대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 1, 1 ~ 16. Feb 2013

초등학교 3학년 학생들의 곱셈적 사고에 따른 비례 추론 능력 분석[1)]

김 정 원[*] · 방 정 숙[**]

본 논문은 초등학교 3학년 학생들의 곱셈적 사고 수준을 조사하고, 이러한 사고가 비례 문제를 해결할 때 어떻게 발현되는지 분석한 연구이다. 구체적으로, 학생들이 곱셈 문제 해결과정에서 어떠한 사고를 보이는지, 각각의 사고 수준에 있는 학생들의 비례 해결 전략에 있어서의 차이점은 무엇인지 살펴보았다. 그 결과 덧셈에서 곱셈으로 가는 과도기적 사고 수준의 학생이 가장 높은 비율을 차지하고 있었으며, 사고 수준에 따라 비례문제 해결 과정에서 문제 해결 전략 및 오류 유형의 차이를 발견할 수 있었다. 이러한 연구 결과는 비례 추론의 기반이 되는 곱셈적 사고의 중요성을 강조하고, 이를 신장시키기 위한 곱셈 지도 방향에 대한 시사점을 드러낸다.

I. 시작하는 말

초등학교에서 주로 다루는 사칙연산 중 곱셈과 나눗셈은 수학 전반의 모든 영역에서 중요한 역할을 한다. 곱셈과 나눗셈은 수와 연산 영역뿐만 아니라 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제 해결 등의 여러 영역에서 다양한 개념이나 원리를 이해하기 위한 기초로서 작용하고 있다. 또한 곱셈 및 나눗셈에 대한 이해는 학생들이 알고리듬을 의미 있게 사용하는데 긍정적인 영향을 미칠 뿐만 아니라 비례적 추론을 위한 발판이 된다(Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009).

곱셈의 의미를 이해하고 능숙하게 사용하기 위해서는 학생들이 곱셈적으로 사고해야 할 필요가 있다. 곱셈적 사고(multiplicative thinking)란 덧셈을 하는데 필요한 사고와 구별되는 사고로, 덧셈적 사고와는 다른 수준의 추상화와 이차적인 포함 관계를 구성하는 사고를 필요로 한다(Piaget, 1987). 수학적 사고 발달의 기본이자 초등학교 산술의 절정(capstone)이라 여겨지는 비례 추론(proportional reasoning) 능력의 기저가 되는 사고도 곱셈적 사고라 할 수 있다(Lesh, Post, & Behr, 1988). 두 양 사이에 곱셈적 관계가 있음을 인식하는 것은 비 개념의 발달 요소 중 하나로(안숙현, 2008), 곱셈적 사고는 비와 비례의 세계로 들어가는 시작점에 놓여 있는 매우 중요한 사고이다(Singh, 2000).

이와 같은 곱셈의 중요성에도 불구하고, 곱셈 학습과 관련된 학생들의 실태나 그들이 겪는 어려움에 대한 연구들이 계속적으로 보고되고 있다(Siemon & Virgonia, 2001). 예를 들어, 초등학교 1학년부터 5학년 학생들까지의 곱셈적 사고에 대해 살펴본 연구에 따르면(이준자, 2001), 많은 학생들이 덧셈적 사고에 머무르고 있으며 곱셈적 사고로 발전하지 못하고 있음을

* 신탄진초등학교, nymph019@hanmail.net
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr
1) 본 논문은 2010년 한국수학교육관련단체총연합회 연합 학술발표회에서 발표한 내용을 수정 · 보완한 것임

알 수 있다. 또한 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해를 분석한 연구에 의하면, 많은 학생들이 곱셈을 동치묶음의 의미로 이해하고 있다(황우형, 김경미, 2008). 비례 추론에서 가장 많이 나타나는 오류 중의 하나가 가법적인 전략을 사용함으로 인해 발생한다는 연구 결과로 미루어 볼 때, 이와 같은 연구 결과는 학생들이 두 양 사이의 곱셈적 관계를 인식하는 능력이 부족하다는 것을 의미한다(Hart, 1988).

많은 연구에서 곱셈적 사고가 중요하며, 이는 비례적 사고의 기반이 된다는 사실을 언급하고 있지만(Lesh et al., 1988; Siemon & Bread, 2006; Singh, 2000), 대부분의 연구에서 곱셈적 사고, 비례적 사고 각각에 그 초점을 두고 있다. 곱셈적 사고가 이후의 비례 학습에 중요한 기반이 된다는 점을 염두에 두었을 때, 곱셈적 사고를 비례 추론과 연결시켜 살펴보는 것은 매우 중요하며, 곱셈의 교수·학습과 관련해서도 큰 의미를 지닌다고 할 수 있다.

이와 같은 연구의 필요성에 의해 본 연구에서는 학생들의 곱셈적 사고 수준에 대한 실태를 조사하고, 비례 문제 해결 과정에서 이러한 곱셈적 사고가 어떻게 발현되는지 살펴보고자 한다. 이를 위해 우선 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 이들의 곱셈적 사고를 분석하고 이를 몇 개의 수준으로 분류하였다. 그 뒤, 각 수준의 학생들 중 몇 명을 선택하여 곱셈적 사고가 비례 문제 해결 과정에서 어떻게 발현되는지, 곱셈적 사고 수준의 차이에 따른 비례 문제 해결 능력의 차이가 발생하는지를 면밀히 살펴보았다. 이와 같은 연구를 통해 후속학습의 기초로서의 곱셈적 사고의 신장을 위한 지도 방향에 대한 시사점을 얻고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 곱셈적 사고

현재까지 곱셈적 사고가 무엇인지에 대한 많은 연구자들의 논의가 있어왔다(Clark & Kammi, 1996; Piaget, 1987; Siemon et al., 2006; Steffe, 1994). 이들은 덧셈적 사고와의 차이를 언급함으로써 곱셈적 사고의 의미를 탐색하고자 했다. 예를 들어, Piaget(1987)는 덧셈적 사고와 곱셈적 사고는 추상화 수준의 수와 아동이 동시에 만들어야 하는 포함관계의 수에서 차이가 있다고 보았다.

Piaget의 연구를 확장하여, Steffe(1994)는 곱셈과 나눗셈에 대한 교수실험에서 수 계열(number sequences)을 연산의 출발점으로 두고, 교수실험을 통해 다섯 가지 세기 도식을 발견했다. 그 중 마지막 세 가지 수열은 덧셈적 사고로부터 곱셈적 사고로 구성해가는 과정을 뚜렷이 볼 수 있는 수 계열로, 초기 수 계열(Initial Number Sequences), 내연적 함의 수 계열(Tacitly nested Number Sequences), 외연적 함의 수 계열(Explicitly nested Number Sequences)이 이에 해당한다. 각각의 수 계열은 아동이 구성하는 특별한 유형의 단위에 의해 특성화되며, 수 계열마다 이러한 단위를 다루는 정교함이 다른데, 합성 단위를 다룰 수 있는 수준까지 정교화 되어야 곱셈과 나눗셈을 의미 있게 학습할 수 있다.

이와 같이 곱셈적 사고는 한 순간에 이루어지는 것이 아니라 여러 수준에 걸쳐 이루어진다는 것을 알 수 있다. 이에 부합하여, 학생들이 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 이행해 가는 과정을 살펴보고 수준을 나눈 연구의 예로 Clark와 Kamii(1996)의 연구가 있다. 이 연구에서는 미국의 한 국립학교의 초등학교 1-5학년 336명의 학생들에게 곱셈 과제를 제시하고 그 결과를 분석하여 수준을 나누었다. 연구 결과, 4가지 수준으로 분류할 수 있었는데, 예를 들

어 가장 낮은 1수준은 수치나 연산에 대한 언급 없이 오직 질적으로 생각하는 수준이었으며, 가장 높은 수준은 대상 사이의 관계를 곱셈적으로 생각하는 수준이었다.

또한 Siemon 외(2006)는 곱셈적 사고의 수준을 판단할 수 있는 틀을 개발했다. 이 연구에서는 우선 가상적으로 9개 수준의 학습 경로(learning trajectories)를 세우고, 다양한 범위의 과제를 만들어 4학년부터 8학년의 1400명의 학생들에게 제시하고 그 반응을 분석하여 최종 8단계의 곱셈적 사고 수준을 제시하였다. 이 곱셈적 사고 발달 단계를 살펴보면 1단계에서 4단계까지는 덧셈적 사고에 의존하여 문제를 해결하며, 5단계부터 8단계까지는 점점 수의 영역을 확장하고 곱셈적 사고로 발달된다.

지금까지 살펴본 연구들을 통해 덧셈적 사고와 곱셈적 사고의 차이점을 이해하고, 덧셈적 사고로부터 곱셈적 사고로의 이행과정에서의 수준을 알 수 있었다. 이는 본 연구에서 학생들의 곱셈적 사고 수준을 파악할 때의 준거로 사용되는 곱셈적 사고 분석 틀의 바탕이 된다.

2. 비례 추론

여러 학자들이 비례 추론을 연구하고 그 개념이 무엇인지 정확하게 밝히고자 했다. 예를 들어, Inhelder와 Piaget(1958)는 두 비 사이의 이차적 관계를 포함하는 것을 비례 추론으로 보았으며, Lamon(2007)은 공변과 불변을 동시에 포함하고 있는 상황에서 구조적 관계를 인식하고 이를 지지하는 추론을 비례 추론이라 제시하였다. 여기서 공변이란 곱셈적 관계를 가진 두 변수 사이에서 동시에 일어나는 변화를 가리키며, 불변은 두 변수의 양이나 수가 변하더라도 두 변수 사이의 관계는 불변함을 뜻한다.

이러한 비례 추론은 후속 학습의 기초로서 초등수학과 고등수학을 연결하는 다리 역할을 한다(박정숙, 2009). 또한 NCTM(2000)은 비례를 수학의 여러 주제들을 연결하는 통합적인 맥락을 제시하는 영역이라 설명하였다. 실생활에서도 많은 부분은 비례 규칙에 따라 움직여지기 때문에, 비례 추론은 실생활의 현상을 추측하고 해석하는데도 매우 유용하다.

학생들의 비례 추론 능력을 살펴본 연구에 따르면, 학생들은 비례 문제에 따라 서로 다른 전략을 사용하여 해결한다. 예를 들어, Cramer, Post, & Currier(1993)는 비례 추론 과제 유형을 미지값 구하기, 수리적 비교 문제 및 질적 예측 및 비교 문제의 세 유형으로 나누어 학생들에게 제시했다. 연구 결과, 학생들은 단위 비율 전략, 변화 인수 전략, 분수 전략, 대각선 곱 알고리듬과 같은 여러 가지 전략을 사용하여 문제를 해결하였다. 5~7학년 학생들의 비례 추론 능력에 대한 실태를 조사한 안숙현(2008)에 따르면, 비례 문제 해결에서 학생들은 비례 문제 유형에 따라 비례공식 전략, 분수 전략, 변화인수전략, 단위비율전략, 구성전략, 질적 추론과 같은 여러 전략을 사용하는 것을 확인할 수 있었다.

한편, 비례 문제 해결 과정에서 드러나는 학생들의 어려움을 보고한 연구도 있었다. 예를 들어, Singh(2000)에 따르면 학생들은 비례추론이 필요한 과제를 해결할 때 덧셈적 추론을 사용하여 종종 오류를 범한다. 또한 시각적이거나 덧셈적 접근 방식과 같은 무작위적인 전략을 사용하여 비례 문제를 해결하기도 한다(Lamon, 2007). 이러한 어려움은 비례 추론의 기반이 되는 양 사이의 곱셈적 관계에 대한 이해가 확고하게 형성되지 않았기 때문으로 해석할 수 있다(Lamon, 2007). 따라서 학생들의 덧셈적 사고는 비례 문제 해결에서 오류 및 어려움을 겪게 하는 하나의 요인으로 작용하며, 만약 덧셈적 사고로부터 곱셈적 사고로 이행이 잘 이루어지고 이로부터 비

례 추론 능력이 올바르게 형성되었더라면 이러한 오류는 일어나지 않았을 것이라 여겨진다.

종합해보면, 학생들은 비례 문제 유형에 따라 사용하는 전략이 서로 다름을 알 수 있다. 따라서 학생들의 비례 추론 능력을 살펴보기 위해서는 한 가지 문제가 아닌 다양한 문제를 제시할 필요가 있으며, 문제 해결과정에서 드러나는 전략을 통해 비례 추론 능력을 살펴볼 수 있다. 반면, 학생들이 곱셈적 사고가 정립되어있지 못하다면 덧셈적 사고로 인해 비례 추론 문제 해결에서 어려움을 겪게 된다는 것을 알 수 있다. 이에 본 연구에서는 이러한 점을 고려하여 학생들이 비례 추론 문제 해결 과정에서 드러나는 오류 또한 분석하였다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 학생들의 곱셈적 사고를 조사하고, 곱셈적 사고 수준에 따라 비례 추론 문제 해결 능력이 어떠한지 살펴보고자 한다. 이를 위해 초등학교 3학년 학생들을 연구 대상으로 하였다. 수학과 교육과정에 따르면 2학년에 곱셈 및 곱셈구구, 3학년에 나눗셈 및 곱셈과 나눗셈의 관계, 5학년에 비와 비율, 6학년에 비례식, 연비와 비례 배분이 도입된다. 초등학교 3학년 학생들은 곱셈과 나눗셈을 이해하고 이를 이용한 문제 해결이 가능하나 아직 비와 비례는 학습하지 않은 상태이다. 따라서 3학년 학생들을 연구 대상으로 함으로써 후속학습인 비와 비례의 토대로서 곱셈적 사고가 어떠한 역할을 하는지 살펴볼 수 있을 것이라 기대되었다.

이를 위해 대전광역시에 소재한 초등학교 중 학생들의 학력수준과 가정의 사회 경제적 수준이 중간 정도에 속하는 지역에 위치하는 5개의 초등학교를 선정한 뒤, 각각의 학교에서 3학년 1개 반씩 총 170명의 학생들을 대상으로 하였다. 곱셈적 사고를 조사하기위한 연구 대상은 이들 170명의 학생들이며, 곱셈적 사고에 따른 비례 추론 능력을 조사하기 위한 연구 대상은 앞선 조사를 통해 밝혀진 곱셈적 사고의 4개의 수준 중 1수준을 제외한 나머지 3개의 수준에서 각각 2명씩 총 6명이다. 여기서 6명의 학생을 질적으로 분석한 이유는 학생들의 비례 문제 해결 과정을 면밀히 살펴보고자 함이나, 적은 수의 인원으로 인해 본 연구 결과를 일반화하는데에는 한계가 있음을 염두에 두어야 한다.

2. 연구 방법 및 검사 도구

본 연구는 초등학교 3학년 학생들의 곱셈적 사고 수준을 알아보고, 학생들의 곱셈적 사고 수준에 따른 비례 문제 해결 방법을 분석하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 곱셈 검사지, 비례 검사지, 면담이 이루어졌는데, 우선 곱셈 설문지를 통해 3학년 학생들의 곱셈적 사고 수준을 파악하였으며, 이를 통해 선별된 6명의 학생들에게 비례 설문지 및 면담을 실시하여 사고 과정을 면밀히 분석하였다.

<표 Ⅲ-1> 곱셈 검사지 문항 구성

문제 유형	배 개념 알기	부분-전체 알기
문항수	5	5
검사 항목	A, B, C 대상 사이의 '배' 관계 파악하기 하나의 값이 주어졌을 때 나머지 값 구하기	전체-상자-쿠키의 포함관계를 복합적으로 인식하기 합성 단위 다루기
문항 내용	주어진 A, B, C 물고기의 먹이양이 배 관계이고, 세 물고기 중 하나의 먹이양이 주어졌을 때 나머지 물고기들의 먹이양을 구하는 문제	하나의 묶음을 단위로 하여 부분과 전체의 개수를 추론하여 상자 및 쿠키의 개수를 구하는 문제

<표 Ⅲ-2> 비례 검사지 문항 구성

	문제 유형	검사 항목	문항수
비례 문제	미지값 구하기 (정비례)	두 비의 항상 일정한 관계를 파악하고, a, b, c의 세 정보를 바탕으로 d의 값 추론하기	2
	미지값 구하기 (반비례)	두 변수의 곱이 일정한 관계(ab=cd)임을 파악하고, a, b, c의 세 정보를 바탕으로 d의 값 추론하기	2
	수리적 비교	두 비율의 수치적 정보가 주어졌을 때, 두 변수를 고려하고 수치적 정보를 대입하여 비율 비교하기	2
	질적 예측 및 비교	'더 많은', '더 적은'과 같은 질적인 정보를 이용하여 두 변수 사이의 상대적인 관계 파악하여 비교하기	2
비례가 아닌 문제	덧셈 관계 ($y=x+a$)	비례적 상황과 비례가 아닌 상황을 구분하고, 비례가 아닌 상황에 적절한 해결 방법을 이용하여 문제 해결하기	2
	합이 일정 ($x+y=a$)		

곱셈 검사지는 Sinclair(1977)와 Steffe(1994)가 교수 실험에서 사용한 과제를 변형하여 제작하였다(<표 Ⅲ-1>). 크게 '배 개념 알기'와 '부분-전체 알기'의 유형으로 구분되는데, 배 개념 알기 문항의 경우 곱셈의 중요한 개념인 '배(倍)'에 대한 학생들의 이해 정도를 알아 볼 수 있는 과제로 구성되었다. '부분-전체 알기'과제의 경우 학생들이 1 이상의 합성 단위를 사용하여 부분과 전체 관계를 만들 수 있는지 볼 수 있는 과제이다. 이러한 곱셈 문항들은 곱셈적으로 사고하면 쉽게 해결 가능하지만 동수누가 식의 덧셈적 사고를 하면 어렵거나 번거로운 문제로 문항이다.

한편, 비례 검사지는 Cramer, Post & Currier(1993)와 Van Dooren 외(2003)를 참고하여 <표 Ⅲ-2>와 같이 제작하였다. 비례 추론 능력의 하나로 비례인 상황과 비례가 아닌 상황을 구별할 수 있는 능력도 포함되므로(Lamon, 2007), 비례가 아닌 문제도 포함시켜 검사지를 제작하였다. 비례 문제는 크게 4가지 유형으로 나뉘며, 각각 2문항씩 제시하였다. 개발한 검사 도구 및 분석 도구의 타당성을 높이기 위해 초등수학교육 전문가 5인의 검토를 받았으며, 검사 도구의 신뢰도를 구한 결과 Cronbach α값은 0.694로 신뢰할 수 있는 것으로 나타났다.

3. 자료 수집 및 분석

예비 검사 결과를 토대로 수정・보완하여 완성된 본 검사지를 가지고 검사를 실시하였다. 먼저 곱셈 검사지에 대한 반응을 분석하여 곱셈적 사고 수준을 파악한 후, 각 수준에 해당하는 학생을 2명씩 선발하여 설문과 면담을 통해 비례 검사지의 해결과정을 살펴보았다. 면담에서는 검사지를 통해 드러나지 않은 학생의 사고 과정에 대해 질문하였고, 이는 비디오로 녹화하였다. 이 때 곱셈적 사고의 Ⅰ수준에 해당하는 학생들은 아직 수나 양에 대한 인식이 부족하며 덧셈과 곱셈의 기본 연산도 제대로 수행하지 못하기 때문에, 비례 검사지를 해결할 수 없다고 판단하여 이 수준의 학생은 제외하였다.

곱셈 문제를 해결하는 과정에서 드러난 학생들의 사고 수준을 구분하기 위한 분석틀은 문헌 검토(Clark & Kamii, 1996; Piaget, 1987; Siemon & Bread, 2006; Steffe, 1994)와 예비 검사 결과를 바탕으로 <표 Ⅲ-3>과 같이 마련하였다. 이러한 분석틀을 근거로 하여 학생들의 사고 수준을 나누어 빈도수와 백분율로 구하고

<표 Ⅲ-3> 곱셈 검사지 분석 틀

사고 수준	'배'개념 알기		'부분-전체'관계 알기	
질적 사고	Ⅰ	A<B<C 관계만 제시, 양적 수치를 제시하지 않음	Ⅰ	부분과 전체 사이를 이해하지 못하며, 문제에 제시된 숫자를 그냥 더함
덧셈적 사고	ⅡA	A 보다 B, C가 차례로 +1씩 더 먹는다고 반응	ⅡA	모든 문제를 덧셈으로 해결
	ⅡB	A 보다 B, C가 차례로 +2씩 더 먹는다고 반응	ⅡB	(1)은 곱셈으로, 나머지 문제는 덧셈으로 해결
	ⅡC	B는 A 보다 +2, C는 A 또는 B보다 +3씩 더 먹는다고 반응, (B-A) < (C-A) 성립		
과도기적 사고	ⅢA	두 관계 중 하나는 곱셈으로, 하나는 덧셈으로 해결	ⅢA	쿠키와 상자의 개수를 혼동함. 문제 상황 표현은 곱셈적이나 풀이 과정은 덧셈으로 해결
	ⅢB	관계를 바르게 파악하나, 덧셈으로 해결하거나 곱셈을 잘못하여 먹이수를 잘못 계산	ⅢB	쿠키와 상자의 개수를 혼동함. 곱셈을 이용하여 문제 상황을 표현하고 해결
곱셈적 사고	Ⅳ	A, B, C의 관계를 곱셈으로 옳게 파악하여 반응	Ⅳ	부분-전체 사고가 완전하며, 곱셈을 이용하여 문제 상황을 표현하고 해결

각 수준별로 학생들의 반응을 예로 들었다. 한편 학생들이 비례 추론 문제를 해결하는 과정에서 사용하는 전략유형은 문헌 검토 및 예비검사 결과를 바탕으로 <표 Ⅲ-4>와 같이 해결 전략 및 오답 유형으로 세분화하여 살펴보았다. 결과에 대한 객관도를 알아보기 위하여 연구자를 포함한 3인의 채점자를 선정하여 채점자간 신뢰도를 산출한 결과 각각 0.891, 0.886, 0.893이 나와 채점자간 신뢰도가 있음을 확인할 수 있었다.

<표 Ⅲ-4> 비례 문제의 해결 전략 및 오류 유형

비례 문제 해결 전략	질적 추론 전략, 덧셈 추론 전략, 단위 비율 전략, 변화 인수 전략
오류 유형	잘못된 질적 추론, 잘못된 덧셈적 추론, 잘못된 비례 추론, 한 가지 변수에만 초점, 기타

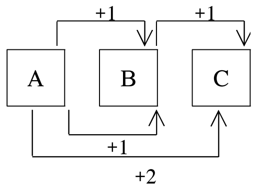
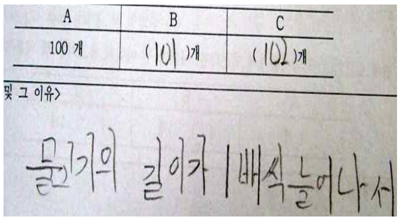
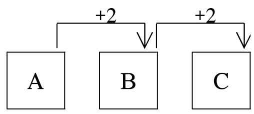
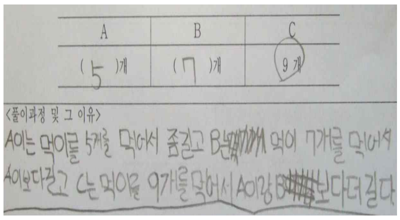
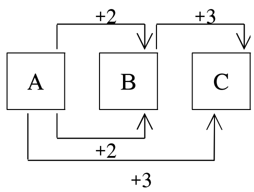
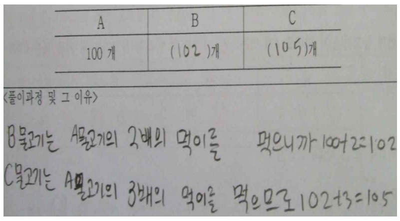
Ⅳ. 연구결과

1. 곱셈 문제 해결 과정에서 발현되는 초등학교 3학년 학생들의 사고 분석

<표 Ⅳ-1>를 통해 알 수 있듯이 전체적으로 75%가 넘는 학생들이 곱셈적 사고를 이용하여 곱셈 검사지를 해결하였다. 하지만 덧셈과 곱셈의 중간 사고 수준에 있는 Ⅲ수준의 학생들이 완전한 곱셈적 사고 수준에 이른 Ⅳ수준의 학생보다 더 많았다. 또한 전체 학생의 약 20% 정도가 아직도 덧셈적 사고 수준에 머물러 있었다. 또한 문제 유형에 따라 사고 수준의 분포가 차이가 있다는 것도 알 수 있었다.

<표 Ⅳ-1> 곱셈적 사고 수준 분포

사고 / 문제	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	전체 (N=170)
배 개념 알기	7 (4.1)	50 (29.4)	50 (29.4)	63 (37.1)	170 (100)
부분-전체 알기	1 (0.6)	21 (12.4)	108 (63.5)	40 (23.5)	170 (100)
전체	8 (2.3)	71 (20.9)	158 (46.5)	103 (30.3)	340 (100)

사고 수준	해결 과정	문제 해결의 예	
ⅡA			A보다 B, C가 차례로 +1씩 더 먹는다고 반응
ⅡB			A보다 B, C가 차례로 +2씩 더 먹는다고 반응
ⅡC			B는 A보다 +2, C는 A 또는 B보다 +3씩 더 먹는다고 반응

[그림 Ⅳ-1] 세분화한 Ⅱ수준에 대한 설명과 예

가. ‘배 개념 알기’ 문제 해결 과정에서 발현되는 사고 분석

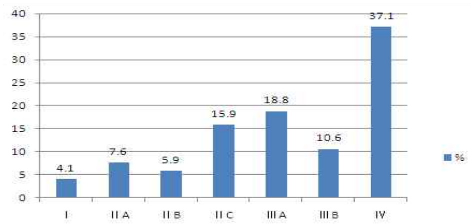
‘배 개념 알기’ 문제는 주어진 A, B, C 물고기가 먹는 먹이의 양이 배 관계이고, 세 물고기 중 하나가 먹는 먹이의 양이 주어졌을 때 나머지 물고기들의 먹이양을 구하는 문제이다. 이 과정에서 드러난 학생들의 사고의 특징은 다음과 같다.

첫째, ‘배 개념 알기’ 문제에서 곱셈적 사고를 통하여 문제를 해결하는 학생들이 전체의 37.1%로 가장 높게 나타났다. 그 다음으로 덧셈적으로만 사고하는 Ⅱ수준과 덧셈이 아직도 곱셈 문제 해결에 영향을 주어 덧셈과 곱셈을 혼용하는 Ⅲ수준이 각각 29.4%로 나타났다. 곱셈 단원의 도입과 곱셈 구구의 학습이 초등학교 2학년 시기에 이루어진다는 점으로 미루어 볼 때, Ⅱ수준과 Ⅲ수준이 각각 29.4%이며 이 둘을 합하면 58.5%나 되어 전체의 절반을 넘는다는 점과 완전한 곱셈적 사고 수준에 이르지 못한 학생이 완전한 곱셈적 사고 수준의 학생보다 더 많다는 사실은 주목할 만하다.

둘째, 같은 사고 수준이더라도 유형을 몇 가지로 나눌 수 있었다. 배 문제를 모두 더하여 해결하는 덧셈적 사고 수준의 학생들이라도 더하는 수의 크기나 문제 상황을 인지하는 지의 여부 등에 따라 3가지 수준으로 세분할 수 있었다([그림 Ⅳ-1]). 마찬가지로 곱셈적 사고 수준도 덧셈의 사용 여부나 기준량 인지 여부 등을 기준으로 2가지 수준으로 더욱 세분화 할 수 있었다. 이러한 결과 Ⅰ수준부터 Ⅳ수준까지 모두 7개의 수준으로 나눌 수 있었다.

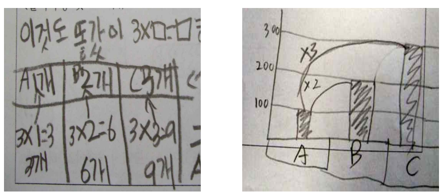
분포를 살펴보면 [그림 Ⅳ-2]와 같이 Ⅳ수준,

ⅢA수준, ⅡC수준, ⅢB수준, ⅡB수준, ⅡA수준, 1수준의 순서였다. 즉, 곱셈적 사고로 문제를 해결하는 학생들이 가장 많았고, 곱셈과 덧셈을 혼용하여 해결하는 학생들도 2번째로 높게 나타났다. 또한 ⅡC와 ⅢA를 합한 빈도인 59명(32.7%)과 Ⅳ수준의 학생들의 빈도인 63명(37.1%)만큼 높게 나타난다는 점은, 아직도 초등학교 3학년 학생들은 곱셈적 사고와 덧셈적 사고를 병행하는 불완전한 곱셈적 사고를 하고 있다는 것을 보여준다.



[그림 Ⅳ-2] 세분화된 사고 수준 비율

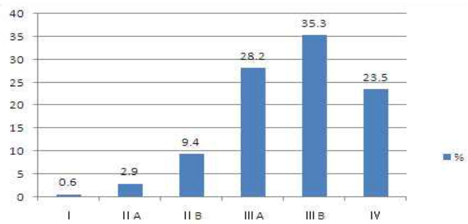
셋째. Ⅳ수준의 학생들은 [그림 Ⅳ-3]과 같이 그림, 식, 그래프 등 다양한 방법으로 세 물고기 사이의 배 관계를 표현했다. 이러한 표현들은 이전의 수준에서는 매우 드물게 나타났기 때문에 이러한 표현 양식이 학생들이 기준량을 인식하고 몇 배 하는데 주목하도록 도움이 되었다는 사실을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-3] '배 개념 알기'문제에 대한 학생들의 다양한 표현

나. '부분-전체 알기'문제 해결 과정에서 발현되는 사고 분석

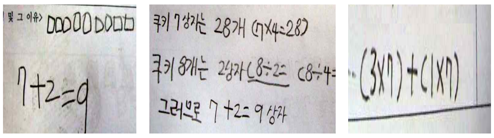
'부분-전체 알기' 문제를 해결하는 과정에서 드러난 학생들의 사고의 특징을 살펴보면 다음과 같다. 첫째, [그림Ⅳ-4]와 같이 완전한 곱셈적 사고 수준에 있는 학생보다 불완전한 곱셈적 사고 수준의 학생이 63.5%로 더 높은 비율을 차지했다. 이것은 곱셈이 도입되는 초등학교 2학년의 교과서에서 제시되는 곱셈 상황의 대부분이 묶음 상황으로, 부분-전체 추론을 필요로 하는 문제라기보다 제시된 두 수를 단지 곱하면 되기 때문이라고 볼 수 있다. 또한 덧셈을 사용하여 문제를 해결하는 모습을 보인 수준이 Ⅲ수준과 Ⅳ수준이며 이 둘을 합하면 87%나 된다. 이러한 비율은 아직도 대부분의 초등학교 3학년 학생들은 곱셈보다 덧셈으로 문제를 해결하는 것을 선호하며 덧셈적 사고가 곱셈 문제를 해결하는 과정에서 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다.



[그림Ⅳ-4] 세분화된 사고 수준 비율

둘째, 같은 사고 수준이더라도 유형을 몇 가지로 나눌 수 있었다. 예를 들어 덧셈적 사고 수준에서 더할 때 1의 단위를 계속해서 더해나가는 학생이 있었던 반면, 한 상자에 든 쿠키의 개수인 4를 뛰어 세기를 통하여 더해나가는 학생도 있었다. Ⅲ수준의 학생들은 불완전한 부분-전체 추론을 하고 있어 단위량을 인식하거나 합성 단위를 조정하는 것에 미흡한 모습을 발견할 수 있었다. 또한 이 수준의 많은 학생들은 곱셈식으로 문제 상황을 표현하더라도 이를 다시 동수누가의 덧셈식으로 환원하여 해

결했다.



[그림 Ⅳ-5] Ⅳ수준 학생의 문제 해결 과정

셋째, 수준에 따라 학생들의 문제 해결 방법에서 차이가 있었다. 덧셈적 사고 수준에 있는 많은 학생들을 상황을 그림으로 나타내어 해결했다. 이 때 대부분의 단위는 1로 쿠키 1개를 ○로 나타내고 이를 상황에 맞게 그려나간 후 하나씩 또는 묶어서 셌다. 반면 [그림 Ⅳ-5]에서 알 수 있듯이 곱셈적 사고 수준의 학생일수록 상황을 간단하게 식으로 나타내거나 말로 설명하여 해결했다.

2. 곱셈적 사고 수준에 따른 비례 문제 해결 전략 분석

곱셈 문제 해결과정에서 드러난 4가지 사고 수준의 학생들 중 질적 수준을 제외한 나머지 세 수준에서 각각 2명의 학생을 선정하여 이 비례 검사지를 투입하고 해결 과정을 면밀히 살펴보았다. 연구 문제 1에서 분류한 사고 수준Ⅰ의 학생들은 아직 수나 양에 대한 인식이 부족하며, 덧셈과 곱셈의 기본 연산도 제대로 수행하지 못하기 때문에 비례 검사지를 해결하는 것이 부족하다고 생각되었기 때문에 연구 문제 2의 대상자에서 이 수준의 학생은 제외시켰다. 비례 추론 검사지를 이들 6명의 학생에게 제시하고 그 반응을 살펴본 결과는 다음 <표 Ⅳ-2>와 같다. 표를 보면 Ⅱ수준의 학생들의 오답 비율이 높고 오류가 많이 드러난 반면, Ⅳ수준으로 갈수록 오답 비율이 낮아지고 다양한 비례 전략을 사용했음을 알 수 있다.

가. 덧셈적 사고 수준 학생의 비례 문제 해결 전략 분석

덧셈적 수준의 학생의 비례 추론 능력을 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 덧셈적 수준의 학생은 비례 문제 수행 정도가 매우 낮았다. 4가지 비례 추론 문제 유형과 비례가 아닌

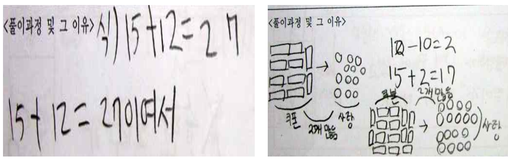
<표 Ⅳ-2> 비례 문제의 정답률 및 전략과 오류 유형

결과 / 학생		정답률			전략 및 오류 유형	
		정답		오답	전략	오류
		올바른 추론	잘못된 추론			
Ⅱ	1	0	1	9	·	잘못된 덧셈적 추론, 한 가지 변수에만 초점, 잘못된 질적 추론
	2	4	0	6	덧셈적 추론, 질적 추론	잘못된 덧셈적 추론, 한 가지 변수에만 초점, 잘못된 질적 추론
Ⅲ	1	4	1	5	질적 추론, 변화 인수 전략	잘못된 덧셈적 추론, 잘못된 질적 추론
	2	5	1	4	질적 추론, 덧셈적 추론	잘못된 덧셈적 추론, 한 가지 변수에만 초점, 잘못된 질적 추론
Ⅳ	1	8	1	1	질적 추론, 변화 인수 전략	잘못된 덧셈적 추론
	2	8	0	2	질적 추론, 덧셈적 추론, 변화 인수 전략	·

문제에 대해 정답률도 낮을 뿐만 아니라 풀이 과정에서 오류를 발견할 수 있었다. 특히 [그림 Ⅳ-6]과 같이 문제에 제시된 두 수를 의미 없이 더하거나, 두 수를 상대적으로 보지 못하고 절대적으로 보며 두 수의 차이를 구하여 이를 나머지 수에서도 그대로 적용하는 모습을 종종 발견할 수 있었다. 이는 학생이 문제의 상황보다 문제에 제시된 수치에 주목하며, 이를 곱하기보다 무조건 더하려 하는 경향이 강하다고 예상할 수 있다.

문항 내용	10개 쿠폰으로 12개 사탕을 살 수 있다. 15개 쿠폰으로 살 수 있는 사탕은 몇 개?

↓



Ⅱ1 Ⅱ2

[그림 Ⅳ-6] Ⅱ수준 학생의 비례 문제 해결 과정

둘째, 덧셈적 수준의 학생은 비례 문제를 해결할 때 주로 잘못된 덧셈적 추론을 하는 오류를 보였다. 이 수준의 학생이 가지고 있는 덧셈적 사고로 인해 비례 문제를 올바르게 해결하기 위해 필요한 상대적인 관점의 사고나 두 수나 양의 곱셈적 관계를 인식하는 것으로 나아가는 것을 어렵게 한다.

셋째, 덧셈적 수준의 학생은 비례 추론 문제 유형에 따라 문제 해결 수행 능력의 차이를 드러냈다. 이 수준의 학생은 4가지 비례 추론 문제 유형 중 질적 예측 및 비교 문제를 가장 잘 수행했으며, 이 때 질적 추론 전략을 사용하였다. 반면 미지수 구하기나 수리적 비교와 같은 문제 유형은 해결하지 못하였으며, 잘못된 덧셈적 전략을 사용하는 것을 발견할 수 있었다. 이는 덧셈적 수준의 학생은 문제에 특정한 수리적 정보가 제시되면 문제 상황보다 문제에 제시된 수에 주목하여 그 수들을 더하여 해결하려고 하는 반면, 문제에 구체적인 수가 제시되지 않았을 때는 문제 상황을 이해하고 그에 맞게 해결하려는 모습을 보인다고 짐작할 수 있다.

나. 과도기적 사고 수준 학생의 비례 문제 해결 전략 분석

과도기적 수준의 학생의 비례 추론 능력을 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 과도기적 사고 수준의 학생들은 문제 해결 시 덧셈과 곱셈을 혼용하여 해결했다. 또한 곱셈식을 세우더라도 덧셈으로 해결하는 모습을 종종 볼 수 있었는데, 그 이유에 대해 과도기적 사고 수준에 있는 한 학생은 곱셈으로도 해결할 수 있지만 덧셈으로 계산하는 것이 더욱 확실한 느낌이 들기 때문이라고 말하였다. 따라서 이 수준의 학생은 비례 문제를 해결할 때 주로 잘못된 덧셈적 추론과 잘못된 질적 추론을 하는 오류를 보였다. 이 수준의 학생들은 <에피소드 1>에서 살펴 볼 수 있듯이, 곱셈 문제 해결 과정에서 배를 덧셈으로 이해하고 해결하는 모습을 보였는데, 이것이 비례 문제 해결과정에도 영향을 끼친 것이라 볼 수 있다. 또한 두 비를 비교할 때 두 변수를 동시에 고려하지 못하고 한 가지 변수만 고려하는 모습을 발견할 수 있었다.

<에피소드 1 : 잘못된 덧셈적 전략을 사용하여 문제를 해결한 학생의 풀이 설명>

Ⅲ2학생 : 한 명이 일을 하면 12일 동안 할 수 있어요.

연구자 : 어떻게 12일이 나왔어요?

Ⅲ2학생 : 그게…한 명이 했을 때 12일 동안 할 수 있는데, 한 명이 더 하면 2일

일찍 끝날 수 있어요. 그렇게 하면 4명이 할 때 6일이 나와요.

연구자 : 어떻게 2일 일찍 끝날 수 있는지 알았지?

Ⅲ2학생 : 2로 잡으면 딱 4일하면 그렇게 나와요.

연구자 : 그럼 학생이 8명일 때는 며칠 걸리지?

Ⅲ2학생 : 2배가 된 거잖아요. 그러니까 2명 더 들어오니까 4를 빼면 2일이 걸려요.

둘째, 과도기적 사고 수준의 학생은 반비례 상황을 어느 정도 인식할 수 있었으며 동치비를 적용하여 비례 문제를 해결할 수 있었다. 반비례 상황의 미지수 구하기 문제에서 하나의 양이 증가할 때 나머지 양은 줄어든다는 것을 적용하여 문제를 해결했다. 또한 단위 비율이나 변화 비율이 비 정수일 때 이를 동치비로 만든 다음 여기에 정수배를 하여 문제를 해결했다. 아직 비와 비례를 학습하지 않았지만, 이 수준의 학생은 상대적인 사고를 할 수 있으며, 두 수나 양 사이의 곱셈적 관계를 어느 정도 이해하고 있다고 이해할 수 있다.

다. 곱셈적 사고 수준 학생의 비례 문제 해결 전략 분석

곱셈적 수준의 학생의 비례 추론 능력을 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 곱셈적 사고 수준의 학생은 본 연구의 비례 검사지에 제시된 대부분의 문제 유형을 해결할 수 있었다. 곱셈적 사고 수준의 학생들은 반비례 상황의 미지값 구하기, 질적 예측 및 비교하기의 비례 문제 유형과 비례가 아닌 문제 유형의 2문제를 모두 해결했다. 특히 <에피소드 2>에서 알 수 있듯이 반비례 상황의 미지수 구하기 문제에서 반비례 상황을 인지한 점, 불변량을 구하여 해결한 점은 이 수준의 학생에게만 발견할 수 있었던 모습이다. 수리적 비교하기 문제에서도 단위량 사이의 정수배 관계를 인지하고 변화 인수를 곱하여 두 비율을 비교하는 모습을 볼 수 있었다. 이것은 본 연구에 참여한 덧셈적 사고 수준과 과도기적 사고 수준의 학생들보다 높은 비례 문제 해결 능력을 보여준다.

<에피소드 2 : 불변량을 인식하고 반비례 문제를 해결한 Ⅳ2학생의 풀이 과정>

연구자 : 어떻게 풀었는지 설명해볼래?

Ⅳ2학생 : 4명이 6일 동안 해야 일이 완성되잖아요. 그러니까 이 둘을 곱하면 24가 나오고, 8명이면 2배가 된 거니까 24를 8로 나누면 3일에 완성돼요.

연구자 : 그럼 이 수 24가 무엇을 뜻하는 거야?

Ⅳ2학생 : 일이 완성되는 거예요.

연구자 : 일의 완성?

Ⅳ2학생 : 네. 그러니까 4명이서 6일 동안 해야지 일이 완성 돼요. 만약에 5일 하면 아직 일이 안 끝나요.

둘째, 곱셈적 사고 수준의 학생이 문제 해결 과정에서 잘못된 덧셈적 추론과 그림에 의존한 문제 해결 등의 오류 유형을 확인할 수 있었다. 비록 배 개념과 부분-전체를 이해하고 있는 곱셈적 사고 수준의 학생이더라도 비례 문제를 해결할 때 그림을 그리거나 동수누가로 문제를 해결하였으며, 이 때 이러한 방법들이 도움이 될 때도 있었지만 잘못된 방향으로 가는 경우도 있었다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구 결과를 바탕으로 초등학교에서의 곱셈 지도 방안에 대한 시사점을 논의하면 다음과 같다. 첫째, 초등학교 3학년 학생들의 사고 수준은 문제 유형에 따라 달랐지만 두 가지 유형의 문제유형을 종합하여 전체적으로 살펴보면 과도기적 사고 수준(46.5%) > 곱셈적 사고 수준(30.3%) > 덧셈적 사고 수준(20.9%) > 질적 사고 수준(0.3%)의 순서로 나타났다. 이러한 분포는 많은 학생들이 덧셈 상황과 곱셈 상황을 명확히 구분하지 못하며 덧셈적 사고와 곱셈적 사고를 병행하는 불완전한 곱셈적 사고를 하고 있다는 것을 의미한다.

곱셈을 도입하는 과정에서 동수누가를 이용하면 아직까지 덧셈이 익숙한 학생들에게 곱셈을 좀 더 쉽고 친숙하게 제시할 수 있다는 장점이 있지만, 곱셈과 덧셈은 분명히 다른 사고를 요구한다는 점으로 미루어 볼 때(Piaget, 1987), 이는 분명히 고려해야할 문제이다. 현행 교육과정에서는 곱셈이 처음 도입되는 2학년 시기에 주로 동치묶음의 곱셈 상황이 제시되고 있으며, 비율이나 비교, 정렬과 넓이, 조합 등의 상황은 거의 다루고 있지 않다(교육과학기술부, 2009). 이러한 동치묶음 상황은 같은 수의 반복된 덧셈으로 표현하고 이를 뛰어 세기나 묶어 세기로 해결하고 있기 때문에 학생들이 몇 배(倍)한다는 것은 같은 수를 몇 번 더하는 것으로 인식하게 되고 이것은 후속 학습으로 나아가는데 걸림돌이 될 수도 있다.

예를 들어 비례 학습에서 정비례 상황의 경우 2배, 3배 등을 하는 것이 같은 수를 2번, 3번 더하는 것과 같은 결과가 되지만, 이러한 계산 방법을 반비례 상황에도 적용하여 같은 수를 2번, 3번 빼는 것으로 계산하면 이것은 상황과 맞지 않는다. 이에, 아직 곱셈 및 비례에 대한 이해가 부족한 학생들이 무조건 덧셈으로 곱셈 문제를 해결하는 것은 후속 학습으로 나아가는데 걸림돌이 될 수 있다. 따라서 이러한 현행 교육과정에서의 내용 구성이 본 연구 결과와도 관련이 있다고 판단되는 바, 다양한 유형의 곱셈 상황을 여러 학년에서 꾸준히 제시하고 이 때 동수누가 뿐만 아니라 배(倍)의 의미에 주목하는 것이 학생들의 곱셈적 사고의 신장을 위해 필요하다고 본다.

둘째, 본 연구에서 문제 유형에 따라 사고 수준의 분포가 다르게 나타났다. '배 개념 알기'문제에서는 곱셈적 사고 수준의 학생들이 과도기적 사고 수준보다 더 많은 비율을 보인 반면, '부분-전체 알기'문제는 과도기적 사고 수준의 학생들이 곱셈적 사고 수준보다 더 많은 비율을 차지했다. 이는 초등학교 3학년 학생들은 아직 전체-묶음-낱개(원소)를 동시에 생각하는 능력과 전체와 부분을 분해하고 합성하는 능력이 부족하다는 것을 의미한다.

본 연구의 '부분-전체 알기'문제와 유사한 상황은 곱셈이 처음 도입되는 2학년 1학기 곱셈 단원에서 1문제 밖에 제시되고 있지 않다(교육과학기술부, 2009). 대부분의 문제는 낱개와 묶음의 개수를 제시하고 전체의 개수를 구하는 문제들로 동수누가로 해결가능하기 때문에 부분과 전체의 관계나 합성 단위에 대해 생각해 볼 수 있는 기회가 거의 없다. 곱셈적 사고를 한다는 것이 일(1) 이상의 합성 단위를 다루고, 하나의 합성 단위를 다른 합성 단위들로 분배하는 방법으로 두 가지 종류의 합성 단위를 통합할 수 있을 때를 의미한다고 할 때(Steffe, 1994), 부분-전체 사고는 이러한 합성 단위를 인식하고 부분과 전체를 동시에 생각할 수 있게 만드는 곱셈의 필수적 사고이다. 따라서 곱셈과 관련한 교수·학습 시 부분-전체 사고를 할 수 있는 기회를 제시하는 것이 필요하다.

셋째, 본 연구에서 전체적으로 곱셈적 사고와 과도기적 사고 수준의 학생이 더 많은 분포

와 비율을 보였지만 덧셈적 사고 수준의 학생도 전체의 약 20%를 차지하고 있었다. 곱셈이 처음 도입되는 시기가 2학년이라는 점을 고려하면 덧셈적 사고 수준의 학생이 다른 수준에 비해 낮은 비율을 보였다는 사실보다, 이 수준 학생들이 차지하는 빈도와 비율에 주목할 필요가 있다.

곱셈적 사고는 덧셈적 사고와 분명히 다른 수준의 사고를 필요로 한다. 즉, 하나의 단위를 계속 더하여 해결할 수 있는 덧셈적 사고와 달리 곱셈적 사고는 낱개-묶음-전체 등 추상화 수준과 포함관계를 수반하기 때문에 좀 더 고차원적의 사고라 말할 수 있다. 또한 곱셈적 사고는 곱하는 상황에만 그치는 것이 아니라 후속 학습인 나눗셈, 비, 비례에서도 필수적인 사고이다(Singh, 2000). 따라서 교사는 학생이 발달 단계에 따라 자연스럽게 곱셈을 익힐 수 있다고 기대하기보다, 의도적으로 곱셈 상황을 제시하고 곱셈을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 기회를 많이 제시할 필요가 있다.

넷째, 본 연구 결과 학생들의 곱셈적 사고 수준에 따라 비례 문제 수행 능력에 있어서 차이를 보였다. 즉, 곱셈적 사고 수준 > 과도기적 사고 수준 > 덧셈적 사고 수준의 순으로 비례 추론 문제를 잘 해결했으며, 이 때 덧셈적 사고 수준의 학생은 거의 모든 유형의 비례 문제를 해결하지 못하였다. 비록 비례 검사지의 연구 대상자가 6명의 소수 학생들이지만, 이러한 결과는 곱셈적 사고는 비례 추론과 관계가 있다는 선행 연구의 주장을 다시 한 번 뒷받침한다고 할 수 있다(Lesh et al., 1988; Singh, 2000). 즉, 비 개념을 형성하고 발달시키기 위해서는 상대적인 관점과 곱셈적 사고가 필수적이므로 곱셈적 사고는 비례 추론의 기반이 된다고 할 수 있다.

본 연구에서도 곱셈적 사고 수준의 학생들은 아직 학습하지 않은 비례 문제에서 반비례 상황의 미지수를 구하거나 세 개의 비를 비교하는 등의 모습을 보였다. 또한 이 과정에서 학생들이 두 양을 덧셈적 관계가 아닌 곱셈적 관계로 인식하는 것은 올바른 문제 해결로 이끄는 중요한 요소가 되었음을 확인할 수 있었다. 즉, 비와 비례를 학습하지 않은 초등학교 3학년 학생들이라도 곱셈적 사고가 형성되어 있으면 다양한 유형의 비례 문제를 해결할 수 있었다. 이러한 결과는 곱셈적 사고의 중요성을 언급한 선행 연구 결과와 부합하며(Lamon, 2007; Reys et al., 2009; Singh, 2000), 따라서 교사는 곱셈을 도입하는 과정에서 학생들이 덧셈적 관계와 곱셈적 관계를 명확히 구분하고 곱셈적 사고가 잘 형성될 수 있도록 도와야 한다.

다섯째, 본 연구 결과 비례 문제 유형에 따라 학생들의 수행 능력의 차이가 있었다. 학생들은 대체적으로 비례와 비례가 아닌 문제를 구별할 수 있었으며, 질적 예측 및 비교하기 문제 > 미지값 구하기 > 수리적 비교의 순으로 문제를 해결했다. 이러한 결과는 비례를 학습한 9학년 학생을 대상으로 실시한 연구의 성취 정도가 미지값 구하기 > 수리적 비교 = 질적 예측 및 비교로 나타난 것과 다소 차이가 있다(Singh, 2000). 이의 원인을 대부분의 학생들이 덧셈적 사고와 곱셈적 사고를 병행하고 있기 때문에 구체적인 수치가 제시되면 그 수를 덧셈으로 해결하여 잘못된 방향으로 나아가게 할 수도 있기 때문이라 유추해 볼 수 있다. 따라서 비록 학생들이 비와 비례를 학습하기 전이지만 질적 정보를 가지고 상대적인 사고를 해야 하는 문제에서 더 높은 성취도를 보인다고 할 수 있다.

비례 추론 능력은 비례식을 배운 고학년 학생들이 흔히 사용하는 전략 중의 하나인 동치비를 만들어 미지값을 구하는 능력이 아니다

(NCTM, 2000). 비례 추론에서는 관련된 양을 이해하고 그들의 관계를 파악할 수 있는 능력이 매우 중요하다. 이에 본 연구를 통해 드러난 학생들의 질적 예측 및 비교하기 문제에 대한 수행 정도가 가장 높다는 본 연구 결과는 시사하는 바가 크며, 따라서 평소 3학년 학생들이라도 곱셈 단원을 포함한 다양한 곱셈과 비례 상황에서 상대적인 관점과 곱셈적 관계를 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하는 것이 바람직하다.

마지막으로, 본 연구 결과 학생들의 곱셈적 사고 수준에 따라 사용하는 비례 추론 전략 및 발생하는 오류 유형이 다르게 나타났다. 본 연구에서 비례 문제를 해결하기 위해 대부분의 학생들이 사용한 비례 추론 전략은 덧셈적 추론 전략이고, 발생한 오류 유형도 잘못된 덧셈적 추론이다. 수준에 따라 정도의 차이는 있지만 곱셈적 사고 수준의 학생이라도 비례 문제 유형 전반에 걸쳐 덧셈적 추론 전략을 가장 많이 사용했다. 사실 덧셈적 사고와 절대적 관점의 사고가 학생들에게 자연스럽게 형성되어 있기 때문에, 다양한 상황에서 상대적 관점을 갖도록 하기 위해서는 오랜 시간과 다양한 경험이 필요하다(Lamon, 1999).

이와 같은 학생들의 해결 과정은 학생들의 이전 사고가 후속 학습에서 요구하는 사고에 큰 영향을 미치어 더욱 발전하게 할 수도, 그렇지 않을 수도 있음을 알 수 있게 한다. 종합하여 보면 곱셈이 처음 도입되는 시기에 학생들이 어떤 사고를 형성하는 지는 매우 중요한 문제라고 할 수 있다. 동수누가를 통한 곱셈의 도입은 아직까지 덧셈이 친숙한 학생들에게 쉽게 다가갈 수 있지만, 이것을 후속학습과 관련지어 생각해본다면 바람직하지 못하다고 할 수 있다. 따라서 곱셈의 배 개념, 부분-전체 사고, 상대적 관점을 신장시킬 수 있는 방향으로 곱셈을 지도하는 것은 비례 문제를 올바르게 해결하고 이 과정에서 생기는 잘못된 덧셈적 추론과 같은 오류유형을 줄일 수 있는 방법이 될 수 있다.

참고문헌

교육과학기술부 (2009). **수학 2-2.** 서울: 두산동아(주).

박정숙(2009). **학생의 비례추론의 분석 모형과 특성 분석.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

안숙현(2008). 5,6,7학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구,** 18(1). 103-121.

이준자(2001). **초등학생들의 곱셈적 사고에 대한 조사; 1-5학년을 중심으로.** 한국교원대학교 석사학위논문.

황우형, 김경미(2008). 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 분석. **학교수학,** 47(4), 519-543.

Clark, F., & Kammi, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal of Research in Mathematics Education, 27*(1), 41-51.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owen(Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan Publishing Company.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of* *logical thinking: From childhood to adolescence*. New York: Basic Books, Inc.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

____________(2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing and the National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Siemon, D., & Breed, M. (2006). *Assessing multiplicative thinking using rich tasks.* Paper presented at the annual conference of the Australian Association for Research in Education.

Siemon, D., Izard, J., Breed, M., & Virgona, J. (2006). The derivation of a learning assessment framework for multiplicative thinking. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2*, pp. 113-120). Prague, Czech Republic: Charles University.

Siemon, D., & Virgona, J. (2001). *Road maps to numeracy - Reflections on the middle years numeracy research project.* Paper presented at the annual conference of the Australian Association for Research in Education, Fremantle, WA.

Sinclair, H. (1990). Learning: The interactive recreation of knowledge. In L. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education* (pp. 19-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Singh(2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*(3), 271-292.

Steffe, L. (1994). Children's multiplying scheme. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplication reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-39). Albany, NY: State University of New York Press.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepa, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113-138.

An Analysis on Third Graders' Multiplicative Thinking and Proportional Reasoning Ability

Kim, Jeong Won (Sintanjin Elementary School))
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

The primary purpose of this study is to survey multiplicative thinking levels and its characteristics of third graders in elementary school and to analyze how to use it when they solve the proportional problems. As results, the transition thinking ranked the highest among the four kinds of thinking levels when the 3^{rd} graders solved the multiplication problems. It means that the largest numbers of students still can not distinguish the additive and multiplicative situations completely and remain in the transition thinking, which thinks both additively and multiplicatively. In addition, the performance of solving proportional problems was distinguished from the levels of thinking. Through this study, we can give some implications of the importance of multiplicative thinking and instructional methods related to multiplication.

Key Words : additional thinking(덧셈적 사고), multiplicative thinking(곱셈적 사고), proportional reasoning ability(비례 추론 능력), thinking levels(사고 수준), times(배), part-whole(부분-전체)

논문접수 : 2013. 1. 10
논문수정 : 2013. 1. 30
심사완료 : 2013. 2. 7