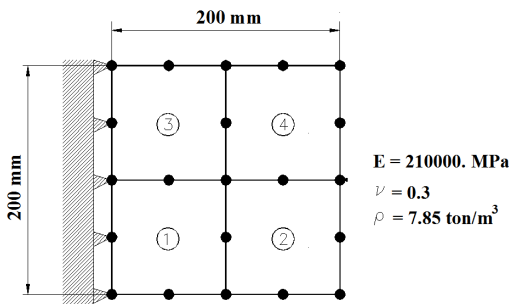


Fig. 2 Eigenvalue analysis model

Table 1 The results of Rayleigh-Ritz & NISA II

Mode	Rayleigh-Ritz Method (rad/sec)	NISA II (rad/sec)
1	1.7347193E+04	1.729794E+04
2	4.0979633E+04	4.096531E+04
3	4.6858207E+04	4.680637E+04
4	7.3822701E+04	7.377030E+04
5	8.118867E+04	8.110871E+04

서도 어느 정도의 오차는 항상 발생한다.

위 Table 1의 결과에서 알 수 있는 것과 같이 개발된 Rayleigh-Ritz 방식의 적용 프로그램이 신뢰성 있게 검증되었다.

5.2 고유치에 의한 최적화

본 연구에서 개발된 고유치 구속조건에 대한 구조최적화 FEA 프로그램의 효과성을 예제를 통하여 검증한다. Fig. 3의 모델을 고유치 구속조건이 주어지는 상태에서 각 요소의 최적 두께를 구한다. 각 요소는 두께 구속조건과 물성치가 각각 다르며 형상 또한 서로 다르다. Fig. 3의 모델에서 고유치 구속조건이 $13000 \leq \omega_1 \leq 14000$ (rad/sec)로 주어질 때 물성치와 형상이 서로 다른 요소의 각각의 두께를 구하였다. Fig. 3의 각 요소의 물성치는 Table 2와 같다.

반복적으로 계산하는 유용방향법 최적화 알고리즘에 의하여 각 요소의 최적 두께 비를 찾는다. 목적함수는 때에 따라서 설계 목적에 의해 무게가 아닌 다른 임의의 함수가 될 수 있다. 각 요소 내에서는 두께가 일정하며 평판응력(Plane Stress) 상

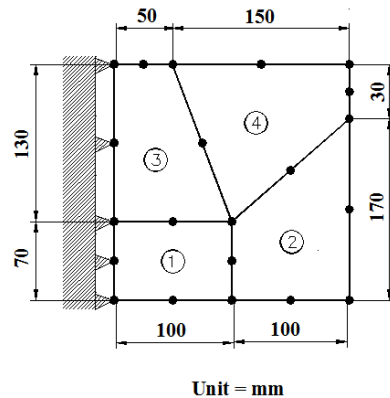


Fig. 3 Optimization model for eigenvalue

Table 2 Element property

Element	Property	
	Property	Value
1	E(MPa)	210000.
	ν	0.3
	ρ(Ton/m ³)	7.85
2	E(MPa)	190000
	ν	0.3
	ρ(Ton/m ³)	6.71
3	E(MPa)	150000.
	ν	0.3
	ρ(Ton/m ³)	5.55
4	E(MPa)	120000.
	ν	0.3
	ρ(Ton/m ³)	3.23

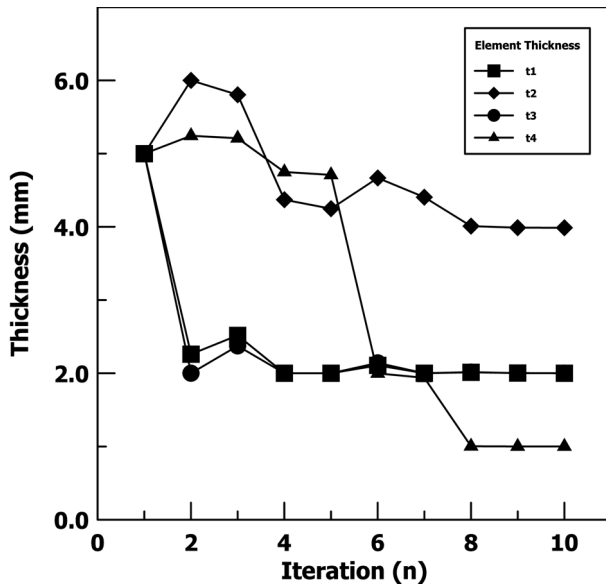


Fig. 4 Thickness variation of individual element in optimization calculation

Table 3 Optimum value of individual element thickness & object function

Thickness(mm)	$f(N)$
$t_1 = 2.0000$	6.012e-6
$t_2 = 3.9874$	
$t_3 = 2.0013$	
$t_4 = 1.0010$	

태 하에서의 강성행렬을 구하여 계산을 하였다.

Fig. 4의 모델을 최적화하기 위한 정식화는 다음과 같으며 $t_1 \sim t_4$ 는 각 요소의 두께를 나타낸다.

Minimize

$$f = \rho_1 A_1 t_1 + \rho_2 A_2 t_2 + \rho_3 A_3 t_3 + \rho_4 A_4 t_4$$

Subject to :

$$2 \leq t_1 \leq 7$$

$$1 \leq t_2 \leq 6$$

$$2 \leq t_3 \leq 7$$

$$1 \leq t_4 \leq 8$$

$$13000 \leq \omega_1 \leq 14000$$

위의 최적화 정식화에 대한 결과치를 Table 3에 정리하였다. 각 요소의 두께 구속조건, 밀도, 형상이 서로 다른 요소에 대해서도 최적화 계산에 어려움이 없으며 이때 목적함수의 값은 6.012e-6 N 이다.

Table 3의 두께로 최적화되었을 때의 구조물의 고유치는

Table 4 Eigenvalue of plate after optimization

Mode	Rayleigh-Ritz Method	NISA II
	(rad/sec)	(rad/sec)
1	1.4001176E+04	1.385651E+04
2	3.3463291E+04	3.324439E+04
3	4.3659836E+04	4.300243E+04
4	8.1548955E+04	7.676728E+0
5	9.2990053E+04	8.685868E+04
6	1.0543652E+05	1.036680E+05

Table 4와 같으며 이때 같은 두께와 물성치를 가지고 NISA II에서 계산된 고유치 와 비교하였다.

Fig. 4는 고유치에 의한 최적화 반복 계산 중 각 요소의 두께 변화를 나타낸다. 초기 두께를 5mm로 하여 계산을 시작하였다. 9번 반복 계산하여 수렴했으며 10번째 계산 루틴에서 계산을 끝마쳤다. 유용방향법 최적화 알고리즘은 일반적인 경사도 최적화의 방법이기 때문에, 초기의 반복계산에서는 상대적으로 급격한 경사도를 따라서 이동한다. 이러한 특징은 Fig. 4에 잘 나타나 있다. 수렴을 위한 전 단계로서 목적함수의 변화가 각 계산단계에서 매우 작음을 알 수 있다. 이러한 목적함수의 개선 정도를 기준으로 수렴의 여부를 판단한다. 수렴은 매번 반복계산 때 마다 체크하여 결정 한다

6. 결론

본 연구에서는 유한요소법을 최적화 알고리즘에 적용하여 구조물의 고유진동수 구속조건에 대한 해석을 하였다. 최적화 알고리즘과 고유치 해석 유한요소알고리즘을 동시에 평행하게 실행하여 복잡한 모델의 고유진동수에 의한 최적화가 가능하였으며 결론은 다음과 같다.

- (1) 첫 번째 고유치에 대한 구속조건이 주어지는 평판의 최적화에서는 모델링 된 각 유한요소의 최적 두께를 계산하였다. 고유치는 구조물의 절대적인 두께에 의해 정해지는 것이 아니라 각 부분의 두께 비 혹은 질량 비 등에 의해서 결정되는 것이기 때문에 이 최적화의 결과는 구조물의 최적의 두께 비 가 되는 것이다.
- (2) 고유치 구속조건에 대한 구조물의 최적설계에 있어서 구속조건으로 주어지는 구조물의 고유치는 1차원 빔 혹은 단순한 모델인 경우를 제외하고는 대부분 일반화된 수식으로 나타나지 않는다.
- (3) 일반화된 수식으로 나타나지 않는 미지의 구속조건 함수를 유한요소법을 이용한 수치계산에 의하여 해결함으로써 복잡한 모델에 대한 동적 최적화가 가능하였다. 또한 유한요

소법을 적용한 최적화 수치해석 방법을 조각시험(Patch Test)을 통하여 검증하였다.

References

- (1) Bathe, K. J., 1981, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New York, pp. 66~431.
- (2) Bathe, K. J., and Wilson, E. L., 1973, "Eigen Solution of Large Structural Systems with Small Bandwidth," *A.S.C.E., J. Eng. Mech. Devi.*, Vol. 99, No. 3, pp. 467~479.
- (3) Bathe, K. J., and Wilson, E. L., 1973, "Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics," *A.S.C.E., Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 6, No. 2, pp. 213~226.
- (4) Hsiung, C. K., 1988, "Optimum Structural Design with Parallel Finite Element Analysis," *Computer and Structure*, Vol. 40, No. 6, pp. 1469~1474.
- (5) Moses, F., 1964, "Optimum Structural Design Using Linear Programming," *ASCE J. Struct. Divi.*, Vol. 90, No. ST6, pp. 89~104.
- (6) Betts, J. T., 1978, "A Gradient Projection-Multiplier Method for Nonlinear Programming," *J. Opti. Theory and Appl.*, Vol. 24, No. 4, pp. 523~548.
- (7) Sobieski, J. S., 1990, "Sensitivity of Complex Internally Coupled System," *AIAA J.*, Vol. 28, No. 1, pp. 153~160.
- (8) Jang, T. S., 1992, "Application of Nonlinear Goal Programming to Structural Optimization," *The Kor. Soc. Auto. Eng.*, Vol. 14, No. 1, pp. 64~73.
- (9) Arora, J. S., 1994, *Optimum Design*, Mc-Grow Hill, New York, pp. 584~625.
- (10) Mcaloon, K., 1996, *Optimization and Computational Logic*, Wiley, New York, pp. 97~331.
- (11) Kim, M. H., Han, J. Y., Choi, E. H., bae, W. B., and Kang, S. S., 2011, "The Arrangement of Heaters for Rubber Injection Molds using FEM and Optimal Design Method," *Journal of the KSMTE*, Vol. 20, No. 1, pp. 34~39.
- (12) Yoo, K. S., Park, J. W., Sinichi, H., and Han, S. Y., 2010, "Optimum Design of Movable Hydraulic Crane Booms," *Journal of the KSMTE*, Vol. 19, No. 6, pp. 776~781.
- (13) Park, S. J., and Lee, Y. L., 2011, "Optimal Flow Design of High-Efficiency, Cold-Flow, and Large-size Heat Pump Dryer," *Journal of the KSMTE*, Vol. 20, No. 5, pp. 547~552.
- (14) Huebner, K. H., 1982, *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, New York, pp. 62~304.
- (15) Kuester, J. L., '973, *Optimization Techniques with Fortran*, Mc-Grow Hill, pp. 135~286.