대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 1, 1 ~14. Mar 2013

초등학교 수학교과서 ‘각뿔’ 지도 방식에 대한 분석과 개선 방안[1)]

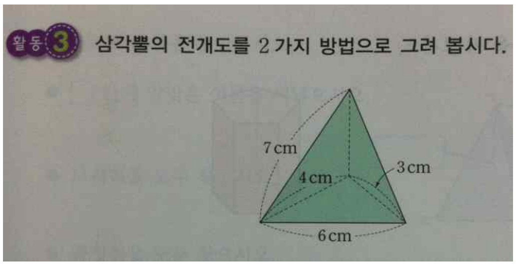
이 동 환*

본 연구는 현행 초등학교 교과서에 제시되는 각뿔 관련 내용을 분석하여 문제점을 확인하고 그 개선방안을 제안하는 데 목적이 있다. 교과서에서는 각뿔의 정의를 일반적으로 제시하고 있지만, 학생의 수준을 고려하여 실질적으로는 옆면의 모양이 이등변삼각형인 각뿔만을 의도적으로 다루고 있다. 그러나 그러한 각뿔은 직각뿔의 정의에 맞지 않으며, 기울어지지 않은 안정적인 각뿔이라는 직관에도 부합하지 않는다. 이러한 결과를 바탕으로 각뿔 지도의 개선방안을 제안하고 분석결과가 교사 교육에 주는 시사점을 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

연구자가 초등학교 수학교과서의 각뿔 개념 지도에 관심을 가지게 된 계기는 한 초등학교 교사가 들려준 수업 에피소드에서 비롯되었다.

교과서에 제시된 각뿔의 전개도를 그리는 문제([그림 Ⅰ-1]참고)를 학생들에게 풀라고 했어요. 그런데 한 학생이 이런 질문을 했어요. ‘선생님 문제에서 각뿔의 나머지 옆면의 모서리의 길이는 없는데, 어떻게 해야 하나요?’ 실제로 각뿔의 옆면의 모서리 세 개 중에 한 모서리의 길이만 7cm이고, 나머지 두 모서리의 길이는 생략되어 있었어요. 일단은 학생에게 옆면의 모서리의 길이는 모두 같다고 생각하고 그리라고 설명했는데, 세 모서리의 길이가 서로 다르더라도 각뿔이 되지 않나요?



[그림 Ⅰ-1] 삼각뿔의 전개도 문제
(교육과학기술부, 2011a[2)], p.49)

여기서 언급하고 있는 내용은 초등학교 6학년 1학기의 3단원 ‘각기둥과 각뿔’에서 다루고 있는 것이다. 교과서(교육과학기술부, 2011a, 2012a, p.42)에서는 각뿔의 정의를 ‘밑면이 다각형이고 옆면이 모두 삼각형인 입체도형을 각뿔’이라고 제시한다. 이러한 정의에 따르면, [그림Ⅰ-1]의 각뿔의 옆면의 세 모서리의 길이가 모두 같을 필요는 없다. 따라서 지도서의 풀이[3)]와 다르게

* 부산교육대학교, dhdhdh@bnue.ac.kr
1) 이 논문은 2013년도 부산교육대학교 교육연구원의 지원을 받아 연구되었음.
2) 2012년에 출판된 교과서(교육과학기술부, 2012a, p.49)에서는 다른 두 모서리의 길이도 7cm로 제시되었다. 그렇다면, 학생으로부터 다른 모서리의 길이에 대한 질문이 제기되지 않을 수도 있다. 그러나 본질적인 문제는 여전히 해소되지 않는다. 오히려 이러한 질문조차 사라져서 본질적인 문제를 다룰 기회도 사라질 수 있다. 자세한 논의는 2장에서 다루게 된다.

모서리의 길이가 서로 다른 여러 가지 종류의 각뿔의 전개도가 그려질 수 있는 것이다. 옆면의 모서리의 길이가 서로 다르더라도 각뿔이 될 수 있다는 교사의 지적은 타당한 것이었다. 그러나 연구자는 초등학교 수학의 특성상 교과서에서는 학생들이 다루기 쉬운 직각뿔과 정각뿔만을 의도적으로 지도한다는 점을 이유로 교사가 학생에게 설명한 내용이 적절했다고 조언하였다. 실제로 지도서를 보면, 초등학교 수학교과서에 나타난 특별한 내용 제시 방식을 다음과 같이 확인할 수 있다.

수학 개념을 다룰 때, 그 개념의 외연을 의도적으로 축소하는 경우가 많다. 예를 들어, 초등학교 수학에서는 각기둥, 각뿔, 원뿔을 각각 직각기둥, 직원기둥, 직각뿔, 직원뿔만을 포함시켜서 다룬다. 빗각기둥, 빗원기둥, 빗각뿔, 빗원뿔은 각기둥, 각뿔, 원뿔에 속하지만 초등학교 수학에서는 의도적으로 제외된다. (교육과학기술부, 2011b, 2012b, p.8)

교과서에 제시된 각뿔의 정의는 정각뿔, 직각뿔, 빗각뿔 모두를 포괄하고 있지만 실제로 각뿔의 예시는 정각뿔과 직각뿔에 한정되고 각뿔의 전개도 역시 정각뿔과 직각뿔에 대해서만 다룬다는 것이다. 따라서 [그림 I -1]의 각뿔은 직각뿔을 의미하므로 한 모서리의 길이만 주어졌더라도 나머지 모서리의 길이를 알 수 있다는 것이다.

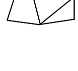
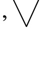
이로서 각뿔을 둘러싼 의문은 모두 해소된 것처럼 보였다. 그러나 직각뿔의 정의를 보면, 직각뿔의 옆면의 모서리의 길이가 모두 같아야 한다는 즉, 옆면이 모두 이등변삼각형이라는 내용이 포함되어 있지 않다. 그렇다면 직각뿔의 정의로부터 옆면이 모두 이등변삼각형이라는 성질을 유도할 수 있는 것인가? 만약 그렇지 않다면, [그림 I -1]의 각뿔은 직각뿔이 아니라는 것인가? 이것이 사실이라면 심각한 문제를 초래할 수 있다. 그 이유는 다음과 같다. 앞서 언급했듯이, 현재의 교과서가 학생의 수준을 고려하여 직각뿔만을 다루고자 한 의도가 있었다면, [그림 I -1]은 이러한 의도에서 벗어난 예외이다. 그러나 교과서의 의도가 정의에 제시된 것처럼 빗각뿔을 포함한 모든 각뿔을 다루는 데 있다면, [그림 I -1]의 답은 여러 가지가 가능하고 지도서의 내용은 수정되어야 할 것이다. 따라서 어떠한 경우라도 지금의 교과서 전개는 수정될 필요가 있는 것이다.

이와 같은 문제의식에 바탕을 두고, 본 연구는 각뿔, 정각뿔, 직각뿔, 빗각뿔의 정의를 검토하여 현재의 교과서 전개의 문제점을 분석하고 그 개선점을 제안하는 데 목적이 있다. 또한 이 과정에서 밝혀진 내용을 중심으로 교사교육에 대한 시사점을 논의하고자 한다.

Ⅱ. 교과서의 각뿔 지도 방식에 대한 분석

1. 교과서의 각뿔 지도 방식 개관

초등학교 5,6학년 학생들은 2011학년도부터 2007 개정 교육과정에 따른 새 교과서를 사용하고 있다. 각뿔은 초등학교 6학년 1학기의 3단원인 '각기둥과 각뿔'에서 처음 등장하는 개념이다. '각기둥과 각뿔' 단원은 총 9차시로 이루어지는데, 주된 목표는 각기둥과 각뿔의 구성요소와 전개도를 이해하는 데 있다. 이를 위해 교과

3) 지도서의 풀이는 다음과 같다. '옆면의 모양이 모두 이등변삼각형임을 알고 컴퍼스를 활용하여 삼각뿔의 옆면을 그리도록 한다.'(교육과학기술부, 2011b, 2012b, p.169) 그리고 [그림 I -1]에서 말하는 2가지 방식은 옆면의 모서리의 길이가 서로 다른 경우를 말하는 것이 아니라 ,  과 같이 밑면이 전개도에서 차지하는 위치가 서로 다른 경우를 말한다.

서에서는 입체도형을 분류하는 활동을 통해 각기둥을 약속하고 그 구성요소를 제시하며 각기둥을 만들어 보는 활동을 한다. 마찬가지 방식으로 각뿔을 도입한다. 이러한 방식으로 각기둥과 각뿔의 구성요소와 특징을 살펴본 후에, 각기둥과 각뿔의 전개도를 이해하고 그려보는 활동을 하는 것으로 단원을 마무리 한다.

교과서에 제시된 각뿔의 도입 부분을 자세히 살펴보도록 하겠다. 학생들은 삼각기둥, 직육면체, 정육면체, 원뿔대, 삼각뿔, 사각뿔, 오각뿔의 입체도형 중에서 뿔 모양의 입체도형을 찾아보고 그 특징을 이야기하는 기회를 갖는다. 교과서에서는 이러한 활동을 통해 각뿔을 '밑면이 다각형이고 옆면이 모두 삼각형인 입체도형을 각뿔'이라고 약속한다. 다음으로 학생들은 각뿔의 구성요소를 살펴보고 이름을 붙이는 활동을 한다. 이 때, 교과서의 '확인하고 다지기'에서 옆면을 넣어 문장을 만들어 보는 활동을 제안하는데, 지도서(교육과학기술부, 2012b, p.163)에 제시된 답안은 '각뿔의 옆면은 이등변삼각형입니다.' 이다[4]. 이는 앞서 약속한 각뿔의 정의와 부합되지 않고 있다. 각뿔의 정의에서는 옆면이 '삼각형' 인데 각뿔의 성질로서 옆면이 '이등변삼각형' 임을 제시하는 것은 학생들에게 각뿔 개념에 대한 혼란을 야기할 위험이 있다. '약속'에서 말하는 각뿔과 '확인하고 다지기'에서 말하는 각뿔이 서로 같지 않은 것이다. 전자는 일반적인 각뿔을 말하고 있고, 후자는 '특별한' 각뿔을 말하고 있다. 그러나 교과서에서 '특별한' 각뿔에 별도의 이름을 부여하지 않는 것은 앞서 언급했듯이 초등학교 수학의 특별한 내용 제시 방식이라고 해석할 수 있다. 그렇다면 이 '특별한' 각뿔은 무엇을 뜻하는 것일까?

교과서는 물론 지도서에서도 옆면이 이등변삼각형인 '특별한' 각뿔에 대해 명시적인 이름을 부여하지는 않고 있으나, 지도서의 총론에 제시된 '초등학교 수학교육의 특성과 방향'을 살펴보면 그 이름이 직각뿔을 의미한다고 추측할 수 있다.

수학 개념을 다룰 때, 그 개념의 외연을 의도적으로 축소하는 경우가 많다. 예를 들어, 초등학교 수학에서는 각기둥, 각뿔, 원뿔을 각각 직각기둥, 직원기둥, 직각뿔, 직원뿔만을 포함시켜서 다룬다. 빗각기둥, 빗원기둥, 빗각뿔, 빗원뿔은 각기둥, 각뿔, 원뿔에 속하지만 초등학교 수학에서는 의도적으로 제외된다. (교육과학기술부, 2011b, 2012b, p.8)

교과서는 물론 교육과정문서에서도 각뿔의 정의나 성질에 대해서는 자세하게 언급되어 있지 않기 때문에, 교과서에서 말하는 옆면이 이등변삼각형인 '특별한' 각뿔이 직각뿔을 뜻하는지를 확인할 수는 없다. 그러나 초등학교 교과서에서 직각뿔만을 다루는 이유에 대해서 설명하는 선행연구로부터 다시 한 번 '특별한' 각뿔이 직각뿔을 의도하고 있음을 추측할 수 있다.

현재의 교과서에 직각기둥만 도입되고 있는 이유가 교육과정 또는 교육과정 해설서에 분명하게 제시되어 있는 것은 아니다. 그러나 나름대로 짐작을 해 보면, 빗각기둥이 학생드에게 친숙하지 않다는 것이 그 한 가지 이유일 수 있을 것이다. [...] 초등학생들에게 빗각기둥을 의미 있게 설명하는 것이 불가능하기 때문에, 학생들의 학습 수준을 고려하면, 직각기둥으로 한정하는 것이 오히려 정당할 수 있다. 빗원기둥, 빗각뿔, 빗원뿔의 경우도 이와 유사하다고 할 수 있다 (박교식, 1998, p.93).

지금까지 교과서의 각뿔 지도 방식을 분석한 결과, 각뿔의 정의는 매우 일반적으로 제시되어

4) '각뿔의 전개도를 알 수 있어요'의 '확인하고 다지기'에서도 지도서의 답안은 '각뿔의 전개도에서 옆면의 모양은 모두 이등변삼각형입니다.'이다(p.168). 또한 교과서의 모든 각뿔의 옆면은 이등변삼각형처럼 보인다.

있으나 학생들의 수준을 고려하여 실질적으로는 옆면이 이등변삼각형인 각뿔만을 다루고 있었다. 그리고 여러 가지 정황상 그것이 직각뿔임을 추측할 수 있었다.

2. 모든 직각뿔의 옆면은 이등변삼각형인가?

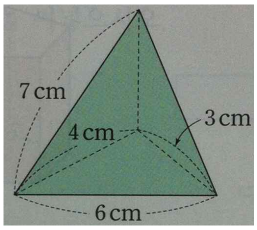
위 질문에 답하기 위해 각뿔, 직각뿔, 정각뿔의 정의를 살펴볼 필요가 있다.

각뿔(pyramid)은 밑면이 다각형이고 나머지 모든 면이 삼각형이면서 한 꼭짓점에서 만나는 입체도형이다.

직각뿔(right pyramid)은 밑면의 무게중심과 각뿔의 꼭짓점을 잇는 선분이 밑면에 수직인 각뿔이다. 즉, 직각뿔은 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑면의 무게중심을 지난다.

정각뿔(regular pyramid)은 밑면이 정다각형인 직각뿔이다.(Weisstein, 2012)[5)]

각뿔의 정의는 교과서에 제시된 각뿔의 정의와 일치함을 알 수 있다. 그런데 직각뿔의 정의에 옆면이 모두 이등변삼각형이라는 내용이 포함되어 있지 않다. 물론 정각뿔의 정의에도 이러한 내용이 언급되어 있지 않다. 그렇다면 직각뿔의 정의로부터 직각뿔의 옆면이 이등변 삼각형임을 증명할 수 있는지가 쟁점이 된다. 결론부터 말하자면 직각뿔의 정의로부터 옆면이 이등변삼각형임을 증명할 수는 없다. 즉, 옆면이 이등변삼각형인 각뿔을 직각뿔이라고 말할 수 없으며, 당연히 정각뿔이라고도 말할 수 없다. 이는 옆면이 이등변삼각형인 각뿔에 대해서 그 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑면의 무게중심을 지나지 않는 반례를 제시함으로서 설명할 수 있다. [그림Ⅱ-1]의 각뿔(옆면의 모서리의 길이가 모두 7cm)을 예로 들 수 있다.

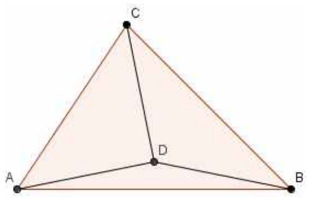


[그림Ⅱ-1] 각뿔의 예시

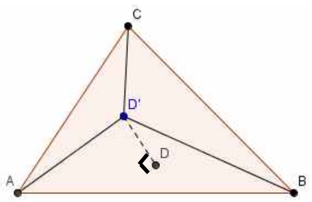
[그림Ⅱ-1]의 각뿔의 꼭짓점에서 밑면에 수선의 발을 내렸을 때, 그 수선의 발은 밑면(삼각형)의 무게중심이 아니라 외심과 만난다. 그 이유를 유추를 사용하여 설명할 수 있다. 평면도형인 삼각형을 높이가 0인 삼각뿔로 생각한다면([그림Ⅱ-2] 참조), 삼각형의 외심(D)을 각뿔의 꼭짓점으로 보고 이 꼭짓점과 삼각형의 각 꼭짓점을 연결한 선분($\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$)을 삼각뿔의 모서리로 볼 수 있고 이 때 삼각형의 내부에 생기는 세 개의 삼각형($\triangle DAC$, $\triangle DAB, \triangle DBC$)을 옆면으로 볼 수 있다. 삼각형의 외심은 삼각형의 세 꼭짓점으로부터의 거리가 모두 똑같은 점이므로, 세 모서리의 길이는 모두 같게 되고($\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$) 이 모서리로 이루어진 옆면은 이등변삼각형이 된다. 이 상태에서 삼각뿔의 높이를 증가시키면([그림Ⅱ-3]참조) 즉, 삼각뿔의 꼭짓점(D')이 외심(D)으로부터 수직으로 상승하게 되더라도 이 삼각뿔의 세 모서리의($\overline{D'A}, \overline{D'B}, \overline{D'C}$) 길이는 모두 같다고 생각할 수 있다. 따라서 삼각뿔의 옆면의 모서리의 길이가 모두 같은 경우는 삼각뿔의 꼭짓점에서 밑면에 내린 수

5) 이해를 돕기 위해 원문을 제시하였다. A pyramid is a polyhedron with one face (known as the "base") a polygon and all the other faces triangles meeting at a common polygon vertex (known as the "apex"). A right pyramid is a pyramid for which the line joining the centroid of the base and the apex is perpendicular to the base. A regular pyramid is a right pyramid whose base is a regular polygon.

선의 발이 밑면의 외심을 지날 때이다.



[그림Ⅱ-2] 높이가 0인 삼각뿔



[그림Ⅱ-3] 높이가 0보다 큰 삼각뿔

이러한 유추에 의한 설명을 삼각뿔에 좌표를 부여하여 좌표 공간에서의 설명으로 대체할 수 있고, 이 경우 엄밀한 수학적 증명도 가능하다. 예를 들어, [그림Ⅱ-2]의 삼각형을 좌표평면 위에 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 라 하고, 외심 D의 좌표를 (x_4, y_4) 라 한다면, $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$ 가 성립하므로,

$(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2$

$=(x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2$

$=(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2$ 가 성립한다. 이제 [그림Ⅱ-3]의 삼각뿔을 좌표 공간 위에 놓아 보면, 세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$, $(x_3, y_3, 0)$ 이고, D'의 좌표는 (x_4, y_4, h)라 할 수 있다. 이 때 $\overline{D'D}$는 밑면에 수직이고, $\overline{D'A}=\overline{D'B}=\overline{D'C}$ 가 성립함을 증명하는 것은 $(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+h^2$

$=(x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2+h^2$

$=(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2+h^2$ 가 성립함을 증명하는 것과 동치이다. 그런데 이 식은 이미 위에서 성립함을 보인 것이다.

이상의 내용을 정리하면 다음과 같다. 직각뿔의 정의는 밑면의 무게중심과 각뿔의 꼭짓점을 잇는 선분이 밑면에 수직인 각뿔이다. 즉, 직각뿔은 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑면의 무게중심을 지난다. 그런데 옆면이 이등변삼각형인 각뿔은 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑면의 외심을 지난다. 다시 말해 옆면이 이등변삼각형인 각뿔을 직각뿔이라고 할 수 없다. 단, 밑면의 외심[6]과 무게중심이 일치하는 경우, 예를 들어 밑면이 정삼각형, 정사각형 또는 직사각형의 경우는 옆면이 이등변삼각형인 각뿔과 직각뿔은 서로 동일한 대상을 지칭하게 된다. 그러나 이 경우를 제외한다면, 일반적으로 옆면이 이등변삼각형인 각뿔을 직각뿔이라고 볼 수는 없다. 다시 말해, 직각뿔의 옆면이 이등변삼각형이 되는 경우는 정삼각뿔, 정사각뿔, 직사각뿔 및 그 외 정다각뿔 등과 같이 극히 드물다. 정각뿔을 제외하고는 직사각뿔이 옆면이 이등변삼각형인 유일한 직각뿔이다.

3. 옆면이 모두 이등변삼각형인 각뿔을 직각뿔로 정의하지 않은 이유는 무엇인가?

앞서 살펴보았듯이, 옆면이 모두 이등변삼각형인 각뿔은 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발이 밑면의 외심을 지나야 한다. 따라서 직각뿔을 ‘밑면의 ‘외심’과 각뿔의 꼭짓점을 잇는 선분이

6) 엄밀히 말하자면, 외심은 삼각형에 한해서 사용할 수 있다. 그러나 정다각형의 경우는 외접원이 존재하므로, 여기서는 외접원 존재하는 다각형에 한하여 외심이라는 용어를 사용하였다.

밑면에 수직인 각뿔'이라고 정의한다면 모든 직각뿔의 옆면은 모두 이등변삼각형이라고 말할 수 있을 것이다. 그럼 현재와 같은 교과서의 저술 방식에 별 다른 문제가 발생하지 않을 것인데 왜 그렇게 정의하지 않은 것인지에 대해 의문이 제기될 수 있다. 다시 말해, 각뿔의 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발이 '외심'이 아니라 '무게중심'과 만나는 것으로 직각뿔을 정의한 이유를 살펴볼 필요가 있다. 그 이유를 크게 두 가지로 생각할 수 있다.

첫째, 외심을 갖지 않는 다각형이 존재하기 때문이다. 삼각형은 항상 외심이 존재하지만, 사각형의 경우만 보더라도 대각의 합이 180도인 사각형을 제외하고는 외심이 존재하지 않는다. 전체 다각형을 놓고 보았을 때, 외접원을 갖는 다각형은 극히 일부이기 때문에, 직각뿔을 정의할 때 외심을 사용하게 되면, 직각뿔의 범위가 매우 제한되게 된다. 반면에 무게중심은 모든 다각형에서 존재한다.

두 번째 이유가 보다 근본적이다. 각뿔의 무게중심이 각뿔의 꼭짓점과 밑면의 무게중심을 잇는 선분 위에 존재하기 때문이다. 따라서 직각뿔의 경우 꼭짓점과 밑면을 잇는 선분이 밑면에 수직이므로, 직각뿔의 무게중심은 이 수선 위에 존재하게 된다. 이것이 의미하는 것은 다음과 같다. 직각뿔의 꼭짓점에 실을 연결하여 공중으로 들어 올렸을 때, 밑면이 기울어지지 않고 평면과 평행을 유지하게 된다는 것이다. 즉, 평면 위에 그대로 놓았을 때나 공중으로 들어 올렸을 때나 직각뿔이 기울어지지 않고 안정적으로 위치를 유지할 수 있다는 것이다. 이 역시 유추를 이용하여 설명할 수 있다. 어떤 다각형의 무게중심에 실을 고정하여 다각형을 들어 올리면 그 다각형은 기울어지지 않고 균형을 잡은 상태로 공중에 떠 있을 것이다. 이 때 실과 다각형은 서로 수직이다. 직각뿔은 바로 이 상태에서 실 위에 꼭짓점을 위치시킨 것과 같은 것이다. 따라서 직각뿔은 공중에서도 균형을 유지할 수 있는 것이다. 직관적으로 직각뿔은 어떤 각뿔이 똑바르게 서있는 상태를 말하는 것이라고 볼 때, 직각뿔의 이러한 성질은 매우 중요한 것이다.

직각뿔에 대해서 옆면이 이등변삼각형일 것이라고 생각하는 오개념의 가장 큰 원인을 추측해 보면, 직각뿔의 전개도나 겨냥도를 종이 위에 그렸을 때, 옆면의 모서리 길이가 모두 같을 때 꼭짓점이 어느 한 쪽으로 치우치지 않는 것처럼 보인다는 데 있을 것이다. 직각뿔에 대하여 꼭짓점이 어느 한 쪽으로 치우치지 않을 것이라는 직관을 가지는 것은 바람직한 것이지만, 그러한 직관이 실현되기 위해서는 옆면이 이등변삼각형이라는 성질보다는 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑면의 무게중심을 지난다는 것이 중요하다는 점을 인식할 필요가 있는 것이다.

4. 교과서에서 각뿔을 정각뿔로 한정해서 다루지 않는 이유는 무엇인가?

지금까지의 분석에 따르면, 현재의 교과서에서 언급하고 있는 '각뿔의 옆면의 모양은 모두 이등변삼각형입니다.'를 그대로 유지하고 싶다면, 교과서에 제시하는 각뿔의 사례를 모두 정각뿔로 한정하면 될 것이다. 밑면이 정다각형인 각뿔만을 다루면 아무런 문제가 일어나지 않는다. 그런데 왜 교과서에서는 밑면을 정다각형으로 한정하지 않는 것인지 의문이 든다. 오히려 각뿔의 전개도를 그리는 문제에서 그 밑면이 정다각형인 경우는 전혀 없었다. 그 이유는 교과서나 지도서 그리고 교육과정문서 어디에도 명시적으로 제시되지 않는다. 그러나 몇 가지 이유를 추측할 수는 있다.

첫째, 각뿔의 밑면을 정다각형으로 제한한다면, 교과서에서 제시한 각뿔의 정의와 너무 많은

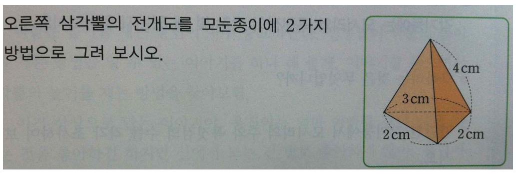
차이가 발생하기 때문이다. 교과서에서 각뿔을 '밑면이 다각형이고 옆면이 모두 삼각형인 입체도형'으로 정의하고 있는데, 실질적으로는 옆면이 모두 이등변삼각형인 각뿔만을 다루는 상황에서 또 다른 조건이 밑면에 대해서도 '정다각형'으로 한정한다면 각뿔의 정의가 무의미해지기 때문이다. 즉, 현재의 교과서에서 각뿔을 다루는 기본적인 전략은 상급학교에서 배울 내용을 고려하여 정의는 일반적으로 제시하되, 실질적으로는 직관에 부합하는 특수한 경우의 각뿔만을 다루고 동시에 너무 그 대상을 한정시키면 정의와의 격차가 매우 커서 학생에게 혼란을 줄 수 있으므로 밑면을 정다각형으로 제한하지는 않은 것이다. 그러나 앞서의 분석에서 보듯이, '직관에 부합하는 특수한 각뿔'이 수학적으로 올바르지 않고 직관에도 어긋남으로서 이러한 의도가 실현되지 못하는 것이 큰 문제이다.

둘째, 각뿔에 앞서 배우는 각기둥과의 형평성을 고려할 필요가 있기 때문이다. 각기둥의 경우 밑면에 제약을 두고 있지 않다. 실제로 각기둥의 전개도를 지도할 때, 밑면이 정다각형인 문제는 거의 나타나지 않는다. 각기둥에서는 여러 가지 다각형을 밑면으로 허용하여 지도하는 상황에서 각뿔의 경우만 정다각형으로 한정한다면 학생들이 각뿔에 대한 오개념이나 협소한 지식을 가질 위험이 크다고 판단할 수 있다.

이상에서 살펴본 이유 이외의 다른 의도가 있을 수 있지만, 다음 한 가지는 확신할 수 있다. 교과서와 익힘책에서 각뿔의 전개도를 그려보는 활동(총 3가지)으로 제시된 각뿔의 밑면이 모두 정다각형이 아니라는 점은 교과서에서 각뿔을 정다각뿔로 한정시키지 않겠다는 의도를 보여주는 것이다.

5. 어떻게 개선할 수 있는가?

지금까지의 교과서 분석에서 드러난 문제점은 다음과 같다. 각뿔의 정의는 일반적으로 제시하고 있지만, 학생의 수준을 고려하여 실질적으로는 각뿔의 옆면의 모양이 이등변삼각형인 각뿔만을 의도적으로 다루려고 하였다. 그러나 그러한 각뿔은 직각뿔의 정의에 맞지 않으며, 기울어지지 않은 안정적인 각뿔이라는 직관에도 부합하지 않는다. 실제로 교과서와 익힘책에서 전개도를 그려보는 활동([그림Ⅰ-1], [그림Ⅱ-4])으로 제시된 삼각뿔은 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발이 밑면의 삼각형 외부에서 만나는 빗각뿔이다. 문제에 제시된 삼각뿔의 그림은 옆면이 모두 이등변삼각형처럼 보이고, 각뿔의 꼭짓점도 어느 한 쪽으로 치우치지 않은 안정적인 각뿔처럼 보이지만, 실제로는 밑면의 삼각형의 가장 긴 변 쪽으로 상당히 치우친 빗각뿔이다. 밑면의 삼각형이 모두 둔각삼각형으로서 외심이 가장 긴 변의 외부에 존재하기 때문에, 옆면의 모서리의 길이가 모두 같기 위해서는 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑면의 외부에 존재하는 외심과 만나게 된다. 만약 해당 삼각뿔이 빗각뿔이 되지 않으려면 옆면의 모서리의 길이가 서로 달라야 하는데[7], 그러기 위해서는 각각의 모서리의 길이를 구하는 것이 매우 어렵게 된다.



[그림Ⅱ-4] 삼각뿔의 전개도 문제
(교육과학기술부, 2011b, p.55)

7) [그림 1], [그림 5] 에 제시된 것만 본다면, 옆면의 모서리의 길이가 한 군데만 주어졌으므로, 다른 모서리의 길이를 구해서 직각뿔의 전개도로 만들 수 있다. 그러나 2012년도 개정판 교과서에서는 옆면의 세 모서리의 길이가 모두 같은 값으로 제시되어 있다(교육과학기술부, 2012a, 2012b). 즉, 교과서의 의도는 옆면의 모서리의 길이를 같게 하는 것이고 이는 빗각뿔이 될 수밖에 없다.

이러한 점을 고려했을 때, 현행 교과서를 개선하는 대안을 다음과 같이 제시할 수 있다. 우선, 각뿔의 정의는 현재와 같이 일반적으로 제시하는 것을 유지한다. 왜냐하면, 상급학교에서 각뿔의 부피나 겉넓이 등을 다룰 때 일반적인 각뿔을 언급하고 있으므로 협소한 정의는 나중에 혼란을 야기할 수 있기 때문이다. 그러나 현재 교과서의 '확인하고 다지기' 활동으로서 '각뿔의 옆면의 모양은 모두 이등변삼각형이다'라는 내용은 조정이 필요하다. 삭제 또는 유지 여부에 따라 내용 전개방식이 달라져야 한다.

삭제하는 경우라면, 각뿔의 전개도를 그려보는 활동을 하지 않고 대신 현재 탐구활동으로 제시되는 입체도형의 꼭짓점, 면, 모서리의 개수 사이의 규칙 탐구 등 각뿔의 구성요소에 대한 탐구에 집중하는 것이 필요하다. 이 때 다루는 각뿔을 직각뿔로만 제한할 필요는 없다. 2007 개정 교육과정(교육과학기술부, 2006, p.118)에 따르면 '각기둥의 전개도를 그릴 수 있다'는 성취기준으로 제시되어 있지만 각뿔의 전개도에 대한 언급은 없는 상태이다. 또한 2009 개정 교육과정(교육과학기술부, 2011d, p.23)에서 각뿔의 전개도는 다루지 않는다는 것을 유의점으로 제시하고 있으므로 각뿔의 전개도를 다루는 활동이 필수적인 내용은 아닌 것이다. 유지하는 경우라면, 각뿔의 전개도를 그리는 활동에서 다루는 각뿔은 직각뿔이면서 옆면의 모양이 모두 이등변삼각형이 되는 정삼각뿔, 정사각뿔 등의 정각뿔과 직사각뿔로 한정되어야 한다. 즉, 현재의 교과서 지도 방식을 그대로 유지하면서 전개도를 그리는 활동의 소재로서 [그림Ⅰ-1], [그림Ⅱ-4] 대신에 직사각뿔이나 정각뿔을 제시하는 방안이다. 그러나 이러한 과정에서는 학생들이 정각뿔만을 각뿔로서 생각하는 오개념을 가질 수 있는 가능성이 높다.

이러한 두 가지 대안 모두 각뿔에 대한 완전한 이해를 보장하지는 못한다. 각뿔에 대한 이해는 초등학교에서 끝나는 것이 아니므로 중학교 이후의 단계에서 각뿔 개념을 재해석하고 심화하는 과정이 필요하다. 예를 들어, 중학교에서 각뿔의 부피를 구하면서 정각뿔, 직각뿔, 빗각뿔 모두 동일한 공식에 의해 부피를 구할 수 있음을 인식하게 된다. 이 때 학생들은 각뿔의 정의를 특수한 경우로 한정하지 않고 일반화시키는 이유를 알 수 있게 된다. 부피의 관점에서는 정각뿔, 직각뿔, 빗각뿔의 차이가 무의미하기 때문이다. 또한 삼각형의 외심과 무게중심을 학습한 후에, 학생들은 직각뿔 정의의 의미를 비로소 파악할 수 있을 것이다. 따라서 교사는 초등학교 수준에서 각뿔을 지도하더라도 상급학교의 교육과정을 고려하여 지도할 필요가 있는 것이다. 이러한 필요성은 자연스럽게 교사교육과 관련된 논의와 연결될 수 있다. 이와 관련해서는 다음 장에서 살펴보겠다.

Ⅲ. 논의 - 교사교육에 주는 시사점

1. 수학지평지식 (Knowledge at Mathematical Horizon)

본 논문에서 교과서의 각뿔 지도 방식을 분석하면서 가장 중요한 역할을 한 수학 지식은 '직각뿔의 꼭짓점에서 내린 수선의 발은 밑면의 무게중심에서 만난다.' 와 '옆면의 모양이 이등변삼각형인 각뿔의 꼭짓점에서 내린 수선의 발은 밑면의 외심에서 만난다.'라는 것이다. 이러한 내용과 이와 관련된 수학 지식을 충분히 이해하고 있을 때 교과서의 각뿔 지도방식의 문제점을 분석하고 개선방안을 제안하는 것이 가능하게 된다. 그런데 이러한 지식은 초등학교 학생이 알아야 하는 것은 아니다. 실제로 무게중심과 외심과

관련된 내용은 중학교 교육과정에서 다루며, 각뿔의 꼭짓점에서 내린 수선의 발의 위치에 대한 내용은 중학교에서도 명시적으로 다루지 않는 내용이다. 그러나 이러한 수학 지식을 알 필요가 없는 초등학생에게서 각뿔의 옆면이 반드시 이등변삼각형이어야 하는가에 대한 질문이 제기될 수 있고, 교사는 이에 대한 대처를 할 수 있어야 한다. 따라서 본 논문에서 다룬 내용은 학생이 아닌 교사에게 필요한 수학 지식인 것이다. 이와 관련하여, 수학교사가 수업을 진행하기 위해 필요한 수학 지식이 무엇인가와 관련된 논의가 최근 수학교사교육 연구에서 활발하게 이루어지고 있다(Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008; Zazkis & Mamolo, 2011). Ball et al. (2008)은 Shulman(1986)의 교과내용지식과 교수학적 내용지식을 수학교과의 특성에 맞게 정교화하여 'Mathematical Knowledge for Teaching (이하 MKT)' 라는 용어를 도입하여 수학교사에게 필요한 지식을 구체적으로 범주화 하였다.

본 논문에서 제시한 교과서의 각뿔 지도 방식에 대해 분석하는 과정과 개선 방안은 MKT의 하위 범주 가운데 '수학지평지식(Knowledge at Mathematical Horizon, 이하 KMH)' 에 해당한다고 볼 수 있다.

우리는 KMH를 현재의 수업을 둘러싼 거대한 수학적 풍경에 대한 의식으로서 정의한다. KMH는 교육과정에 포함되어 있지 않지만 학생들의 학습에 유용한 수학 지식에 해당하며, 지금 당장에는 일부만 노출되어 있지만 그것의 전체적인 모습을 알고 그 중요성을 감지할 수 있는 능력을 뜻한다. (Ball & Bass, 2009. p.5).

Ball & Bass(2009, p.15)는 '학습자의 미래를 고려하는 상황에서' KMH 역할이 빛날 수 있고, '교사가 현재 가르치고 있는 내용의 전 단계와 다음 단계 그리고 이를 둘러싼 여러 가지 내용을 이해하고 있을 때, 효과적인 수업이 가능'하는 점을 내세워 KMH의 중요성을 강조하였다. Zazkis & Mamolo(2011)는 '땅이 하늘과 만나는 것처럼 보이는 곳'이라는 지평선의 은유를 사용하여, 교사의 고등수학지식(하늘)이 학교수학의 내용과 만나는 곳이 수학적 지평선에 해당한다고 보고 교사의 고등수학지식이 KMH의 핵심요소가 된다고 주장하였다. 이처럼 KMH는 학습 상황을 보다 넓은 관점에서 바라보고, 지금 당장의 필요가 아닌 미래의 학습을 고려하여 현재의 학습 방향을 결정하는 데 중요한 역할을 하는 수학지식을 뜻한다고 볼 수 있다. 즉, 학생에게 KMH를 가르쳐야 할 필요는 없지만, 학생을 가르치는 교사에게는 KMH가 꼭 필요하다는 것이다. 이러한 관점에서 볼 때, 본 논문에서 다루었던 수학 지식 '직각뿔의 꼭짓점에서 내린 수선의 발은 밑면의 무게중심에서 만난다.' 와 '옆면의 모양이 이등변삼각형인 각뿔의 꼭짓점에서 내린 수선의 발은 밑면의 외심에서 만난다.'는 KMH에 해당한다고 볼 수 있다. 각뿔과 관련하여 이러한 KMH를 갖춘 교사는 앞서 제시한 수업 에피소드에서 학생이 각뿔의 옆면의 모양과 관련하여 제기한 질문에 대하여 올바른 답을 제시하거나 학생의 질문을 토대로 각뿔의 성질에 대한 심화된 내용 지도가 가능했을 것이다. 또한 이러한 교사는 반듯한 각뿔의 성질을 옆면의 모양에서 찾으려는 직관의 위험을 인식하고 그러한 직관이 수학적 성질과 일치하지 않을 수 있다는 점에서 엄밀한 수학적 사고의 중요성을 재확인할 수 있다. 따라서 이러한 교사는 실제로 옆면의 모양이 이등변삼각형인 전개도를 통해 학생들에게 자신의 직관과 벗어나는 상황을 제시하고 새로운 수학학습의 기회를 제공할 수도 있다.

2. 가르치면서 배우기

Leikin & Zazkis(2010b)은 수학을 가르치는 경

험 즉, 수업활동이 수학교사에게 진정한 학습의 기회를 제공할 수 있다는 사례를 제시하며, 이러한 현상을 가리켜 '가르치면서 배우기(learning through teaching)'라고 규정하고 가르치는 상황을 수학교사교육의 주요 원천으로 제안하였다. Leikin & Zazkis(2010b)는 '가르치면서 배우기'로부터 수학교사가 배울 수 있는 내용으로서 '수업이나 수학과 관련한 직관적 지식이 형식적 지식으로 발달', '수학적 내용들 사이의 새로운 연결을 발견', '새로운 설명 방식의 발견' 등을 언급하였다. Leikin & Rota(2006)에 따르면, 수학교사는 수업을 하면서 학생과 상호작용을 하게 되는데, 이 때 학생의 질문, 학생의 실수, 학생의 예상치 못한 풀이로부터 수학적 지식은 물론 교수법도 배우게 된다. 수학교사의 '가르치면서 배우기'를 촉진하는 요인으로 수학교사의 수학적 지식, 학생의 아이디어나 반응에 대한 수학교사의 민감성 그리고 교사와 학생 간의 상호작용을 생각할 수 있다. 이러한 요인을 종합하여 Leikin & Dinur(2007)은 수학교사의 학습은 그들의 '유연성'에 의존한다고 주장하였다. 교사와 학생의 상호작용에서 학생이 주도할 수 있는 기회를 제공하고 학생의 자발적인 아이디어에 따라 상호작용을 진행할 때, 교사의 학습 기회가 확대되고 이러한 과정에서 교사의 학습이 일어날 수 있다는 것이다. 또한 학생들의 실수에 주목하고 오개념을 교정하면서 수학교사는 새로운 수학적 설명을 찾고 새로운 수학적 연결을 구성하는 등 학습이 일어나게 된다. 따라서 수학교사의 일상적인 수업이나 학생과의 상호작용이 '가르치면서 배우기'의 원천으로 작용하려면, 수학교사는 학생의 답변이나 질문 등에 매우 민감하게 반응할 수 있는 지식과 기능을 갖추어야 한다. 그러나 이러한 상황과 교사의 역량이 갖추어지더라도 '가르치면서 배우기'가 실제로 가능하려면 계기가 있어야 한다. Leikin & Zazkis(2010a, p.289)는 이러한 계기를 가리켜 '가르치면서 배우기'의 '폭발적 사건(triggering event)'이라고 불렀다. 교사의 예상과 학생의 반응 사이에 현저한 불일치가 생길 때 '가르치면서 배우기'가 일어난다는 것이다. 이러한 '폭발적 사건'의 사례로서 학생의 질문, 학생의 제안, 학생의 실수나 어려움, 학생의 대안적인 풀이나 해법 등이 제기되었다. 다시 말해, 교사가 수업상황에서 학생과의 상호작용에 의해 일종의 평형상태가 무너지게 되고 이를 바로잡기 위해 노력하는 과정에서 학습이 일어난다고 볼 수 있다. 이러한 관점에서 교사에게 가장 필요한 것은 예상치 못한 상황을 위기가 아닌 기회로 삼을 수 있는 성향과 역량이다.

연구자가 교과서의 각뿔 지도방식에 관심을 가지게 된 계기는 한 초등학교 교사와의 대화였고, 그 교사가 경험한 것은 '가르치면서 배우기'의 관점에서 제안한 '폭발적 사건'에 해당한다고 볼 수 있다. 그 초등학교 교사는 수업 중 학생이 제기한 각뿔의 옆면의 모서리의 길이에 대한 '예상치 못한 질문'으로부터 그 동안 가르쳐오던 각뿔에 대해 반성적으로 검토하는 계기를 마련했던 것이다. 그러나 그 교사는 각뿔의 옆면의 모양이 반드시 이등변삼각형이 될 필요는 없을 것이라는 추측만 할 뿐 이에 대해 확신을 가지지 못한 상태였다. 따라서 그 교사는 이 내용을 자세히 다루기보다는 지도서의 권고에 따라 옆면을 이등변삼각형으로 생각하도록 지도했던 것이다. 각뿔의 옆면의 모양에 대한 학생의 '예상치 못한 질문'은 교사에게 학습의 기회를 제공했으나 교사가 이 기회를 효과적으로 살리지 못했다고 볼 수 있다. 그 원인을 해당 교사의 수학적 지식의 부족에서 찾을 수도 있지만, 앞서의 분석에서 알 수 있듯이, 짧은 수업 상황에서 각뿔을 둘러싼 여러 가지 수학적 내용을 모두 살펴보고 그에 적합한 답을 내놓기는 쉽지 않다. 따라서 앞서의 분석 결과는 교사교육 단계에서

자세하게 다루어질 필요가 있는 것이다. 현재 교과서에 각뿔을 지도하는 방식과 그를 둘러싼 쟁점에 대해 교사교육 단계에서 자세하게 다루어 본 경험이 없다면, 수업 중에 일어나는 '폭발적 사건'이 교사의 학습으로 이어지기는 매우 어려운 것이다.

3. 예비 교사교육의 소재로 활용

연구자가 교과서의 각뿔 지도에 관심을 가지고 분석하여 개선방향을 도출한 과정은 예비교사 교육을 위한 소재로 활용할 수 있다. 본 연구 결과를 교사교육에서 활용한다면 다음과 같은 방식이 가능할 것이다.

단순히 현행 교과서의 문제점을 지적하고 그 개선점을 제안하기보다는 예비교사 스스로 문제점을 인식하는 것부터 시작할 필요가 있다. 이를 위해, 예비교사들은 실제로 [그림 I -1]의 활동을 직접 해 볼 필요가 있다. 전개도를 그리면서 옆면의 모서리의 길이에 대한 질문이 없을 때는, 나머지 모서리의 길이가 서로 다르면 안 되는가에 대한 질문을 던져서 논의를 이끌어내야 한다. 이 때, 예비교사의 몇 가지 반응을 예상할 수 있다. 하나는 그것은 각뿔이 아니라는 반응이 나올 수 있고 다른 하나는 모서리의 길이가 서로 다르면 각뿔이 비스듬하게 생길 것이라는 반응이 나올 수 있다. 전자의 경우 교과서에 제시된 각뿔의 정의를 살펴보면서 각뿔의 정의를 반성적으로 검토하는 기회를 가질 수 있다. 후자의 경우 모서리의 길이가 동일하게 전개도를 만들어서 실제로 각뿔을 만들어보는 활동을 하면서 자신의 예상을 확인해 볼 수 있다. [그림 I -1]에 따라 각뿔을 만들어보면, 예상과 달리 빗각뿔이 된다. 이를 통해 예비교사는 옆면의 모양을 이등변삼각형으로 만든다고 해서 직각뿔이 만들어지는 것이 아님을 인식하고 직각뿔을 만드는 조건을 찾아보는 계기를 마련하게 된다. 앞서 살펴보았듯이, 옆면의 모양을 이등변삼각형으로 만드는 것은 각뿔의 꼭짓점을 밑면의 외심 위에 위치시키는 것이므로, 외심의 위치에 따라 각뿔의 모양이 달라지는 것이다. 예비교사에게 직각뿔을 만들기 위해 꼭짓점의 위치가 밑면의 어디에 있어야 하는가를 살펴보도록 과제를 제시하고 각자 추측을 하고 확인을 하면서 직각뿔의 정의를 도출할 수 있다.

이러한 활동이 끝난 후에, 예비교사들은 현재 교과서의 각뿔 지도 방식을 비판적으로 볼 수 있는 시각을 갖게 되고 따라서 각뿔 지도의 개선방안을 제안할 수 있을 것이다.

Ⅳ. 결 론

본 연구는 현행 초등학교 교과서에 제시되는 각뿔 관련 내용을 분석하고 그 개선방안을 제안하였다. 우선 교과서 분석 결과는 다음과 같다. 첫째, 교과서에서 제시한 각뿔의 정의와 실제로 다루는 내용 사이에 차이가 있음을 확인하였다. 각뿔의 정의는 정각뿔, 직각뿔, 빗각뿔을 모두 포함하고 있으나 실제로는 옆면의 모양이 이등변삼각형인 각뿔만을 다루고 있었다. 둘째, 교과서에서 옆면의 모양이 이등변삼각형인 각뿔을 다루는 의도는 그것이 기울어지지 않은 직각뿔이기 때문이라고 해석할 수 있는데, 실제로 직각뿔의 정의는 옆면의 모양이 이등변삼각형인 것과 관련이 없다. 따라서 현재와 같은 지도 방식은 교사나 학생에게 직각뿔에 대한 오개념(즉, 직각뿔은 옆면의 모양이 이등변삼각형이다.)을 야기할 수 있다. 셋째, 교과서의 제시된 전개도 문제에 맞게 실제로 각뿔을 만들어보면 빗각뿔이 되므로, 교과서에서 직각뿔만 다루려고 했던 의도에 맞지 않게 된다.

이러한 분석 결과를 바탕으로 본 논문은 다음과 같은 개선 방안을 제안하였다. 현재 교과서의 '확인하고 다지기' 에서 '각뿔의 옆면의 모양은 모두 이등변삼각형이다'라는 내용을 지도하는 것에 대한 조정이 필요하다. 첫째, 이 내용을 삭제하는 경우라면, 각뿔의 전개도를 그려보는 활동을 하지 않고 대신 현재 탐구활동으로 제시되는 입체도형의 꼭짓점, 면, 모서리의 개수 사이의 규칙 탐구 등 각뿔의 구성요소에 대한 탐구에 집중하는 것이 필요하다. 둘째, 이 내용을 유지하는 경우라면, 각뿔의 전개도를 그리는 활동에서 다루는 각뿔은 직각뿔이면서 옆면의 모양이 모두 이등변삼각형이 되는 정삼각뿔, 정사각뿔 등의 정각뿔과 직사각뿔로 한정되어야 한다. 즉, 현재의 교과서 지도 방식을 그대로 유지하면서 전개도를 그리는 활동의 소재로서 [그림 I -1], [그림Ⅱ-4] 대신에 직사각뿔이나 정각뿔을 제시하는 방안이다. 그러나 이러한 과정에서는 학생들이 정각뿔만을 각뿔로서 생각하는 오개념을 가질 수 있는 가능성이 높다. 이러한 개선 방향은 현재 2009 개정 교육과정에 따른 교과서 개발에 중요한 시사점을 줄 수 있다고 생각한다.

또한, 본 논문의 분석 결과는 예비교사교육의 소재로도 활용할 수 있다. 교과서에 제시된 전개도 그리기 활동을 통해 실제로 각뿔을 만들어보고, 예상과 달리 빗각뿔이 만들어진 이유에 대해 논의하면서 직각뿔의 정의를 스스로 찾아볼 수 있다. 이 과정에서 현재의 교과서 전개 방식에 대한 문제점을 인식하고 개선방안도 마련할 수 있는 기회를 얻을 수 있다. 이러한 교육을 통해, 예비교사는 현장에서 학생들을 가르치면서 얻을 수 있는 학습의 기회를 통해 자신의 전문성을 개발할 수 있는 능력을 갖출 수 있다.

마지막으로, 본 논문에서는 각뿔에 초점을 두고 논의를 진행하였으나 이러한 문제의식은 초등수학의 다른 주제에 대해서도 유효하다고 볼 수 있다. 예를 들어 빗원기둥, 빗각기둥의 지도 방식에 대해서도 면밀한 분석이 필요하고 이를 후속연구로 제안한다.

참고문헌

교육과학기술부(2012a). 수학 6-1. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2012b). 수학 6-1 익힘책. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2012c). 수학 6-1 지도서. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011a). 수학 6-1. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011b). 수학 6-1 익힘책. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011c). 수학 6-1 지도서. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011d). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8]

교육과학기술부(2006). 초등학교 수학과 교육과정 해설서.

박교식(1998). 우리 나라 초등학교 수학의 정체성에 관한 연구. **수학교육학연구, 8**(1), 89-100.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education 59(5), 389-407.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008) Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers'' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education 39(4), 372-400.

Ball, D. L. & Bass, H. (2009) With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners'' mathematical futures.

Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany.
(www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/ BzMU2009-Inhalt-fuer-Homepage.htm) (2012.10.19 검색)

Weisstein, Eric W. (2012) "Pyramid." From MathWorld-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Pyramid.html. (2012.10.15 검색)

Leikin & Zazkis (2010a) Learning Through Teaching Mathematics. NY: Springer

Leikin & Zazkis (2010b) Teachers' Opportunities to Learn Mathematics Through Teaching. In R. Leikin, R. Zazkis (eds.), Learning Through Teaching Mathematics (pp. 3-21). NY: Springer

Leikin, R., & Rota, S. (2006). A case study on the development of teacher's proficiency through teaching. Mathematics Education Research Journal, 18(3), 44–8.

Leikin, R., & Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. Journal of Mathematical Behavior, 26, 328–47.

Zazkis, R. & Mamolo, A. (2011). Reconceptualising knowledge at the mathematical horizon. For the Learning of Mathematics, 31(2), 8-13.

Problems and Improvements of Teaching the concept of Pyramid in Elementary Mathematics Textbook

Lee, Dong Hwan (Busan National University of Education)

The purpose of this study is to examine the way of teaching the concept of pyramid in the elementary mathematics textbook and try to improve the problem. Although textbook present the general definition of pyramid as including regular pyramid, right pyramid, oblique pyramid, the textbook intentionally deal with right pyramid or regular pyramid. This intention reflect the intuition or familiarity of students. But, according to the analysis, this intention do not realized. The example of pyramid presented in the textbook do not coincide with mathematical definition and intuition of students. If we intend to deal with right pyramid in the textbook, we should treat of regular pyramid and right pyramid whose base is a rectangular in the textbook.

Key Words : pyramid(각뿔), right pyramid(직각뿔), oblique pyramid(빗각뿔), elementary mathematics textbook(초등수학 교과서)

논문접수 : 2012. 10. 31
논문수정 : 2012. 12. 3
심사완료 : 2012. 12. 14