韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2013. 4. 제 16권, 제 1호, 21-33

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Apr. 2013, Vol. 16, No. 1, 21-33

Lakatos 방법론을 통한 초등학교 6학년 학생들의 수학적 사고

정 미 혜 (한국교원대학교 대학원)
이 광 호 (한국교원대학교)†
심 재 방 (한국교원대학교 대학원)

본 연구는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 Lakatos 방법론을 적용한 수업에서 나타나는 수학적 사고를 구체적으로 분석하고, 이 수업에서의 교사의 역할을 살펴봄으로써 Lakatos 방법론과 관련하여 교수·학습 방향에 대한 시사점을 찾고자 하였다. 문제 상황제시, 본래의 추측 제안, 본래의 추측 검사, 추측의 개선 단계에 따라 8차시 수업을 실시하였고 수업 촬영 비디오, 심층면담 기록, 문서 자료 등 수집된 자료를 바탕으로 분석하였다. 분석 결과 각 단계에 따라 관찰, 비교 등과 같은 기초적인 사고 기능으로부터 다른 추측을 제안하는 창의적 사고까지 다양한 수학적 사고가 도출되었다.

Ⅰ. 서론

초등수학교육의 중요한 목표 중의 하나는 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하도록 수학적으로 사고하는 능력을 길러주는 것이다. 수학적으로 사고하는 능력이란 “주어진 문제 상황을 해결하기 위하여 사고하는 능력”이며, 내용 영역과 관련시켜 집합적 사고, 함수적 사고, 도형적 사고, 통계적 사고 등으로 분류할 수 있고, 기능적 측면과 관련시켜 추상화, 일반화, 연역, 귀납, 유비 추리 등으로 구별할 수 있다(교육과학기술부, 2008). 수학적 사고는 학자에 따라 다양하게 정의내리고 있지만, 수학적 사고는 문제 상황을 찾아내는 창의적 활동에서부터 추측을 제시하고 정교화하며 논리적인 증명을 하는 모든 과정이라 할 수 있으며(류희찬, 조완영, 김인수, 2003), 구체적 수준에서의 단순한 사고에서부터 추상적인 수준의 복합적인 사고 전략으로 진행하며 발달한다(황혜정, 2001).

이처럼 수학 교육에서 강조되고 있는 학생들의 수학적 사고를 촉진하기 위해서 Lakatos의 방법론을 초등수학에 접목시키고자 하였다. Lakatos는 수학적 지식의 성장을 문제를 이해하여 추측을 하고 그 추측을 검사하여 반박하는 ‘증명과 반박’의 논리로서 설명하고 있다. ‘증명과 반박’의 과정은 추측의 참임을 밝히는 것뿐만 아니라 증명의 과정에서 반례를 통해 비판하고 반박함으로써 보다 깊은 정리를 발견하는 것이다. 초등수학에서 증명이라는 단어가 익숙하지는 않지만 학생들이 직접 추측을 만들고 자신이 만든 추측을 충분히 설명하는 과정에서 반례를 찾아보고 반례를 통해 추측을 개선하는 활동을 증명이라 할 수 있으므로 초등학교에 적용할 수 있다고 여겨지며, 김현주(2009)의 연구에서는 Lakatos 방법론을 초등학교에 쉽게 적용하고자 사회적 구성주의 패러다임에 따라 소집단 학습을 접목시켜 26개의 탐구주제에 해당하는 초등수학에 적용 가능한 자료를 개발했다. 또한 수학은 학생들의 마음속에서 성장하면서 그들이 학습하는 개념의 폭이 넓어지고 깊이가 깊어지므로 교과서가 아닌 학생의 사고 과정을 존중한다면 준경험주의적으로 학교 수학을 바라보는 것이 바람직하다는 점과 Lakatos의 증명에 대한 목적을 "어떤 분명하게 서술된 주장이 참이거나 거짓이라는 것을 결정적으로 보이는 것이 증명의 목적이 아니라 소박한 추측을 진정한 정리로 개선하는 것이 증명의 실제적인 목적"이라고 말한 점을 근거로, 증명을 다루지 않는 초등수준에서는 온전한 형태가 아닌 어느 정도 변형된 형태의 Lakatos 방법론을 적용할 수 있을 것이다(강문봉, 2004).

따라서 Lakatos의 방법론에 의한 수업 전개는 학생들에게 수학을 만들고 수정해 가는 경험을 하도록 할 수 있으며 수학의 성장 배경을 인식시켜 줄 수 있다는 점에서 초등수학에 적용할 가치가 있는 매우 중요한

* 접수일(2013년 3월 5일), 게재 확정일(2013년 3월 25일)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 라카토스, 증명과 반박, 수학적사고
†교신저자

교육 인식론이자 방법론이라고 할 수 있다.

우리나라에서 실시된 Lakatos의 방법론에 관한 연구를 살펴보면, 중고등수학수업에 적용하여 수학적 사고의 형성에 관한 분석 및 수학적 사고 향상을 위한 방안(류시구, 김희정, 2000; 유현승, 이병수, 2008), 영역별 구체적인 교수학습 자료 제안(조열제, 류수정, 유익승, 김태호, 2006; 박경미, 2009) 등에 관한 내용이 많이 이루어지고 있으나, 초등수학수업에 적용하는 연구는 부족한 편이다.

이와 같은 연구의 필요성에 의해 본 연구는 Lakatos의 방법론을 초등학교 6학년 학생들에게 적용하여 학생들의 수학적 사고를 분석하고, 더 나아가 Lakatos의 방법론을 통해 초등학교 학생들의 수학적 사고 신장을 위한 지도 방향에 시사점을 얻고자 한 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. Lakatos의 방법론

Lakatos는 오일러 다면체 정리와 관련된 수학 이론의 발전 과정을 알아봄으로써, 수학적 지식은 의심의 여지없이 확실한 정리의 수가 단조롭게 늘어나면서 성장하는 것이 아니라, 증명과 반박의 논리에 의해 추측이 끊임없이 개선되고 변증법적 과정을 통해 성장한다는 사실을 밝혀내었다. Lakatos는 만들어지고 있는 수학적 지식의 완전한 확실성을 입증할 수 없으며, 추측하고 추측을 검사하고 반박하고 새롭게 개선된 추측을 만들어 발전시켜 나갈 수 있다고 하였다.

Lakatos에 의하면 반례에 의해 추측이 비판되었을 때 대응하는 방식은 다음과 같다.

첫째, 반례를 수용하고 원래의 추측이 틀렸다고 인정하며 완전히 항복하는 것이다. 이것은 자신이 세운 추측은 틀렸으므로 버리고, 다시 새로운 추측을 세우는 방법이다.

둘째, 추측은 이미 증명되었기 때문에 증명된 추측은 옳으며 오히려 반례가 잘못되었다고 보고 반례를 배제하여 원래의 추측을 유지하는 괴물배제법(monster-barring method)이다.

셋째, 새로운 반례가 나타날 때마다 예외에 대하여 언급한 조건 절을 첨가하여 예외를 제외한 영역에서만 참인 명제로 바꾸는 예외배제법(exception-barring method)이다.

넷째, 추측을 부분 추측들로 나누어 참이 됨을 증명하는 과정에서 반례가 나타나게 된 원인이 되는 부분 추측을 찾아 그것을 원래 추측에 합체시키고 증명을 고치는 방법으로 보조정리합체법(lemma-in-corporation method)이다. 보조정리합체법은 새로운 추측을 발견하는 과정과 그 추측을 증명하는 과정이 동시에 이루어지며, Lakatos는 이 방법을 '증명과 반박의 방법(proof and refutations)'이라 부르고 다음과 같은 규칙으로 요약하고 있다(Lakatos, 1976).

◈ 규칙 1 : 추측을 하면 그것을 증명하거나 반박하려고 시도하여라. 증명을 주의 깊게 조사하여 명백하지 않은 보조 정리의 목록을 만들어라. 추측에 대한 반례와 의심스러운 보조 정리에 대한 반례를 모두 다 찾아보아라.

◈ 규칙 2 : 전면적인 반례가 있으면 추측을 버리고 반례에 의해 반박된 적절한 보조 정리를 증명-분석에 추가하고 그 보조 정리를 조건으로 합체시킨 개선된 추측을 기각한 추측과 바꾸어라. 반박을 괴물이라고 보고 버려지도록 하지 말고, 모든 '감추어진 보조 정리'를 명백하게 하려고 시도하여라.

◈ 규칙 3 : 국소적인 반례가 있으면 그것이 또한 전면적인 반례인지 아닌지 검사하여라. 만약 그렇다면 규칙 2를 적용하여라.

◈ 규칙 4 : 만일 국소적인 반례이지만 전면적인 반례가 아닌 반례가 있으면 반증되지 않는 보조 정리로 반박된 보조 정리를 바꾸어 증명-분석을 개선하도록 시도하여라.

◈ 규칙 5 : 만약 어떤 유형이든 반례를 얻었다면 연역적 추정에 의하여 그것들이 더 이상 반례가 되지 않는 보다 깊은 정리를 발견하도록 시도하여라.

2. 수학적 사고의 정의 및 과정

수학적 사고는 복잡하고 광범위한 영역에서 이루어지는 정신 활동으로 명쾌하게 정의하기 어려우므로 일치된 정의를 찾기가 어렵다. 수학과 교육과정에 제시된 수학적 사고력이란 "주어진 문제 상황을 해결하기 위하여 사고하는 능력"이며, 학생 스스로 귀납, 유추, 등을 통해 수학적 사실을 추측할 수 있는 능력, 추측

한 수학적 사실을 정당화하거나 증명할 수 있는 능력, 수학적 사실이나 명제를 분석할 수 있는 능력, 수학적 관계를 조직하고 종합할 수 있는 능력 등을 말한다(교육과학기술부, 2008).

수학적 사고에 대한 여러 학자들의 의견을 살펴보면, 강완, 백석윤(1998)은 수학적 사고를 수학적 문제 상황을 해결하기 위한 사고라고 정의하며 수학의 내용 영역과 기능 측면으로 구별하였고, 김응태, 박한식, 우정호(2007)는 수학적 사고를 여러 가지 계산법이나 문제 해결에 이르는 명확한 절차, 수학적 용어와 기호를 구사하는 것, 여러 가지 개념 원리 법칙 사이의 관련성 파악 등으로 정의했다. 류희찬 외(2003)는 수학적 사고를 수학학습에 있어 문제 상황을 찾아내는 창의적 활동에서부터 추측을 제시하고 정교화하며 논리적인 증명을 하는 것까지의 전 과정이라 정의하고 있다. 황혜정(2001)은 구체적 수준에서의 단순한 사고에서부터 추상적인 수준의 복합적 사고 전략으로 진행한다고 보고, 기초적 사고 기능, 발달적 사고 기능, 복합적 사고 전략으로 분류했으며, 이용률 외(1997)는 수학적 사고를 보다 구체적으로 분류하여 귀납적 사고, 유추적 사고, 연역적 사고, 통합적 사고, 발전적 사고 등으로 제시하였다.

본 연구에서는 황혜정(2001)의 수학적 사고의 분류 기준에 따라 기초적 사고 기능, 발달적 사고 기능, 복합적 사고 전략으로 나누어 분석하였다. 단, 귀납적 사고와 연역적 사고를 제외한 발달적 사고 기능은 이용률 외(1997)에서 제시한 수학적 사고 유형을 포함하여 [표 1]과 같이 분석틀을 재구성했다.

[표 1] 수학적 사고 분석틀

[Table 1] The analytic frame for Mathematical thinking

수학적 사고	분류
기초적 사고	관찰, 비교, 분류, 분석 등
발달적 사고	귀납적 추리, 연역적 추리, 유추적 추리, 통합적 사고, 발전적 사고, 추상적 사고, 단순화 사고, 일반화 사고, 특수화 사고, 기호화 사고 등
복합적 사고	비판적 사고, 창의적 사고 등

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 설계

본 연구는 Lakatos의 방법론을 적용한 수업을 통해 이루어지는 학생들의 수학적 사고를 분석하는 질적연구로, 연구 문제에 대하여 일반화할 수 있는 결론보다는 현상을 이해함으로써 Lakatos의 방법론을 적용한 수업에서 나타나는 학생들의 수학적 사고를 분석하고 이해하고자 하였다.

2. 연구 참여자 및 표집 방법

본 연구의 참여자들은 전주지역 A초등학교 6학년 한 학급 남학생 17명, 여학생 16명과 담임교사 1명이며, 담임교사와 학생들은 Lakatos 방법론을 적용하여 수학수업을 해 본 경험이 없었다. 대상학급은 수학 과목이 6학년 학급 중 평균 수준이며, 담임교사는 경력 10년의 남교사로 수학교육에 관심이 많았다.

본 연구는 일반화나 이론검증이 연구의 목적이 아니기 때문에 무선 표집을 하지 않으며, 연구자가 연구 참여자를 직접 선택하는 의도적인 표집 방법을 사용하였고, 그 중 전형적인 표본선정(Typical case sampling)의 방법을 선택했다.

3. 연구를 위한 수업 주제

Lakatos 방법론을 적용한 수업 주제를 선정하기 위하여, 학생들이 초등학교 수학과 교육내용에 대하여 흔히 가지고 있는 오류 및 오개념, Lakatos 방법론을 적용한 수업 개발 자료 등에 관한 문헌검토를 하였으며, 연구 참여자의 학습 정도와 학습 시기, 수학적 성향을 고려하여 [표 2]와 같은 8차시의 수업주제를 선정했다.

[표 2] Lakatos 방법론을 적용한 수업 주제

[Table 2] The Lesson themes applied the Lakatos' proof and refutation

순	관련영역	수업주제
1	수와 연산	약수에 숨겨진 비밀을 밝혀보자
2	규칙성과 문제해결	두 자리 수의 거꾸로 뺄셈을 통해 규칙을 발견해 보자
3	확률과 통계	세 자리 수를 만들 수 있는 경우의 수를 구해보자
4	규칙성과 문제해결	한붓그리기의 숨은 조건을 발견해 보자

5	규칙성과 문제해결	연속된 수의 합을 구하는 방법을 발견해보자
6	도형	사각형의 개념 및 성질을 알아보자
7	도형	각기둥과 원기둥의 개념 및 성질을 알아보자
8	측정	다각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법을 알아보자

4. 자료 수집

연구자는 연구문제에 대한 결과를 구체적으로 얻기 위하여, 직적 연구의 가장 핵심적인 연구방법인 참여관찰의 방법으로 자료를 수집하였다. 실제 학습 상황에서 도출되는 수학적 사고를 정확하게 분석하기 위하여, 연구자는 학생들의 교수학습 과정을 관찰하여 기록하고 분석했다. 연구자는 연구 참여자에게 본인의 존재와 연구의 목적을 알리는 '관찰자로서 참여관찰'방법을 사용했으며(김영천, 2006), 수업촬영 당일에만 교실에 머무르며 연구 참여자들과 적극적으로 상호작용하거나 참여하지는 않았다. 연구자의 관찰을 통해 수집된 자료는 수업 촬영 비디오, 심층면담 기록, 개인학습지나 모둠별 학습 결과물, 연구자가 직접 쓴 현장일지와 같은 문서 자료를 활용했다.

5. 자료 분석

본 연구에서는 Lakatos 방법론 적용을 통한 초등학교 6학년 학생들의 수학적 사고를 질적으로 분석하기 위하여 수업, 면담, 현장일지나 다양한 문서의 내용을 분석대상으로 삼는 내용분석(Content Analysis)을 활용하고자 하였으며, 김영천(2006)에 의해 제시된 전사작업 및 메모작업, 코딩작업, 주제의 생성 과정을 거쳐 자료를 분석했다.

코딩작업은 사전 개발된 코딩의 목록에 따라 수집된 자료들을 분류하고 범주화했다. 그러나 분석하는 과정에서 기존의 분석틀과 차이점이 발견되면, 분석적 귀납법(Analytic Induction)을 통해 초기 분석틀을 계속적으로 수정해 나가는 과정을 거쳤다(Merriam, 1994).

[표 3] 자료 분석의 단계 및 계획
[Table 3] The steps and plan for data analysis

단계	구체적인 계획
전사작업 (Transcribing) 및 메모작업 (memoing)	◈ 수집된 자료를 컴퓨터 파일로 정리 및 기록 - 전사 : 현장에서 수집하거나 기록한 자료의 체계적인 기록 - 메모 : 수집된 자료로부터 새롭게 알게 된 사실에 대한 반성적 노트 작성
코딩작업 (coding) -사전 목록에 의한 코딩	◈ 자료를 수집하기 이전에 미리 분석할 코드 종류 개발 ◈ 코딩의 목록을 기준으로 수집된 자료들 분류 및 범주화 ◈ 개발된 코드에서 적절한 코드를 찾을 수 없을 때는 새로운 코드 생성
주제의 생성	◈ 일련의 코드들이 보이는 관계, 특징 등을 발견

6. 신뢰성 전략

본 연구에서는 연구결과의 높은 신뢰성과 타당성을 확보하기 위하여 Lincoln과 Guba가 제시한 신뢰성 확보 방법에 적합한 다섯 가지 기법(1. 삼각검증, 2. 연구참여자에 의한 연구결과의 검토 작업, 3. 장기적인 관찰, 4. 동료들과의 비평작업, 5. 참고 자료들의 활용)과, Lather가 제시한 네 가지 활동(1. 다양한 연구방법의 사용, 2. 연구 참여자에 의한 연구결과의 검토와 평가, 3. 반성적 주관성, 4. 카타르시스 타당도)을 참고하여 본 연구에 적합하게 수정하고 보완했다. 이러한 방법을 통해 수집된 자료를 보다 정확하고 타당하게 분석하고 해석할 수 있는 기초를 다졌다..

[표 4] 신뢰성 확보를 위한 방법 및 계획
[Table 4] The method and plan for reliability

방법	구체적인 계획
삼각검증 (triangulation)	◈ 방법의 통합 : 수업 관찰과 면담, 문서 방법 ◈ 연구자의 통합 - 연구의 배경에 대한 깊은 지식을 소유한 전문가와 동료연구자, 연구참

	여자가 함께 의견 교환 및 검토 - 동료연구자와 함께 수집한 자료에 대한 의견 교환 및 분석 ◈ 자료의 통합 - 질문지 자료와 면담 자료, 관찰 자료 그리고 수업 녹화 자료
연구참여자에 의한 연구결과의 평가작업 (Member check)	◈ 연구참여자에 의해서 연구자가 도출한 연구보고서 초안 및 연구결과 검토 및 평가 ◈ 연구의 전반에 걸친 지속적인 시행
8차시 수업 관찰	◈ Lakatos 방법론을 적용한 8차시의 수업을 반복적으로 관찰 ◈ 8차시에 해당하는 수업을 녹화한 후, 녹화 테이프 분석
참고 자료의 활용	◈ 연구자가 쓴 현장 일지 ◈ 수업 촬영 비디오 ◈ 문서 자료 등 ◈ 학생 활동 및 자료 사진 ◈ 면담 녹음 테이프

Ⅳ. 결과분석

이 장은 Lakatos의 방법론을 적용하기 위하여 수업 지도안을 작성한 후 실제 수업 상황에 적용하였으며, Lakatos의 방법론을 적용한 수학 교수학습 흐름도의 문제 상황 제시, 본래의 추측 제안, 본래의 추측 검사 및 증명, 추측 개선의 각 단계에서 어떻게 수학적 사고를 형성하는지 교사와 학생들의 구체적 에피소드를 들어 분석하였다.

<수업8. 다각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법을 알아보자>

학생들은 4학년 1학기 '3. 각도' 단원에서 삼각형과 사각형 내각의 크기의 합을 알아보았으며, 학습한 내용을 바탕으로 다각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법에 대하여 다양한 추측을 하고, 추측을 부분추측으로 분해하고 검사하는 과정에서 반례를 찾고, 반례가 나타나지 않도록 보조정리 합체법에 의해 추측을 개선했다. 이러한 과정을 통해 학생들의 오류나 오개념이 드러나는 추측을 제안하고, 이를 수정해가는 활동으로 전개하면서 학생들에게 어떤 수학적 사고가 발현되는지를 분석했다.

1. 문제 상황 제시 단계

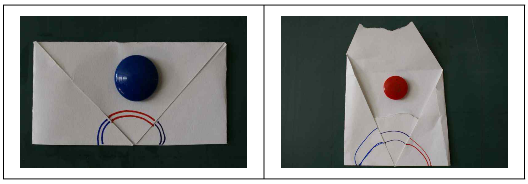
삼각형은 다각형의 가장 기본적인 평면도형으로 다각형의 여러 가지 성질을 배우는데 기초가 되므로, 학생들의 이해를 돕기 위하여 삼각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법으로 도입하기 위하여, 삼각형 내각의 크기의 합이 180도임을 발견한 프랑스의 수학자 파스칼에 대한 이야기로 수업을 시작했다. 연구 참여자들은 삼각형 세 각의 크기의 합을 묻는 질문에 바로 180도라고 말하지만, 그렇게 생각하는 이유에 대해서는 얼버무렸다. 따라서 교사는 삼각형 모양의 종이를 나눠주고 학생들에게 직접 각을 표시하도록 하였으며, 이 종이를 가지고 삼각형의 세 각의 크기의 합을 구하는 방법을 생각한 후, 자신의 생각을 전체 학급 학생들과 공유했다. 다음은 사각형 내각의 크기의 합과 그렇게 생각하는 다양한 이유에 대해서 알아보았으며, 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 알게 된 학생들은 각이 더 많은 오각형과 육각형 등의 내각의 크기의 합에 대하여 궁금증을 가졌다.

본 수업의 문제 상황 제시에 따른 사고 기능은 추측을 시작하는 단계로 기초적인 사고 기능, 발달적 사고기능, 복합적 사고 전략을 확인할 수 있었다.

1) 기초적 사고 기능

학생들은 모둠별로 모양과 크기가 다양한 삼각형과 사각형을 관찰하며, 두 도형의 내각의 크기의 합을 구하는 방법에 대해서 생각했다. 삼각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법은 삼각형의 세 각을 주의 깊게 자세히 살펴보는 과정을 통해 정보를 얻음으로써 다양한 방법들이 제안되었다.

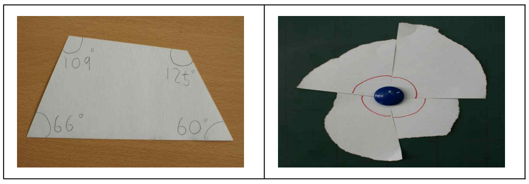
- 각도기를 사용하여 직접 재어본다.
- 각을 찢어 붙이면, 원의 반이니 180도이다.
- 세 각을 안쪽으로 접는다.
- 밑에 있는 두 각은 안쪽으로 접고, 나머지 한 각은 찢어서 붙인다.



[그림 1] 삼각형 내각의 크기의 합 구하기

[Figure 1] Find the sum of the interior angles of a triangle

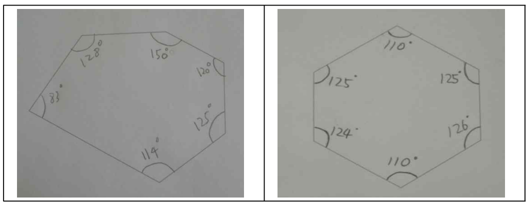
[그림 1]과 같이 종이를 안쪽으로 접어서 삼각형 내각의 크기를 알아보는 방법은 정삼각형이나 이등변삼각형을 가지고 조작한 학생이나 우연의 일치로 삼각형의 세 각을 안쪽으로 접어보며 삼각형 내각의 크기의 합이 180도임을 발견했다. 세 각을 접는 방법은 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 발에 세 각을 접어야 하나, 밑에 있는 두 각을 먼저 안쪽으로 접은 다음 나머지 한 각을 접어서 맞추려고 하는 경우에는 순서가 바뀌어 각이 맞아 떨어지지 않게 되어, 밑에 있는 두 각은 안쪽으로 접고 나머지 한각은 찢어서 그 사이에 끼워 맞추는 방법으로 삼각형 내각의 크기의 합이 180도임을 발견했다.



[그림 2] 사각형 내각의 크기의 합 구하기

[Figure 2] Find the sum of interior angles of a rectangle

사각형 내각의 크기의 합을 구하기 위해서, [그림 2]처럼 학생들은 각도기로 재어보거나 사각형 모양의 종이의 네 각을 찢어서 원을 만들어봄으로써 내각의 크기의 합을 구했다.



[그림 3] 육각형 내각의 크기의 합 구하기

[Figure 3] Find the sum of the interior angles of a hexagon

또한 육각형의 경우는 육각형 모양의 종이를 이용하지 않고 각도기를 활용해 각을 재어봄으로써 내각의 크기의 합을 구했다.

2) 발달적 사고 기능

학생들이 삼각형과 사각형, 육각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법을 발견하는 과정 속에는 [표 5]와 같이 발달적 사고 기능 중 유추적 사고를 엿볼 수 있었다. 학생들은 삼각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법으로 즉, 각도기로 재어본다든지 각을 찢어서 붙여본다든지 또는 안쪽으로 접어보는 방법으로 사각형 내각의 크기의 합을 구할 수 있을 것이라고 생각했다. 또한 삼각형과 사각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법으로 육각형 내각의 크기의 합을 구할 수 있다고 생각했다. 따라서 학생들은 사각형 내각의 크기의 합을 구하기 위해 사용했던 방법이나, 삼각형과 사각형 내각의 크기의 합을 이용하여 육각형 내각의 크기의 합을 구할 수 있는 방법을 생각해내었다.

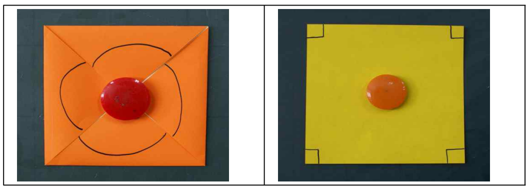
[표 5] 유추적 사고를 통해 다각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법

[Table 5] The way of finding the sum of the interior angles of a polygon through analogical thinking

삼각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법	▪각도기를 사용하여 재어본다. ▪세 각을 안쪽으로 접는다. ▪각을 찢어 붙이면 원의 반이 되어 180도이다.
사각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법	▪각도기를 사용하여 재어본다. ▪네 각을 찢어 모으면 원이 된다. ▪정사각형도 사각형이니 네각을 안쪽으로 접으면 원이 된다.

육각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법	▪각도기를 사용하여 재어본다. ▪삼각형 4개로 나누어 180Ｘ4=720도이다. ▪6개의 삼각형으로 나누어 필요 없는 원의 각도(360)를 뺀다. ➜

사각형 내각의 크기의 합을 구하는 다양한 방법들 중에는 특수화의 사고에 해당되는 방법도 제안되었다. 아래 [그림 4]와 같이 사각형 내각의 크기의 합을 구하기 위해서 사각형의 집합에 포함되어 있는 정사각형 모양의 종이를 이용하여 네 각을 안쪽으로 접어봄으로써 사각형 내각의 크기의 합이 360도임을 발견하는 방법으로 추측 '정사각형도 사각형이니까 네 각을 안쪽을 접으면 원이 만들어진다.'와 '모든 각이 다 직각이라고 생각하고 90Ｘ 4=360도라 생각한다.'는 이에 해당되며, 이는 특수한 예인 정사각형이나 직사각형의 경우에 대한 답을 먼저 찾은 다음 사각형 내각의 크기의 합으로 일반화한 경우이다.



[그림 4] 사각형 내각의 크기의 합 구하는 방법 중 특수화 사고의 예

[Figure 4] The example of specialization among the method of finding the sum of interior angles of a rectangle

하지만 육각형은 삼각형과 사각형처럼 학생들에게 익숙하지 않은 도형으로 육각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법에는 특수화의 사고를 찾을 수 없었다.

삼각형과 사각형 내각의 크기의 합에 대하여 탐구할 때, 세 각을 각도기로 재어서 더하거나 세 각을 오려서 맞춰 보고 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 발에 세 각을 접어 모으는 등의 방법으로 해결을 하는 학생들이 있었으며, 사각형 내각의 크기의 합을 구하기 위해서 삼각형 내각의 크기의 합을 이용하거나 육각형 내각의 크기의 합을 구하기 위해서 삼각형과 사각형 내각의 크기의 합을 이용하여 구하는 연역적 사고에 의한 해결을 하는 학생들도 보였다.

또한 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 구하는 활동에서 학생들은 한 가지 방법을 찾았다 하더라도 보다 나은 방법을 추구하거나 새로운 방법을 발견하였으며, 삼각형과 사각형 내각의 크기의 합을 구하는 것에 그치지 않고 더 넓은 범위인 오각형과 육각형 내각의 크기의 합에 대하여 궁금증을 유발하는 발전적인 사고를 보였다.

3) 복합적 사고 전략

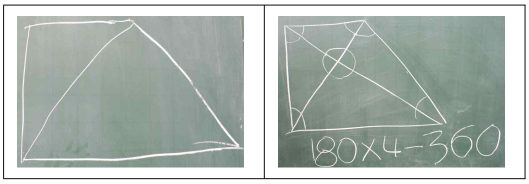
학생들이 제안한 추측들을 살펴보면 기존의 방법과는 다른 어떤 새로운 방법을 발견하기 위해 노력한 것을 느낄 수 있었다. 학생들은 다른 사람의 추측과는 다른 새로운 아이디어를 찾아보려 하고, 한 가지 방법으로 해결하는 것에 그치지 않고 다양한 추측들을 제안하려고 노력하였는데, 이는 창의적 사고에 해당하였다.

[표 6]창의적 사고를 통해 삼각형과 사각형, 육각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법

[Table 6] The way of the sum of interior angles of triangle, rectangle, and hexagon through creative thinking

삼각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법	▪밑에 있는 두 각은 안쪽으로 접고, 나머지 한 각은 찢어서 붙인다.
사각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법	▪삼각형으로 잘라서 삼각형은 180도이니 2개의 삼각형은 180 + 180 = 360도이다.
육각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법	▪육각형을 3개로 나누면 삼각형 2개와 사각형 1개니깐 180 × 2 + 360 = 720이다. ➜ ▪육각형을 2개로 나누면 사각형이 2개가 나오고, 사각형의 내각은 360도이기 때문에, 사각형 2개 즉 360×2=720도이다. ➜ ▪삼각형 4개로 나누어서 180×4 = 720도이다. ➜

두 개의 삼각형으로 나누어 사각형의 내각의 크기의 합을 구하는 학생들에게 사각형을 두 개의 삼각형으로 어떻게 나누었는지 그려보도록 하였더니 대각선을 이용하여 사각형을 두 개의 삼각형으로 나누는 방법을 제시했다. 교사는 “사각형을 삼각형으로 나누는 방법이 두 가지만 있을까?”라며 질문을 하였더니, [그림 5]처럼 한 대각선이 그어진 사각형에 대각선을 하나 더 그어서 네 개의 삼각형으로 만들고 네 개의 삼각형 내각의 크기의 합에서 사각형 안쪽에 생긴 원을 빼주어야 하므로, 180X4-360이라고 설명했다.



[그림 5] 사각형을 삼각형으로 나누는 방법

[Figure 5] The way of dividing a rectangle by triangles

2. 본래의 추측 제안 단계

교사는 학생들이 제안한 다양한 방법들 중에서 다각형 내각의 크기의 합을 구하기 위하여 일반적이고 보편적인 방법을 선택하도록 하기 위하여, 사각형과 육각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법으로 두 도형 모두에게 쓰인 방법을 찾아보도록 한 후, 개인별 학습지에 자유롭게 표현하고 짝과 함께 또 다른 방법에 대한 의견을 나누도록 했다. 학생들은 다각형을 삼각형으로 나누고 삼각형의 개수에 180을 곱하는 방법과 다각형을 삼각형으로 나누고 가운데 만들어진 원을 빼는 방법을 발견했다.

학생들은 육각형 내각의 크기의 합까지 구하는 활동을 하고 나서인지 자신의 추측을 매우 적극적으로 표현했다. 교사는 궤간순시를 통해 살펴본 학생들의 추측들 중에서 단순한 추측을 제시한 학생부터 발표를 유도하여 단순한 추측을 한 학생도 발표를 할 수 있는 분위기를 만들어 다양한 추측이 공유될 수 있도록 장려했다.

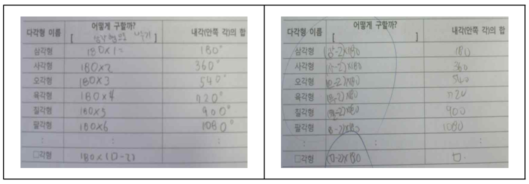
본 수업 중 본래의 추측을 제안하는 단계에 따른 사고 기능은 다각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법에 대한 추측을 제안하는 단계로 발달적 사고 기능을 확인할 수 있었다.

1) 발달적 사고 기능

학생들은 사각형과 육각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법을 각각의 다양한 방법들보다는 다각형이라는 보다 넓은 관점에서 공통성을 추상하여, 두 다각형 내각의 크기의 합을 구하는 동일한 방법으로 종합하고 정리하는 통합적인 사고를 보였다.

학생들은 다각형 내각의 크기의 합을 구하기 위하여, 구체적인 경우(사각형, 오각형과 육각형의 내각의 크기의 합)에 대한 활동을 통해 탐색하고 규칙을 발견했다. 학생들은 수적인 요소에 주목하여 사각형은 2개, 오각형은 3개, 육각형은 4개의 삼각형으로 나누고, 각각 (4-2), (5-2), (6-2)이므로 사각형 내각의 크기의 합은 180X(4-2), 오각형의 내각의 크기의 합은 180X(5-2), 육각형 내각의 크기의 합은 180X(6-2)임을 인식하게 되었다. 이런 경우들로부터 일반화하여 다각형의 경우로 확장하게 되어, □(n)각형의 내각의 크기의 합은 180X(□(n)-2)임을 발견하였다. 교사는 학생들과 함께 해결된 문제를 바탕으로 이를 포함하는 집합 전체에서 성립하는 일반성을 구하고자 일반화 사고를 구현했다.

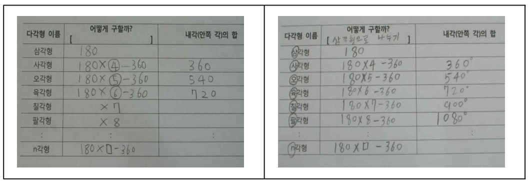
- □(n)각형 내각의 크기의 합은 180X(□(n)-2)
  ① □(n)각형을 삼각형으로 나눈다.
  ② 삼각형의 개수에 180도를 곱한다.



[그림 6] 다각형 내각의 크기의 합 구하는 공식 (180X(□(n)-2) 일반화하기

[Figure 6] The generalization of the formula (180X(□(n)-2) found the sum of interior angles of a polygon

- □(n)각형 내각의 크기의 합은 180X□(n)-360
  ① □(n)각형을 삼각형으로 나눈다.
  ② 가운데 만들어진 원(360도)를 뺀다.



[그림 7] 다각형 내각의 크기의 합 구하는 공식 (180 X□(n)-360) 일반화하기

[Figure 7] The generalization of the formula (180X(□(n)-360) found the sum of interior angles of a polygon

3. 본래의 추측 검사 단계

제안한 추측들을 자유롭게 검사하는 이 과정을 통해, 학생들은 '① □(n)각형을 삼각형으로 나눈다. ② 삼각형의 개수에 180도를 곱한다.'라는 다각형 내각의 크기의 합을 구하는 방법으로 제안한 부분추측 ①에 대하여 반례를 확인했다. 교사는 학생 혼자의 힘으로 해결하기 어려운 학생에게는 짝이나 모둠과 함께 생각할 수 있도록 안내했다. 또한 어떠한 반례가 나올 것인지 예측해보고, 학생들이 반례를 찾을 수 없을 경우에는 교사는 필요시 제시할 수 있도록 적절한 반례를 준비해 두었다.

본 수업의 추측을 검사하는 단계에 따른 사고 기능은 추측에 대한 반례를 발견하는 단계로 발달적 사고 기능과 복합적 사고 전략을 확인할 수 있었다.

1) 발달적 사고 기능

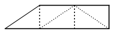
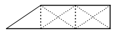
다각형을 삼각형으로 나눈다는 부분추측 ①에 대한 반례를 찾기 위하여 학생들은 다각형이라는 조건을 쉽게 접할 수 있는 사각형, 오각형, 육각형과 같은 단순한 것으로 대체하여 부분추측 ①을 간단하게 바꾸고, 이렇게 바꾼 부분추측 ①의 문제에 대한 고찰을 통해 주어진 추측의 반례를 알아내는 단순화의 사고 기능을 사용했다.

[에피소드 1] 부분추측 ①에 대한 반례 확인하기

T : [...중략...] 이렇게 하면 다각형 내각의 크기의 합을 구할 수 있을까? 뭔가 부족한 것 같은데.. [사각형을 삼각형으로 나눴던 방법을 다시 보여준다.]

S1: 다각형의 꼭짓점과 꼭짓점을 연결해 주어야 해요.

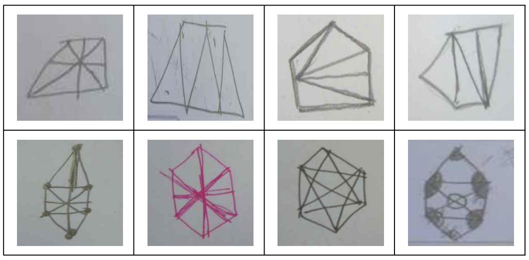
T : 사각형을 꼭짓점과 꼭짓점을 연결해 주지 않으면 어떻게 될까? 칠판에 그려보자.

[학생들은 칠판에 , 을 그린다.]

T : 잘 그렸어. 삼각형을 나누는 방법을 이렇게도 나눌 수 있고, 이렇게도 나눌 수 있지? 그럼 육각형의 경우도 봐보자. [다른 반례들도 제시되었다.]

2) 복합적 사고 전략

'다각형을 삼각형으로 나눈다.'에 관하여 분석하고 평가하는 과정에서 학생들은 참이라고 생각되는 부분추측에 대한 반례를 확인하면서 보다 정확하게, 더 합리적으로 생각하고 판단하게 되었다. 이렇게 복합적 사고 전략 중 하나인 비판적 사고는 학생들이 추측에 대한 수용 여부의 결정을 잠시 미루고 보다 나은 추측을 하도록 하였다. 이러한 수학적 사고 과정을 거쳐 학생들은 본래의 추측에 대하여 [그림 8]과 같은 반례를 제시하였으며, 이 반례들은 수업 시간에 발표는 하지 않았지만 학습지에 제시해 놓은 반례들도 함께 넣었다. 학생들은 사각형, 오각형, 육각형을 삼각형으로 나누는 방법이 다양함을 알고 다각형을 삼각형으로 나눈다는 추측 그 자체로 어떻게 나누어야 하는지 명확하지 않으므로 부분추측 ①을 더욱 정확하게 개선할 필요가 있음을 깨달았다.



[그림 8] 부분추측①에 대한 반례

[Figure 8] The refutation for the presumption ①

학생들은 학습하는 내용을 보다 깊게 이해하고, 그 내용을 따져보고 가정해보고 확대 적용해보는 과정을 거치면서 비판적 사고 기능이 향상되었다. 따라서 이 단계에서 비판적 사고는 추측을 검증하고 증명하는

과정에서 등장한 반례들을 배제하거나 제외할 수 있는 조건을 본래의 추측에 조건절로 추가하여 더 정확한 추측에 이르도록 하는 데 핵심적인 기능을 한다고 할 수 있다.

4. 추측의 개선 단계

학생들은 반례가 출현하게 된 원인이 되는 부분추측 ①에 대하여 조건을 추가함으로써 반례가 나타나지 않도록 반례를 처리하는 방법으로 부분추측 ①을 개선하고 원래의 추측을 수정하는 Lakatos 방법의 규칙4를 사용했다. 이를 통해 본래의 추측은 막연한 추측에서 벗어나 좀 더 정교화 된 명제가 된다. 나타난 반례에 대한 학생들의 대응방식 중 하나로, '다각형을 삼각형으로 나눈다'라는 추측을 '내각', '대각선'이라는 수학적 용어를 사용하여 다음과 같이 부분추측을 좀 더 정교화 했다.

본 수업의 추측을 개선하는 단계에 따른 사고 기능은 반례가 나타나지 않도록 추측을 개선하는 단계로 발달적 사고 기능을 확인할 수 있었다.

1) 발달적 사고 기능

이 단계에서는 일반화를 이끌어내기 위해, 본래의 추측을 검사하고 개선의 과정이 반복되면서 의견을 종합하여 결론을 내리는 과정으로 [에피소드 2]와 같이 전개되었다. 학생들이 발견한 공통적인 성질이나 규칙을 말이나 기호, 수식과 같은 수학적 언어로 정리하여 표현하는 이러한 활동은 일반화 능력과 관련이 깊다.

[에피소드 2] 부분추측 ① '다각형을 삼각형으로 나눈다.' 개선하기

T : [...중략...] 삼각형으로 나눈다는 말만 보면 몇 개의 삼각형으로 나눌지 어떻게 알아? 그렇다면 이 추측은 어떻게 바꾸어야 할까?

S1: 내각이 3개가 포함되어 있는 삼각형으로 나누어야 합니다.

T : 왜 그렇게 생각했지?

S1: 내각이 3개가 포함되어 있어야 필요 없는 각이 생기지 않아서요. [...중략...]

S2: 대각선을 겹치지 않게 그어요.

T : 대각선을 겹치지 않게 그으려면 어떻게 해야 하지?

S2: 어떤 한 꼭짓점을 중심으로 대각선에 그어야 해요.

학생들은 다음에 제시된 내용에서 알 수 있듯이, 본래의 추측에 조건절을 추가하여 더 정확하고 합리적인 추측에 이르도록 했다.

- 다각형 내각의 크기의 합은 자신의 각의 수에서 2를 뺀 수에 180을 곱하면 나온다.
- 다각형을 한 꼭짓점의 대각선에 의해 여러 개의 삼각형으로 나눈 후 삼각형 개수에 180을 곱한다.
- 대각선을 겹치지 않게 하고, 내각이 포함되어 있는 삼각형으로 나누어 180Ⅹ(□-2)를 한다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 논문은 Lakatos 방법론을 적용한 수업에서 나타나는 학생들의 수학적 사고를 분석하였다. 연구 결과를 바탕으로 선행 연구와 학교 현장에서의 Lakatos 방법론을 적용한 수업과 관련지어 논의하고자 한다.

Lakatos 방법론을 적용한 수업에서 나타나는 학생들의 수학적 사고를 분석한 결과, 문제 상황에서 본래의 추측을 제안하고 추측을 검사하는 과정을 거쳐 개선된 추측에 이르기까지 각 단계에 따라 다양한 수학적 사고가 도출되었다. 문제 상황 제시 단계에서는 제시된 문제 상황에 대한 여러 가지 정보를 획득하기 위하여 관찰, 비교 등과 같은 기초적인 사고 기능을 바탕으로, 귀납적 추리와 연역적 추리 등 발달적 사고 기능도 발현되었다. 또한 다양한 관점에서 생각하고 다른 학생들과는 다른 추측들을 제안하는 창의적 사고도 나타났다. 본래의 추측검사 단계에서는 학생들이 제안한 추측들을 다른 상황에 적용함으로써 나타나는 반례를 확인하는 단계로, 복합적 사고 전략 중의 하나인 비판적 사고가 두드러지게 나타났으며, 이러한 비판적 사고는 학생들이 제안한 추측에 대한 수용 여부의 결정을 잠시 미루고 보다 나은 추측을 하도록 도와주었다. 마지막 단계는 Lakatos 방법론을 적용하여 추측을 개선하는 단계로써, 어떤 대상에 대한 고찰로부터 이 대상을 포함하는 집합 전체에 대한 일반적인 법

칙을 발견하는 일반화의 사고가 발현되었다. 이러한 수학적 사고 과정을 거쳐, 학생들이 기존에 가지고 있던 경험이나 지식을 바탕으로 제안한 본래의 추측은 추측을 검사하는 과정에서 등장한 반례를 확인함으로써 한 단계 높은 수준의 정리로 발전할 수 있었다.

이와 관련된 선행 연구에서 Lakatos 방법론의 초등학교에 적용가능성에 대하여 긍정적으로 인식하고 있으므로(강문봉, 2004), 본 연구 결과가 부각되어야 할 점은 Lakatos 방법론을 초등학교 수학수업에서 실제로 적용한 결과 학생들에게서 다양한 수학적 사고가 도출되었다는 점과, Lakatos 방법론에서 반례가 중요한 역할을 할 수 있는 괴물배제법이나 예외배제법 뿐만 아니라 보조정리합체법이 엄밀하진 않지만 반례가 나타나지 않도록 추측을 개선하는 과정에서 일어났다는 점이었다. 따라서 증명을 다루지 않는 초등학교 수준에서 Lakatos의 방법론을 온전한 형태로 적용하기에는 어려움이 있으므로, 본 연구에서는 제시된 윤기옥 외(2002)의 연구를 바탕으로 '증명'이라는 용어를 사용하지 않고, 문제 상황을 통해 추측을 하고 추측을 검사하는 과정에서 반례를 찾아내어 추측을 개선해가는 과정으로 수업을 전개하였으며, 이러한 과정을 거치면서 수학은 무조건 당연하다고 받아들이던 학생들에게 수학을 수정해가면서 만들어가는 경험을 시켜줄 수 있다는 점에서 초등학교 수준에서도 적용할 가치가 있다고 볼 수 있었다.

참 고 문 헌

강문봉 (2004). Lakatos의 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 연구. 수학교육학연구, 14(2), 143-156.

Kang, M. (2004). A study on the application of Lakatos's methodology to teaching elementary mathematics. *The Journal of Educational Research in Mathematics,* 14(2), 143-156.

강완 · 백석윤 (1998). 초등수학교육론. 서울: 동명사.

Kang, W., & Paek, S. (1998). *Theory of teaching elementary mathematics*. Seoul: Dongmyoung-Sa.

교육과학기술부 (2008). 초등학교 교육과정 해설: 수학, 과학, 실과. 서울: 교육과학기술부.

Ministry of Education Science and Technology (2008). *The explanation of elementary school curriculum: Mathematics, science, home economic*, Seoul: Ministry of Education Science and Technology.

김영천 (2006). 질적연구 방법론 Ⅰ. 서울: 문음사.

Kim, Y. (2006). *Qualitative research method I.* Seoul: Mooneum-Sa.

김응태 · 박한식 · 우정호 (2007). 수학 교육학 개론. 서울: 서울대학교 출판부.

Kim, E., Park, H., & Woo, J. (2007). *The introduction of mathematics Education*. Seoul: Seoul University Press.

김현주 (2009). Lakatos의 방법론을 초등수학에 적용한 자료 개발. 제주교육대학교 석사학위논문.

Kim, H. (2009). *Materials development on the application of Lakatos's methodology to teaching elementary mathematics*. Unpublished master's thesis, Jeju National University of Education.

박경미 (2009). Lakatos의 증명과 반박 방법에 따른 기하 교수 · 학습 상황 분석 연구. 학교수학, 11(1), 55-70.

Park, K. (2009). A research on the teaching and learning of geometry based on the Lakatos proofs and refutation method. *School Mathematics,* 11(1), 55-70.

류시구 · 김희정 (2000). 추측과 반박을 통한 수학적 발견논리. 교육문제연구, 15, 138-163.

Ryu, S., Kim, H. (2000). Solving problem based on Lakatos's logic of mathematical discovery. *The Research on Educational Problem, 15*, 138-163.

류희찬 · 조완영 · 김인수 (2003). 고등 수학적 사고. 서울: 경문사.

Lew, H., Cho, W., & Kim, I. (2003). *Higher order mathematical thinking*. Seoul: Kyoungmoon-Sa.

유현승 · 이병수 (2008). Lakatos의 증명 및 반박과 학생들의 수학적 사고의 비교에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 22(3), 383-397.

You, H., Lee, B. (2008). Research about comparison on Lakatos' proofs and refutations with students' mathematical thinking. *Communications* *of Mathematical Education,* 22(3), 383-397.

윤기옥·정문성·최영환·강문봉·노석구 (2002). 수업 모형의 이론과 실제. 서울: 학문출판.

Yoon, K., Jeong, M., Choi, Y., Kang, M., & No, S. (2002). *The theory and practice for lesson models*. Seoul: Hakmoon Press.

이용률·성현경·정동권·박영배·정은실·박교식·강문봉·백석윤·유현주 (1997). 초등수학교육론. 서울: 경문사.

Lee, Y., Seung, H., Jeong, D., Park, Y., Jeong, E. Park, K. et al. (1997). *The introduction of elementary school mathematics education*. Seoul: Kyoungmoon-Sa.

조열제·류수정·유익승·김태호 (2006). 라카토스의 보조정리 합체법을 적용한 교수-학습 자료 개발. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 20(3), 361-372.

Cho, Y., Ryo, S., Lyou, I., Kim, T. 2006). Development of teaching-Learning materials in Lemma-incorporation method of Lakatos. *Communications of Mathematical Education,* 20(3), 361-372.

황혜정 (2001). 수학적 사고 과정 관련의 평가 요소 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 40(2), 253-263.

Hwang, H. (2001). Evaluation factor related to thinking skills and strategies based on mathematical thinking process. *The Mathematical Education,* 40(2), 253-263.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. New York : Cambridge University Press. 우정호 역 (2003). 수학적 발견의 논리. 서울: 아르케.

Merriam, S. B. (1994). *Qualitative research and case study applications in education*. USA: Wiley & Sons. 강윤수 외 8인 역 (2005). 정성연구 방법론과 사례연구. 서울: 교우사.

The Analysis of the 6th Grade Students' Mathematical Thinking on the Application of Lakatos' Methodology

Jung, Mi Hye

Lee, Kwangho †
Korea National University of Education
San 7, Darakri, Gangnaemyon, Cheongwongun, Chungbuk, Korea
E-mail: paransol@knue.ac.kr

Sim, Jaebang

In this study, We analyzed the mathematical thinking of sixth grade students showed mathematics lessons through the application of Lakatos' methodology and search for the role of their teachers in this lessons. We supposed to find the solution to the way of teaching-learning regarding the Lakatos' methodology for the elementary school level. According to the stages of presenting a problem situation, suggesting an initial conjecture, examining the conjecture, and improving the conjecture, we had lessons 8 times that are applied to Lakato's methodology. We gathered and analyzed data from lessons and interviews recording videotapes, documents for this study. The participants showed a lot of mathematical thinking. They understood the problem situation with the skill of fundamental thinking and suggested the initial conjecture by the skill of developmental thinking and they found a counter-example to be able to rebut the initial conjecture by critical thinking. Correcting the conjecture not to have counter-example, they drew developmental thinking and made their thinking generalize.

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Lakatos, proof and reputation, mathematical thinking
† Corresponding Author