

## 스핑크스퍼즐로 모든 삼각형 해법 찾기 과제에서 나타나는 학생들의 수학적 사고 특성 분석<sup>1)</sup>

방신영<sup>2)</sup> · 송상헌<sup>3)</sup>

본 연구는 van Hiele이 소개한 7조각 모자이크퍼즐(이하 �핑크스퍼즐)을 도형 교육이나 수학적 사고 교육에 효과적으로 적용하는 방안을 모색하고자 한다. 이를 위해 Dienes의 수학학습 6단계 이론을 적용한 수업에서 학생들의 수학적 사고 특성을 분석하는 것을 목적으로 한다. 총 3차시에 걸쳐 학급 전체를 대상으로 한 수업에서 연구자는 수업의 진행자 및 관찰자로 활동하였다. 보다 세밀한 분석을 위해 관찰 대상은 학업성취도가 상위권 및 중위권인 초등학교 6학년 4명의 학생으로 제한하였다. 학생들에게 제시한 최종 과제는 <스핑크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 모든 삼각형의 개수와 그 도형들의 보다 깔끔한 해법 찾기>이다. 이 과제를 해결하는 동안 학생들에게서 나타나는 수학적 사고 특성을 片桐重男의 수학적 사고-태도 중 조작의 사고, 연역적 사고, 보다 나은 방법을 알아보려는 태도를 중심으로 분석하고 이로부터 시사점을 도출하였다.

주제어: Dienes(디엔에스), 수학 놀이학습 6단계, 7조각 모자이크퍼즐(스핑크스퍼즐), 수학적 사고 태도, 조작의 사고, 연역적 사고, 보다 나은 방법을 알아보려는 태도

### I. 서 론

탱그램(칠교판)은 초등학교 도형지도에 다양하면서도 유용하게 사용할 수 있는 교구이다. 하지만 현재 초등학교 교과서(교육과학기술부, 2010a; 교육과학기술부, 2010b)에서는 모양을 맞추는 퍼즐 놀이 수준에서만 다루고 있다. 이는 학생들이 탱그램을 활용한 수학적 활동에서 얻을 수 있는 더 많은 효과를 얻지 못하게 된다. 탱그램으로 여러 가지 모양을 만드는 놀이 수준의 활동은 유치원이나 초등학교 저학년 또는 과학이나 생활과학 교과에서 다룰 법한 활동이다. 특히 다각형이나 합동을 다루는 고학년에서 도형의 개념과 성질을 배우고 난 뒤 놀이학습에서 다시 모양 만들기로 회귀함에 따라 모양과 도형, 그리고 다각형과 합동의 의미를 오해하게 하는 불필요한 활동이 되고 있다. 이는 7차 교육과정 이후 등장한 도형의 움직이기(밀기, 돌리기, 뒤집기) 조작 활동을 넘어 전통적인 교육과정의 도형 영역의 수직과 평행, 다각형의 성질(포함관계), 도형의 합동과 대칭, 측정영역에서 다루고 있는 각의 크기와 도형의 길이 및 넓이 등의 탐구와 이를 통한 수학적 성질을 찾도

1) 이 글은 방신영(2013)의 석사학위논문을 발췌하여 요약/수정한 것임.

2) [제1저자] 서울영신초등학교

3) [교신저자] 경인교육대학교

록 하는 내용 학습의 본질에서도 벗어난다.

여러 가지 유사 탱그램 중 7조각 모자이크퍼즐(이하 스텝크스퍼즐)은 van Hiele가 기하 학습에 매우 유용하다고 소개함으로써 우리나라 7차 수학과 교육과정에 따른 수학교과서 5-나에 수록된 적이 있다. 스텝크스퍼즐은 조각들의 각도가  $30^\circ$ 의 배수( $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ )로 이루어진 다양한 각도를 얻을 수 있어서  $45^\circ$ 의 배수( $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ )로만 이루어진 탱그램 보다 더 다양한 형태의 다각형을 만들 수 있다. 또한, 변의 길이와 조각들의 넓이도 서로 배수 관계이므로 조각을 서로 끼워 맞출 때 수학적인 도형을 많이 만들어 낼 수 있다.

선행 연구들을 살펴보면, 안주형(2002)은 초등학교의 도형 지도에서 탱그램과 스텝크스퍼즐을 함께 사용하여 지도하는 것이 더 유용하며 교구를 사용하여 만든 도형을 직접 그리기에 편리하도록 활동판을 함께 제공해 줄 것을 제안하였고, 서은영(2007)과 신현진(2004)은 각각 초등학교 수학 교수·학습을 위한 평면조각퍼즐 탐구 활동 교재를 개발하거나 탱그램을 이용한 평면도형의 개념 및 성질 지도에 관한 연구를 시행하였다. 또한 박교식(2007)은 스텝크스퍼즐의 일곱 조각을 서로 붙여서 만들 수 있는 볼록 다각형을 모두 구하는 활동에 초점을 맞추어 수식을 이용하는 대수적인 방법과 기준 직각삼각형을 이용하는 기하학적인 방법으로 그것이 27가지라는 것을 설명하면서 일반적으로 초등학교 수준의 영재들에게 이런 증명 과제를 부과하는 것은 거의 불가능하다고 말하면서 일반 학생들에게 적용할 방안에 대해서는 논하지 않았다. 송상현(2004, 2008)은 스텝크스퍼즐을 수학영재들을 위한 교수·학습 자료 개발의 소재로 다양하게 제시하고 있거나 수학과 교육과정에 비추어 재조명하고 있고 이국형(2011)은 교사의 발문과 권고에 따라 영재학급 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 수학적 사고와 태도의 변화를 관찰하고 있다.

Z.P. Dienes는 학생들이 수학의 구조를 발견하도록 도움을 주는 여러 가지 수학 학습 이론을 개발하였고 또한 수학과 학생 사이의 간격을 좁히기 위해 수학 교구와 게임을 개발하기도 하였다. 그 중 “수학학습을 위한 6단계 이론(six stages theory of learning mathematics)”은 Dienes의 주요 연구 업적 중 하나로서, 수학 및 수학교육에 대한 그의 아이디어가 통합되어 있다(김수미, 2008). 이 이론은 놀이나 게임이 주요 수단이 되는 지도-학습 이론으로써 자유놀이 단계로부터 마지막 형식화 단계로까지의 점진적인 이행을 통하여 수학적 개념의 추상화, 일반화의 사고를 이끄는 데 유용하다.

이에 본 연구는 스텝크스퍼즐을 도형 교육이나 수학적 사고 교육에 효과적으로 적용하는 방안으로서 Dienes의 수학학습 6단계 이론을 적용한 수업을 설계하여 초등학교 수업에 적용해 보고자 한다. 스텝크스퍼즐 조각을 붙여 만들 수 있는 <넓이가 다른 모든 삼각형 찾기>로 제한하여 제시함으로써 6단계 형식화의 단계까지, 이를 해결하는 동안 나타나는 학생들의 수학적 사고 특성, 특히 조작의 사고, 연역적 사고, 보다 나은 방법을 찾아보려는 태도를 분석하고 시사점을 도출해 보고자 한다.

본 연구에서 설정한 연구 내용은 다음과 같다.

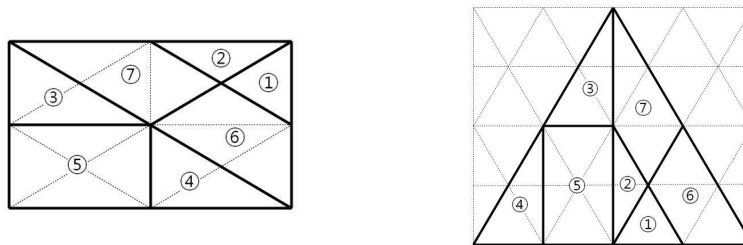
첫째, 초등학교 6학년 학생들이 스텝크스퍼즐을 이용하여 넓이가 다른 모든 삼각형 찾기 과제를 해결하도록 Dienes의 수학학습 6단계 이론을 적용한 수업을 설계해 본다.

둘째, 스텝크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 모든 삼각형 해법 찾기 과제를 해결하는 동안 학생들에게 나타나는 片桐重男의 수학적 사고와 태도 중 일부 특성들이 어떻게 드러나고 있는지를 분석한다.

## II. 이론적 배경

### 1. �핑크스퍼즐

스핑크스퍼즐은 일곱 개의 조각으로 이루어진 직사각형 칠교판으로, 독일의 리히터사에서 고안하여 상업적으로 시판한 것으로 알려져 있다(박교식, 2002; 박교식, 2004). �핑크스퍼즐은 정삼각형 모눈을 이용하여 쉽게 만들 수 있다. 우리나라 교과서에서는 탱그램을 여러 차례 소개하였지만, �핑크스퍼즐은 <5-나> 교과서(교육인적자원부, 2002, pp.133-134)에서 단 한 차례 소개하였다. 탱그램과 마찬가지로, �핑크스퍼즐도 일곱 조각을 이용하여 여러 가지 다양한 실루엣을 만들 수 있다. <5-나> 교과서에서는 학생들이 �핑크스퍼즐의 몇 조각을 서로 붙여 삼각형 등의 실루엣 등을 만들어 보게 하고 있다. 이러한 활동은 van Hiele(1999)가 기하학적 사고력의 증진을 위해 제안하고 있는 활동과정의 유사하다(박교식, 2007).



[그림 1] �핑크스퍼즐 조각

[그림 1]에서 보듯이 정삼각형 모눈(도형 ①)의 한 변을  $1cm$ 이라 하면 그 넓이는  $\frac{\sqrt{3}}{4}cm^2$ 이지만 �핑크스퍼즐의 전체 세로 대 가로의 길이 비는  $1 : \sqrt{3}$ 이다. 정삼각형 모눈 한 칸의 크기를 임의 단위의 넓이 1이라 하면 각 조각의 넓이는 1, 2, 3, 4이고 전체 직사각형의 넓이는 16이다. 작은 조각들을 서로 붙이면 큰 조각들을 만들 수도 있다. �핑크스퍼즐은 각 조각의 각도가  $30^\circ$ 의 배수들이므로 정삼각형뿐만 아니라 둔각삼각형까지 만들 수 있다. 선대칭인 도형은 뒤집어 놓아도 다시 돌려놓으면 원래의 모양과 똑같아지지만 선대칭이 아닌 3개의 조각(③, ④, ⑦번)은 뒤집어 놓으면 다른 모양이 된다. 따라서 선분의 개수를 줄이거나 뒤집어진 도형이 적게 나타나도록 보다 간단한 방법으로 그려보는 활동을 할 수도 있다. 이들은 ‘보다 우아한 풀이에 대한 모색’이라는 수학적 사고를 자극하는 소재로 활용할 수도 있다(송상현, 2008).

### 2. 수학적 사고 특성

片桐重男(1988a, 1988b)에 의하면, 수학적인 사고란 “수학의 지도를 통해 육성해야 할 또는 육성하는 것이 좋다고 생각되는 사고 방법”이며, 수학적 사고의 육성은 수학 수업의 목표로서 빼놓을 수 없는 중요한 것임을 밝히고, 수학적 사고의 구체적인 내용을 명확히 하고 수학적 사고·태도를 육성할 지도 원리를 제시하였다(정동권, 김수미, 김지원, 2010).

#### 가. 조작의 사고 (수학의 내용과 관련된 사고)

사상 또는 조작의 의미를 명확히 하거나 그것을 확장하거나, 그것을 바탕으로 사고하는 것을 조작의 사고라고 한다. 이 조작의 사고에는, 수의 범위를 확장함으로써 점의 위치나 선분의 길이 등을 수를 써서 표현 가능하도록 하거나 연산이 가능하도록 하려는 사고, 도형의 위치를 옮겨도 그 모양이나 크기가 불변이라는 사실을 이용하려는, 즉 합동변환과 같은 기본적인 이동을 이용하려는 사고, 측정에 있어서 표준단위로 측정하려는 사고 등이 포함된다.

#### 나. 연역적 사고 (수학의 방법에 관련된 사고)

연역적 사고는 전제로 주어진 명제로부터 추론 규칙을 사용해서 필연적 결론을 엄밀하게 도출하는 사고이다. 일반적 주장으로부터 특수한 주장으로 나아가는 사고도 연역적 사고이다. 이것은 자신이 판단한 어떤 사실이 옳다는 것을 주장하기 위해, 이미 알고 있는 사실을 사용하여 그 정당성을 설명하려는 사고이다.

#### 다. 보다 나은 방법을 알아보려는 태도 (수학적 태도)

더 나은 것을 알아보려는 태도는 사고나 노력을 절약하려고 하는 것, 더 아름다운 것을 추구하려고 하는 것, 더 확실한 것, 색다른 새로운 것을 구하려고 하는 것, 더 깔끔한 것이 되도록 손질하려는 태도를 의미한다. 이것은 주로 문제해결이 일단락되고 난 다음에, 그 문제해결의 방법을 검토하는 과정에서 나타나는 태도이다. 친구들의 다양한 해결 방법을 듣는 가운데 더 나은 방법이나 간결한 방법을 파악하고, 자신의 해결 방법과 비교·검토해보면서 더 나은 새로운 것, 더 간단하고 알아보기 쉬운 것을 찾아내려고 노력하거나, 그 문제나 문제해결의 방법을 발전시키는 단계에서 이러한 수학적 태도가 형성된다.

### 3. Dienes의 수학학습 6단계 이론

Z. P. Dienes는 수학적 개념이 피아제의 인지 발달의 단계와 일면 유사한 발전적인 단계를 거쳐 학습된다고 주장하면서 수학 학습과 지도를 위한 여섯 단계를 다음과 같이 제안하였다(김수미, 2008).

#### 가. 자유 놀이 단계

Dienes 수학학습의 첫째 단계인 자유놀이 단계(free play stage)에서는 아동들이 구조화되어 있지 않은 조작이나 실험의 활동, 즉 자유스러운 놀이를 하게 된다. 이 단계에서는 다양한 조작 활동을 가능케 하는 구체물을 다량 공급하여 아동으로 하여금 자유로운 놀이를 하도록 하는 가운데 아동에게는 특정 개념을 구체적인 형태로 함유하고 있는 구체물을 다루면서 새로운 개념들에 대한 경험을 하도록 해야 한다.

#### 나. 규칙 놀이(구조화된 게임) 단계

규칙 놀이(구조화된 게임) 단계(stage of the structured games; learning to play by the rules)에서는 학습할 내용을 포함하는 어떤 구조화된 게임을 실시하면서 그 게임의 규칙을

바꾸거나 아니면 자신들의 게임을 스스로 만들 수 있게 된다. 게임은 아동들로 하여금 주어진 개념의 범주 안에서 변수와 관계하여 실험을 할 수 있게 하여 주어진 개념이 갖고 있는 수학적 구조의 분석을 가능케 한다. 따라서 주어진 개념을 여러 가지 방법으로 표현한 다양한 게임들은 학생들로 하여금 그 개념의 논리 수학적 요소를 발견하는데 도움을 준다.

#### 다. 비교(공통성 탐색) 단계

비교(공통성 탐색) 단계(stage of search for commonalities; comparison)는 외형적으로 다양하게 표현된 게임을 경험하면서 그 여러 표현 속에서 공통적으로 들어 있는 특정 개념의 수학적 구조를 파악하기 시작하는 단계이다. 이와 같은 학습 능력이 갖추어 졌을 때 아동들은 주어진 특정 개념의 예와 반례를 구분할 수 있게 된다.

#### 라. 표현 단계

표현 단계(stage of representation)에서는 아동들이 특정 개념과 관련된 여러 가지 예들로부터 공통된 요소를 추출한 후 이 공통된 요소를 함유하고 있는, 그러면서도 동시에 그 개념을 한 가지 방법으로 표현하게 되는 단계이다. 이 때 사용하는 표현 방법은 간단한 그림의 형태나 언어적인 방법 또는 보다 포괄적인 예 등과 같이 다양할 수 있다.

#### 마. 기호화 단계

기호화(또는 상징화) 단계(stage of symbolization)에서는 아동이 표현 단계에서 주어진 개념을 나름대로 표현해 본 것을 묘사하는데 있어서 언어적이거나 수학적으로 적절한 상징 체계를 형성하게 되는 단계이다. 여기서 아동 나름대로 묘사 방법을 고안해 보는 경험을 갖도록 하는 것도 필요하지만, 결국은 교과서에서 사용하는 방법과 같이 통일된 방법을 사용토록 지도가 되어야 한다. 그리고 이와 같이 상징적인 기호 체계의 사용은 수학을 하는데 있어서 여러 가지 면에서 그 가치가 크다는 것을 아동에게 인식시켜야 한다.

#### 바. 형식화 단계

Dienes의 여섯 단계 중 마지막 단계에 해당하는 형식화 단계(stage of formalization)에서는 아동이 주어진 개념이 함유하고 있는 수학적 구조를 파악한 후 그 개념이 갖고 있는 여러 가지 성질을 체계화하게 된다. 즉, 주어진 개념으로부터 나온 여러 가지 성질들 가운데 기본적으로 선정된 몇 가지 성질로부터 다른 성질에 도달하는 과정에 필요한 규칙을 찾아내게 되는데 이 과정이 형식화 과정이다. 예를 들어 몇 개의 기본적 공리로부터 하나의 정리가 만들어지는 과정이 수학적인 형식화의 예라고 할 수 있다.

### Ⅲ. 연구방법 및 절차

#### 1. 연구 대상

본 연구는 서울시 영등포구 소재 모 초등학교 6학년 일반 학급 전체를 대상으로 수업을 진행하였지만 그 중 연구를 위한 분석의 대상자는 학업성취도 수준이 ‘상’ 또는 ‘중’ 인 학생들 4명이다. 학업 성취도 수준이 ‘하’ 인 학생들로부터는 유의미한 산출을 기대하기 어렵고 영재교육 대상자인 학생들은 영재교육기관이나 주위에서 스펅크스퍼즐을 접한 경우가 많아 연구 대상에서 제외하게 되었다. 연구 대상자를 6학년으로 선정한 이유는 학생들에게 제시될 과제를 해결하는 데 필요한 사전 지식이 교육과정에 의해 형성되어 있기 때문이다. 도형의 넓이와 변의 길이 사이의 관계, 각도, 도형의 대칭, 도형의 합동과 닮음, 평면도형의 개념 및 성질, 평면도형의 넓이, 등적변형의 개념 등이 5학년 2학기까지의 수학과 교육과정에 의해 형성되어 있지만 본 연구는 개념이 아닌 수학적 사고를 위주로 분석하기 위해서이다.

<표 1> 연구대상자의 특성

ID	성별	수학학업 성취도	수학 선호도	특성
SA	남	상 수준	높음	수학에 대한 자신감이 높고 호기심이 많으며 자신의 아이디어를 적극적으로 표현함.
SB	여		보통	매사에 적극적이며 교사의 지시에 잘 따르고 활발함.
SC	남	중 수준	높음	활동 과제의 이해와 해결이 빠른 편이고 유연한 사고를 가짐.
SD	남		보통	차분한 성격으로 과제 집중도가 높으며 끈기와 인내심이 있음.

#### 2. Dienes 수학학습 6단계 이론을 적용한 수업

<표 2> 차시별 수업 계획

차시	소요 시간(분)	활동 내용	Dienes의 수학학습 6단계
1	40	스퍽스퍼즐 조각의 성질 탐구	①자유놀이 ②게임 ③공통성 탐구
2	40	스퍽스퍼즐 조각으로 서로 다른 크기의 삼각형 만들기	④표현 ⑤기호화
3	40	스퍽스퍼즐로 만들 수 있는 모든 종류의 서로 다른 삼각형 찾기	⑥형식화

(단, 학생들의 활동량과 교사의 관찰 활동에 따라서는 차시별 수업 소요시간이 달라질 수 있음)

#### 가. 1차시 (①자유놀이 ②게임 ③공통성 탐구)

스핑크스퍼즐로 만들 수 있는 모든 종류의 서로 다른 삼각형 찾기 과제를 위하여 먼저, 스텝스 퍼즐 조각의 성질에 대하여 충분히 탐구하는 시간을 갖도록 한다. 스텝스퍼즐을 실제로 그려 보고 각 퍼즐 조각의 형태, 각도, 변의 길이 및 넓이, 상호 간의 관계를 파악하는 시간을 통해 구성 원리를 이해하도록 할 것이다. 먼저 1단계 「자유놀이」에 해당하는 활동은 학생들이 스텝스퍼즐 조각으로 자신이 만들고 싶은 모양을 만들어 친구들과 비교해 보는 것이다. 2단계 「게임」에 해당하는 활동은 스텝스퍼즐 나무 교구의 케이스에 퍼즐 조각을 빨리 집어넣는 게임이다. 3단계 「공통성 탐구」에 해당하는 활동은 스텝스 퍼즐 조각의 특징을 좀 더 자세히 탐구해 보는 활동이다.

#### 나. 2차시 (④표현 ⑤기호화)

2차시에서는 스텝스퍼즐 조각의 내부 배열을 선분으로 표현해보는 활동, 주어진 조각의 개수로 삼각형 만들어 보기 활동을 통하여 최종 해결 과제인 스텝스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 모든 삼각형 찾기에 한 발 더 다가가도록 한다. Dienes의 수학학습 4단계 「표현」에 해당하는 활동으로써 내부 조각의 배열 그리기, 내부 선분의 개수 찾기 활동을 실시한다. 5단계 「기호화」에 해당하는 활동은 스텝스퍼즐 조각의 일부 또는 전부로 만들 수 있는 삼각형 찾기이다. 각자 나름의 방법으로 주어진 개수의 스텝스퍼즐 조각을 사용하여 삼각형을 하나씩 만들고 그 내부 조각들의 구분선을 활동지에 기록하도록 한다.

#### 다. 3차시 (⑥형식화)

3차시에는 최종 해결 과제인 스텝스퍼즐로 만들 수 있는 모든 종류의 서로 다른 삼각형 찾기 과제를 제시하고 학생 개인마다의 문제 해결 과정과 해답 수준을 면밀히 분석해 볼 것이다. Dienes의 수학학습 6단계 「형식화」에 해당하는 활동으로써 스텝스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 삼각형 일부를 제시하고 크기나 모양이 다른 삼각형이 더 있는지 찾아보도록 한다. 다 찾았다면 왜 그것뿐인지 설명하도록 하고, 빠트리지 않고 중복되지 않게 찾았는지를 알 수 있으려면 어떻게 해야 할지 생각해 보도록 한다.

### 3. 수학적 사고 특성 분석을 위한 관찰 항목 추출

본 연구에서는 Dienes의 수학학습 6단계 이론을 적용한 수업을 토대로, 스텝스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 모든 삼각형 찾기 과제를 해결하는 동안 학생에게서 의미 있게 관찰될 수 있을 것이라 기대되는 수학적 사고 특성의 관찰 항목을 추출하였다. 片桐重男의 수학적 사고·태도 중 조작의 사고, 연역적 사고, 보다 나은 방법을 알아보려는 태도이며, 이를 유발하는 요소로써 각각 시각화/기호화, 일반화 및 왜 그런지 이유를 따져 물어보려는 태도, 기준에 따라 분류해 보려는 태도이다. 수학적 사고 특성을 유발하는 세 가지 요소들이 片桐重男의 수학적 사고·태도를 나타내게 하는데 어떤 영향을 주는지 관찰하게 될 것이다.

&lt;표 3&gt; 수학적 사고 특성 분석을 위한 관찰 항목

<b>수학적 사고 특성</b>		↔	<b>수학적 사고 특성을 유발하는 요소</b>
내용에 관련된 수학적 사고	<b>조작의 사고 &lt;T1&gt;</b>	↔	시각화/기호화
방법에 관련된 수학적 사고	<b>연역적 사고 &lt;T2&gt;</b>	↔	일반화, 왜 그런지 이유를 따져 물어보려는 태도
수학적인 태도	<b>보다 나은 방법을 찾아보려는 태도 &lt;T3&gt;</b>	↔	기준에 따라 분류해 보려는 태도

#### 4. 자료의 수집과 분석 방법

연구자는 3차시에 걸친 수업에서 수업의 진행자 및 관찰자로 활동하였다. 학생들이 문제 해결하는 동안의 사고 과정과 흔적들이 활동지에 드러나도록 중간 중간의 메모나 끄적거림을 지우지 않도록 하며 활동지를 충분히 제공하였고, 수업과 관련된 학생들의 모든 학습지와 연습지, 발표 자료, 소감문 등을 모두 수집하여 분석하였다. 연구자는 학생들의 과제 해결 과정을 처음부터 끝까지 지켜보며 그들의 수학적 사고 특성을 관찰·기록하였고, 필요한 시기에 적절한 힌트를 제공하여 학생들의 문제 해결 과정을 도왔다. 학생들의 발표 장면은 녹화하여 풀이에 대한 정당화의 분석 자료로 활용하였고, 매 차시 수업을 마친 후 수업에서 불분명한 점을 분명히 하고 특별한 상황에 대한 학생의 생각을 알아보기 위해 비구조화된 면담을 실시하여 과제 해결에서 나타난 수학적 사고 과정을 면밀히 분석하였다.

## IV. 결과 및 해석

### 1. 조작의 사고 (내용에 관련된 수학적 사고)

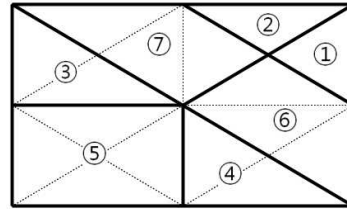
본 연구의 소재인 스펅크스퍼즐은 연구 대상인 학생들이 처음 접해보는 퍼즐이었다. 탱그램(칠교판)은 익숙하게 생각하였지만 스펅크스퍼즐은 조금 낯설고 어렵다는 인식을 하는 것 같았다. 하지만 Dienes의 수학학습 6단계 이론을 적용한 수업을 진행하면서 놀이로부터 형식화까지의 활동 과정 동안 스펅크스퍼즐이 단순한 일곱 조각의 퍼즐이 아닌 매우 수학적이며 재미있는 교구라는 것을 느끼게 되었다.

원하는 모양을 만들기 위해서 스펅크스퍼즐 조각을 옮기고 돌리고 뒤집는 조작이 필요하였는데 학생들은 뒤집는 조작을 가장 어려워하는 것을 알 수 있었다. 즉, 특정한 조각을 뒤집으면 원하는 모양을 만들 수 있는데 계속 돌려보기만 하다가 잘 맞추지 못하는 경우를 여러 번 발견할 수 있었다. 이는 퍼즐 조각을 뒤집을 때 앞쪽과 뒤쪽의 모양이 달라지는 직각삼각형 조각([그림 3]의 ③,④번 조각)과 사다리꼴조각([그림 3]의 ⑦번 조각)의 경우에 그러하다. 다른 조각은 도형 내부에 대칭축이 존재하는 선대칭 도형이라서 도형을 반대쪽으로 뒤집어도 모양에 차이가 없는 도형들이다. 특히 ⑦번 사다리꼴 조각을 다루는 것을 가장 어려워하였다. 또한 한 각의 각도가 크기 때문에 원하는 도형을 만드는데 사각형의 조각은 끼워 맞추기 힘든 조각이었을 것이다.





[그림 2] 스피크스퍼즐 교구

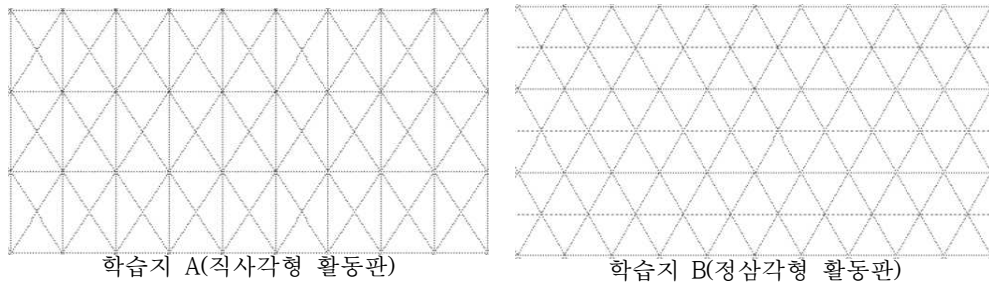


[그림 3] 스피크스퍼즐 그리기

Dienes의 수학학습 4단계 「표현」에 해당하는 활동으로 스피크스퍼즐 조각의 배열을 정삼각형 모눈 학습지에 그려보는 활동을 하였다. 교구의 케이스와 같은 직사각형 모양을 만들고 종이에 옮겨 그린 다음 다른 친구들의 것과 비교해 보도록 하였다. 이는 교구의 입체적인 형태와 구체적인 조작 행위가 아닌, 종이 위에 추상적으로 표현된 스피크스퍼즐의 수학적 특징에 초점이 옮겨지도록 하기 위함이었다. 교구의 크기와 정삼각형의 모눈의 크기는 1:1이 아니기 때문에 퍼즐 조각의 기하학적 요소를 충분히 이해한 상태에서 실물 퍼즐을 모눈에 옮겨 그릴 수 있다. 실물 퍼즐을 조작하는 활동과 모눈 학습지에 표현하는 활동의 협응이 제대로 이루어져야만 6단계까지의 과제를 성공적으로 이행할 수 있는 것이다. 또한 정삼각형 모눈의 점선을 이용하여 교구를 실제로 만지지 않고 모눈종이 위에서 그려보는 활동만을 통해서도 원하는 도형을 만들 수 있다. Dienes의 수학학습 5단계 「시각화/기호화」에 해당하는 활동으로 조각의 일부 또는 전부를 사용하여 가능한 모든 삼각형의 배열을 찾아 정삼각형 모눈 학습지 위에 그려보도록 하였다. 하지만 일부 학생은 실물 퍼즐을 모눈종이 위에 옮겨 그리는 것에 어려움을 보였다. 이는 모눈 학습지의 작은 정삼각형이 가장 작은 정삼각형 조각을 의미한다는 것, 각 조각의 길이 관계 및 넓이 관계를 충분히 이해하지 못한 상태에서 활동에 임한 것으로 여겨진다.

3차시에 걸친 수업에서 학생들은 형식화 단계를 제외하고 대부분의 시간을 스피크스퍼즐 조각에서 손을 떼지 않고 계속 교구를 만지면서 문제를 해결하였다. 각자 한 개씩 주어진 교구를 지속적으로 조작하여 문제를 푸려고 시도하였다. 직사각형 배열 만들기 활동에서 다른 친구들의 직사각형과 내가 만든 직사각형을 비교해 보면서 직사각형을 만드는 배열은 한두 가지가 아닌 여러 가지라는 것, 약간의 배열 변화를 통하여 새로운 배열을 만들 수 있다는 것, 하나의 배열과 다른 배열의 조합으로 또 다른 배열을 만들 수 있다는 것 등을 배울 수 있었다. 또한 정삼각형 모눈학습지의 모눈만으로도 내부의 배열을 머릿속으로 생각하여 배열을 완성할 수 있다는 것도 알게 되었다. 그러나 학생들은 그 이후의 활동에서도 퍼즐 교구를 손에서 놓지 않았다. 직접 옮기고 돌리고 뒤집어 보아 원하는 도형을 만드는 것을 포기하지 않았다. 그러다가 스피크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 삼각형 찾기 과제에서는 이 방식이 한계가 있다는 것을 느끼게 된다. 퍼즐 조각을 직접 다루어서 비체계적으로 삼각형을 만들다 보면 중복되는 삼각형들이 계속 만들어지고 과제 해결의 끝이 보이지 않는 상황에 닥치게 된다. 그리하여 모눈종이 위에서 조각의 내부 배열을 머릿속으로 생각하여 그려보는 것으로 해결하려는 시도를 하게 되었다.

학생들에게 제시한 모눈 학습지는 [그림 4]의 A형과 B형의 두 가지 형태였다. 학습지 A는 직사각형에 대각선을 그린 것과 같은 형태로 대각선들이 형성하는 삼각형이 정삼각형을 이루는 모양이고, 학습지 B는 모눈의 형태가 정삼각형만 드러나도록 나타낸 학습지이다.



[그림 4] 스텝크스퍼즐 학습지 A와 B

학생들은 두 가지 학습지 중에서 A를 더 선호하였다. 학습지 B가 스텝크스퍼즐의 기본 단위인 정삼각형이 더 잘 드러나는 특성을 지녔지만, 학생들은 세로선이 포함된 학습지 A가 더 편하다고 하였다. 세로 선의 가이드라인이 더 포함되어 편하게 느낀 것으로 보인다. 학습지 A에 가로 선을 더 추가한다면 만들어지는 모양의 모든 선분의 가이드라인을 제시할 수는 있겠으나 스텝크스퍼즐 조각의 기본 단위인 정삼각형의 형태가 뚜렷하게 드러나지 않고 너무 복잡한 모양의 모눈이 된다는 단점이 있다. 반드시 모눈의 점선을 따라서만 선분을 그려야 한다는 고정관념 없이 일부의 선분은 모눈의 점과 점을 연결하는 경우도 있다는 것에 익숙해진다면 학습지 B도 불편함 없이 접근할 수 있을 것이다.

각 조각의 개수에 해당하는 삼각형 만들기 과제를 해결하는 모습을 관찰해 보았을 때, 학생들의 문제해결 속도에 적지 않은 차이를 느낄 수 있었다. 삼각형의 내부 배열을 가장 빠른 속도로 찾아낸 학생은 SC학생으로 도형의 변과 각도, 넓이 사이의 관계를 잘 파악하고 가장 먼저 삼각형 찾기 과제를 마쳤다. 공통적으로 가장 찾기 어려워했던 6개의 조각으로 만드는 삼각형을 가장 나중에 찾아내고, 7가지의 삼각형을 어렵지 않게 만들어냈다. 어떤 방향으로든지 자신이 만든 삼각형의 배열을 쉽게 모눈 학습지에 표현하는 것도 발견할 수 있었다. 이 학생은 1차시에서 스텝크스퍼즐 직사각형 케이스에 조각을 빨리 집어넣기 게임도 가장 먼저 수행하였으며, 3차시에서 서로 다른 크기의 삼각형 13가지를 찾아내는 활동도 가장 먼저 해결하였다. 도형에 대한 감각, 특히 공간 감각이 잘 발달한 학생이라는 것을 느낄 수 있었다. 하지만 마지막 Dienes의 수학학습 6단계 「형식화」의 과정에서 왜 13가지의 삼각형을 만들 수 있는가에 대한 증명은 다른 학생에 비하여 체계성이 조금 부족하였다.

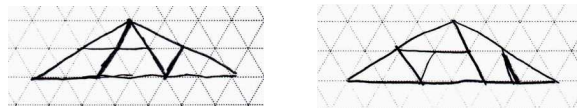
유일한 여학생이었던 SB학생은 비교적 빠르게 삼각형의 배열을 찾아냈다. 2조각과 3조각으로 이루어진 삼각형은 교구를 만지지 않고 바로 학습지에 그려 표현하였고 4, 5, 7조각에 해당하는 삼각형은 퍼즐 조각을 움직여 가며 만들어 나갔다. 6조각으로 이루어진 둔각이등변삼각형은 시간 내에 만들어 내지 못하였다.

SA학생은 우연에 의존하여 삼각형을 만들어 나가는 경향이 강하였다. 중복되는 삼각형이 계속하여 만들어지면서 시간이 지체되어 4조각으로 이루어진 삼각형까지만 발견하였다. 그러나 이 학생은 3차시의 6단계 형식화 단계에서 탁월하게 문제를 해결하고 네 학생 중 가장 논리적으로 자신의 해결 과정에 대한 정당화를 하였다.

SD학생은 수업 초반부터 스텝크스퍼즐 다루기를 어려워하였으며, 직사각형 배열 맞추기 게임에서는 다른 학생에 비하여 두드러지게 속도가 느린 것을 발견할 수 있었다. 또한 모눈 학습지에 비율에 맞게 삼각형을 표현하는 것, 내부 선분을 적절하게 표현하는 것에 어

려움을 느끼기도 하였다. 그러나 인내심을 발휘하여 매 과제마다 끝까지 해결하려는 자세를 보여주었고, 스텝스퍼즐로 만들 수 있는 13가지 삼각형을 찾고 그것뿐인 이유를 설명하는 단계까지 다다를 수 있었다.

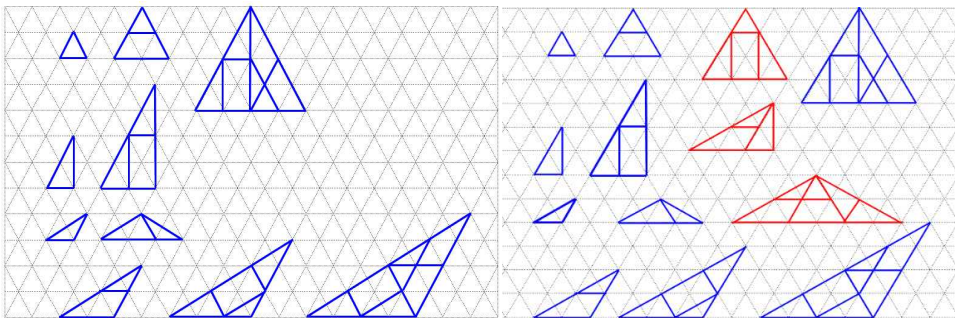
네 학생들이 가장 찾기 어려워했던 삼각형은 스텝스퍼즐 6조각으로 완성할 수 있는 짧은 변의 길이가 3.46인 둔각이등변삼각형이었다. 이 삼각형은 3차시에서 보기에서 제시한 삼각형 이외에 추가적으로 찾아야 하는 삼각형 중에 하나이기도 하였다. 이 삼각형의 특징은 6개의 조각이나 필요하다는 것 이외에,  $120^\circ$ 의 둔각을 형성하려면 여러 개의 조각을 붙여 만들어야 한다는 점이 있다. 대부분의 삼각형은 세 각에 해당하는 부분이 하나의 조각으로 이루어진 것에 반하여 이 삼각형은  $120^\circ$ 를 만들어내기 위하여 두 개 내지 세 개의 조각을 조합해야 한다. 그리고 뒤집으면 모양이 달라지는 직각삼각형 조각과 사다리꼴 조각을 이용해야 하므로 좀 더 어렵게 느껴질 것이라는 예상도 할 수 있다. 2차시에서 6개의 조각으로 만들 수 있는 삼각형을 만든 학생은 SC학생 한 명뿐이었으며, 3차시에서 빠진 삼각형의 실루엣이 한 변의 길이가 3.46인 둔각이등변삼각형이라는 것을 알고 나서도 나머지 학생들의 경우 이 삼각형의 배열을 찾아내는 데에는 오랜 시간이 소요되었다. 이 삼각형은 짧은 변의 길이가 2인 직각삼각형과 이등변삼각형을 붙이면 쉽게 만들 수 있으나 그 방법을 발견해 내는 학생은 없었다.



[그림 5] SC학생이 찾은 둔각이등변삼각형

## 2. 연역의 사고 (방법에 관련된 수학적 사고)

본 연구에서 학생들의 연역적 사고를 이끌어 내기 위한 수업 전략은 스텝스 퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 삼각형이 13가지라는 것을 알아내고 그 삼각형들을 찾아내는 것뿐만 아니라, 왜 13가지뿐 일지를 고민해 보고 설명해 보도록 하는 데 있었다. 만들 수 있는 삼각형의 일부를 제시해 주고 크기나 모양이 다른 삼각형이 있을지, 왜 그것뿐인지, 빠뜨리지 않고 찾으려면 어떻게 해야 할지 등을 생각하도록 하였다.



[그림 6] 문제에서 제시한 10가지 삼각형 [그림 7] 빠진 것을 채운 13가지 삼각형

그러나 학생들은 바로 이전의 과제였던 주어진 개수의 스펅크스퍼즐을 사용하여 삼각형 만들기 방법에 얽매어서 퍼즐의 조각 수에만 신경을 집중하고 조각 수를 늘려가며 삼각형을 만드는 것에만 신경을 쓰고 있었다. 즉 1조각일 때, 2조각일 때, 3조각일 때…… 각각의 조각 수에 맞추어 삼각형을 만들어 나갔다. 하지만 크기나 모양이 같으면 내부 조각의 배열이 달라도 하나의 삼각형으로 본다는 전제 때문에 이 방법은 문제가 있다는 것을 알아낸다. 1조각이나 2조각일 때는 삼각형을 찾아내기 쉽지만 조각의 수가 늘어날수록 조각의 모양별로 선택되는 조합이 많아지고, 같은 모양과 크기의 삼각형이 계속 만들어지는 경우가 늘어나기 때문이다. 스펅크스퍼즐 조각을 계속 움직여 삼각형을 만들어 나갔지만 진전의 기미가 보이지 않아 어떻게 해결해야 할지 갈피를 잡지 못하고 짜증스러운 표정을 보이기도 하였다. 문제의 본질에는 다가가지 못하고 방황하고 있는 상황이었다.

학생들에게 구조를 포착하도록 돕기 위하여 스펅크스퍼즐 조각의 특징을 다시 한 번 떠올려 보도록 하였다. 조각의 각도가 모두  $30^\circ$ 의 배수라는 점, 변의 길이는 1과 1.73, 2만 있다는 점, 넓이는 1, 2, 3, 4단위만 있다는 점 등을 말하였다. 이 특징을 바탕으로 학생들은 스펅크스퍼즐로 만들 수 있는 삼각형의 모양은 한정되어 있다는 것을 발견해 내었다. 즉,  $30^\circ$ 의 배수인 각도만 존재한다는 사실을 이용하여 정삼각형,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ 인 직각삼각형,  $120^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $30^\circ$ 인 둔각이등변삼각형 세 가지만 있다는 사실을 알게 되자 문제 해결의 물꼬를 트게 되었다. 스펅크스퍼즐 교구를 직접 만져가면서 삼각형을 찾아가는 것이 아니라 어떤 삼각형이 존재할지 미리 모양을 정한 다음에 그 내부의 배열을 생각해 보기 시작하였다.

- SA, SD: (만들 수 있는 삼각형의 종류 세 가지를 학습지에 메모함)
- SA: 180도가 만들어지는 경우가 생각보다 별로 없네.
- T: 그래. 어떤 삼각형이 만들어질지 알게 되니까 찾는 범위가 훨씬 좁아졌지.
- SD: 선생님께서 학습지에 그려놓으신 삼각형 모양에 힌트가 들어있었네요. (문제에서 제시한 10개의 삼각형을 가리키며) 정삼각형, 직각삼각형, 이등변삼각형끼리 모여 있어요.
- T: 맞아, 훌륭한 발견이야.
- SC: 크기 순서인가? (삼각형이 한 변의 길이에 주목함)
- SD: 크기별로 알아보면 될 것 같은데…….

속도의 차이는 있었고, 연구자가 힌트를 제시해 준 학생이 있었지만 네 학생 모두 3개의 추가적인 삼각형을 모두 찾아내고 내부의 모양까지 완성하였다. 세 가지 형태의 삼각형에서 각각 어떤 크기의 삼각형이 존재할지 따져보고, 한 변의 길이가 3인 정삼각형, 짧은 변의 길이가 1.73인 직각삼각형, 짧은 변의 길이가 3.46인 둔각이등변을 추가하여 총 13개의 삼각형이 만들어진다고 답하였다. 그들 나름대로 이치에 맞는 해결방안을 생각해 내고 답을 구했다는 것을 매우 뿌듯해 하였다. 연구자는 스펅크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 모든 삼각형은 총 13개가 맞는다는 것을 인정해 주었다. 그리고 왜 13가지뿐인지 종이에 설명을 적어보도록 하였다. 그리고 스펅크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 삼각형의 종류가 13가지라는 것을 친구들 앞에서 발표하도록 하였다. 자신이 종이에 적은 내용을 바탕으로 수정, 보완의 과정을 거쳐 친구들에게 이해하기 쉽게 설명하도록 하였다.

SA학생이 발표한 내용은 아래와 같다.

<표 4> SA학생 사고의 흐름

① 만들 수 있는 삼각형은 정삼각형, 직각삼각형, 이등변삼각형 세 종류로 한정됨

기준에 따라 분류에 보려는 사고를 통하여 만들어지는 삼각형의 종류가 크게 세 가지만 있다는 것을 밝혔다. 일종의 대명제를 내세운 것이라 볼 수 있다.



② 그 이유는 스텝크스퍼즐 조각의 각도 때문임  
 -  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$   
 삼각형의 내각의 합은  $180^\circ$  이므로  $150^\circ$  는 삼각형 만들기에 부적합  
 $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ$  : 정삼각형,  $30^\circ + 60^\circ + 90^\circ$  : 직각삼각형,  
 $30^\circ + 30^\circ + 120^\circ$  : 이등변삼각형

이미 알고 있는 사실, 즉 스텝크스조각의 각도는  $30^\circ$  의 배수만 존재한다는 것, 삼각형의 내각의 합은  $180^\circ$  라는 것을 이용하여 만들어지는 삼각형 각도의 조합이 세 가지인 이유를 밝혔다.



③ 정삼각형은 총 4가지 만들 수 있음- 한 변의 길이가 1인 것, 2인 것, 3인 것, 4인 것

먼저 정삼각형에서 길이를 기준으로 하여 길이가 1인 것에서부터 4인 것까지 네 가지가 있음을 밝혔다.



④ 한 변의 길이가 1.73인 정삼각형과 한 변의 길이가 3.46인 삼각형은 만들 수 없음- 스텝크스퍼즐 1세트로는 만들어지지 않기 때문

스핑크스퍼즐 조각의 길이 단위인 1, 2, 3, 4, 1.73, 3.46 중에서 1.73과 3.46을 한 변으로 갖는 정삼각형을 만들 수 없음을 반례를 들어 설명하였다.

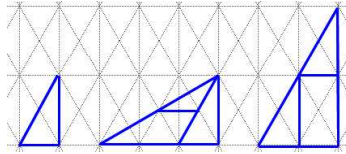


⑤ 한 변의 길이가 4보다 큰 정삼각형은 만들 수 없음- 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이가 스펅크스퍼즐 7조각을 다 합친 넓이와 같으므로

스펅크스퍼즐 7조각을 합친 넓이인 16을 초과하는 삼각형을 만들 수 없음을 밝히고 이것을 다른 삼각형에도 적용하였다.



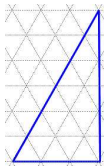
⑥ 직각삼각형은 총 3가지 만들 수 있음- 짧은 변의 길이가 1인 것, 1.73인 것, 2인 것



직각삼각형도 길이를 기준으로 짧은 변의 길이가 1부터 2인 것까지 있음을 밝혔다.



⑦ 짧은 변이 3 이상인 직각삼각형은 만들 수 없음- 넓이가 16을 넘기 때문에

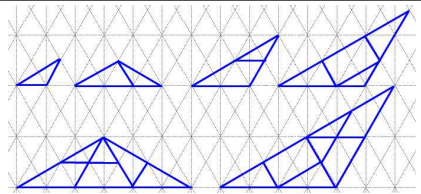


⇒ 전체 넓이: 18

전체 넓이가 16을 초과하는 짧은 변의 길이가 3 이상인 직각삼각형은 만들 수 없다고 하였다.



⑧ 이등변삼각형은 총 6가지 만들 수 있음- 짧은 변의 길이가 1인 것, 1.73인 것, 2인 것, 3인 것, 3.46인 것, 4인 것



이등변삼각형도 짧은 변의 길이를 기준으로 1부터 4까지 총 다섯 가지가 있다고 하였다.



⑨ 짧은 변이 4보다 큰 이등변삼각형은 만들 수 없음- 넓이가 16을 넘기 때문에

정삼각형에서의 설명과 마찬가지로 전체 넓이가 16을 초과하는 삼각형은 만들 수 없으므로 짧은 변의 길이가 4를 초과하는 이등변삼각형은 고려할 필요가 없다고 하였다.



⑩ 따라서 스펅크스퍼즐로 만들 수 있는 크기와 모양이 다른 삼각형은 13가지임

지금까지 설명한 것을 종합하여 정삼각형 4가지+ 직각삼각형 3가지+ 이등변삼각형 6가지로 스펅크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 삼각형은 총 13가지라는 결론을 내렸다.

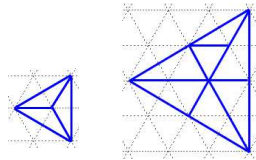
다른 학생들의 설명도 SA학생의 설명과 크게 다르지 않았다. 13가지의 삼각형을 찾아내는 데 가장 중요한 아이디어는 삼각형의 세 각의 합은  $180^\circ$  이고, 스펅크스퍼즐 조각의

각도는  $30^\circ$  의 배수만 존재한다는 사실이었다. 이를 통하여 크게 세 종류의 삼각형이 만들어진다는 것을 찾고 각 종류별로 한 변의 길이를 늘여가며 삼각형의 찾아가는 방식이었다. 이미 알고 있는 지식 중에서 어떤 사실이 문제를 해결하는 데 중요한 것인지 찾아내고 활용하도록 하는 것이 연역적 사고를 이끌어 내는 데 중요하다는 것을 알 수 있다.

학생들은 �핑크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 삼각형 모두를 찾아내는 과제를 받고 열심히 삼각형 찾기에 몰두하여 13가지의 삼각형을 모두 찾아냈다. 하지만 여기에서 그치지 않고, 왜 13가지뿐인지 설명하라는 과제에는 곤란해 하는 모습이 역력했다. 삼각형을 찾아내는 것만으로도 쉽지 않았는데 더 나아가 왜 그러한지 설명한다는 것은 무척 어렵게 느껴졌을 것이고 그들에게 익숙하지 않은 경험이기도 하였다. 결론에 해당하는 단순한 정답이 아닌 결론을 도출하는 과정이 더 중요하다는 것, 왜 그러한지 이유를 따져 물어보려는 태도로 문제에 다시 한 번 접근해 보는 것이 중요하다는 것을 학생들 스스로 느끼도록 하였다. 내가 해결한 과제를 다른 사람들에게 설명하기 위해서는 자신의 풀이에 대해 확신이 있어야 하며, 그러기 위해서는 풀이의 근거를 명확히 내세울 수 있어야 하기 때문이다. �핑크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 삼각형이 왜 13가지인지 종이에 쓰고 다른 친구들 앞에서 발표하는 과정에서 자신의 풀이에 대한 정당화의 필요성을 느낄 수 있었을 것이다.

학생들이 공통적으로 나타낸 증명의 방법은 삼각형별로 한 변의 길이를 변화시키면서 모든 종류의 삼각형을 찾는 방식이었다. 예를 들면, 정삼각형에서 한 변의 길이 1인 것부터 4인 것까지 길이를 늘여가며 찾는 방식이다. 이렇게 하여 빠뜨리지 않고 모두 찾을 수 있었다고 하였다. 또한 �핑크스퍼즐 7조각의 넓이 단위가 16이므로 이것을 초과하는 삼각형은 만들 수 없다고 발견하였다. 이러한 아이디어를 정삼각형, 직각삼각형, 이등변삼각형에도 계속 적용하여 모든 삼각형을 어렵지 않게 찾아낼 수 있었다. 즉, 계속 활용할 수 문제풀이의 방법이 무엇인지 생각하고 이를 일반화하였다고 볼 수 있다. 일반화의 사고가 학생들의 문제해결에 큰 도움이 된 것이다.

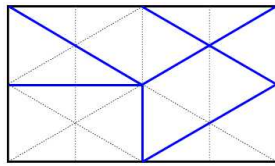
학생들의 증명 방법은 예시를 들어 설명하는 방법이 주를 이루었다고 볼 수 있다. 즉, 정삼각형, 직각삼각형, 이등변삼각형을 만드는 정례를 들어 13가지의 삼각형을 만들 수 있음을 설명하였다. 그리고 만들어지지 않는 삼각형의 경우는 왜 그러한지 반례를 들어 설명하였다. 정삼각형의 경우 한 변의 길이 순서대로 따져본다면, 1, 1.73, 2, 3, 3.46, 4까지 총 6가지를 고려해 볼 수 있지만 한 변의 길이가 1.73인 것과 3.46인 것은 �핑크스퍼즐 한 세트로는 만들어지지 않는다. [그림 8]처럼 가장 작은 이등변삼각형 조각이 3개 필요하거나, 직각삼각형 조각이 적어도 4개 필요하기 때문이다. 정례와 반례를 들어 설명하는 방법이 학생들에게 유용한 증명방법이었다고 볼 수 있다.



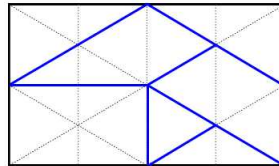
[그림 8] 만들어지지 않는 정삼각형에 대한 반례

### 3. 보다 나은 방법을 알아보려는 태도 (수학적 태도)

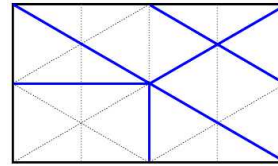
Dienes의 수학적 학습 4단계 「표현」에 해당하는 활동으로 스펅크스퍼즐로 직사각형을 만들어보는 1차시의 수업에서 학생들은 자신이 만든 직사각형 내부조각들의 배열을 선분을 이용하여 그리고 내가 만든 것과 친구가 만든 것의 내부 선분의 개수를 세어보는 활동을 하였다. 직사각형을 만드는 배열, 즉 스펅크스퍼즐을 그리는 방법은 한두 가지가 아닌 여러 가지라는 것을 확인할 수 있었고, 배열의 모양에 따라 내부 선분의 개수도 달라진다는 것을 알 수 있었다.



내부 선분의 개수: 6개



내부 선분의 개수: 7개



내부 선분의 개수: 5개

[그림 9] 스펅크스퍼즐을 그리는 다양한 방법

위의 [그림 9]와 같이 스펅크스퍼즐을 그리는 방법은 다양하고 내부 선분의 개수도 그에 따라 달라진다. 대부분의 배열을 살펴보면 내부 선분의 개수가 6개 또는 7개로 나타나지만 세 번째의 경우, 내부 선분의 개수가 가장 적게 나타나는 5개이다. 이 그림은 다른 그림에 비해서 가장 손쉽게 스펅크스퍼즐을 그릴 수 있다는 장점이 있을 뿐 아니라, 스펅크스퍼즐 조각의 배열을 가장 쉽게 기억할 수 있기도 하다. 왼쪽 하단에 직사각형이 있고, 오른쪽 상단과 이어지는 대각선을 중심으로 좌우에 작은 삼각형, 사다리꼴과 평행사변형, 직각삼각형이 배치되어 있다. 대각선을 사이에 두고 서로 성질이 유사한 도형이 마주 보고 있는 배열이라고 할 수 있다. 학생들은 이러한 비교를 통하여 어떻게 그리는 것이 보다 나은 해법인가를 생각하게 되었고, 선분을 가장 적게 그리는 세 번째의 해법이 가장 깔끔한 해법이라는 판단을 하였다. 어떤 방법이 가장 그리기 쉬운지 그리고 어떤 방법이 스펅크스퍼즐 조각의 배열이 한 눈에 잘 들어오는 따져보는 것은 보다 나은 것을 알아보려는 태도, 보다 깔끔하게 나타내려는 태도에서 우리나라의 것이라고 할 수 있다.

학생들은 삼각형 찾기 과제에서도 이러한 태도를 보였다. 같은 크기와 모양의 삼각형을 여러 개 찾을 경우, 되도록 내부 선분의 개수가 적은 도형이나 조각의 개수가 적은 도형을 선택하여 답으로 제시하였다. 한 변의 길이가 3인 정삼각형을 찾는 과정에서 내부의 배열이 여러 가지 있었지만 답에 제시하는 삼각형은 만드는 데 필요한 조각이 덜 쓰인 삼각형, 좀 더 단순한 배열의 삼각형이었다. SD학생은 조각 5개가 필요하고 내부 선분의 개수가 4개인 정삼각형의 배열을 찾았지만 조각의 개수를 줄인 배열을 찾아 길이가 3인 정삼각형의 답으로 제시하였다. 이러한 경향은 네 명의 학생 모두에게서 발견할 수 있었는데 이는 보다 잘 간추려 정리된 간결하고 깔끔한 해답을 추구하려는 경향이라고 판단할 수 있다.

스펅크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 삼각형 찾기 과제에서 가장 유용한 해결 전략은 어떤 종류의 삼각형이 만들어지는지 따져보고 그 이후에 내부의 배열을 찾는 방법이었다. 즉, 퍼즐 조각의 각도가  $30^\circ$ 의 배수라는 것, 삼각형의 내각의 합은  $180^\circ$ 라는 사실에 의거하여 만들어지는 삼각형은 정삼각형,  $30^\circ$   $60^\circ$   $90^\circ$ 의 직각삼각형,  $30^\circ$   $30^\circ$   $120^\circ$ 의 둔각이등변삼각형만 만들어진다는 점을 이용하여 범위를 줄이면 문제 해결의 접근이 더 쉬워지는 것이다. 학생들은 삼각형의 종류라는 기준을 세워 삼각형을 분류하고 가장 작은



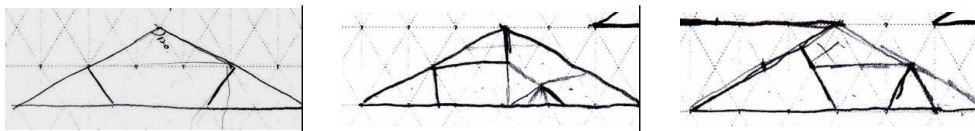
삼각형부터 가장 큰 삼각형까지 크기순으로 삼각형이 만들어지는지 아닌지를 따져서 해결하였다. 삼각형의 한 변 (가장 짧은 변)을 1부터  $1.73(\sqrt{3})$ , 2, 3,  $3.46(2\sqrt{3})$ , 4까지 늘려가면서 알아보는 것이다.

스핑크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 삼각형을 모두 찾는 목적을 달성하기 위하여 합리적인 방법을 사용하고 있는지에 대한 학생 스스로의 반성이 없었다면 가능하지 않았을 것이다. 문제 해결에 이를 때까지 그 목적을 분명히 인식하고 그것을 향해 접근하고 있는지를 자신의 방법을 확인하며 반성하고 수정하는 태도가 중요하다. 모든 삼각형을 빠뜨리지 않고 중복되지 않도록 찾는 방법으로 기준에 따라 분류하여 순서대로 따져보는 방법이 유효했던 것이다.

<표 5> 기준에 따라 분류하여 따져보는 해결 전략

한 변(짧은 변)길이		1	1.73	2	3	3.46	4	
성립 여부	정삼각형	○	×	○	○	×	○	4개
	직각삼각형	○	○	○	×	×	×	3개
	이등변삼각형	○	○	○	○	○	○	6개

학생들이 가장 찾기 어려워했던 짧은 변의 길이가 3.46인 둔각이등변삼각형을 찾는 과정에서 학생들에게서 발견할 수 있었던 모습은 �핑크스퍼즐 교구만을 만져서 해결하려는 것이 아닌, 모눈학습지 위에서 머리로 생각하며 그림을 그려 내부의 배열을 찾으려는 모습이였다. 맨 처음 �핑크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 삼각형 찾기 문제를 해결할 때에는 문제 해결의 방향을 잡지 못하여 무작정 교구를 집어 옮기고 돌리고 뒤집어서 답을 찾아보려 하였다. 그러나 그 방법에 한계를 느낀 후에는 만들어야 하는 삼각형이 무엇인가부터 찾아내고 내부의 배열을 찾으려고 하였다. 찾으려는 답의 개형, 즉 외곽선의 모양을 알고 그 내부의 선분을 찾는 것은 그 이전의 방법보다 훨씬 더 사고와 노력을 줄여주는 큰 발전이었다. 그러나 짧은 변의 길이가 3.46인 둔각이등변삼각형은 크기와 모양을 알고 있어도 내부의 배열을 쉽게 찾을 수 없는 것이였다. �핑크스퍼즐 조각을 한참 움직여보아도 잘 찾아지지 않자, 학생들은 정삼각형 모눈학습지 위에 일단 둔각이등변삼각형을 그려 놓고 내부에 선을 이리저리 그려보며 배열을 찾아보려고 하였다. 정삼각형 모눈은 �핑크스퍼즐 조각의 모양을 반영하는 것이기 때문에 점선을 잘 활용하고, 퍼즐 조각의 크기와 모양만 잘 파악하고 있다면 교구를 꼭 활용하지 않아도 내부의 선분을 찾아낼 수 있다. 학생들이 [그림 10]처럼 처음에는 시행착오를 겪기도 했지만 교구를 사용하는 방법과 병행하며 포기하지 않고 꾸준히 탐구한 끝에 내부의 배열을 네 학생 모두 찾을 수 있었다. 무작정 접근하는 것이 아닌 결과에 대한 대강의 예상을 세우고 세부적인 것을 알아보려는 시도, 교구의 조작만이 아닌 �핑크스퍼즐의 수학적 특징에 좀 더 초점을 두고 내부의 배열을 찾아보려는 시도가 문제 해결에 유효했다고 볼 수 있다.



[그림 10] SB학생, SD학생의 학습지 일부

## V. 결론 및 시사점

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들이 스텝크스퍼즐을 이용한 과제 해결 과정에서 형식화 단계까지 이를 수 있도록 Dienes의 수학적 학습 6단계 이론을 적용한 수업을 설계하여 실시하였다. 그리고 스텝크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 모든 삼각형 찾기 과제를 해결하는 동안 학생들에게 나타나는 수학적 사고 특성은 무엇인지 분석해 보았다. 이상과 같은 일련의 연구를 통해 얻은 결론 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 스텝크스퍼즐은 폭넓은 도형 탐구 및 수학적 사고를 자극하는 소재로 쓰이기에 적합한 소재였다.  $30^\circ$ 의 배수로 이루어지는 다양한 각도를 얻어낼 수 있고, 상호 간의 배수인 변으로 이루어져 수학적 도형을 많이 만들어내는 특징을 이용하여 도형의 성질, 넓이, 각, 대응, 평행, 합동, 대칭 등을 탐구하기에 좋은 교구이다. 또한 스텝크스퍼즐을 이용한 과제를 통하여 조작의 사고, 연역적 사고, 보다 나은 방법을 알아보려는 태도 등 학생들의 다양한 수학적 사고를 자극할 수 있다.

둘째, 초등학교 6학년 학생들은 미리 설계된 수업, 교사의 적절한 도움이 뒷받침된다면 스텝크스퍼즐을 이용한 과제에서 조작의 사고, 연역적 사고, 보다 나은 방법을 알아보려는 태도와 같은 수학적 사고를 충분히 할 수 있다.

셋째, 수학적 사고 특성 중 조작의 사고를 자극하기 위해서는 교구를 직접 손으로 만지는 경험을 통해 합동 변환, 대칭의 개념 등을 스스로 습득하도록 해주고, 모눈종이 위에 도형의 모양과 내부 선분의 배열을 그려보는 활동을 통해 교구의 입체적 형태와 구체적인 조작 행위가 아닌 종이 위에 추상적으로 표현된 도형의 수학적 특징에 초점이 옮겨질 수 있도록 유도해야 한다.

넷째, 수학적 사고 특성 중 연역적 사고를 자극하기 위해서는 결론에 해당하는 단순한 정답이 아닌 결론을 도출하는 과정이 더 중요하다는 것, 왜 그러한지 이유를 따져보려는 태도로 문제에 접근해 보는 것이 중요하다는 것을 학생들이 스스로 느끼도록 해야 한다. 또한 이미 알고 있는 지식 중에서 어떤 사실이 문제를 해결하는 데 중요한 것인지 찾아내고 활용하도록 해야 하며, 자신이 발견한 해답을 다른 사람 앞에서 자신감 있게 설득하여 보여주도록 이끌어야 한다.

다섯째, 수학적 사고 특성 중 보다 나은 방법을 알아보려는 태도를 자극하기 위해서는 보다 잘 간추려 정리된 간결하고 깔끔한 해답을 산출하도록 안내해야 한다. 또한 문제 해결에 이를 때까지 그 목적을 분명히 인식하고 그것을 향해 접근하고 있는지 자신의 방법을 학생 스스로 확인하며 반성하고 수정하는 태도를 갖고, 사고나 노력을 줄여주는 합리적인 문제해결 방법을 사용하도록 안내해야 한다.

## 참 고 문 헌

- 교육과학기술부 (2010a). **초등학교 수학 4-2, 5-1, 5-2 (2007 개정 교과서)**. 두산동아.
- 교육과학기술부 (2010b). **초등학교 교사용 지도서 수학 4-2, 5-1, 5-2 (2007 개정 교과서)**. 두산동아.
- 교육인적자원부 (2002). **초등학교 수학 5-나. (7차 교과서)**. 대한교과서주식회사.
- 김수미 (2008). Zoltan Dienes의 수학학습 6단계 이론의 재음미. **학교수학**, 10(3), 339-355.
- 박교식 (2002). 유사탱그램과 그 수학교육적 시사점. **학교수학**, 4(1), 97-109.
- 박교식 (2004). **탱그램 다시 보기**. 서울: 수학사랑.
- 박교식 (2007). 스텝스퍼즐의 일곱 조각으로 만들 수 있는 블록 다각형의 탐색. **과학교육논총**, 20(1), 113-122.
- 방신영 (2013). **스핑크스퍼즐의 삼각형 배열 찾기 과제에서 나타나는 학생들의 수학적 사고 특성 분석**. 경인교육대학교 석사학위 논문.
- 서은영 (2007). **초등학교 수학 교수·학습을 위한 평면조각퍼즐 탐구 활동 교재 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문,
- 송상현 (2004). 수학영재 교수·학습 자료 개발을 위한 소재 발굴에 관한 연구. **과학교육논총**, 16, 67-86.
- 송상현 (2008). 수학과 교육과정에 비추어 본 탱그램과 유사탱그램의 재조명. **수학교육학연구**, 18(3), 391-405.
- 송상현 (2011). 탱그램과 유사탱그램. Re-Creation Math 강의자료실(출처 [http://cafe.daum.net/ginuemathclass?t\\_\\_nil\\_loginbox=cafe\\_list&nil\\_id=2](http://cafe.daum.net/ginuemathclass?t__nil_loginbox=cafe_list&nil_id=2)검색일 2011. 8. 11)
- 신현진 (2004). **탱그램을 이용한 평면도형의 개념 및 성질 지도에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위 논문,
- 안주형, 송상현 (2002). 탱그램과 모자이크퍼즐의 활용에 관한 연구. **학교수학**, 2(2), 283-296.
- 이국형 (2011). **교사의 발문과 권고가 영재학급 학생들의 문제해결 과정에 미치는 수학적 사고 특성 변화 분석**. 아주대학교 석사학위 논문,
- 정동권, 김수미, 김지원 (2010). **수학 문제해결 지도의 이해**. 서울: 학지사.
- 片桐重男 (1988a). **수학적인 생각의 구체화**. 이용률, 성현경, 정동권, 박영배 공역(1992). 서울: 경문사.
- 片桐重男 (1988b). **문제해결과정과 발문분석**. 이용률, 성현경, 정동권, 박영배 공역(1992). 서울: 경문사.

<Abstract>

Analysis of Students' Mathematical Thinking Characteristics  
Appeared in the Process of Searching for All type of Triangle  
that Can be Made with Sphinx Puzzle

Bang, Sin Young<sup>4)</sup>; & Song, Sang Hun<sup>5)</sup>

In order to utilize Sphinx Puzzle in shape education or deductive reasoning, a lesson employing Dienes' six-stage theory of learning mathematics was structured to be applied to students of 6th grade of elementary school.

4 students of 6th grade of elementary school, the researcher's current workplace, were selected as subjects. The academic achievement level of 4 subjects range across top to medium, who are generally enthusiastic and hardworking in learning activities. During the 3 lessons, the researcher played role as the guide and observer, recorded observation, collected activity sheet written by subjects, presentation materials, essays on the experience, interview data, and analyzed them to the detail.

A task of finding every possible triangle out of pieces of Sphinx Puzzle was given, and until 6 steps of formalization was set, students' attitude to find a better way of mathematical deduction, especially that of operational thinking and deductive thinking, was carefully observed and analyzed.

Key words: Sphinx Puzzle, Dienes' six-stage theory of learning mathematics, 7 pieces mosaic puzzle(Sphinx Puzzle), Mathematical Thinking

논문접수: 2013. 03. 27

논문심사: 2013. 03. 27

게재확정: 2013. 04. 12

---

4) qkdtlsdud@naver.com

5) song2343@hanmail.net