http://dx.doi.org/10.7236/JIIBC.2013.13.1.153
JIIBC 2013-1-22

중개수송 문제 최적 알고리즘

Optimal Algorithm for Transshipment Problem

이상운*, 최명복**

Sang-Un Lee, Myeong-Bok Choi

요 약 본 논문은 중개수송 문제의 최적 해를 찾는 가장 단순한 방법을 제안하였다. 중개 수송문제는 직접 선형계획법이나 TSM을 적용하거나 일반적인 수송문제로 변환시켜 TSM을 적용하여 최적해를 구한다. 그러나 TSM을 적용하여 최적해를 구하기 위해서는 초기해를 구하고 해 개선 과정을 거치는 방법이 어렵다. 초기해를 구하기 위해서는 NCM, LCM이나 VAM을 적용하며, 해 개선을 위해서는 MODI나 SSM을 적용한다. 본 논문은 중개수송 문제를 수송문제로 변환시키는 방법을 적용하였다. 수송문제에 대해서는 단순히 열의 최소 비용을 선택하고, 선택된 비용들에 대해 행의 비용 오름차순으로 수송량을 배정하는 방법을 적용하여 초기해를 빠르게 배정할 수 있었다. 해 개선은 보다 큰 비용에 수송량이 배정된 경우 보다 작은 비용으로 변경할 수 있는 조건을 만족하면 배정량을 조정하는 방법을 적용하였다. 제안된 방법을 11개의 다양한 중개수송 문제에 적용한 결과 10개 문제는 초기 배정만으로 최적해를 구할 수 있었으며, 단지 2개 문제만이 해 개선과정을 1개의 비용만 변경하여 최적해를 구할 수 있었다. 따라서 제안된 방법은 중개수송 문제에 대해 가장 간단한 최적해 방법으로 적용할 수 있을 것이다.

Abstract This paper proposes the most simple method for optimal solution of the transshipment problem. Usually the transshipment problem is solved by direct linear programming or TSM (Transportation Simplex Method). The method using TSM has two steps. First it is to get a initial solution using NCM, LCM, or VAM, second to refine the initial solution using MOD or SSM. However the steps is complex and difficult. The proposed method applies the method that transforms transshipment problem to transportation problem. In the proposed method it simply selects the minimum cost of rows about transportation problem, and then it applies the method that assigns a transported volume as an ascending sort of the costs of rows about the selected costs. Our method makes to be very fast got the initial value. Also we uses the method that controls assignment volume, if a heavy item of cost is assigned to a transported volume and it has a condition to be able to transform to more lower cost. The proposed algorithm simply got the optimal solution with applying to 11 transshipment problem.

Key Words : Transshipment Problem, Balanced and Unbalanced Problem, TSM(Transportation Simplex Method), The First Assignment of Minimum cost

Ⅰ. 서 론

수송 문제 (Transportation Problem)는 다수의 공급처 $(S_i, i=1,2,\cdots,m)$와 수요처 $(D_j, j=1,2,\cdots,n)$가 존재하며, 공급량 (s_i)과 요구량 (d_j), 공급처에서 수요처로의 수송 단위당 소요 비용 (c_{ij})이 다른 경우, 공급량과 요구

*정회원, 강릉원주대학교, 멀티미디어공학과
**종신회원, 강릉원주대학교 멀티미디어공학과
접수일자 : 2012년 10월 6일, 수정완료 : 2012년 12월 26일
게재확정일자 : 2013년 2월 8일
Received: 6 October 2012 / Revised: 26 December 2012 / Accepted: 8 February 2013
**Corresponding Author: cmb5859@gmail.com
Dept. of Multimedia Engineering, Gangnung-Wonju National University Wonju Campus, Korea

량을 모두 만족하도록 수송량 (x_{ij})을 할당하였을 때 최소의 수송비용 합 ($z =_{\min} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$)을 찾는 문제이다.[1-3] 반면에 중개수송문제 (Transshipment Problem)은 공급지와 수요지 사이에 중간 경유지가 있는 수송문제이다.[4-7]

중개수송 문제를 해결하는 방법으로는 직접 푸는 방법과 일반적인 수송문제로 변환하여 푸는 방법이 있다. 직접 푸는 방법으로는 선형 계획법 (Linear Programming)으로 수식화하는 방법과 수송 심플렉스법 (Transportation Simplex Method, TSM)을 적용하는 방법이 있으며, 보통의 수송문제로 변환하여 수송 심플렉스법을 적용한다.[7] TSM은 3단계를 수행한다.[7,8] 1단계에는 불균형 문제인 경우 수송비용이 0인 가상의 행이나 열을 추가하여 균형 문제로 변환시킨다. 2단계에는 북서코너법(Northwest Corner Method, NCM), 최소비용법(Least-Cost Method, LCM)과 보겔근사법(Vogel's Approximation Method, VAM) 등을 이용하여 가장 작은 z 값을 초기해로 한다. 3단계는 수정배분법(Modified Distribution Method, MODI) 또는 디딤돌법(Stepping-Stone Method, SSM)을 적용하여 최적 해를 얻었는지 검증하고 비용을 감소시키도록 수송량을 재조정한다.

TSM을 적용할 경우 가장 큰 문제점은 초기해를 구할 때 NCM, LCM과 VAM 중 어느 방법도 모든 수송문제의 해를 찾지 못한다. 즉, 일반화된 방법이 존재하지 않기 때문에 어떤 방법을 적용할 것인지를 결정하는데 어려움이 있다. 또한, 초기해가 최적해인지 검증하는 MODI나 SSM을 다시 적용해야 하기 때문에 하나의 문제를 해결하는데 많은 시간이 소요된다.

본 논문은 중개수송 문제의 최적 해를 쉬우면서도 빠르게 도출할 수 있는 단일화된 방법을 제안한다. 제안된 방법은 중개수송문제를 보통의 수송문제로 변환하여 알고리즘을 적용한다. 제안된 알고리즘은 불균형 중개수송 문제에 대해서도 가상의 행이나 열을 추가하지 않고 직접 적용한다. 따라서 TSM의 1단계를 생략할 수 있다. 다음으로, TSM의 초기해를 구하는 3가지 방법보다도 단순하게 한 단계만을 단순히 적용하여 초기해를 빠르고 쉽게 결정할 수 있다. 마지막으로 초기해가 최적해인지 검증하는 MODI나 SSM의 복잡한 과정을 간단히 해결하였다. 따라서 TSM의 적용 어려움을 해결하였으며, 수행 방법도 단순화한 장점을 갖고 있다. 결국, 제안된 알고리즘은 중개수송 문제를 해결하는 가장 단순한 일반화된 방법이라 할 수 있다.

2장에서는 중개수송 문제와 최적해를 구하는 TSM을 제시하고 적용 문제점을 고찰해 본다. 3장에서는 중개수송 문제의 최적해를 찾는 최적 중개수송 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 최적 중개수송 방법을 다양한 사례들에 적용하여 최적해를 찾는지 평가해 본다.

II. 관련 연구와 연구 배경

그림 1의 중개수송문제를 고찰해보자. 그림 1은 Ntaimo[3], 강진규[7]과 Salassi[8]에서 제시된 예제이다. 그림 1을 수송표로 표현하면 표 1과 같다. 표에서 수송이 불가능한 경로는 매우 큰 값인 "M"으로 표기한다.

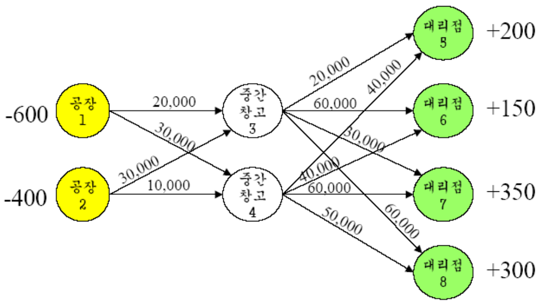


그림 1. T_1 중개수송 문제
Fig. 1. Transshipment Problem

표 1. 중개수송문제의 중개 수송표 표현
Table 1. The Transshipment Table of the Transshipment Problem

비용 단위 : 천원

공급지 \ 수요지	중간창고 3	중간창고 4	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량
공장1	20	30	M	M	M	M	600
공장2	30	10	M	M	M	M	400
중간창고3	0	M	20	60	30	60	-
중간창고4	M	0	40	40	60	50	-
수요량	-	-	200	150	350	300	1,000

표 1에 대해 직접 TSM을 적용하여 해를 얻기 위해서는 중간창고의 공급량과 수요량을 갱신하여야 하며, 이 값은 총 공급량 (=총 수요량)으로 1,000이 된다. 즉, 표 1은 표 2로 변환된다.

표 2. 중개 수송표 갱신
Table 2. Modify of Transshipment Table

비용 단위 : 천원

공급지 \ 수요지	중간창고 3	중간창고 4	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량
공장1	20	30	M	M	M	M	600
공장2	30	10	M	M	M	M	400
중간창고3	0	M	20	60	30	60	1,000
중간창고4	M	0	40	40	60	50	1,000
수요량	1,000	1,000	200	150	350	300	3,000

표 2에 대해 직접 TSM을 적용하여 해를 구할 수 있으며, 일반 수송표로 변환시켜 TSM을 적용할 수도 있다. 표 2를 일반 수송표로 변환시켜 각 셀에서 최소값을 선택한 결과는 표 3과 같다.

표 3. 중개 수송표의 일반 수송표로의 변환
Table 3. Transformation of Transshipment Table to General Transit Table

공급지 \ 수요지	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량
공장1-중간창고3	**20+20=40**	20+60=80	**20+30=50**	**20+60=80**	600
공장1-중간창고4	30+40=70	**30+40=70**	30+60=90	30+50=80	
공장2-중간창고3	**30+20=50**	30+60=90	**30+30=60**	30+60=90	400
공장2-중간창고4	10+40=50	**10+40=50**	10+60=70	**10+50=60**	
수요량	200	150	350	300	3,000

공급지 \ 수요지	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량
공장1	40	70	50	80	600
공장2	50	50	60	60	400
수요량	200	150	350	300	3,000

수송 문제의 최적 해를 찾는 TSM은 그림 2와 같이 3단계의 과정을 거쳐 수행된다. 초기 해를 구하는 VAM과 최적 해 검증 방법인 MODI도 참고로 제시하였다.[7,9]

1단계 : 균형수송문제인지를 확인하고 수송표를 만든다. 불균형수송문제이면 가공급처나 가수요처를 도입하여 균형수송문제로 만든다.

2단계 : 초기 해를 구한다. 초기 해를 구하는 기본적인 방법으로 NCM, 발견적 기법으로 LCM과 VAM이 있다.

(VAM)
1. 각 i 행의 기회비용 lc_l 계산. ($lc_i = {}_{min2}c_i - {}_{min1}c_i$: 2번째 작은 비용-첫번째 작은 비용)
   각 j 열에 대해 기회비용 lc_j 계산. ($lc_j = {}_{min2}c_j - {}_{min1}c_j$)
2. 행의 기회비용과 열의 기회비용 차이가 가장 큰 ${}_{max}(lc_i - lc_j)$ 셀 확인
3. ${}_{max}(lc_i - lc_j)$ 셀의 행 또는 열에서 최소 비용인 셀에 최대한 많은 양을 배정. 만약 ${}_{max}(lc_i - lc_j)$ 이 다수 존재시 행 또는 열에서 최소 비용 셀에 가능한 많은 양 배정.
4. 만약, 행과 열의 모든 요구조건을 만족하면 종료, 그렇지 않으면 Step 5 수행.
5. 공급량과 수요량 수정, 남은 양이 0이면 그 행이나 열을 지움
   만약 행과 열이 동시에 0이 되면 둘 중 하나만 지우고 다른 하나는 0으로 둠
   만약 하나의 행이나 열이 남게 되면 공급량과 수요량에 맞게 나머지 배정
   go to Step 1.

3단계 : 최적 해인지 검토하여 아니면 해를 개선한다. 해의 검토와 개선 방법은 디딤돌법 (SSM) 또는 수정배분법 (MODI)이 있다.

(MODI) /* 최적여부 검사 및 해 개선
1. **최적여부 검사.** 공급처와 수요처에 상응하는 쌍대변수를 각각 u_i, v_j 라 하고, 기저변수 (셀에 값이 배정된 변수) x_{ij} 에 대해, $u_i + v_j = c_{ij}$ 로 u_i, v_j 를 구한다. (등식이 $m+n-1$ 개, 미지수가 $m+n$ 인 부정방정식으로 u_i 나 v_j 중 임의로 한 개 값을 0으로 고정시켜 나머지 값도 구한다.) 비기저변수 (값이 배정되지 않은 변수)에 대한 수정비용 $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ 값들이 모두 음수가 아니면 최적 해를 얻는다.
2. **진입변수 결정.** Step 1에서 구한 d_{ij} 값 중 가장 작은 음수 (절대값이 가장 큰 음수)를 갖는 변수를 기저변수로 삼는다.
3. **탈락변수 결정.** 선택된 진입변수에서 출발하여 기저변수들을 경유하여 제자리에 되돌아오는 폐쇄고리를 형성한다. 폐쇄고리에 속한 변수들에 대해 출발점으로부터 교대로 수송량의 증가와 감소를 표시하여 감소에 해당하는 값 중 가장 작은 값을 갖는 변수를 탈락시키고 그 값을 조정수송량으로 결정한다.
4. **해 개선.** 형성된 폐쇄고리에 대해 Step 3에서 정한 조정수송량을 진입변수에서 출발하여 교대로 증가・감소시키고, 최적 해가 얻어질 때까지 위 과정을 반복한다.

그림 2. 수송 심플렉스법
Fig. 2. TSM

중개수송문제를 TSM으로 풀기 위해서는 다음과 같은 문제점이 있다.

(1) 불균형 수송문제는 가상 (Dummy)의 행 또는 열을 추가하여 균형 수송인 $\Sigma s_i = \Sigma d_j$로 만드는 과정이 요구된다.

(2) 중개수송문제를 직접 TSM으로 풀기 위해서는 행과 열의 차수가 보다 복잡하여 많은 시간이 필요하다. 따라서 일반 수송표로 변환시켜 행과 열의 차수를 최소화시키는 방법이 요구된다.

(3) 초기 해를 구하는 NCM, LCM 또는 VAM중 어느 한 가지 방법이 모든 문제에 적합한 최소의 z 값을 얻지 못한다. 따라서 하나의 문제에 대한 초기해를 구하기 위해 3가지 방법 모두를 적용해 최소값 z를 찾아야만 한다.

(4) 초기 해가 최적 해인지 검증하는 MODI나 SSM이 적용에 어려움이 있어 대부분은 초기해를 구하여 최적해로 간주한다.

Ⅲ. 최적 중개수송 알고리즘

본 장에서는 기존의 TSM이 갖고 있는 문제점들을 모두 해결한 최적의 단일화된 방법을 제안한다. 제안되는 방법은 불균형 수송문제를 균형 수송으로 변경하지 않는다. 또한. 기존의 초기 해를 구하는 NCM, LCM 또는 VAM을 적용하여 최적의 값을 선택하지 않고 1개의 Step으로 간단히 결정한다. 또한, 초기해가 최적해인지 검증하는 과정도 간단히 해결한다.

1. 알고리즘 제안

첫 번째로, 중개수송문제를 일반 수송문제로 변환시켜 행과 열의 차수를 최소화하여 문제를 단순화시킨다. 두 번째로, 초기해를 구하기 위해 각 열 (요구)의 최소 비용만을 찾아 각 행에 대해 선택된 최소 비용들의 오름차순으로 요구량을 충족시키도록 공급량을 배정한다. 초기 배정 결과 행의 공급량이 남아 있고, 요구량을 충족시키지 못하는 열이 존재하면 해당 행・열의 비용들만을 대상으로 오름차순으로 남아 있는 공급량을 배정한다. 이와 같이 간단히 초기해를 결정한다. 세 번째로, 열을 기준으로 보다 큰 비용에 배정된 수송량을 보다 작은 비용으로 수송 가능하면 수송량을 감소・증가시킨다. 이에 영향을 받는 다른 열에 의 수송량도 감소・증가시켜 해를 개선한다. 제안된 방법은 거의 모든 균형이나 불균형 중개수송 문제의 최적해를 찾을 수 있어 "최적 중개수송 방법 (Optimal Transshipment Method, OTM)"이라 한다.

Step 1. 중개수송표를 일반 수송표로 변환
Step 2. 초기 배정
for $j=1$ to n
  j열에 대해 ${}_{\min}c_j$ 선택
end
for $i=1$ to m
  i 행에 대해 ${}_{\min}c_j$ 비용 오름차순으로 d_j를 만족하도록 s_i에서 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots$ 할당.
  if $(s_i - \Sigma x_{ij}) > 0$ 행, $(\Sigma x_{ij} - d_j) > 0$ 열 존재 then
    $c_{ij} \neq {}_{\min}c_j$ 비용 오름차순으로 d_j 부족분 할당.
end

Step 3. 초기해 개선을 위한 배정량 조정
  ${}_{\min}c_j$: j열의 최소 비용, ${}_{mid}c_j$: j열의 중간 비용, ${}_{\max}c_j$: j열의 최대 비용.
  ${}_{\max}c_j \rightarrow {}_{\min}c_j$ c_{kj} 내림차순, ${}_{\max}c_j \rightarrow {}_{mid}c_j$, ${}_{mid}c_j \rightarrow {}_{\min}c_j$ 순으로 수행
  임의의 수요지 D_i의 비용 $c_{ij} > c_{ik}$의 배정량 $x_{ij} > 0$, $x_{ik} \geq 0$일 때, c_{ij}, c_{ik}의 열에서 c_{lj}, c_{lk}의 배정량 $x_{lj} \geq 0$, $x_{lk} > 0$를 모두 찾는다.
  if $(c_{ij} + c_{lk}) > (c_{ik} + c_{lj})$ 존재 then $x_{ij} = x_{ij} - \min(x_{ij}, x_{lk})$, $x_{ik} = x_{ik} + \min(x_{ij}, x_{lk})$, $x_{lk} = x_{lk} - \min(x_{ij}, x_{lk})$, $x_{lj} = x_{lj} + \min(x_{ij}, x_{lk})$.

그림 3. 최적 중개수송 방법
Fig 3. Optimal Transshipment Method

OTM의 상세한 내용은 그림 3에 제시되어 있다.

2. 알고리즘 적용

강진규[7]은 그림 1의 데이터에 대해 TSM을 적용한 결과 표 4와 같이 배정하였으며, $z = 52,000$(천원)을 얻었다.

표 4. TSM 적용 최적 수송표
Table 4. Optiomal Transshipment Table with TSM

(a) 직접 TSM 적용

공급지 \ 수요지	중간창고 3	중간창고 4	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량
공장1	20/600	30/ 0	M/ 0	M/ 0	M/ 0	M/ 0	600
공장2	30/ 0	10/400	M/ 0	M/ 0	M/ 0	M/ 0	400
중간창고3	0/400	M/ 0	20/200	60/ 0	30/350	60/ 50	1,000
중간창고4	M/ 0	0/600	40/ 0	40/150	60/ 0	50/250	1,000
수요량	1,000	1,000	200	150	350	300	3,000

(b) 일반 수송표로 변환, TSM 적용

공급지 \ 수요지	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량
공장1	40/200	70/ 0	50/350	80/ 50	600
공장2	50/ 0	50/150	60/ 0	60/250	400
수요량	200	150	350	300	3,000

표 2에 대해 OTM을 적용한 결과는 표 5와 같다. OTM는 초기 배정을 간단히 결정하고, 배정량 조정 대상이 없어 초기 배정 결과가 최적해가 됨을 알 수 있다. 본 중개수송 문제에 대해 TSM과 OTM 모두 $z = 5,200$의 동일한 최적해를 얻는데 성공하였다.

표 5. OTM 적용 최적 수송표
Table 5. Optiomal Transshipment Table with OTM

(a) 초기 배정

c_{ij}/x_{ij}	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량 (s_i)	$s_i - \Sigma x_{ij}$
공장1	40/200 ①	70	50/350 ②	80	600	50
공장2	50	50/150 ①	60	60/250 ②	400	0
수요량 (d_j)	200	150	350	300	3,000	
$\Sigma x_{ij} - d_j$	0	0	0	-50		

c_{ij}/x_{ij}	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량 (s_i)	$s_i - \Sigma x_{ij}$
공장1	40/200	70/ 0	50/350	80/ 50	600	50→0
공장2	50/ 0	50/150	60/ 0	60/250	400	0
수요량 (d_j)	200	150	350	300	3,000	
$\Sigma x_{ij} - d_j$	0	0	0	-50→0		

(b) 초기해 개선 : 대상 없음 ⇒ 최적해

c_{ij}/x_{ij}	대리점 5	대리점 6	대리점 7	대리점 8	공급량 (s_i)
공장1	40/200	70/ 0	50/350	80/ 50	600
공장2	50/ 0	50/150	60/ 0	60/250	400
수요량 (d_j)	200	150	350	300	3,000

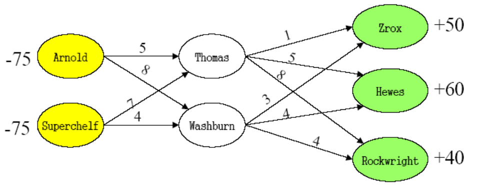
$z=52,000$ (천원)

Ⅳ. 알고리즘 적용성 평가

1. 실험 적용 데이터

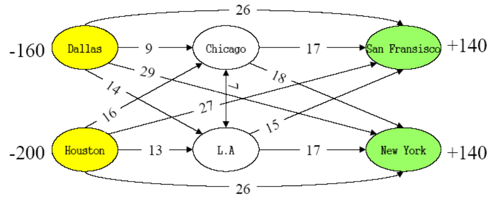
최적 수송 알고리즘의 적용성 평가는 그림 4의 13개 균형과 불균형 수송 문제를 대상으로 한다. T_2는 Loucks[5], T_3는 Niu[4], T_4는 Loucks[5], T_5는 Beasley[10], T_6는 Mitchell과 Phillips[11], T_7은 Hill[12], Jensen[13]과 Giallombardo[14]에서, T_8, T_9은 Jensen[13], T_{10}은 Dantzig[6], T_{11}은 Salassi[8]에서 인용되었다.

OTM은 T_2와 T_{10} 문제만이 1개의 해 개선 과정을 수행하였으며, 나머지 8개 문제는 초기 배정만으로 최적해를 구하는데 성공하였다. 따라서 TSM의 SSM이나 MODI와 같이 복잡한 해 개선 방법을 적용하지 않아도 되는 장점이 있음을 알 수 있다.



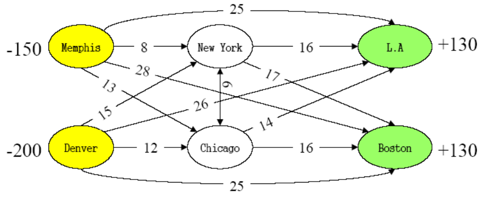
공급지 \ 수요지	Thomas (T)	Washburn (W)	Zrox (Z)	Hewes (H)	Rockwright (R)	공급량
Arnold (A)	5	8	M	M	M	75
Superchelf (S)	7	4	M	M	M	75
Thomas (T)	0	M	1	5	8	-
Washburn (W)	M	0	3	4	4	-
수요량	-	-	50	60	40	150

(a) T_2 균형 중개수송문제



공급지 \ 수요지	Chicago	L.A	San Fansisco	N.Y	공급량
Dallas	9	14	26	29	160
Houston	16	13	27	26	200
Chicago	0	7	17	18	-
L.A	7	0	15	17	-
수요량	-	-	140	140	360/280

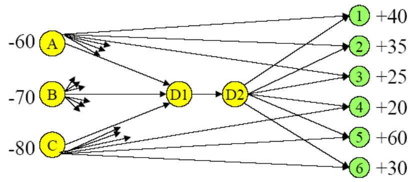
(b) T_3 불균형 중개수송문제



공급지 \ 수요지	New York	Chicago	L.A	Boston	Dummy	공급량
Memphis	8/130	13/ 0	25/ 0	28/ 0	0/20	150
Denver	15/ 0	12/ 0	26/ 0	25/130	0/70	200
New York	0/220	6/ 0	16/130	17/ 0	0/ 0	350
Chicago	6/ 0	0/350	14/ 0	16/ 0	0/ 0	350
수요량	350	350	130	130	90	350/260

$z=6,370$

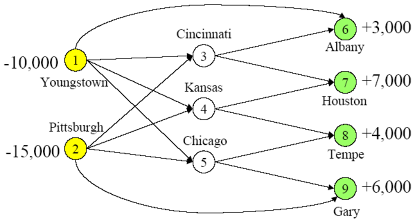
(c) T_4 불균형 중개수송문제



c_{ij}/x_{ij}	D1	D2	1	2	3	4	5	6	공급량
A	11.4/60	-	12.8	13.1	14.4	15.5	13.8	14.3	60
B	11.3/70	-	13.2	15.6	14.5	13.4	12.8	15.0	70
C	11.5/25	-	14.4	15.6	12.4/ 25	15.2	13.6	12.8/ 30	80
D1	-	0.7/155	-	-	-	-	-	-	-
D2	-	-	0.7/40	0.9/35	1.1	0.8/20	0.6/60	0.9	-
수요량	-	-	40	35	25	20	60	30	210

$z=2,676.50$

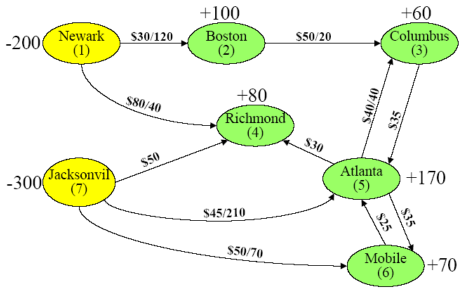
(d) T_5 균형 중개수송문제



수요지 / 공급지	Cincinnati (3)	Kansas (4)	Chicago (5)	Albany (6)	Houston (7)	Tempe (8)	Gary (9)	공급량
1	350/3	450/1-5	375/5	500/1	-	-	-	10
2	350/2	450/2-5	400/4	-	-	-	-	15
3	-	-	-	350/1-5	550/6	-	-	-
4	-	-	-	375/4	650/4	-	-	-
5	-	-	-	-	600/2	120/4	-	-
수요량	-	-	-	3	7	4,	6	25/20

월간 최소-최대 American Steel 수송용량 (단위 : 천톤, $/1,000톤)

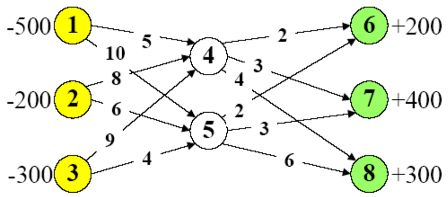
(e) T_6 불균형 중개수송문제



수요지 / 공급지	Boston	Columbus	Richmond	Atlanta	Mobile	공급량
Newark	$30/20	-	$40/80	-	-	200
Jacksonvil	-	-	$50	$45/210	$50/70	300
Boston	-	$50/20	-	-	-	-
Columbus	-	-	-	$35	-	-
Richmond	-	-	-	-	-	-
Atlanta	-	$40/40	$30	-	$35	-
Mobile	-	-	-	$25	-	-
수요량	100	60	80	170	70	500/480

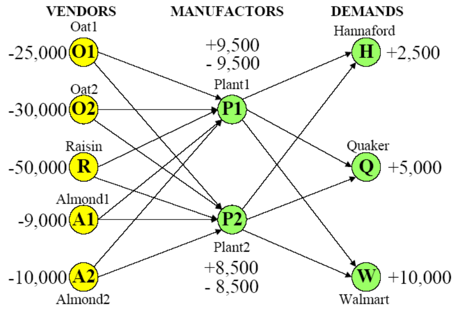
$z = \$22,350$

(f) T_7 불균형 중개수송문제



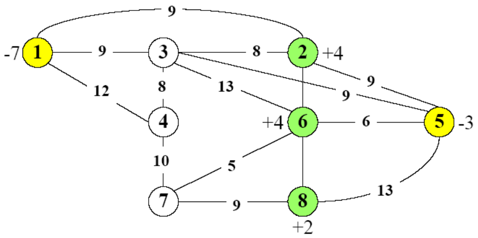
수요지 / 공급지	4	5	6	7	8	공급량
1	5	10	-	-	-	500
2	8	6	-	-	-	200
3	9	4	-	-	-	300
4	-	-	2	3	4	-
5	-	-	2	3	6	-
수요량	-	-	200	400	300	1000/900

(g) T_8 불균형 중개수송문제



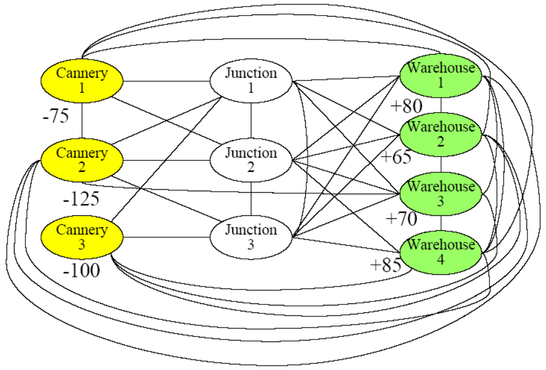
수요지 / 공급지	P1	P2	H	Q	W	공급량
O1	100	110	-	-	-	25,000
O2	105	95	-	-	-	30,000
R	550	525	-	-	-	50,000
A1	1050	1150	-	-	-	9,000
A2	1200	1100	-	-	-	10,000
수요량	9500	8500	-	-	-	124000/18000
P1	-	-	100	65	90	9,500
P2	-	-	95	70	90	8,500
수요량	-	-	2,500	5,000	10,000	18000/17500

(h) T_9 불균형 중개수송문제



수요지 / 공급지	3	4	7	2	6	8	공급량
1	9	12	-	9	-	-	7
5	9	-	-	9	6	13	3
3	-	8	-	8	13	-	-
4	8	-	10	-	-	-	-
7	-	10	-	-	5	9	-
수요량	-	-	-	4	4	2	10

(i) T_{10} 균형 중개수송문제



c_{ij}/x_{ij}		Cannery			Junction			Warehouse				공급량
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	
C	1		146	M	324	**286/75**	M	452	505	M	871	375
	2	146		M	373	212	570	335	**407/45**	688	784	425
	3	M	M		658	M	405	M	685	**359/70**	**673/30**	400
J	1	322	371	656		262	398	503	234	329	M	300
	2	284	210	M	262		406	305	**207/75**	464	558	300
	3	M	569	403	398	406		597	253	171	282	300
W	1	453	336	M	505	307	599		359	706	587	300
	2	505	407	683	235	208	254	357		362	**341/55**	300
	3	M	687	357	329	464	171	705	362		457	300
	4	868	781	670	M	558	282	587	340	457		300
수요량		300	300	300	300	300	300	380	365	370	385	

$z=146,165$

(j) T_{11} 균형 중개수송문제

그림 4. 실험 적용 데이터
Fig. 4. Experimental Data

2. OTM 적용 최적해 도출

그림 4의 10개 중개수송 문제를 대상으로 최적 중개수송 방법을 적용한 결과는 그림 5에 제시하였다.

c_{ij}	Z	H	R	공급량 (s_i)
A-T A-W	**5+1=6** 8+3=12	**5+5=10** 8+4=12	5+8=13 **8+4=12**	75
S-T S-W	7+1=8 **4+3=7**	7+5=12 **4+4=8**	7+8=15 **4+4=8**	75
수요량 (d_j)	50	60	40	150

c_{ij}/x_{ij}	Z	H	R	공급량 (s_i)	$s_i-\Sigma x_{ij}$
A	**6/50**	**10/ 0**	**12/25**	75	25→0
S	**7/ 0**	**8/60**	**8/15**	75	0
수요량 (d_j)	50	60	40	150	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	0	-25→0		

c_{ij}/x_{ij}	Z	H	R	s_i
A	6/50	10/25 (0+25)	12/ 0 (25-25)	75
S	7/ 0	8/35 (60-25)	8/40 (25+15)	75
d_j	50	60	40	

(a) T_2 균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	San Fansisco	N.Y	공급량
Dallas Dallas-Chicago Dallas-L.A	**26** 9+17=26 14+15=29	29 **9+18=27** 14+17=31	160
Houston (Direct) Houston-Chicago Houston-L.A	**27** 16+17=33 13+15=28	**26** 16+18=34 13+17=30	200
수요량	140	140	360/280

c_{ij}/x_{ij}	San Fansisco	N.Y	공급량 (s_i)	$s_i-\Sigma x$
Dallas	26/140	27/ 0	160	20
Houston	27/ 0	26/140	200	60
수요량 (d_j)	140	140	360/280	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	0		

$z=7,280$

(b) T_3 불균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	LA	BO	공급량
ME ME-NY ME-CH	25 8+16=**24** 13+14=27	28 8+17=**25** 13+16=29	150
DE DE-NY DE-CH	**26** 15+16=31 12+14=26	**25** 15+17=32 12+16=28	200
수요량	130	130	350/260

c_{ij}/x_{ij}	L.A	Boston	공급량 (s_i)	$s_i-\Sigma x_{ij}$
Memphis	24//130	25	150	20
Denver	26	25/130	200	60
수요량 (d_j)	130	130	350/260	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	0		

$z=6,370$

(c) T_4 불균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	1	2	3	4	5	6	공급량
A A-D	**12.8** 11.4+0.7+ 0.7=12.8	13.1 11.4+0.7+ 0.9=**13.0**	14.4 11.4+0.7+ 1.1=**13.2**	15.5 11.4+0.7+ 0.8=**12.9**	13.8 11.4+0.7+ 0.6=**12.7**	14.3 11.4+0.7+ 0.9=**13.0**	60
B BD	13.2 11.3+0.7+ 0.7=**12.7**	15.6 11.3+0.7+ 0.9=**12.9**	14.5 11.3+0.7+ 1.1=**13.1**	13.4 11.3+0.7+ 0.8=**12.8**	12.8 11.3+0.7+ 0.6=**12.6**	15.0 11.3+0.7+ 0.9=**12.9**	70
C C-D	14.4 11.5+0.7+ 0.7=**12.9**	15.6 11.5+0.7+ 0.9=**13.1**	**12.4** 11.5+0.7+ 1.1=13.3	15.2 11.5+0.7+ 0.8=**13.0**	13.6 11.5+0.7+ 0.6=**12.8**	**12.8** 11.5+0.7+ 0.9=13.1	80
수요량	40	35	25	20	60	30	210

c_{ij}/x_{ij}	1	2	3	4	5	6	s_i	$s_i-\Sigma x_i$
A	12.8	13.0	13.2	12.9	12.7	13.0	60	60
B	12.7/10	12.9/ 0	13.1	12.8/ 0	12.6/60	12.9	70	0
C	12.9	13.1	12.4/25	13.0	12.8	12.8/30	80	25
d_j	40	35	25	20	60	30	210	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	-30	-35	0	-20	0	0		

c_{ij}/x_{ij}	1	2	3	4	5	6	s_i	$s_i-\Sigma x_i$
A	12.8/30	13.0/10	13.2	12.9/20	12.7	13.0	60	60→0
B	12.7/10	12.9/ 0	13.1	12.8/ 0	12.6/60	12.9	70	0
C	12.9/ 0	13.1/25	12.4/25	13.0/ 0	12.8	12.8/30	80	25→0
d_j	40	35	25	20	60	30	210	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	-30→0	-35→0	0	-20→0	0	0		

c_{ij}/x_{ij}	1	2	3	4	5	6	s_i
A	12.8/30	13.0/10	13.2/ 0	12.9/20	12.7/ 0	13.0/ 0	60
B	12.7/10	12.9/ 0	13.1/ 0	12.8/ 0	12.6/60	12.9/ 0	70
C	12.9/ 0	13.1/25	12.4/25	13.0/ 0	12.8/ 0	12.8/30	80
d_j	40	35	25	20	60	30	210

$z=2,676.50$

(d) T_5 균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	6	7	8	9	공급량
1 1-3 1-4 1-5	**500** 350+350=700 – –	– 350+550=900 450+375=**825** –	– – 450+650=1100 375+600=**975**	– – – 375+120=**595**	10
2 2-3 2-4 2-5	– 350+350=**70** **0** – –	– 350+550=900 450+375=**825** –	– – 450+650=1100 400+600=**100** **0**	**450** – – 400+120=520	15
수요량	3	7	4	6	25/20

c_{ij}/x_{ij}	6	7	8	9	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
1	500/3	825/ 0	975/4	595	10	3
2	700	825/7	1000	450/6	15	2
d_j	3	7	4	6		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	0	0	0		

$z=\$13,875$

(e) T_6 불균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	Boston (2)	Columbus (3)	Richmond (4)	Atlanta (5)	Mobile (6)	공급량
1 1-2 1-2-3	30 - -	- 30+50=80 -	40 - -	- - 30+50+35=115	- - -	200
7 7-5 7-6	- - -	- 45+40=85 -	50 45+30=75 -	45 - 50+25=75	50 45+35=75 -	300
수요량	100	60	80	170	70	500/480

c_{ij}/x_{ij}	2	3	4	5	6	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
1	30/100	80/20	40/80	115	M	200	0
7	M	85	50	45/170	50/70	300	60
d_j	100	60	80	170	70		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	-40	0	0	0		

c_{ij}/x_{ij}	2	3	4	5	6	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
1	30/100	80/20	40/80	115/ 0	M/ 0	200	0
7	M/ 0	85/40	50/ 0	45/170	50/70	300	60→20
d_j	100	60	80	170	70		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	-40→0	0	0	0		

$z=\$22,350$

(f) T_7 불균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	6	7	8	공급량
1 1-4 1-5	- 5+2=7 10+2=12	- 5+3=8 10+3=13	- 5+4=9 10+6=16	500
2 2-4 2-5	- 8+2=10 6+2=8	- 8+3=11 6+3=9	- 8+4=12 6+6=12	200
3 3-4 3-5	- 9+2=11 4+2=6	- 9+3=12 4+3=7	- 9+4=13 4+6=10	300
수요량	200	400	300	1000/900

c_{ij}/x_{ij}	6	7	8	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
1	7	8	9/300	500	200
2	8	9	12	200	200
3	6/200	7/100	10	300	0
d_j	200	400	300		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	-300	0		

c_{ij}/x_{ij}	6	7	8	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
1	7/ 0	8/200	9/300	500	200→0
2	8/ 0	9/100	12/ 0	200	200→100
3	6/200	7/100	10/ 0	300	0
d_j	200	400	300		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	-300→0	0		

$z = 7,100$

(g) T_8 불균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}/x_{ij}	P1	P2	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
O1	100	110	25,000	25,000
O2	105/9500	95/8500	30,000	12,000
R	550	525	50,000	50,000
A1	1050	1150	9,000	9,000
A2	1200	1100	10,000	10,000
d_j	9500	8500		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	0		

c_{ij}/x_{ij}	H	Q	W	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
P1	100	65/5000	90/4500	9500	0
P2	95/2500	70	90	8500	6,000
d_j	2,500	5,000	10,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	0	-5,500		

c_{ij}/x_{ij}	H	Q	W	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
P1	100/ 0	65/5000	90/4500	9500	0
P2	95/2500	70/ 0	90/5500	8500	6,000→500
d_j	2,500	5,000	10,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	0	-5,500→0		

$z=3,267,500$

(h) T_9 불균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	2	6	8	s_i
1 1-2 1-3 1-4-7 1-2-6	9 - 9+8=17 - -	- 9+12=21 9+9=18 12+10+5=27 -	- - - 12+10+9=31 9+12+8=29	7
5 5-3 5-3-2 5-3-6 5-3-2-6	9 9+8=17 - - -	6 9+13=22 9+8+12=29 - -	13 - - 9+13+8=30 9+8+12+8=37	3
d_j	4	4	2	10

c_{ij}/x_{ij}	2	6	8	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
1	9/4	18	29	7	3
5	9	6/3	13/0	3	0
d_j	4	4	2	10	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	-1	-2		

c_{ij}/x_{ij}	2	6	8	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
1	9/4	18/1	29/2	7	3→0
5	9/0	6/3	13/0	3	0
d_j	4	4	2	10	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0	-1→0	-2→0		

c_{ij}/x_{ij}	2	6	8	s_i
1	9/4	18/3 (1+2)	29/0 (2-2)	7
5	9/0	6/1 (3-2)	13/2 (0+2)	3
d_j	4	4	2	

$z=122$

(i) T_{10} 균형 중개수송문제의 최적 해

c_{ij}	W1	W2	W3	W4	공급량
C1 J1 J2 W1 W2 W3	**(C1,W1)=452** J1+(J1,W1)=827 J2+(J2,W1)=591 - - -	(C1,W2)=505 J1+(J1,W2)=558 **J2+(J2,W2)=493** W1+(W1,W2)=811 - -	(C1,W3)=M **J1+(J1,W3)=653** J2+(J2,W3)=750 W1+(W1,W3)=1158 W2+(W2,W3)=855 -	(C1,W4)=871 J1+(J1,W4)=M J2+(J2,W4)=844 W1+(W1,W4)=1039 **W2+(W2,W4)=834** W3+(W3,W4)=1110	75
	W1=452	**W2=493**	**W3=653**	-	
C2 J1 J2 J3 W1 W2 W3	**(C2,W1)=335** J1+(J1,W1)=880 J2+(J2,W1)=517 J3+(J3,W1)=1167 - - -	**(C2,W2)=407** J1+(J1,W2)=607 J2+(J2,W2)=419 J3+(J3,W2)=823 W1+(W1,W2)=694 - -	(C2,W3)=688 **J1+(J1,W3)=602** J2+(J2,W3)=676 J3+(J3,W3)=641 W1+(W1,W3)=1041 W2+(W2,W3)=769 -	(C2,W4)=784 J1+(J1,W4)=M **J2+(J2,W4)=770** J3+(J3,W4)=852 W1+(W1,W4)=922 W2+(W2,W4)=748 W3+(W3,W4)=1003	125
	W1=335	**W2=407**	**W3=602**	-	
C3 J1 J3 W1 W2 W3	(C3,W3)=M J1+(J1,W1)=1161 **J3+(J3,W1)=1002** - - -	(C3,W2)=685 J1+(J1,W2)=892 **J3+(J3,W2)=658** W1+(W1,W2)=694 - -	**(C3,W3)=359** J1+(J1,W3)=987 J3+(J3,W3)=576 W1+(W1,W3)=1041 W2+(W2,W3)=769 -	**(C3,W4)=673** J1+(J1,W4)=M J3+(J3,W4)=687 W1+(W1,W4)=922 W2+(W2,W4)=748 W3+(W3,W4)=816	100
	W1=335	W2=407	W3=359	-	
수요량	80	65	70	85	

c_{ij}/x_{ij}	W1	W2	W3	W4	s_i	$s_i - \Sigma x_{ij}$
C1	452	493	653	834	75	75
C2	335/80	407/45	602	770	125	0
C3	1002	658	359/70	673/30	100	0
d_j	80	65	70	85		
$\Sigma x_{ij} - d_j$	0	-20	0	-55		

c_{ij}/x_{ij}	1	2	3	4	s_i	$s_i - \Sigma x_{ij}$
C1	452/ 0	493/20	653/ 0	834/55	75	75→0
C2	335/80	407/45	602/ 0	770/ 0	125	0
C3	1002/ 0	658/ 0	359/70	673/30	100	0
d_j	80	65	70	85		
$\Sigma x_{ij} - d_j$	0	-20→0	0	-55→0		

$z = 142,645$

(j) T_{11} 균형 중개수송문제의 최적 해

그림 5. 최적 수송 방법
Fig. 5. Optimal Transshipment Method

V. 결론 및 향후 연구과제

기존의 수송문제 및 중개수송에 관련된 연구[1-7, 15]에 비해 본 논문은 중개 수송문제의 최적해를 빠르고 쉽게 구하는 방법을 제안하였다.

제안된 방법은 첫 번째로, 중개 수송문제를 일반적인 수송문제로 변환시킨다. 두 번째로, 각 열의 최소 비용을 결정하고, 각 행의 공급량을 결정된 최소 비용 오름차순으로 배정하였다. 만약 공급량이 남아 있고, 배정량이 요구량을 충족시키지 못하는 행렬의 셀의 비용 오름차순으로 남아 있는 공급량을 추가로 배정하여 초기해를 간단히 구하였다. 마지막으로, 열의 보다 큰 비용에 배정된 경우 배정량을 조절하여 최적해를 구하였다. 제안된 OTM은 TSM에 비해 초기해와 최적해를 구하는 과정을 매우 단순화시켰다.

제안된 알고리즘은 불균형 수송 문제를 균형 수송문제로 변환하는 과정을 적용하지 않으며, 초기 해와 최적해를 매우 간단히 구할 수 있어 기존의 TSM을 대체하여 중개 수송문제의 최적해를 구하는 일반화된 방법으로 적용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] Wikipedia, "Transportation Problem," http://en.wikipedia.org/wiki/Transportation_problem, Wikimedia Foundation Inc., 2008.

[2] W. L. Winston, J. B. Goldberg, and M. Venkataramanan, "*Introduction to Mathematical Programming: Operations Research*," Vol. 1, 4th edition, Duxbury Pr, 2003.

[3] L. Ntaimo, "Transportation and Assignment Problems," http://ie.tamu.edu/INEN420_2005Spring/SLIDES/Chapter 7.pdf, 2005.

[4] S. C. Niu, "Introduction to Operations Research," http:// www.utdallas.edu/~scniu/OPRE-6201/documents/TP2-Initialization.pdf, School of Management, The University of Texas at Dallas, 2004.

[5] J. Loucks, "Quantitative Approaches to Decision Making," Anderson Sweeney Williams, 2005.

[6] G. B. Dantzig, "Linear Programming and Extensions," USAF Project RAND, R-366-PR, The RAND Corporation, Santa Monica, California, U.S., https://www.rand.org/pubs/ reports/2007/R366part2.pdf, 1963.

[7] J. G, Kang, "Operations Research," http://secom.hanbat.ac.kr/or/ch06/right04.html, Hanbat National University, 2006.

[8] M. E. Salassi, "Agricultural Economics & Agribusiness," Louisiana State University, 2004.

[9] J. Havlicek, "Distance Learning Module for Management Science," http://orms.czu.cz/text/transproblem.html, Czech University of Agriculturee, 2008.

[10] J. E. Beasley, "Operations Research and Management Science: OR-Notes," Department of Mathematical Sciences, Brunel University, West London, http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/contents. html, 2004.

[11] S. Mitchell and A. Phillips, "Optimisation with PULP WIKI," Department of Engineering Science, The University of Auckland, 2008.

[12] J. Hill, "Linear Programming Problem Example," MERCER MBA, BAM 622, http://mercermba.com/April 14 BAM 622 Notes.pdf, 2008.

[13] J. Jensen, "MBA 675: Production and Operations Management," Management Science, University Southern Maine, 2005.

[14] G. Giallombardo, "3E4-Modeling Choice," Judge Institute of Management, Department of Engineering, University of Cambridge, 2006.

[15] Sang-Un Lee, "A Reverse-Delete Algorithm for Assignment Problems," Journal of Advanced Information Technology and Convergence, pp. 117~126, vol. 10, no. 8, 2012. 8.

저자 소개

이 상 운(정회원)

• 1998년 ~ 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
• 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
• 2004년 ~ 2007년 2월 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
• 2007년 3월 ~ 현재 : 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과 부교수

<주관심분야 : 그래프 알고리즘 등>

최 명 복(종신회원)

• 2001년 : 아주대학교 컴퓨터공학과 (박사)
• 1997년 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 교수
• 2004년 1월 ~ 현재 : 한국인터넷방송통신학회 이사

<주관심분야 : 지능형 정보검색 등>