대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 1, 53 ~ 74. Feb 2013

GSP를 사용한 비유클리드 원판모델 학습에서 나타난 중학교 수학 영재들의 평행선에 관한 인식 및 언어 표현 방식 분석[1)]

홍 성 관*

본 논문에서는, 주어진 컴퓨터 작도 도구와 측정 도구를 이용하여 원판의 내부에 물리적 실험을 통하여 비유클리드 기하학에서 주어진 쌍곡직선 밖의 점을 지나는 어떤 쌍곡직선이 주어진 직선과 평행이 될 필요충분조건을 탐구하는 과정에서 나타나는 중학교 수학 영재들의 사고 특성과 언어 표현 방식의 특성을 분석하였다. 중학교 수학 영재들이 실험과 귀납적 사고를 통하여 자신이 경험하지 않은 새로운 기하학적 사실을 획득하고 그를 언어로 표현하는 방식을 살펴봄으로써, 기하 개념의 형성과 발달 과정에 대한 시사점을 얻을 수 있을 것으로 생각된다.

I. 연구의 필요성 및 목적

Sheffield(1999)는 수학영재 교육의 핵심은 기존의 사고 체계를 초월한 새로운 수학을 발명할 수 있는 능력을 최대한 발현할 수 있도록 창의성을 기르는데 있다고 주장하고 있다. 창의성의 개발을 위한 학습 자료와 교수법을 위한 지표를 마련하기 위해서는 김지원·송상헌(2004), 최영기·도종훈(2004)이 주장한 바와 같이 수학영재들의 정의적·지적 연구가 선행되어야 한다고 생각한다.

중학교 수학영재들이 사용하는 대부분의 현행 중등학교 교과서를 보면, 평평한 종이 위에서 자와 (곧은 자 또는 삼각자) 컴퍼스를 이용한 실험을 통하여 누구나 관측할 수 있는 명백한 사실들을 공준이라는 언급 없이 공준처럼 사용하고 이를 토대로 직관적으로 자명하지 않은 기하학적 사실을 논리적으로 유도하고 증명하고 있다. 즉 경험적 접근을 통하여 직관적으로 명백한 사실을 받아들이도록 한 뒤 직관적으로 자명하지 않은 다른 정리들을 논리적으로 밝혀나간다는 접근 방식을 채택하고 있다는 것이다.[2)]

이러한 방식의 교수학습은 학생들이 현실에서 경험하는 물리적 현상을 토대로 한 직관을 사고의 기초로 삼기 때문에 수학적 진리를 마치 물리적 진실처럼 생각하게 된다. 예를 들면 유클리드 기하를 마치 칠판 위에서 성립하는 물리적 진실들의 모임처럼 생각하게 된다.

중등학교 학생들에게 비유클리드 기하학의 존재 가능성을 납득시키고자 할 경우의 예를 생각해보자.

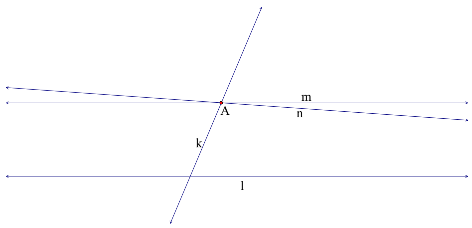
[그림 I-1]과 같이 칠판 위에 한 개의 직선 l과 그 직선 밖의 한 점 A를 지나는 두 개의 직선 m과 n을 그리고 또 A를 지나는 횡단선 k를 그리자. 직선 l과 m은 k에 대해 동위각과 엇각

* 부산대학교(aromhong@hanafos.com)

1) 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

2) 예를 들면 직선의 결정 조건, 평면의 결정 조건, 평행선의 성질, 삼각형의 합동 조건 등은 공준에 해당하는 사실들이지만 대부분의 중학교 수학교재에서는 직관적으로 자명한 사실처럼 설명하고 있다.

의 크기가 같다. 학생들에게 l과 m, n이 동시에 평행한 세상이 존재한다고 가정하여 비유클리드 기하학을 도입하려고 하면 강력한 인식의 저항에 부딪히게 된다. 왜냐하면 그들이 생각하는 유클리드 평면은 칠판이라는 물리적 공간과 동일한 것으로 생각하기 때문에 n은 반드시 l과 만나게 되지 만나지 않는 그런 경우를 상상할 수 없기 때문이다.



[그림 I-1]

이는 본 연구자도 영재수업 시간에 위와 같은 일이 일어나는 수학적 공간을 가정했을 때 거의 모든 영재학생들이 직선 n은 반드시 l과 만나므로 그런 가정은 가능하지 않다고 반론을 제기하였다.

위 그림은 평행선이 복수인 공간에서 일어날 수 있는 사건에 대한 상징일 뿐이지만 칠판이라는 물리적 공간과 그 상징적 공간을 동일시하기 때문에 m과 n이 동시에 l과 평행이라는 그런 가정을 받아들일 수 없게 되는 것이다.

이러한 사고의 제약을 없애는 한 가지 방안은 비유클리드 기하학이 실제로 성립하는 가상의 수학 공간을 창조하고 그 속에서 실제로 여러 실험과 조작이 가능하도록 Geometer's Sketchpad (GSP)와 같은 동적기하 소프트웨어를 사용한 수학실험을 하도록 하는 것이다. 컴퓨터 화면 속의 공간은 우리가 오감으로 느끼는 종이나 칠판과 같은 현실적 공간과는 다르므로 가상의 수학적 공간으로 받아들이고 그 속에서 행해지는 조작과 실험은 수학적 사실로 수용할 가능성이 높게 된다.

본 논문에서는, 중학교 수학 영재들이 GSP로 만들어진 작도 도구를 이용한 탐구 활동을 통하여, 첫째로 주어진 쌍곡공간에서 평행선이 복수임을 어떻게 인지하는지, 둘째로 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선을 마우스로 움직일 때 생기는 평행선과 비평행선의 경계가 되는 쌍곡직선, 즉 극한평행선을 어떤 방식으로 찾고 표현해내는가, 셋째로 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선이 평행선이 되기 위한 필요충분조건을 어떻게 인지하고 어떤 방식의 언어를 사용하여 기술하는가를 분석해내고자 한다.

이러한 과정은 곧은 자와 컴퍼스를 이용하여 평평한 종이 위에 유클리드 평면기하에서 성립하는 평행선의 성질을 파악해내는 과정과 유사하다고 할 수 있다.

실험과 귀납적 사고를 통하여 자신이 경험하지 않은 새로운 기하학을 만들어가는 과정을 통하여 사고의 자유로움을 획득하고 창의적 사고의 실례를 경험할 수 있으며 또 유클리드 기하학의 본질을 더 잘 파악할 수 있으므로 수학영재를 위한 교수·학습 자료의 개발에 도움을 줄 수 있을 것이다.

II. 이론적 배경

1. 구성주의와 정신모델

본 논문에서는 수학적 지식의 구성 과정은 학습자의 구체적인 행동에서 시작하여 반영적 추상화에 의해 점진적으로 다양한 수학적 지식을 구성해 가는 과정이라고 본다.

개개인이 행동이나 사유 속에서 다루고 있는

상황을 해석하거나 추론을 유발하는 추상화의 통합체를 정신모델이라고 하는데 이는 언어로 표현할 수 없는 경험이다. (Battista, 1994; Greeno, 1991; Johnson-Laird, 1983) 개개인은 그 자신이 처한 문제에 대한 가능한 해법을 탐구하기 위해 상황 내에서의 상호작용에 대한 모의실험을 가능하게 하는 정신모델을 가동하여 상황에 대해 판단한다. 정신모델은 학습자로 하여금 물리적 세계에서 시행할 수 있는 것과 같은 그런 실험을 행할 수 있도록 하는 것은 물론 실제적 물체들을 정신적으로 탐색하고 통합하며 변환할 수 있게 해준다.

이러한 정신모델을 독자적으로 구성하는 능력은 공식적 수학 체계를 이용하고 효과적으로 이용하는 개인의 능력을 결정짓는 중요한 요소가 된다.

따라서 연관된 추상화를 현상에 대한 보다 더 복합적인 정신모델로 통합시킬 수 있는 방식으로 학습자가 행동, 추상화, 반영화를 반복함으로써 의미있는 수학 학습의 모습이 드러난다.

유클리드 평면기하의 경우에도 자와 컴퍼스를 조작하는 학습자의 행위에서 추출되는 시각적 운동 감각적 경험들은 이 행위에 대한 반영을 수반하여, 유클리드 평면의 기하학적 도형에 관한 추론에 이용할 수 있는 정신모델을 이루도록 통합되고 있다.

따라서 의미있는 비유클리드 기하 학습 프로그램이 되기 위해서는 학습자가 능동적인 지식 구성 활동을 하도록 유도해야 하고, 학습자 자신의 조작 활동을 사고 대상으로 삼아 반영적 추상화를 이룰 수 있는 기회를 제공할 수 있어야 하며, 기하학적 도형에 관한 추론에 이용할 수 있는 정신모델로 통합되도록 할 수 있어야 할 것이다.

2. 상황서술 이론

자와 컴퍼스를 가지고 기하학을 배우는가와, 컴퓨터 소프트웨어를 가지고 배우는가에 따라 기하학적 개념은 서로 다르게 발달된다. 학습이 일어나는 상황이나 설정이 지식을 얻는 방법이나 해석하는 방법에 영향을 미친다는 것을 나타낸다. 상황서술이란 용어는 학습이 그 환경으로부터 독립적이 아니라는 것을 의미한다.

Hölzl(1996)는 상황서술 이론을 제안했는데, 그 이유는 수학적 소프트웨어를 사용한 학생들은 그들이 소프트웨어로 경험한 상호작용의 유형을 반영하는 언어를 개발하기 때문이다. 이러한 컴퓨터 중심적 서술은 흔히 능동적 동사, 특히 움직임을 표현하는 동사를 포함한다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 2011년도 P-대학 부설 과학영재교육원의 중등 수학 심화·사사 과정 프로그램에 참여하는 중학교 2-3학년 19명이다. 이 19명은 30명 정원의 중등 수학 심화과정에서 우수자로 선발되어 20명 정원의 수학 심화·사사 과정으로 진급한 학생들 중 1명을 제외한 19명이다. 본 논문에서는 이 19명의 영재학생들을 무작위로 알파벳을 부여하여 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S로 명명할 것이다.

이들은 모두 GSP 사용법과 GSP 환경에서의 학습에 대한 경험이 있었으며, 선행 학습을 통하여 정규 중학 교과과정을 거의 마친 상태에 있었다. 특히 비유클리드 원판모델의 이론적 토대가 되는 원에 대한 지식을 이미 갖추고 있었다.

2. 연구 방법과 절차

우선 인터넷에서 Poincare disc.gsp[3] 파일을 내려받도록 한다. 이 파일은 쌍곡선분(hyperbolic segment), 쌍곡직선(hyperbolic line), 쌍곡수직이등분선(hyperbolic perpendicular bisector), 쌍곡수선(hyperbolic perpendicular), 쌍곡각이등분선(hyperbolic angle bisector), 중심과 다른 한 점이 주어진 쌍곡원(hyperbolic circle by CP), 중심과 반지름이 주어진 쌍곡원(hyperbolic circle by CP)을 작도할 수 있는 사용자 도구와 쌍곡각(hyperbolic angle), 쌍곡거리(hyperbolic distance)를 측정할 수 있는 사용자 도구를 포함하고 있다. 이 중 쌍곡선분, 쌍곡직선, 중심과 다른 한 점이 주어진 경우 쌍곡원을 작도할 수 있는 사용자 도구와 쌍곡각, 쌍곡거리를 측정할 수 있는 사용자 도구만을 실험 도구로 사용하도록 강제하였다.

이런 강제 규정을 사용한 이유는 유클리드의 원론이 선분의 작도와 중심과 다른 한 점이 주어진 원의 작도를 기반으로 하고 있기 때문에 장차 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학의 차이점과 동일점을 비교하기 위함이다.

학생들에게 위의 실험 도구들을 사용하여 다음의 탐구과제들을 해결하도록 하였다: 1) 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡평행선은 몇 개인가? 2) 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선을 마우스로 움직여보면 평행선인 경우와 평행선이 아닌 경우들이 발생한다. 이 때 경계가 되는 쌍곡직선의 특성을 탐구하라. 3) 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선이 평행선이 되기 위한 필요충분조건을 찾고 그를 언어로 표현해보라.

실험은 격주로 총 6시간 행해졌는데, 첫 2시간은 Poincare disc.gsp 파일의 사용자 도구를 사용하는 방법의 연습에, 나머지 4시간은 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 평행선의 개수, 극한평행선의 작도, 그리고 점 A를 지나는 임의의 쌍곡직선이 평행선이 될 필요충분조건을 탐색하고 그를 언어로 표현해 내도록 하였다.

본 연구에서 수집하고 분석한 주된 자료는 학생들의 발견 과정을 추적할 수 있는 GSP 파일과 개개인의 문제 해결 과정을 관찰한 연구자 필드노트이다. GSP 문서 안에 자신의 탐구 과정을 글상자에 기록하도록 하였으며, 수식 등을 표현하기 어려운 경우 제공된 종이에 자신의 결과를 적어 제출하도록 하였다. 학생들 개개인이 제출한 결과물과 연구자 필드 노트를 중심으로 학생들의 탐구 과정에 나타난 특징을 분석하였다.

그리고 탐구 과제를 해결하는 과정이나 결과물에서 특이점을 보이는 학생들은 휴식 시간에 개별 면담을 하여 그들의 사고 과정이나 의도를 파악하는 참고자료로 삼았다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

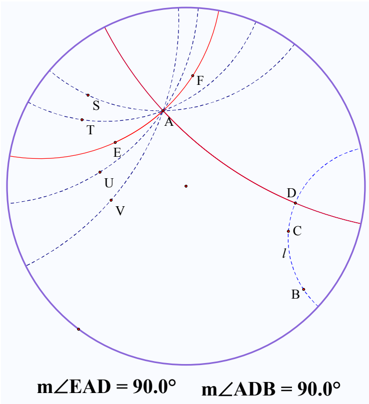
1. 연구 문제 A) : 복수 평행선의 인지 과정 분석

주어진 첫 번째 탐구과제는 주어진 쌍곡직선 l 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선은 몇 개인가를 조사하는 것이다. 이 탐구과제의 목적은 학생들이 하고 있는 실험을 통하여 기존의 유클리드 기하학과는 다른 기하학의 존재를 인지하도록 만드는 것이다.

연구자는 학생들이 이 과제를 금방 해결할 것으로 예측하였으나 결과는 달랐다. 학생들 대부분은 [그림 IV-1]의 E 학생의 결과물에서 보듯이 A를 지나고 l에 수직인 쌍곡직선 AD를 그리고 난 뒤 A를 지나며 쌍곡직선 AD에 수직인

3) http://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Advanced_Sketch_Gallery.htm에서 내려받을 수 있는 공개 파일이다.

쌍곡직선 EF를 작도하고 있었다.



[그림 IV-1]

중학교 수학 교과서에서 평행선의 필요충분조건을 동위각(혹은 엇각)이 같은 두 직선으로 기술하고 있기 때문에 이런 결과가 나왔다고 생각된다.

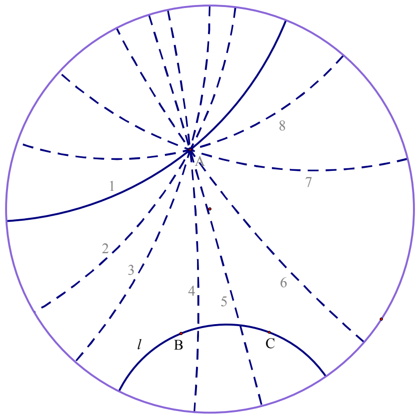
연구자가 전체에게 평행선의 정의를 물었을 때 대다수가 “동위각(혹은 엇각)이 같은 두 직선”이라고 대답하였고 소수만이 “서로 만나지 않는 두 직선”이라고 대답하였다.

연구자가 [그림 IV-1]과 같이 동위각이 직각인 쌍곡직선을 그리고 쌍곡직선 EA를 마우스로 클릭하여 [그림 IV-1] 에서 점선으로 표시된 쌍곡직선 SA처럼 위로 이동시킨 뒤 이 쌍곡직선은 평행선이 되는가를 물어보자 그때에야 비로서 모든 학생들이 정의에 따라 평행선을 인지하게 되었다.

또한 [그림 IV-1]의 점선으로 표시된 것처럼 쌍곡직선 EA가 계속 평행인 상태를 유지하며 변환됨을 보여주자, 모든 학생들이 평행선은 무수히 많으며 두 평행선 사이에 낀 쌍곡직선도 역시 평행선이 됨을 인식하게 되었다.

이 시점에 이르러서야 주어진 쌍곡기하 모델에서의 평행선 행동양식에 대한 정신모델이 어느 정도 형성되고 구체적으로 조작 가능한 대상으로 인식하게 되었다.

2. 연구 문제 B) : 극한평행선의 인지와 작도 과정 분석



[그림 IV-2]

[그림 IV-2]에서 볼 수 있듯이, 주어진 쌍곡직선 l 밖의 한 점 A를 지나며 l에 평행인 쌍곡직선이 1의 위치에 있을 때 그 쌍곡직선 상의 A와 다른 점을 마우스로 클릭하여 그 쌍곡직선을 반시계 방향으로 2, 3, ... , 7, 8 위치를 거쳐 원래 위치와 반대가 되도록 해보자. 그 동안 이 움직이는 쌍곡직선은 원판내부의 모든 점을 (원 쌍곡직선 상의 점 제외) 꼭 한 번 통과하게 된다. 이때 위치 3과 4 사이에 평행이었다가 평행이 되지 않는 경계선이 존재하고, 위치 5와 6 사이에 평행이 아니었다가 평행이 되는 경계선이 존재한다.

연구자가 점 A를 지나는 평행인 쌍곡직선을 [그림 IV-2]의 3, 4 위치에서 앞뒤로 반복하여 움직여서 평행인 경우와 평행이 아닌 경우를 여러 번 반복하여 보여주었을 때 학생들 중 대다수가 불현듯 이 경계선의 존재를 인식하게 되었다. 마찬가지로 [그림 IV-2]의 5, 6의 위치에서 앞뒤로

반복하여 움직여서 평행이 아닌 경우와 평행인 경우를 반복하여 보여주었을 때에도 이 경계선의 존재를, 그리고 이 두 경계선들이 다른 쌍곡직선들과는 다른 특별한 역할을 하고 있음을 인지하게 되었다.

학생들도 명확하게 왜 이 두 경계선이 중요한 의미를 가지고 있음을 인식하게 되었는지 설명할 수 없었으며, 이는 언어로 표현할 수 없는 경험이라고 생각된다. 자연과학에서의 임계상황에 대한 유추에서 비롯된 사고 과정임을 휴식 시간 중의 학생들과의 대화 속에서 추측할 수 있었다.

점 A를 지나는 이 두 경계선들이 주어진 쌍곡직선 l에 평행이 되는가에 대한 질문은 학생들에게 유클리드 기하로 추상화된 현 인식 구조에 혼란을 불러 일으켰고, 이 혼란을 극복하기 위한 비계로써 현재 학생들이 다루는 기하학적 세상이 무엇인가 하는 질문을 던졌고 또 평행선의 정의를 상기시켰다.

그러자 19명의 학생 중 학생 E와 O를 제외한 나머지 17명의 학생들은 모두 이 두 경계선이 평행이 됨을 인지하였다.

앞으로 이 평행선을 극한평행선이라고 부르고, [그림 IV-16]에서 쌍곡직선 l이 속한 영역을 II, 원판의 테두리를 따라 반시계방향으로 영역 I, II, III, IV를 정한다. 영역 I에서 출발하여 반시계방향으로 회전할 때 처음 만나는 극한평행선을 극한평행선 I, 다음에 만나는 극한평행선을 극한평행선 II라고 부르기로 하자.

이제 학생들의 결과물을 자세히 분석해보기로 하자.

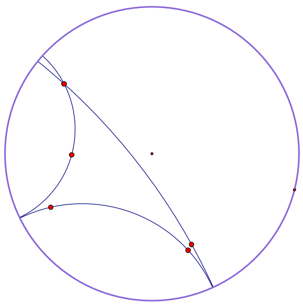
19명의 학생 중 A, B, C, D, F, G, H, I, K, L, M, P, Q, R, S 15명의 학생들은 [그림 IV-3:I]의 학생 I의 결과물에 나타난 것처럼 두 극한평행선을 분명하고 정확하게 인식하고 있으나, [그림 IV-4:J]에 나타낸 학생 J의 결과물과 같이 학생 J와 학생 N은 극한평행선의 존재를 인식하고 있으나 A를 지나는 두 극한평행선 중 극한평행선 I만을 정확히 구하고 극한평행선 II는 구하지 못하였다.

학생들이 극한평행선 I을 구하기 위하여 [그림 IV-2]의 3의 위치에서 4의 위치로 움직일 때 생기는 평행선들의 극한으로 인식하지 4의 위치에서 3의 위치로 움직일 때 생기는 평행선이 아닌 쌍곡직선들의 극한으로 인식하지 않음을 관찰할 수 있었다. 마찬가지로 극한평행선 II를 구하기 위하여 [그림 IV-2]의 6의 위치에서 5의 위치로 움직일 때 생기는 평행선들의 극한으로 인식하지 5의 위치에서 6의 위치로 움직일 때 생기는 평행선이 아닌 쌍곡직선들의 극한으로 인식하지 않았다.

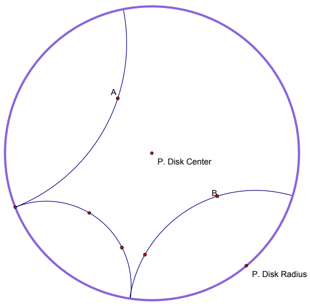
학생 J와 학생 N은 극한평행선 II를 구하기 위하여 [그림 IV-2]의 6의 위치에서 5의 위치로 움직일 때 생기는 평행선들이 모두 A를 지나야함을 생각하지 않았기 때문에 이런 결과를 얻게 되었음을 개별 면담을 통하여 파악하게 되었다.

또한 학생 J와 학생 N과의 개별 면담을 통하여 파악한 것은, 유클리드 기하에서 만나는 두 직선이 있을 때 이 교점을 아무리 무한대쪽으로 보내도 (실제 이는 가능하지 않지만) 두 직선은 만나는 상태를 유지하고 있었다는 현실적 경험이 극한평행선을 구하는 행동 양식에 영향을 끼쳤음을 파악할 수 있었고 이는 비슷한 수학적 능력을 가진 다른 영재학생들에게도 적용될 수 있을 것이라고 생각한다.

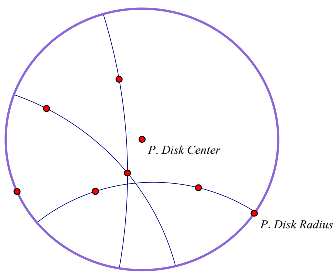
학생 E와 학생 O의 경우 탐구과제 A)는 성공적으로 수행하였으나 탐구과제 B)에서 학생 E는 결과물을 제출하지 않았고 학생 O는 전혀 엉뚱한 결과물을 보여주고 있는데, 귀류법을 이용하여 평행이 아닌 경우를 밝힌 뒤 그의 역을 생각하고자 했으나 실패한 것으로 관찰되었다.



[그림 IV-3 : I]



[그림 IV-4 : J]



[그림 IV-5 : O]

이상을 정리하면 다음과 같다. 본 연구의 핵심 과제인 연구과제 C)에서 - 평행이 될 필요충분 조건의 발견과 언어 표현- 핵심적인 사항은 이 연구과제 B)에서 극한평행선의 존재를 인식하느냐(P) 인식하지 못하느냐(N)하는 것이다.

총 19명의 학생 중 범주 P에 속하는 학생은 A, B, C, D, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P, Q, R, S의 17명, 범주 N에 속하는 학생은 O (1명), 미제출 E(1명)이었다. 범주 P에 속하는 학생들 중에서 극한평행선 I, II를 모두 인식한 학생들은 (P1) A, B, C, D, F, G, H, I, K, L, M, P, Q, R, S의 15명, 극한평행선 I만을 올바르게 인식한 학생은 (P2) J, N의 2명이었다.

이상을 정리하여 표로 나타내면 다음과 같다.

<표 IV-1>

P	P1	15(78.9%)
	P2	2 (10.5%)
N	1 (5.3%)	
무응답	1 (5.3%)	

다음에는 이 극한평행선들의 작도에 관해 살펴보자. 지필환경으로 대변되는 정적환경 하에서는 대상이 동적으로 움직여 변화한다는 개념이 존재하지 않기 때문에 시각적 의미와 기하학적 의미가 별 차이가 없지만 동적인 환경 하에서는 그 차이가 극명하고 기하적 의미만이 실질적으로 가치가 있다. 예를 들어 동적인 환경 하에서의 정삼각형은 꼭지점이 아무리 움직여도 정삼각형을 유지하고 있는 도형이어야만 하는 것과 같다. 마찬가지로 동적기하 소프트웨어인 GSP를 사용하는 동적환경 하에서의 극한평행선이란 그와 기하적으로 연결된 대상이 동적으로 움직이더라도 극한평행인 상태를 유지하는 것이어야만 한다.

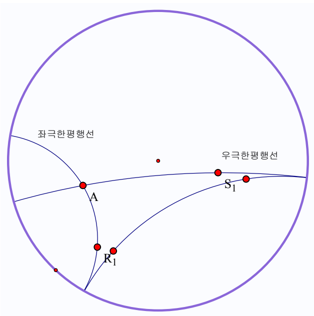
이런 의미에서 Finzer&Bennett(1995)는 동적 기하학에서의 그림과 작도를 더 세분화하여 그림(drawing), 과소조건을 가진(underconstraint) 작도 , 과다조건을 가진(overconstraint) 작도, 적정조건을 가진(appropriate constraints) 작도로 구분하였다.

본 탐구과제인 극한평행선을 이루는 기하적 조건은 두 가지 뿐이므로 과다조건은 발생하지 않는다. 그러므로 시각적 외양만 갖춘 그림, 일

부 기하적 성질을 고려했으나 동적기하학의 입장에서 보면 본질적으로 그림과 동일시되거나 불완전한 동적기하 작도, 적정조건을 갖춘 동적기하 작도의 세 가지로 구분하여 범주 P1에 속하는 15명의 학생 중 GSP 파일이 아닌 종이에 그림을 그려 제출한 학생 F를 제외한 나머지 14명의 학생 A, B, C, D, G, H, I, K, L, M, P, Q, R, S가 작도한 극한평행선 I, II가 어떤 범주에 속하고 어떤 특성을 가지고 있는지 살펴보자.

가. 시각적 외양만 갖춘 그림을 작도로 제출한 학생들의 결과물 분석

학생 C, G, I, Q는 A를 지나는 보통의 쌍곡평행선을 마우스로 움직여 시각적으로 주어진 쌍곡직선 l과 원주에서 만나는 것처럼 보이도록 작도하였다. 이 네 학생의 결과물은 유사하기 때문에 그 중 학생 Q의 결과물만 [그림 IV-6 : Q]로 제시하겠다.



[그림 IV-6 : Q]

이 실험에서의 극한평행선은 동적인 변화에도 불구하고 극한평행선임을 유지해야 하는데 [그림 IV-6 : Q]의 GSP 파일에서 점, 쌍곡직선 등을 동적으로 변환시키면 극한평행선을 유지하지 못함을 알 수 있다. 또한 좌(우)극한평행선이라는 이름의 쌍곡직선을 주어진 직선 l ([그림 IV-6 : Q]에서는 R_1, S_1을 잇는 쌍곡직선)에 근접하게 움직여 시각적으로는 원주 상에서 만나는 것처럼 보이도록 만들었지만 동적기하적으로는 두 쌍곡직선의 교점이 없으므로 만나지 않는다.

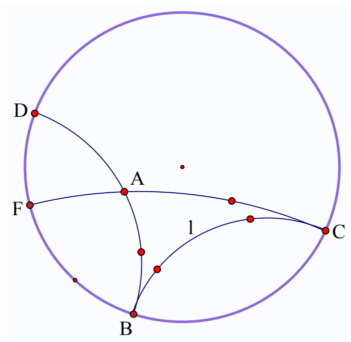
이 범주에 속하는 학생들은 정적환경과 동적환경의 차이를 전혀 인식하지 못하고 있었다.

나. 일부 기하적 성질을 고려했으나 동적기하학의 입장에서 보면 본질적으로 그림과 동일시되거나 불완전한 동적기하 작도인 결과물 분석

극한평행선을 동적으로 작도하려면 주어진 쌍곡직선 l, A를 지나는 쌍곡직선의 교점이 원주 상에 존재하도록 작도해야만 한다.

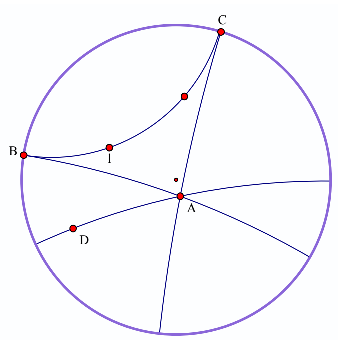
범주 나에 속하는 극한평행선들을 작도한 학생 P, S, B, H, M 학생들은, 극한평행선을 동적으로 작도하려면 주어진 쌍곡직선 l, A를 지나는 쌍곡직선, 원주의 교점이 직관적으로 어떤 역할을 한다는 것을 느끼고 있었다. 그러나 그 교점들이 극한평행선 작도에 있어서의 정확한 역할과 의미를 파악하지 못하고 있었기 때문에, 동일한 역할과 기능을 수행해야 할 부류의 교점들조차 통일적 행동을 보여주지 못하고 그 역할과 기능이 제각각이었으며 또한 옳은 동적 작도도 만들어지지 못하였다.

각 학생들의 작도를 개별적으로 분석하여 이 사실을 확인해보자.



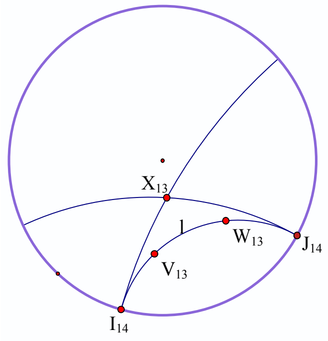
[그림 IV-7 : P]

학생 P의 결과물인 [그림 IV-7 : P]에서 점 B와 F는, 동적기하의 입장에서 보면 A를 지나는 쌍곡직선과 원주와의 교점일 뿐이고 쌍곡직선 l과는 아무런 기하적 연결 관계가 없다. 비슷하게 점 C와 D는 원주와만 기하적으로 연결되어 있고 A를 지나는 두 쌍곡직선이나 l과는 아무런 기하적 연결 관계가 없는 점이다. 쌍곡직선 l과 아무런 기하적 연결 관계가 없는 두 점 B, C를 단순히 시각적으로만 l과 기하적 연결 관계가 있는 것처럼 보이도록 이동시켰을 뿐이다. 하지만 여기에서 두 점 B, C의 기능은 같지 않다. 범주 가의 작도와 다른 점은 l과 극한평행선과의 교점이 필요하다는 점을 인식하고 있다는 것이다.



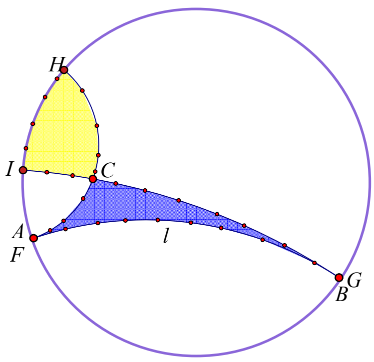
[그림 IV-8 : S]

학생 S의 결과물인 [그림 IV-8 : S]에서 점 B와 C는 A를 지나는 쌍곡직선과의 기하적 연결 관계만을 가지고 있고 쌍곡직선 l과는 아무런 기하적 연결 관계가 없다. 쌍곡직선 l과 아무런 기하적 연결 관계가 없는 두 점 B, C를 단순히 시각적으로만 l과 기하적 연결 관계가 있는 것처럼 보이도록 이동시켰을 뿐이지만 학생 P의 결과물보다 진보된 점은 점 B와 C의 역할이 동일하도록 만들었다는 점이다.

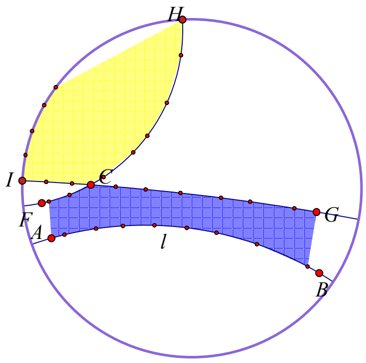


[그림 IV-9 : B]

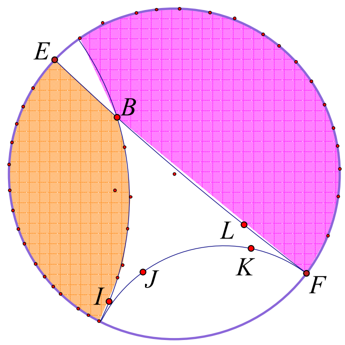
학생 B의 결과물인 [그림 IV-9 : B]에서 점 J_{14}은 점 X_{13}, 그를 지나는 쌍곡직선, 쌍곡직선 l, 원주와 기하적 연결 관계를 가지고 있다. 따라서 X_{13}와 J_{14}을 연결하는 쌍곡직선은 그와 연결된 대상들이 움직여도 극한평행인 관계를 항상 유지하는 적정한 동적기하 작도가 된다. 하지만 I_{14}은 X_{13}을 지나는 쌍곡직선과의 기하적 연결 관계만을 가지고 있고 쌍곡직선 l과는 아무런 기하적 연결 관계가 없으므로 학생 P나 학생 S의 작도에서 점 B와 같은 역할을 하고 있다. 따라서 학생 B는 극한평행선 I은 시각적 외양만 갖춘 그림으로, 극한평행선 II는 적정조건을 갖춘 작도로 작도해낸 것이다.



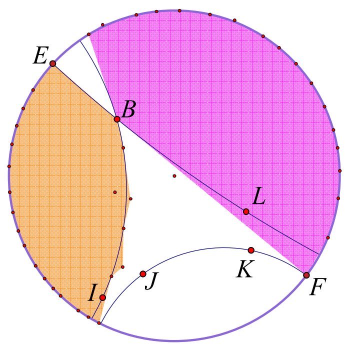
[그림 IV-10 : H-1]



[그림 IV-11 : H-2]



[그림 IV-12 : M-1]

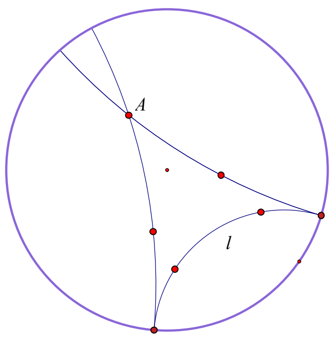


[그림 IV-13 : M-2]

학생 H와 M은 탐구과제 2가 탐구과제 3을 해결하기 위한 선결과제임을 파악하고 있었다고 생각된다. 그들은 탐구과제 2, 탐구과제 3의 해를 [그림 IV-10 : H-1], [그림 IV-12 : M-1]과 같이 하나의 결과물 속에 표현하였다. 학생들의 결과물 속 점의 이름들 중 일부는 연구자가 설명의 편의 상 붙인 것이다. [그림 IV-10 : H-1]을 동적으로 변환시킨 그림이 [그림 IV-11 : H-2]이고, [그림 IV-12 : M-1]을 동적으로 변환시킨 그림이 [그림 IV-13 : M-2]이다. [그림 IV-11 : H-2]를 보면 A, B, C, F, G와 H, I의 역할이 다름을 알 수 있고 점 A와 F를 끌어 원주 상에서 만나는 것처럼 보이게 만들어 시각적으로만 극한평행선처럼 보이게 했으며 G와 B에 대해서도 마찬가지이다. 이에 반해 [그림 IV-13 : M-2]에서 B, I, J, K, L과 E, 그리고 F의 역할이 다 다르다. I를 끌어 B, I를 지나는 쌍곡직선과 J, K를 지나는 쌍곡직선이 마치 원주에서 만나는 것처럼 보이게 만들어 시각적으로만 극한평행선 I을, J, K를 지나는 쌍곡직선과 원주와의 교점 F를 작도한 뒤 L을 끌어 B, L을 지나는 쌍곡직선과 J, K를 지나는 쌍곡직선이 마치 원주와 F에서 만나는 것처럼 보이게 하여 시각적으로만 극한평행선 II를 작도하였다.

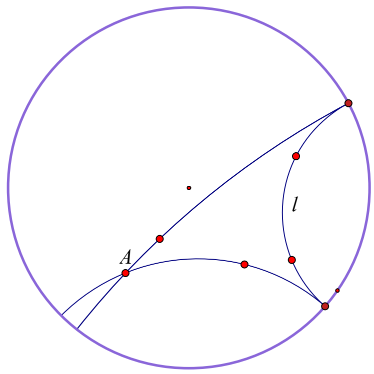
다. 옳은 동적기하학적 작도를 수행한 학생들의 결과물 분석

학생 A, D, K, L, R은 A를 지나는 동적으로 정확한 쌍곡평행선들을 작도하였다. 이 5명의 학생들의 결과물은 모두 유사하기 때문에 그 중 학생 D의 결과물만 [그림 IV-14 : D-1]로 제시하겠다.



[그림 IV-14 : D-1]

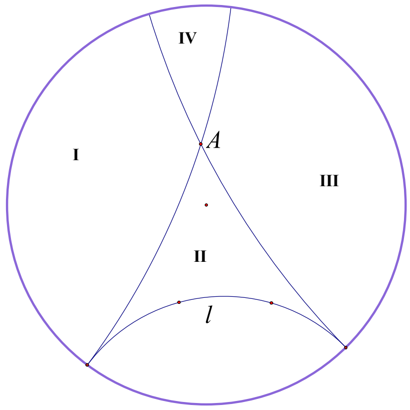
[그림 IV-14 : D-1]에서 점 A나 쌍곡직선을 동적으로 변화시켜도 [그림 IV-15 : D-2]와 같이 극한평행선 I, II인 상태를 유지함을 알 수 있다.



[그림 IV-15 : D-2]

3. 연구 문제 C): 평행의 필요충분조건 탐구 및 표현 방식의 특징 분석

우선 평행의 필요충분조건을 살펴보자.



[그림 IV -16]

[그림 IV -16]에서 보듯이, 주어진 쌍곡직선 l 밖의 한 점 A를 지나는 한 쌍의 극한평행선은 비유클리드 원판을 4개의 영역으로 나누게 되는데, 연구문제 B)에서 설명한대로 각 영역을 I, II, III, IV로 명명하자. 주어진 쌍곡직선 l밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선에는 A와 다른 점 B가 존재하는데, 만일 이 점 B가 영역 I 또는 영역 III에 있다면 두 점 A, B를 지나는 쌍곡직선은 주어진 쌍곡직선 l과 평행이 된다.

위에 제시된 바와 같이, 주어진 쌍곡직선 l밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선이 평행이 될 필요충분조건을 찾으려면 탐구과제 B)에서 제시한 한 쌍의 극한평행선을 정확히 인지하고 있어야만 한다. 총 19명의 학생 중 한 쌍의 극한평행선을 정확히 인지하고 있는 학생은 A, B, C, D, F, G, H, I, K, L, M, P, Q, R, S의 15명인데 이들 중 과연 몇 명이 평행선의 필요충분조건을 정확히 인지할 것인가, 또 과연 몇 명이 자신이 인지한 바를 정확히 표현해 내는가, 또 그들의 표현에는 어떤 특징이 있는가를 조사하였다.

평행일 필요충분조건은 A를 지나는 쌍곡직선이 영역 I과 III을 통과한다는 것이므로 그를 언어로 표현하려면 영역 I, III을 어떻게 나타내는가, 그리고 그 영역을 통과하는 쌍곡직선의 행동을 어떻게 표현하는가 하는 두 가지 문제로 귀결된다.

<부록>에 15명의 학생들이 사용한 표현을, 문법적으로 틀린 부분이나 타이핑 실수조차 있는 그대로 표로 만들어 수록하였다.

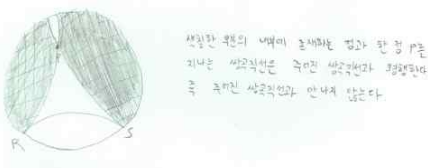
15명 학생의 결과물은 첫째, 영역 I과 III을 그림으로 표시하고 그 영역을 통과하는 쌍곡직선의 행동을 문자로 표현하거나 둘째, 영역 I과 III을 문자로 설명하고 그 영역을 통과하는 쌍곡직선의 행동도 문자로 표현하는 두 가지의 방식으로 분류할 수 있었다.

가. 영역 I과 III을 그림으로 표시하고 그 영역을 통과하는 쌍곡직선의 행동을 문자로 표현한 결과물 분석

이 범주에 속하는 학생들은 F, H, M인데, 학생 F는 영역 I, III을 [그림 IV-17:F]에서, 학생 M은 [그림 IV-12 : M]에서 빗금 친 영역으로, 학

생 H는 [그림 IV-10 : H]에서 빗금치지 않은 영역으로 표시하였다. 이 학생들은 형식적인 언어로 영역에 대한 설명이 어렵다고 생각되어서 그 대신 그림으로 표현하였다.

학생 F는 [그림 IV-17:F]에서 알 수 있듯이 평행선의 필요충분조건을 정확히 인지하고 그 인지한 바를 정확히 표현해 내었다. GSP의 도구들을 사용하여 그림을 그려낼 수가 없어서인지 종이에 자신의 주장을 표현하여 제출하였다.

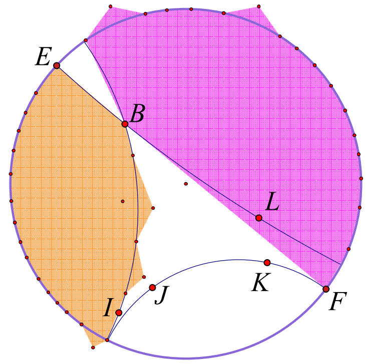


[그림 IV-17 : F]

학생 H는 [그림 IV-10 : H-1]에서 배제해야 할 영역 II, IV를 다각형으로 근사시킨 뒤 그 다각형의 내부를 색으로 채워 넣어 표시하고자 하였지만 영역 II의 표시가 틀렸음을 알 수 있었고 따라서 옳은 필요충분조건을 발견하지 못했다.

[그림 IV-12 : M-1]는 학생 M의 결과물인데 학생 H의 결과물과 동일한 사고 양식을 보여주고 있다. 특이한 점은 영역의 경계를 따라 점들을 작도한 뒤 다각형의 내부만을 작도하면 [그림 IV-11: H-2]와 같이 그 다각형의 내부와 표시하려는 영역이 시각적으로 일치하지 않음을 깨닫고 [그림 IV-18 : M-3]과 같이 영역 밖에 몇 개의 점을 작도하여 다각형을 작도한 뒤 이 점들을 영역의 경계선으로 이동시켜 시각적으로 일치하도록 조작하고 있음을 알 수 있었다. 이는 학생 M도 시각적 정보를 대단히 중시함을 나타내고 있었다.

또 [그림 IV-16]의 영역 II을 'l과 접하는 영역'으로, 영역 IV를 '(l과) 가장 멀리 떨어진 영역'이라는 비형식적 표현을 사용하였고, <부록>에서 알 수 있듯이, 선분과 직선의 개념이 불분명하다는 것을 분석해낼 수 있었지만 어쨌든 학생 M은 올바른 필요충분조건을 구해내었다.



[그림 IV-18 : M-3]

학생 H와 M은 이미 주어진 호를 유한개의 선분으로 근사시키는 적분의 사고가 형성되어 있음을 알 수 있었고, 또한 동적기하 소프트웨어를 사용한 기하 학습에서 기하학적 본질보다는 시각적 해법에 치중하는 일반 학생들과 마찬가지의 현상이 H와 M에게서도 나타남을 보여주고 있었다.

나. 영역 I과 III을 문자로 설명하고 그 영역을 통과하는 쌍곡직선의 행동도 문자로 표현한 결과물 분석

범주 가에 속하는 학생 F, H, M과는 달리 학생 A, B, C, D, G, H, I, K, L, P, Q, R, S은 형식적 언어를 사용하여 필요충분조건을 기술하려고 하였다. 각 학생들의 결과물을 분석하여 그들이 올바른 필요충분조건을 찾았는지, 그리고 기술 방식은 어떤 특징을 갖고 있는지 분석해보자.

학생 A, D, I의 결과물을 살펴보면 명백하게 서로에게 영향을 끼쳤음을 알 수 있었다. 학생 개개인에게 독립된 공간을 제공할 수 없었기 때문에 발생하는 연구의 제한점이라고 할 수 있다.

연구문제 B)에서 밝혔듯이, 학생 A와 D는 동적으로 정확한 극한평행선들을 작도하였으나 학

생 I는 시각적 외양만 갖춘 극한평행선들을 작도하였다.

그러나 그들은 모두 [그림 IV-16]에서 말한 영역 II, IV만을 2개의 극한평행선과 호로 둘러싸인 부분으로 생각하고 있지만 영역 I, III도 역시 2개의 극한평행선과 호로 둘러싸여 있다. 둘러싸인 형태가 서로 다르므로 실제로는 이 형태를 구별해주는 표현이 필요하지만 그 점을 간과하고 있었다.

특이한 점은 평행선이 되기 위한 필요충분조건을 A는 '1개의 극한 평행선과 호로 둘러싸이지 않은 부분 외의 점에서는 평행하다.' 고 기술한 반면 D와 I는 '1개의 극한 평행선과 호로 둘러싸인 부분에 있는 점과 A와의 교점에서는 평행하다.'고 상반되게 기술하고 있다.

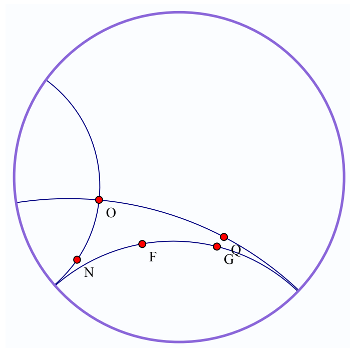
이는 '2개의 극한평행선과 호로 둘러싸인 부분에 다른 한 점이 있으면 그 직선은 평행선이 되지 않는다.'의 부정을 A는 '1개의 극한 평행선과 호로 둘러싸이지 않은 부분 외의 점에서는 평행하다.' 로, D와 I는 '1개의 극한 평행선과 호로 둘러싸인 부분에 있는 점과 A와의 교점에서는 평행하다.'로 생각하기 때문이지만 이 두 표현은 모두 필요충분조건으로 적합하지 않다.

다음에는 학생 B의 결과물을 분석해보자. <부록>에 실린 이 학생의 표현을 보면, 가능한 직관적이고 비형식적인 표현을 배제하고 형식적 표현을 사용하려고 하고 있음을 알 수 있다.

연구과제 B)에서 밝혔듯이 학생 B는 한 쌍의 극한평행선 중 $X_{13}J_{14}$는 정확히 작도하였으나 $X_{13}I_{14}$은 시각적으로만 극한평행선이 되도록 작도하였다. 원주 상의 점은 유클리드 평면에서는 인식가능하나 비유클리드 원판모델에서 인식될 수 없는 점이라는 것을 정확히 이해하지 못하고 있었기 때문에 직선 $X_{13}J_{14}$와 같은 표현을 사용하고 있었다.

학생 B는 'x13i14와 x13j14 사이에 있어야 그 직선은 v13w13과 평행하다고 할 수가 있다.'고 필요충분조건을 기술하고 있는데, '사이에 있다'는 의미를 ' [그림 IV-16]의 영역 I과 III에 존재한다'는 의미로 사용하고 있는데 실제로는 [그림 IV-16]의 영역 II와 IV도 x13i14와 x13j14 사이에 있다고 말할 수 있으므로 이는 정확한 표현은 아니다. 학생 B의 경우 필요충분조건은 정확히 구하였으나 그를 기술하는 표현은 부정확하다. 이는 인지한 바를 수학적으로 옳게 표현하는 능력은 일상적 언어의 훈련만으로는 습득될 수 없음을 시사하고 있다.

다음으로 학생 C와 G의 결과물을 분석해보자. 그들의 결과물은 본질적으로 동일하다. 서로에게 영향을 주었음이 분명함을 그 표현에서 파악할 수 있었다. C와 G는 [그림 IV-19:C, G]에서 한 쌍의 극한평행선으로 나뉜 원판 내부의 영역 II를 '주어진 직선이 포함되어 있는 영역'으로 영역 IV를 ' (주어진 직선이 포함되어 있는) 그 영역하고 이웃하지 않는 영역'으로 표현하고 있었다. '이웃하지 않는'이란 표현은 일상적이고 구어체적인 표현으로, 동적기하 소프트웨어를 사용한 기하 학습에서는 이처럼 비형식적 속성을 가진 언어가 보다 많이 사용됨을 관찰할 수 있었다.



[그림 IV-19 : C, G]

[그림 IV-16]의 영역 III과 IV는 이웃하고 있다고 해석해야 하는가 아니면 이웃하고 있지 않다

고 해석해야 하는가의 문제가 명확하게 정의되어 있지 않으므로 혼란을 불러일으킬 수 있다.

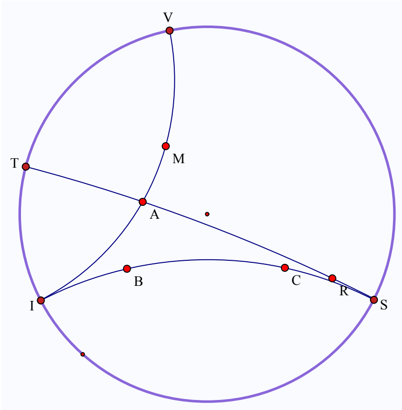
직관적 의미를 그대로 받아들이면 학생 C와 G는 올바른 필요충분조건을 구했고 그 표현도 어느 정도 적절하다고 말할 수 있었다.

다음에는 학생 P의 결과물을 분석해보자. 이 학생의 극한평행선의 작도는 이미 연구과제 B)의 범주 나에 속함을 알고 있다. 평행선에 대한 조건을 기술할 때, P도 역시 '좌극한평행선과 우극한평행선의 안쪽 영역'이라는 직관적이고 비형식적 표현을 사용하고 있는데 '좌우'는 일상적으로는 그 의미가 분명하지만 기하학적으로 '좌우'를 어떻게 정하는가와 직선으로 분리된 영역의 '안팎'을 어떻게 정하는가는 분명하지 않다.

'안팎'을 어떻게 정하던 영역 I, III이 모두 두 극한평행선의 안쪽 영역이 될 수 없으므로 옳은 필요충분조건이 될 수 없다.

다음에는 학생 K의 결과물을 분석해보자. [그림 IV-20:K]와 <부록>을 보라. K는 극한평행선을 정확히 작도해 내고 영역의 구분을 비형식적이고 직관적인 언어가 아니라 형식적이고 수학적인 언어로 정확히 표현해 내었으며 필요충분조건도 정확히 구해내었다. 단지 영역 5를 구분할 때 '영역 3을 직선 IV가 분할할 때 호 SV가 있는 부분을 영역 5라 하자.'는 주장은 '영역 3을 직선 ST가 분할할 때 호 SV가 있는 부분을 영역 5라 하자.'라고 수정되어야 할 것이다.

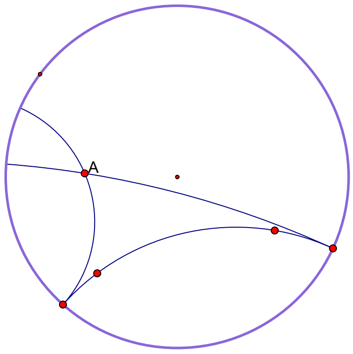
인식의 대상이 원판의 내부이므로 점 I, T, V, S는 유클리드 세상에서만 인식 가능하고 비유클리드 세상에서는 인식 불가능하다는 것을 완벽히 이해하고 있지는 않음을 '직선 IS', '직선 IM', '직선 ST', '직선 IV' 등의 표현에서 파악할 수 있다. 이는 K만이 아니라 모든 실험 대상에서 공통적으로 나타나는 현상이다. 따라서 '직선 IS'는 '직선 BC'로, '직선 IM'은 '직선 AM'으로, '직선 ST'는 '직선 AR'로, '직선 IV'는 '직선 AM'으로 표현되어야만 한다.



[그림 IV-20 : K]

다음에는 L의 결과물을 분석해보자.

[그림 IV-21:L-1]과 <부록>에 실린 언어 표현을- 모든 표현이 공식적인 형태를 갖추고 있었고 용어도 모두 수학적 용어였지만- 처음에는 도저히 이해할 수 없었다. '좌극한평행선과 주어진 직선이 접하는 부분', '우극한평행선이 주어진 직선과 접하지 않는 부분', '우극한 평행선과 주어진 직선이 접하는 부분과 좌극한 평행선이 주어진 직선과 접하지 않는 부분과 점 A가 이루는 평면' 이 뜻하는 바를 이해할 수 없었기 때문이다.

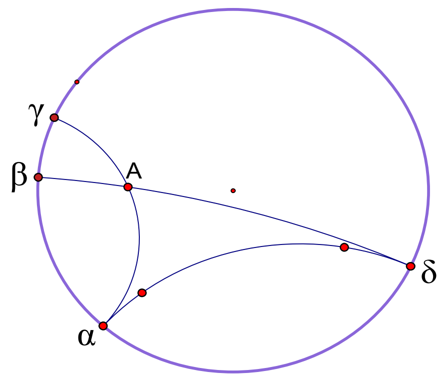


[그림 IV-21 : L-1]

휴식 시간을 이용한 개별 면담을 하고 나서야 비로소 그 의미하는 바를 알 수 있었다.

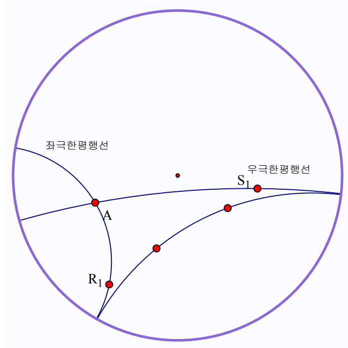
[그림 IV-21 : L-2]은 M4의 표현을 이해하기 위하여 저자가 변형시킨 L의 제출물이다. 원주 상의 점들을 α, β, γ, δ로 이름을 붙여보았다. ‘좌극한평행선과 주어진 직선이 접하는 부분’은 ‘호 $\alpha A\gamma$에서 호 αA로 둘러싸인 부분’을 뜻하는 것으로 ‘우극한평행선이 주어진 직선과 접하지 않는 부분’은 ‘호 $\delta A\beta$에서 호 $A\beta$로 둘러싸인 부분’으로 해석하면 ‘좌극한평행선과 주어진 직선이 접하는 부분과 우극한평행선이 주어진 직선과 접하지 않는 부분과 점 A가 이루는 평면’은 [그림 IV-16]의 영역 I을 의미한다고 해석할 수 있다. 따라서 L은 실제로는 ‘[그림 IV-16]의 영역 I, III에 있는 점과 A를 이으면 평행선이다’라고 옳은 필요충분조건을 기술하고 있는 것이다.

또한 L은 ’평면’과 ‘영역’ 혹은 ‘부분’의 개념이 불확실하다는 것을 알 수 있다. ‘평면’이 비유클리드 원판 모델 전체를 나타내는 개념인데 반해 ‘영역’ 혹은 ‘부분’은 그 일부분의 세상을 뜻하기 때문에 인식의 모호함이 용어 선택에도 혼란을 불러일으키고 있다.



[그림 IV-21 : L-2]

[그림 IV-22 : Q]에 나타난 학생 Q의 결과물과 <부록>에 실린 표현을 살펴보면 평행선이 될 필요충분조건을 옳게 구하지 못했음을 알 수 있다.

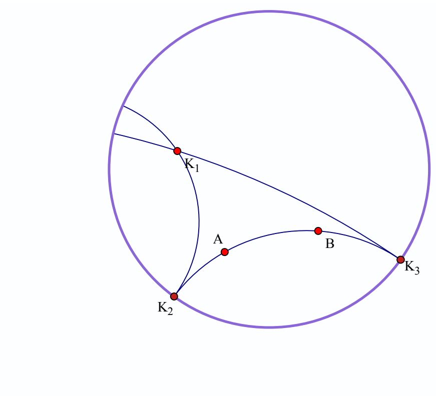


[그림 IV-22 : Q]

‘주어진 직선과 원이 이루는 면적 밖의 점을 지나고 점 A를 지나는 직선은 반드시 평행선이 된다.’라는 주장은 ‘ [그림 IV-16]의 영역 I, III, IV의 점을 지나고 점 A를 지나는 직선은 반드시 평행선이 된다.’라는 뜻이 된다. 그런데 영역 IV의 점과 A를 이으면 평행선이 되지 않음을 알 수 있으므로 이 주장은 옳지 않다.

또한 학생 Q는 ‘면적’의 개념과 ‘영역’의 개념을 혼동하고 있음을 알 수 있었다.

다음에는 R을 분석해보자. 극한평행선의 아래를 쌍곡직선 AB가 속한 영역으로 정의함으로써 ‘아래’와 ‘윗부분’은 형식을 갖춘 기하학적 언어가 될 수 있었다. K_1K_2, K_1K_3를 쌍곡직선으로 취급하는 것은 올바른 태도는 아니지만, K_1K_2의 윗부분은 [그림 IV-16]의 영역 I, IV를, K_1K_3의 윗부분은 [그림 IV-16]의 영역 III, IV를 의미하고 있다. 따라서 이 두 부분 중 한 집합에만 포함된 영역은 영역 I, 또는 영역 III이므로 이 영역의 점 C를 잡으면 쌍곡직선 K_1C는 AB에 평행이 된다는 것은 정확한 표현이다.



[그림 IV-23 : R]

마지막으로 [그림 IV-8 : S]를 참조하여 학생 S의 결과물을 분석해보자.

<부록>에서 S의 표현을 보면 극한쌍곡선을 '직선 l에 접하고'로 표현하고 있는데 어떤 공간에서 접한다는 것은 접점이 그 공간 내에 있어야 하는데 이 경우 원주 상에 접점이 있으므로 접한다는 표현을 사용해도 되는지 확신할 수 없다. 쌍곡직선을 유클리드 평면 상의 원의 일부로 보고 접한다는 표현을 사용할 수는 있겠지만 이 경우 그 사실을 분명히 밝혀주어야만 할 것이다.

[그림 IV-16]의 영역 II를 'l을 포함하는 영역'으로, 영역 IV을 '그 반대편의 영역'으로 표현하고 '이 두 영역을 제외한 나머지 영역 내부의 점과 A를 이으면 평행선이 된다'라고 정확하게 기술하고 있다. S도 역시 '반대편의 영역'이라는 직관적이고 비형식적 표현을 사용하고 있는데 이는 동적기하 소프트웨어를 사용하는 환경 하에서는 빈번하게 관찰되는 현상이다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 19명의 중학교 수학 영재 학생들을 대상으로, 그들이 인터넷에서 내려받을 수 있는 Poincare disc.gsp 파일의 사용자 도구들을 사용하여 다음의 탐구과제들을 해결하도록 하였다: 1) 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선은 몇 개인가? 2) 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선을 마우스로 움직여 보면 평행선인 경우와 평행선이 아닌 경우들이 발생한다. 이 때 경계가 되는 쌍곡직선의 특성을 탐구하라. 3) 주어진 쌍곡직선 밖의 한 점 A를 지나는 쌍곡직선이 평행선이 되기 위한 필요충분조건을 발견하여 언어로 표현해보라.

학생들의 탐구 과정에 나타난 특징을 학생들 개개인이 제출한 결과물과 연구자 필드 노트를 중심으로 분석하였으며 탐구 과제를 해결하는 과정이나 결과물에서 특이점을 보이는 학생들은 휴식 시간에 개별 면담을 하여 그들의 사고 과정이나 의도를 파악하는 참고자료로 삼았다.

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 평행선이 복수임을 인지하도록 한 탐구 과제 1을 해결하는 과정을 보면 중학교 수학 영재들도 인식의 혼란을 초래하는 새로운 상황에서도 정의보다는 먼저 기존 인식 체계의 성질이나 공식, 정리를 이용하고자 한다는 것을 알게 되었다. 사고의 순서를 수학자들과 같이 정의를 먼저 생각하여 새로운 상황을 명백히 인식하고 난 후 기존의 지식 체계의 유사 상황을 고려한 정리를 생각하도록 사고 훈련이 되어야 할 것이다. 주어진 과제와 같이 주어진 쌍곡직선 밖의 점 A를 지나는 평행선을 정의만을 생각하여 단순하게 작도하면 되는 과제도 복잡한 성질을 이용하려 하였다.

둘째, 점 A와 또 다른 점을 지나는 쌍곡직선은 유일하게 결정되는데 A와는 다른 이 점을 이리저리 움직여서 평행인 경우와 평행이 아닌 경우를 여러 번 반복하여 보여주었을 때 학생들 중 대다수가 불현듯 극한평행선을 인식하게 되었다. 사고의 혼란이 갑작스럽게 극복되어 평형

상태에 이르게 되었다는 뜻인데, 이 경우 지식의 차원이 점진적인 것이 아니라 돌발적으로 이루어졌다는 의미이다.

셋째, 학생들이 극한평행선 I을 구하기 위하여 [그림 IV-2]의 3의 위치에서 4의 위치로 움직일 때 생기는 평행선들의 극한으로 인식하지 4의 위치에서 3의 위치로 움직일 때 생기는 평행선이 아닌 쌍곡직선들의 극한으로 인식하지 않음을 관찰할 수 있었다. 마찬가지로 극한평행선 II를 구하기 위하여 [그림 IV-2]의 6의 위치에서 5의 위치로 움직일 때 생기는 평행선들의 극한으로 인식하지 5의 위치에서 6의 위치로 움직일 때 생기는 평행선이 아닌 쌍곡직선들의 극한으로 인식하지 않았다는 것이다.

넷째, 영재학생들도 지필로 대변되는 정적환경과 GSP와 같은 동적환경의 차이를 잘 인식하지 못하고 있었다. 한 쌍의 극한평행선을 인지한 학생 15명 중 종이에 그림을 그려 제출한 F를 제외한 14명의 학생 중 A, D, K, L, R만이 동적으로 정확한 한 쌍의 극한평행선을 작도해내었다.

다섯째, 본 연구에서 관찰된 바와 같이, 동적기하 소프트웨어를 사용한 학습과 탐구는 지필로 대변되는 정적인 환경에서의 학습과 탐구와는 많은 차이점을 보인다. 예를 들어 연구 문제 B)에서 극한평행선 I, II의 작도 범주 가, 나, 다는 정적환경에서는 모두 동일한 것으로 간주되지만 동적환경에서는 전혀 다른 것으로 간주된다. 또한 동일한 교점처럼 보이는 점들도 동적변환을 시켜보면 역할이 다름을 알 수 있다. 이는 시각적으로 동일하게 보여도 기하학적 개념이 서로 다름을 말하고 있다. 또 다른 예로, 연구 문제 C)에서 영역 I과 III을 그림으로 표시한 학생 중 H, M의 경우 적분의 개념이 사용되고 있는데 이는 GSP의 작도 도구가 선분(직선)과 원호의 작도만을 허용하고 있기 때문이다. 이는 학습이 일어나는 상황이나 설정이 지식을 얻는 방법이나 해석하는 방법에 영향을 미친다는 상황서술 이론이 학생들의 연구 결과물에서도 나타남을 의미하고 있다.

또한 '가장 멀리 떨어진 영역', '이웃한 영역', '이웃하지 않은 영역', '반대편에 있는 영역' '안팎' 등 직관적, 비형식적, 명령적 표현이 많이 사용됨을 알 수 있다.

이와 같이, 영재 학생들이 선택한 단어와 서술은 종종 그들이 화면에서 본 동작이나 상태와 결합되어 있다.

여섯째, L의 경우와 같이 분명히 수학적 용어를 사용하여 수학적 표현을 사용하고 있지만 그 의미를 전혀 이해할 수 없는 경우도 발생한다. 이는 수학적 사실의 인지 능력과 표현 능력이 반드시 일치하는 것이 아님을 나타내고 있다.

다음에는 위의 연구 결과들을 토대로 과연 몇 명의 학생들이 쌍곡평행선의 정신모델을 구축하였는지 살펴보자. 한 쌍의 극한평행선을 올바르게 인식하고 있던 15명의 학생 A, B, C, D, F, G, H, I, K, L, M, P, Q, R, S들 중 비유클리드 원판 모델에서의 평행선의 행동양식에 대한 정신모델이 어느 정도 형성되고 구체적으로 조작가능한 대상으로 인식하게 된 학생들은 쌍곡평행선의 필요충분조건을 옳게 구해낸 B, C, F, G, K, L, M, R, S의 9명이었다. 이들은 한 쌍의 극한평행선과 그 사이에서 움직이는 쌍곡직선이 어떤 경우에 쌍곡평행선이 되는가를 인식함으로써 쌍곡평행선에 관한 정신모델을 만들어 내었다. 이들 중 동적변환에 대해서도 동일한 행동양식을 보여주는 진정한 의미의 쌍곡평행선의 정신모델을 만들어 낸 학생들은 동적으로 올바른 극한평행선을 구한 학생들 A, D, K, L, R 중 K, L, R 뿐이었고 학생 A와 D는 쌍곡평행선의 필요충분조건을 바르게 구하지 못하였다. 동적기하의 입장으로 보면 총 19명의 영재 학생 중 동적으로 옳게 작동하는 쌍곡평행선의 정신 모델

을 구성한 학생은 K, L, R뿐이었다.

쌍곡평행선의 정신 모델을 구성하게 되면 평행선이 두 개 있는 상황을 나타내는 상징으로서의 [그림 I-1]을 이해할 수 있게 되며 또한 그 경우 [그림 I-1]에서 모든 가능한 평행선들은 직선으로 표현된 한 쌍의 극한평행선 사이의 적절한 위치에 놓이게 됨을 이해할 수 있게 된다.

이제 수학교육자와 교사가 동적기하를 이용한 수학 교수, 학습에서 해야 할 세 가지 일을 제안하고자 한다.

첫째는, 사고의 차원은 현재의 상황에 대한 혼란을 극복하는 과정에서 갑작스레 변화되는 경우가 많다. 본 논문에서 극한평행선을 갑자기 인식하게 되는 것처럼. 이러한 현 지식 체계에 혼란을 줄 수 있고 그 혼란을 극복할 수 있는 동적기하의 교수, 학습 과제의 개발이 보다 촉진되어야만 한다.

둘째는, 연구된 결과와 학급 현장 경험들에 기초한, 동적 기하에 영감을 받은 언어에 대한 교사들 나름대로의 내적 데이터 베이스를 개발하고, 이러한 언어가 사용되는 상황을 포착하도록 준비되어 있어야만 한다.

셋째, GSP와 같은 동적기하 소프트웨어를 사용한 실험을 통하여 새로운 기하학을 공부하는 학생들에게 이런 비형식적 언어들을 어떻게 기하학적 언어로 재구성하도록 할 수 있을까에 대해 생각해 보아야만 한다. 이러한 해석 작업은 전통적인 정적 기하학에서는 요구되지 않았던 새로운 과제가 되는데 본 연구에서 관찰된 결과들을 보면 결코 용이한 일이 아니라는 것이다. 수학적 언어 표현은 외국어의 습득과 같이 훈련되고 연습되어야 획득되는 학습 능력이지 모국어를 잘 한다고 하여 저절로 획득되는 것이 아니라는 것을 명심하고 학생들에게 수학적 언어 표현 능력을 길러주어야만 한다.

참고문헌

권성룡(2001). **탐구형 기하 소프트웨어 학습 환경에서의 지식의 내면화에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

김응태 · 박한식 · 우정호(2007). **수학교육학 개론**. 서울: 서울대학교 출판부.

김지원 · 송상헌(2004). 한 수학영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례 연구, **대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 14권 1호**, 89-110

류희찬 · 조완영(1994). 수학교육의 수업 원리로서의 반영적 추상화, **대한수학교육학회지 논문집 4권 1호**, 237-254

류희찬 · 조민식 · 장경윤 · 유공주(2003). 탐구형 소프트웨어를 활용한 수학 교사교육 프로그램 개발 탐색, **대한수학교육학회지 <학교수학> 5권 1호**, 97-114

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2009). **중학교 수학 9-나**. 서울: (주) 도서출판 디딤돌.

장경윤(1994). 택시기하(Taxicab-geometry) : 교사와 학생을 위한 비유클리드 기하학, **대한수학교육학회지 논문집 4권 1호**, 109-116

최영기 · 도종훈(2004). 수학영재학생들의 인지적, 정의적, 창의적 특성 분석, **대한수학교육학회지 <학교수학> 6권 4호**, 361-372

Battista, M. T.(1994). On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: A spatial/geometric perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 25, pp. 86-94.

________________ (1998). Computer environments that engender student's construction of mathematical ideas and reasoning: a constructivist perspective. http://mathforum.org/technology/papers/papers/battista/battista.html

Dubinski, E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, In D. O. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluer Academic Publishers, pp. 95-123

Finzer, W. F., & Bennett, D. (1995) From drawing to construction with The Geometer’s Sketchpad. *Mathematics Teacher*, Vol. 88, pp. 428-431.

Greenberg, M. J. (2003) Euclidean and *Non-Euclidean Geometries; Development and History*, Freeman.

Greeno, J. G.(1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.22, pp. 170-218.

Hölzl, R. (1996). How does the ’dragging’ affect the learning geometry? International *Journal of Computers for mathematical learning* Vol. 1, pp. 169-187.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental Models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Krutetskii, V. A.(1976), *The pshchology of mathematical abilities in school children.*, Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Sheffield, L.J. (1999). *Developing Mathematically Promising Students*, Reston VA: National Counsil of Teachers of Mathematics.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders’ notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians, *Journal for the Education of the Gifted*, 27(4), pp. 267-292

Analysis on Mathematically Gifted Middle School Students' Characteristic of Mathematical Thinking and Verbal Expression in the Study of Parallel Lines in Non-Euclidean Disc Model using Dynamic Geometry Software

Hong, Seong Kowan (Pusan National University)

The purpose of this paper is to analyze how mathematically gifted middle school students find out the necessary and sufficient condition for a certain hyperbolic line to be parallel to a given hyperbolic line in Non-Euclidean disc model (Poincaré disc model) using the Geometer's Sketchpad. We also investigated their characteristic of mathematical thinking and analyze how they express what they had observed while they did mental experiments in the Poincaré disc using computer-aided construction tools, measurement tools and inductive reasoning.

Key Words : Non-Euclidean Disc Model(비유클리드 원판모델), Parallel line(평행선), Mental Model(정신모델),

논문접수 : 2013. 1. 11
논문수정 : 2013. 1. 30
심사완료 : 2013. 2. 7

<부록 : 한 쌍의 극한평행선을 인지한 학생들이 평행선이 될 필요충분조건을 기술한 목록>

학생	언어표현
A	임의의 직선은 공간을 2개로 나누는데 점 A가 있는 부분에 2개의 점을 이용해 극한 평행선을 그을 수 있다. 이 때 2개의 극한평행선과 호로 둘러쌓인 부분에 다른 한 점이 있으면 그 직선은 평행신이 되지 않는다. 즉 1개의 극한 평행선과 호로 둘러 쌓이지 않은 부분외의 점에서는 평행하다.
B	x13를 지나는 직선이 v13w13과 평행하게 되려면 이 주어진 공간 속에서 x13을 지나는 직선과 v13w13이 만나지 않아야 이 두 직선은 평행한다고 한다. 그리고 이 것이 가능하려면 x13을 지나는 직선 중 v13w13과 극한까지 가까이 가서 원주에서 만난다고 보여지는 직선 사이에만 있으면 이 직선은 w13v13과 교점이 생길 수가 없으니 평행하다고 볼 수가 있다. (이 때 극한까지 갔을 때의 원주와의 교점을 각각 i14와 j14라고 하도록 하자.) 즉, x13i14와 x13j14 사이에 있어야 그 직선은 v13w13과 평행하다고 할 수가 있다.
C	점 O를 지나는 직선이 주어진 직선과 평행하려면 그 직선은 직선 ON과 OQ에 의해 나누어지는 4개의 부분에서 주어진 직선이 포한되어 있는 영역과 그 영역하고 이웃하지 않는 영역을 지나지 않아야 한다.
D	임의의 직선은 공간을 2부분으로 나눈다. 이 때 점 A가 있는 부분에서 2개의 극한평행선을 그을 수 있다. 이 때 2개의 극한평행선와 호로 둘러싸인 부분에 다른 한 점이 있으면 그 직선은 평행선이 아니다. 따라서 1개의 극한평행선과 호로 둘러싸인 부분에 있는 점과 A와의 교점에서는 평행하다.
F	색칠한 부분의 내부에 존재하는 점과 한 점 P를 지나는 쌍곡직선은 주어진 쌍곡직선과 평행한다. 즉 주어진 쌍곡직선과 만나지 않는다.
G	A를 지나는 직선이 주어진 직선과 평행하려면 그 직선은 좌극한 평행선과 우극한 평행선으로 나누어지는 네 부분 중 주어진 직선이 포함되어 있는 영역과 그 영역과 이웃하지 않는 영역을 제외한 영역의 점과 A를 니은 직선이면 된다. (경계는 포함되지 않는다.)
H	점 C를 지나며 다른 임의의 점을 지나는 직선 중 임의의 점이 색칠된 부분을 지나선 안 된다.
I	임의의 직선은 공간을 2부분으로 나눈다. 이 때 점 A가 있는 부분에서 2개의 극한 평행선을 그을 수 있다. 이때 2개의 극한평행선과 호로 둘러싸인 부분에 다른 한 점이 있으면 그 직선은 평행선이 아니다. 따라서 1개의 극한 평행선과 호로 둘러싸인 부분에 있는 점과 A와의 교점에서는 평행하다.
K	A를 지나는 직선이 주어진 직선 IS와 평행할 조건은 그 직선 위에 있는 임의의 점이 직선 IS 위에 있지 않아야 한다. 즉, 직선 IS가 구를 두 부분으로 나눌 때, A 쪽에 있는 영역을 영역 1이라 하자. 직선 IM이 영역 1을 두 부분으로 나누는데, 호

	IT가 있는 부분을 영역 2라 하고, 반대쪽은 영역 3이라 하자. 영역 2를 직선 ST가 분할하는데, 호 IT가 있는 부분을 영역 4라 하자. 영역 3을 직선 IV가 분할할 때 호 SV가 있는 부분을 영역 5라 하자. 이 때 영역 4와 영역 5에 있는 임의의 점 R은 A와 연결할 때 직선 IS에 평행하게 된다.
L	좌극한평행선과 주어진 직선이 접하는 부분과 우극한평행선이 주어진 직선과 접하지 않는 부분을과 점 A가 이루는 평면과 우극한 평행선과 주어진 직선이 접하는 부분과 좌극한 평해선이 주어진 직선과 접하지 않는 부분을과 점 A가 이루는 평면에 있는 점을 A와 이으면 평행선이다.
M	아래의 선분을 선분 l이라고 하자. 선분에 평행하고 B를 지나는 두 직선을 좌평행선, 우평행선이라 하자. 그러면 B를 지나고 선분과 평행한 선분을 만들기 위해선 다른 B 이외의 다른 선분은 선분 l과 접하는 영역과 가장 멀리 떨어진 영역이 있지 않으면 평행선이 생성된다.
P	점 A를 지나면서 주어진 직선과 테두리에서 만나는 직선을 각각 좌극한평행선, 우극한평행선이라고 하자. 좌극한평행선과 우극한평행선의 안쪽 영역에 포함되지 않는 점과 A를 지나는 직선을 그으면 주어진 직선과 평행하게 된다.
Q	주어진 직선과 원이 이루는 면적 밖의 점을 지나고 점 A를 지나는 직선은 반드시 평행선이 된다. (주어진 직선과 원이 이루는 부분은 지나지 않는다.)
R	K1을 지나는 임의의 직선이 주어진 직선과 만나지 않으면 평행선이 된다. 직선 AB를 아래라고 한다면 K1K2에서 윗부분과 K1K3의 윗부분 둘 중 한 집합에만 포함된 영역의 점 C를 잡으면 K1C는 AB에 평행이다.
S	직선 l에 접하고 A를 지나는 직선이 두 개(여기서는 AB와 AC) 있는데 여기서 두 직선 AB와 AC에 대해 4개의 영역로 나뉜다. 이 중에 l을 포함하는 영역과 그 반대편의 영역을 제외한 두 영역이 존재한다. 그 영역 내부의 점 (둘레에 존재하는 점을 제외한)과 A를 이으면 평행선이 된다.