대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 2, 221 ~ 241. Jun 2013

Piaget의 발생적 인식론에서 심리발생의 실험 결과가 나타내는 교육적 시사점에 대한 연구[1)]
-Inhelder와 Piaget(1963)의 실험을 기초로 하여-

박 선 용*

이 연구에서는, Inhelder와 Piaget(1963)의 실험의 여러 측면에 대해 고찰하면서, Piaget의 발생적 인식론에서 '문제의식의 형성', '연구문제로의 변환', '실험과제로의 번역', '실험 결과의 해석' 과정의 특징을 드러낸다. 그리고 이러한 일련의 분석을 바탕으로 하여, Piaget의 발생적 인식론의 실험 결과가 학생의 의식성을 높이는 교육을 지지한다는 점에 대해 논의한다.

Ⅰ. 서론

일반적으로, Piaget는 수세기 활동의 교육적 가치를 격하시켰으며 집합과 기수 개념을 기초로 한 새 수학의 태동을 뒷받침한 인지발달 심리학자로 알려져 있다(Thompson, 2000). 또한, Freudenthal (1972), Gelman과 Gallistel (1978)은 교육적으로 건전한 체계적 수세기 활동이 단절된 것이 Piaget의 영향력에 기인한 것으로 간주하고 있다. 하지만 우정호(1998)는, Piaget가 '말뿐인 수세기'가 논리-수학적 조작이 아니라는 점을 지적했을 뿐이며 기수 개념만을 강조한 것이 아니라고 주장하며, 수학교육 현대화 운동 당시에 Piaget의 연구에 대한 섣부른 해석에 바탕을 두고 새 수학의 이상과 반대방향으로 수학의 완성된 형식만을 '중간 언어'로 가르치는 현상이 일어났다고 지적한다. 사실, Piaget(1998) 본인이 자신의 심리학적 연구결과(특히, 수 개념 실험의 결과)가 줄곧 교육적으로 잘못 해석되어 5세의 아동에게 집합론 개념, 수 보존 개념을 가르치는 기형적 교육 현상이 벌어졌다고 하며, 이에 대해 '현대수학을 낙후된 방식으로 가르치는 통탄할 만한 일'이라는 입장을 나타낸바 있다.

물론, 이러한 '수 개념' 실험의 교육적 해석과 관련된 논란은 Piaget의 발생적 인식론이 수학교육에 적절하게 적용되었는지에 대한 의문을 자아낸다. 그렇다면, 이러한 의문을 해소하기 위해서 어떤 작업이 요청된다고 할 수 있을까? 물론, Piaget가 '어떤 문제의식을 가지고 있었는가?', '그 문제의식을 어떤 연구문제로 나타내었고, 그 연구문제를 통해 무엇을 밝히려고 하였는가?', '그 연구문제를 심리학적 실험을 통해 어떻게 규명하려고 하였는가?', '실험결과는 어떤 인식론적, 교육적 의미를 지니는가?'를 체계적으로 이해할 필요가 있을 것이다.

한편, Piaget의 발생적 인식론 실험의 전형을 보여주는 것은 '수 개념' 실험으로 평가된다

* 영남대학교 (polya@yu.ac.kr)
1) 이 연구는 2012학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임

(Dehaene, 1997; Hughes, 1986). 그리고 그 실험 결과에 대한 교육적 해석의 문제가 여전히 쟁점이 되고 있다면, 위의 질문에 대한 해명은 Piaget의 발생적 인식론의 실험 결과가 갖는 교육적 의미를 탐색하는 통로가 될 것으로 기대된다.

그런데 Piaget의 일련의 수개념 관련 실험 중 가장 주목을 받았던 것은 수보존 실험이지만, 오히려 Piaget의 발생적 인식론에 근거한 실험의 정수를 가장 잘 드러내고 그 결과와 해석에 주목해야 하는 것은 그동안 간과되었던 '아동의 수학적 귀납법 추론에 대한 실험'이다(Smith, 2002). 이런 점에 착안해, 이 연구에서는 Piaget의 발생적 인식론에 대한 교육적 해석의 문제에 접근하였다. 구체적으로 말해, Inhelder와 Piaget(1963)의 수학적 귀납법 실험에서 보이는 '문제의식의 형성 과정', '문제의식을 연구문제로 변환하는 과정', '연구문제를 실험문제로 번역하는 과정', '실험결과를 해석하는 과정'을 분석함으로써 Piaget의 발생적 인식론의 실험 결과가 갖는 교육적 의미를 밝히고 그 교육적 적용의 문제에 대해 재조명하고자 하였다.

Ⅱ. Piaget의 발생적 인식론 연구의 방향과 특성

Piaget는 개인 지식의 심리 발생을 규명하기 위해 임상적 관찰과 질문을 통한 실험을 수행하는 일명 심리발생적 방법(psychogenetic method)에 의한 연구를 하였는데, 그 연구 결과와 역사 발달에 대한 비교분석을 바탕으로 하여, 개인의 심리발생과 역사발생의 메커니즘이 유사할 것이라는 가설 위에서 인류 지식의 최초 발생과정을 역사적으로 재구성하는 역사 비평적 방법(historical-critical method)을 사용하는 연구를 수행하였다. 수학의 분야를 예로 들어보면, 그는 '인류 최초의 수학적 지식은 어떻게 발생했을까?'의 문제를 아동의 심리발생에 대한 연구로 밝히려고 했던 것이다.

이런 점에서, Piaget는 지식의 기원과 발생을 밝히기 위해 심리학과 인식론을 연결하는 발생적 인식론(genetic epistemology) 분야를 개척했다고 할 수 있다. 다음 인용문은 그러한 Piaget 연구의 방향과 특성을 잘 보여준다.

> 발생적 인식론의 기본적인 가정은 지식의 논리적 합리적 조직화와 대응하는 심리적 형성과정에 일종의 평행성이 있다는 것이다. 우리의 연구 분야는 무엇이 될까? 물론 가장 생산적이고 분명한 연구 분야는 인간의 역사를 재구성하는 것이다 -역사 이전의 인간의 사고의 역사. 우리는 유감스럽게도 네안데르탈인이나 호모사피엔스의 심리에 대해 아는 것이 별로 없다. 이런 것에 대한 정보가 없기 때문에, 우리는 생물학자가 하듯이 개체발생에 관심을 기울이려 한다. 이러한 개념의 개체발생을 연구하는 것 이외의 대안이 없다. 아이들은 우리 주위에 널려있다. 우리는 논리적 지식, 수학적 지식, 물리학적 지식의 발달을 연구할 가장 좋은 기회를 가지고 있는 것이다(Piaget, 1970, pp.12-3).

한편, Piaget(1971)는 발생적 인식론의 연구를 통해 "찾을 수 있고 찾아야만 하는 것은 바로 (발달) 과정의 법칙이다(p.3)."고 말한다. 이것은 Piaget가 개인 지식의 심리발생과 인류 지식의 역사 발생의 과정을 설명할 수 있는 기제가 무엇인지를 규명하고자 했음을 뜻한다. 다시 말해, "역사적 순서와 심리발생의 순서 사이의 대응을 설정하려는 것이 아니라, 역사상의 한 시기에서 다음 시기로의 변환을 중재하는 메커니즘이 심리발생의 한 단계에서 다음 단계로의 변이를 중재하는 메커니즘에 유사하다는 것을 보이는 것이 Piaget의 주요한 관심이다(민세영, 2002, p.486)." 어떻게 본다면, Piaget의 발생적 인식론에서는 구조주의 패러다임에 기초해 지식 발생의 본질적

측면을 드러내면서 개인 지식의 심리발생과 인류 지식의 역사 발생의 기제가 동일하다는 가설 그 자체가 타당하다는 것을 보이고자 했다[2]고 평가할 수 있다.

그렇다면, Piaget는 개인 지식의 심리발생과 인류 지식의 역사 발생의 기제가 동일할 것이라는 가설을 어떻게 세울 수 있었을까? 이것은 지식의 구성 과정을 유기체의 적응으로 보는 생물학적 관점에 기초한다. 이와 관련해, Piaget는 다음과 같이 말한다.

> 지식은 적응이다. 따라서 일반적으로 삶과 지식의 관계를 파악하기 위해 유기체와 환경간의 관계를 정확히 진술하는 것이 요구된다. 삶은 복잡한 형태로의 계속적인 창조이며 환경에 대한 이러한 형태의 점진적인 균형에 의해 이루어진다. 따라서 지식을 생물학적 적응의 특수한 사례라 하는 것은, 지식이 본질적으로 조직적이고 그 기능은 유기체가 주위의 환경을 구성하듯이 우주를 구성하는 것을 말하는 것이다 (Piaget, 1936/1952, pp.3-4).

Piaget는, 개인과 인류 두 차원 모두에서 지식을 구성하는 과정은 유기체가 환경에 적응하는 과정이며 이 과정에서 유기체가 지닌 불변의 기능인 동화, 조절, 조직화 기능이 발현될 것이라 가정하였던 것이다. 이렇듯, Piaget가 인지의 기능은 근본적으로 적응이며 경험세계를 조직하는 것이라는 생물학적 관점의 바탕 위에서 지식의 본질(기원)과 그 발생의 규칙을 규명하는 발생적 인식론 연구를 수행했다는 점에서, Piaget의 발생적 인식론은 철학, 심리학, 생물학을 결합한 심적 고고학으로서의 학문적 특성을 지닌다고 하겠다(우정호, 2000).

Ⅲ. Piaget의 발생적 인식론에서 문제의식[3]

Piaget는 발생적 인식론을 수행하는 연구방법으로서 심리발생적 방법 또는 실험심리학적 방법을 사용했다. 일반적으로, 그 방법은 연구문제를 설정하는 단계, 그 문제를 규명해줄 수 있는 실험상황으로 번역하는 단계, 임상적 관찰과 질문을 수행하는 단계, 실험결과를 인식론적으로 해석하는 단계, 전체 연구결과를 보고하고 다음 실험연구를 준비하는 단계를 거친다고 할 수 있다(은은숙, 2011).

그런데 Piaget의 발생적 인식론의 연구의 정수를 보여주는 것이 수개념의 심리 발생과 관련된 실험, 그 중에서도 수학적 귀납법의 심리발생에 관한 실험이라 할 수 있다. 특히, Piaget의 수개념과 관련된 실험의 결과는 수학교육 현대화 운동 무렵에 수세기 활동의 약화와 1-1 대응에 기초한 기수 개념의 강조를 낳았다는 점에서 오늘날에는 당시의 교육적 해석에 있어 문제가 있었다는 의문이 제기되고 있는 상황이다.

이런 점에서, Piaget의 수학적 귀납법 실험의 각 단계에 대해 분석하는 작업은 Piaget의 발생적 인식론의 실험 결과가 갖는 교육적 의미를 밝히고 그 해석과 관련된 논쟁을 다루는 데에 도움이 될 것이다. 한편, 수학적 귀납법의 실리발생과

---

2) 지식의 발달 단계와 균형화에 대한 구조주의 이론을 만드는 것이 Piaget 발생적 인식론의 목적이라는 점에서, 그의 발생적 인식론에 따른 연구는, 설명이 아니라 기술이라는 비판을 종종 받음에도 불구하고, 논리실증주의 입장에서의 입증이 아니라 구조주이 패러다임에 기초한 '구조적 설명'(structural explanation)을 제시하는 것이라 평가할 수 있다(Bickhard, 1992; Pascual-Leone, 1980).

3) 이 연구에서는 박선용(2008) 일부를 환언(paraphrasing) 및 인용한 부분이 있다. 하지만 이 연구는 그 연구와 다음과 같은 점에서 차별화된다. (1) Piaget의 발생적 인식론의 목표에 초점을 맞추어, Inhelder와 Piaget(1963)의 실험결과에 대해 재해석하였다. (2) Piaget 발생적 인식론에서 심리발생과 역사발생의 관계에 대해, 기존의 박교식(1992)과 민세영(2002)이 제시한 해석을 보강하였다.

관련된 연구문제를 설정하는 단계의 이면을 드러내기 위해, 우선 그가 가졌던 문제의식을 살펴볼 필요가 있을 것이다.

Piaget 는 20세기 초부터 이어져 온 수학의 기초와 본질과 관련된 많은 논쟁이 논리주의와 직관주의 사이의 수 개념, 특히 수학적 귀납법의 본질이 무엇인지에 대한 것임을 알고 있었다. 이에, 그는 수학적 귀납법의 심리 발생을 규명하는 것이야말로 수 개념의 본질과 그 발생의 메커니즘을 설명할 수 있는 기회가 된다고 판단하였다. Waismann(1951, p.93)은 무한소수의 무한반복 가능성을 인식하지 못한 부족이 그것을 인식하게 되는 과정을 밝혀낸다면 수 개념과 수학적 귀납법의 본질에 대한 깊은 통찰을 얻게 될 것이라 주장하였다. 이에 대해, Piaget 는 그러한 문제는 결코 사변, 내성적 방법에 의해 해결될 수 없으며 반드시 심리학적 연구에 의해 규명되어야 한다고 생각하고, '심리학을 진지하게 받아들이는 것'을 발생적 인식론의 제 1원리로 규정하였다 (Piaget, 1970, p.9).

분명, Piaget 는 사변적 논의를 통해선 지식의 본질과 발생과정을 온전히 규명할 수 없다고 단언하였다. 하지만 그가 그러한 이론적 고찰이 무익한 공론에 지나지 않음을 주장했던 것은 아니다. 오히려 그는 다른 어떤 학자보다도 수학적 지식의 본질에 대한 철학적 논쟁의 핵심이 무엇인지를 철저히 파악하려고 노력하였다. 그러기에, 그의 문제의식은 명확하고 그의 발생적 인식론은 이론적으로 튼튼하였고, 오늘날까지 비판적 지지를 받으며 생명력을 유지할 수 있었던 것이다. 그렇다면, Piaget는 어떤 문제의식을 가지게 되었기 때문에 수 개념 발생의 모습, 특히 수학적 귀납법 추론이 아동에게서 어떻게 발생하는지를 밝히고자 했던 것일까?

Smith(2002, p.15)에 따르면, Piaget 는 Neuchâtel 에서의 학생 시절부터 Frege의 연구 업적을 접해 보았으며 Russell의 연구 성과를 명시적으로 사용할 수 있었다고 한다. 여기서, 그가 어떻게 '보존'을 수 개념 발생의 핵심적 준거로 추출해낼 수 있었는지에 대한 하나의 추측을 제기할 수 있다. Piaget 는 '대등'(as many equality)에 대한 수학적 추론이 '얼마나' (how many)를 아는 것만큼 또는 그 이상으로 중요하다는 '산술화와 논리화'의 핵심과 어떤 표현에 대한 지시체가 주체의 마음속에 확립되어야만 의미가 형성된다는 Frege의 기호학 이론을 연결하면서 대등 개념의 중요성을 인식하고 그것을 수 개념 발생의 잣대로 세웠던 것으로 보인다.

하지만 그는 논리주의의 설명을 그대로 수용하지는 않았다. 예를 들어, 그가 '대등은 가역성(reversibility)의 원천이 아니고 그것의 결과'라 해석하는 것은 논리주의와 차별화되는 그의 독특한 수학적 인식론을 보여준다(Piaget, 1941/1965, p. 259). 사실, Piaget 는 논리주의자들의 수 개념에 대해 동의하지 않았으며 그들이 수가 논리로 환원된다고 주장하면서도 논리(적 덧셈) 으로부터 수(치적 덧셈) 으로 전환되는 인식론적 메커니즘에 대해 침묵했다는 점에 오히려 다음과 같이 강한 비판을 제기하였다.

> 그들(Russell 과 Whitehead)의 해결책은 적절한 것으로 보이지 않는다. 수 개념의 기초의 문제, 인식론적인 문제는 여전히 남아 있는 것이다. 우리는 다른 해결책을 찾아야 한다. 심리학적 연구는 대안을 제공할 것으로 보인다(Piaget, 1970, pp.37-8).

실제로, Piaget는 논리주의에 대한 비판적 문제의식을 가지고 일련의 심리학적 실험을 통해 완성된 수학에서의 수의 출발은 '0' 이지만 수 개념의 개체 발생은 단위로서의 '1' 로부터 나온다는 것을 규명하고자 하였다. 그리고 "사람들이 대상 속에서 수를 찾으려고 할 때 수들의 계열은 1에

서 시작하지만 0을 최초의 수로 만들 수 있었던 것은 대상으로부터의 추상화를 포기해서이다 (Guedj, 1996, pp.106-7 재인용)."는 점을 심리 발생적으로 밝혀내고자 하였다. 즉, Piaget는 반영적 추상화를 통해 '0'을 최초의 수로 발명한 논리주의의 업적을 인정했지만 이것이 수 개념 발생의 본질적 측면은 아니라고 하였다.

잘 알려진 바와 같이, Piaget 는 수 개념 발생에 있어서 가역성의 인식에 따른 보존 개념이 결정적인 역할을 한다는 것을 보여주었다. 다시 말해, 어떤 불변적 특성에 대한 인식이 결여된 상태에서 수를 셀 경우 그러한 수세기는 무의미하며 1-1 대응도 필연성이 결여된 것일 수밖에 없다는 것을 심리학적으로 밝혀내었던 것이다. 이러한 측면은 기수와 순서수를 분리하고 기수 개념을 더 본질적인 것으로 보는 논리주의 수리철학자들의 수에 대한 관점과 맥락을 같이하는 것처럼 보인다. 하지만 Piaget 가 이러한 논리주의의 설명에 동의했던 것은 아니다. 논리주의에 따르면 기수는 어떤 표준 집합과 대등한 집합의 동치류이기 때문에 류의 포함관계로 그리고 순서수는 닮은 정렬집합의 순서형이기 때문에 비대칭적 추이관계로 환원된다고 할 수 있지만, Piaget 는 '이러한 분리가 수 개념 발생에 있어서 실제로 일어나며 기수적 측면이 수 개념 발생에 있어서 더 본질적인가?' 에 대해 의심하였다. 요컨대, 그의 수 개념에 대한 발생 인식론적 연구는 순서가 수의 본질이 아니고 대등의 개념이 순서와는 무관하다는 Russell (1919/1953, p.17)의 주장에 대한 강한 의문에서부터 시작했던 것이다.

하지만 Piaget가 수 개념 실험과 관련해 논리주의의 영향만을 받았던 것은 아니다. 사실, 그는 직관주의자 Poincaré 의 영향을 크게 받았다. Poincaré (1908/1952)는 직관을 '마음 안에서의 뜻밖의 조명'처럼 일어나는 지각 작용과 유사한 그 무엇으로 간주하였고 직관이 창조적 지식의 창출에 지대한 영향을 준다고 주장하였다. 따라서 Piaget가 형상적 측면보다는 조작적 측면이 사고의 본질을 더욱 잘 드러내는 것이라 생각했다는 점에서 Piaget와 Poincaré는 지식 발생에 대해서는 서로 다른 견해를 가진 것처럼 보인다. 하지만 Piaget 는 Poincaré 의 견해를 배척했던 것도 아니고, 두 사람의 관심사가 달랐던 것도 아니다. 예를 들어, Poincaré (1902/1952, p.6)는 "이러한 완전한 엄밀함은 모든 정신에 자연스럽게 스며들어야만 하는 것처럼 보이는데, 그러한 습관을 들이는 데 필요한 준비는 왜 그렇게 오래 걸리는 것일까?"라는 질문을 제기하며 이것은 연구할 만한 충분한 가치가 있는 논리적이고 심리적인 문제라고 주장하였는데, 이것이 바로 Piaget 가 일생을 두고 연구한 분야였다. 그리고 Piaget 는 어떤 개념에 대한 직관을 조정된 행동에 의해 조작화하는 메커니즘에 관심을 기울였는데 이것은 그의 연구에 있어 Poincaré 의 영향력이 오히려 그만큼 컸음을 보여주는 것이다 (Smith, 2002, p.21).

무엇보다, Piaget(1937/1954, p.188)는 객관적 경험(objective experience)에 의해 군 구조를 획득하게 되는 것과 같이 무의식적 구조가 의식화된다는 Poincaré 의 견해를 발전적으로 수용하였다. 그런데 객관적 경험이라는 아이디어는 Piaget의 인식론에서 결정적인 역할을 하게 된다. 다시 말해, 인식하는 주체의 자율성을 강조하지만 자의적인 구성을 절대 용인하지 않는 Poincaré 의 통찰이 Piaget의 인식론에 큰 영향을 미쳤다고 볼 수 있다. 이러한 점을 더욱 잘 드러내는 것이 바로 Piaget 가 제기한 논리-수학적 경험이다. 논리-수학적 경험이란 각 심리적 주체가 개별적으로 겪는 현상이 아니라 모든 인식론적 주체가 동일한 활동을 할 때 겪는 동일한 경험을 말하는 것인데, Piaget가 인식론적 주체와 심리적 주체를 구별했다는 것은 수학이 인간 정신의 구성물이면

서도 객관성과 보편성을 갖는다는 점을 규명하려는 그의 이상을 드러내는 것이기도 하다. 요컨대, "Piaget의 주장은 주관에 의한 자의적인 구성을 용인하지 않으며 매우 객관적이고 생명체의 본질이라고도 말할 수 있는 행동의 조정에 의한 구성, 즉 보편성의 실현을 주장하는 일종의 Platonism인 것이다(우정호, 2000, p.245)."

이러한 인식론적 배경 속에서, Piaget(1998, p.213)는 "학습자는 자유 계약자이지만 자유 계약서를 가져서는 안 된다."고 말하며, 인식론적 자유는 구성중인 지식에 내재해 있는 규범적 제한에 종속되는 지적 자유임을 제기하였다. 물론, '객관적 경험'이라는 아이디어를 서로 공유했기 때문에 이러한 '지적 자유'에 대한 Piaget 의 생각 역시 Poincaré 의 그것과 유사하였다. 다음 인용문은 그 점을 분명히 보여준다고 할 수 있다.

> 미리 말해 두지만 마음의 명령에 복종하는 것이 우리의 과학이고, 그 명령 없이 우리의 과학은 불가능한 것이다. 그러나 자연은 여기에 복종하지 않는다. 그러면 이 명령은 아예 자의적인 것인가? 그렇진 않다. 만일 자의적인 것이라면 결코 그 명령은 결과를 내놓지 못했을 것이다. 경험은 우리에게 자유선택을 허용하고 있지만 가장 편리한 길을 간파하는 힘을 우리에게 주어 그 선택을 유도하여 준다. 그렇기 때문에 이러한 명령은 귀족들에게 의견을 묻고 결정을 내리는 절대군주의 그것과 같은 것이다(Poincaré, 1902/1952, xxiii).

하지만 수학적 지식의 구성의 메커니즘을 무의식적 활동과 의식적 활동의 교대 작용으로 또는 수학적 직관에 의한 유용한 조합의 선택으로 설명하는 것은 순전히 가설에 머물 수밖에 없다(Poincaré, 1908/1952, p.63). 이에, Piaget 는 지식 구성의 경로를 과학적으로 규명할 수 있도록 행동과 개념 사이의 간극(décalage)에 대한 새로운 가설을 세운다. 즉, 그는 지능의 조직화 기능은 생물학적 기능을 확장한 것이란 신념을 기초로 하여 지식의 발달이 행동에 기원을 두고 있다는 가설을 도입한다. 이 때, 행동 안에 지식 발생의 단초가 있다는 이러한 인식론적 가설을 수학적 귀납법 추론에 적용하자면, '반복에 의한 추론은 행동으로 일어날 것'이라 예상할 수 있다. Piaget가 했던 예측이 바로 이것인데, 그는 '원초적 직관'이 행동으로 발생하는 과정과 그 메커니즘에 대해 밝히고자 하였던 것이다. 요컨대, '뜻밖의 조명'으로서의 직관은 지식 발생에 대한 진정한 설명이 아니라 은유에 불과한 것이기 때문에 Piaget는 그 직관을 인식론적 도구로 간주하진 않았지만 그것을 발생적 측면에서 재조명하고자 했던 것이다(Kitcher, 1983, p.50).

그렇다고 해서, 수 개념의 구성과 관련해 Piaget가 직관주의자의 관점을 전적으로 수용했던 것도 아니다. 그는 수 개념은 셈수에 기초하고 계열화 조작에 의해서만 구성된 것이 아니라 분류와 계열화 조작의 종합으로 구성된다고 간주하였다. 물론, 그는 수를 논리로 환원시킬 수 있다는 논리주의적 관점도 받아들이지 않았다. 즉, 수가 논리로 환원될 수 있다 하더라도 지식 구성의 인식론적 차원에서 기수적 측면이 류의 포함관계로 순서수적 측면이 비대칭적 추이관계로 각각 분리될 순 없다고 주장하였다. 왜냐하면 그처럼 기수와 순서수로 구분하는 것은 자연수를 단일 개념으로 정의하지 못하는 것일 뿐만 아니라 수를 개별적으로 정의하는 결과가 되어 1로부터 차례대로 생성되는 자연수열의 기본적인 특성을 소홀히 다루는 것이라고 판단했기 때문이다. 그에 따르면, 일대일 대응에 의해 수 개념을 파악하는 경우 비개성적인 집합을 대응시키기 위해서는 원소의 성질을 사상해야 하는데 이 때 각 집합의 원소를 구별 가능하게 하는 것은 공간적, 시간적 순서라는 것이다. 즉, Piaget는 일대일 대응 관계와 순서 관계를 고려하여

동일한 것처럼 보이는 원소들을 구별할 수 있어야만 수개념이 형성되는 것으로 생각하였다 (Piaget, 1966).

그렇다면, Piaget는 수 개념의 본질 및 발생의 메커니즘과 관련해 논리주의와 직관주의의 입장과 차별화되는 자신의 입장이 타당하다는 것을 어떻게 보이려고 했을까? 즉, Piaget는 수 개념 발생의 종합적 측면을 어떻게 드러내려고 했을까? 이러한 의문은 Piaget가 수 개념 실험을 기획하게 된 이면의 문제의식을 드러내는 것이라 할 수 있는데, 이에 대해, Piaget는 심리발생적 방법에 의한 실험에 의해 수학적 귀납법과 관련된 원초적 직관이 행동으로 발현되는 모습 속에서 수 개념의 종합적 측면에 대한 전조를 보이고 수개념 심리발생의 메커니즘을 밝히고자 하였다.

Ⅳ. Piaget의 발생적 인식론에서 연구문제와 실험

이러한 인식론적 배경과 문제의식을 가지고, Inhelder와 Piaget(1963)는 심리발생적 방법에 의한 실험에 의해 수 개념 형성을 위한 중재적 행동과 그 밑바닥에 흐르는 추론이 재귀적 추론이라는 것을 심리발생적 측면에서 규명하면서, 수 개념 또는 그 독특한 추론이 논리로 환원되는지의 여부를 검토하고 그 추론의 발생 메커니즘을 설명하고자 하였다. 즉, 그들은 '재귀적 추론이 수 개념 구성의 초기부터 수의 본질과 연관이 있는 것인지 아니면 훨씬 이후에나 고등적인 형식의 추론을 이루게 되는 것인지(Ibid, pp.48-9)'를 알아보기 위해, 보존 조작이 출현하기 전에 발생하게 되는 아동의 수개념과 관련된 추론형태가 '행동 반복에 대한 작용원리를 토대로 하고, 수에 대한 조작을 구체적으로 나타내는 것은 아니지만 이 원리가 기본적 재귀의 형태가 된다는 가설을 세우고(Ibid, p.48)' 수 개념의 본질과 그 발생의 메커니즘과 관련해 다음의 두 문제를 탐색하고자 하였다.

> (1) 수와 집합에 있어,《잘 구조화 된》 수와 집합에 대하여 특별한 추론이 관여하는 것일까?? 아니면 B. Russell이 주장한대로 아주 일반적인 선천적 추론성과 관련이 있는가?
> (2) 특별한 수적 추론과 관련이 있다는 가설에서, 다음에 대하여 생각해 볼 수 있다. 수열이 0부터 무한에 이르는 것으로 구성되는 것이며, 재귀가 이렇게 구성된 수열을 대상으로 하는 것이라면, 이것은 <<어떤>>으로부터 무한의 개념을 포함한 <<모든>>을 조작하는 것이다. 그렇다면 재귀를 후기에 나타나는 추론 형태와 관련지을 수 있는 것일까? 아니면 반대로, 재귀라는 것이 수열의 구성적 원리로써 수를 구성하는 처음단계부터 작용하는 것일까? (Ibid, p.49)

첫 번째 연구문제는 '수 개념의 발생은 논리의 출현으로 설명 가능한 것인가? 아니면, 그 발생 과정에 특별한 (재귀적) 추론이 관여하는 것일까?'를 다루는 것이고, 두 번째 연구문제는 '만약 수 개념의 발생 과정에 있어 재귀적 추론이 관여한다면, 재귀적 추론이 수 개념 발생의 어떤 단계에서 (어떻게) 관여하게 되는 것인가?'[4]를 다룬다고 할 수 있다. 그리고 첫 번째 연구문제에 대해 Inhelder와 Piaget는 보존 개념과 같은 논리가 출현하기 이전의 전-조작기 아동들이 어떤 행동으로부터 유발되는 재귀적 추론을 사용

4) 표면적으로, 두 번째 연구문제는 수 개념의 발생과 관련해 재귀적 추론이 발현되는 시기만을 다루는 것처럼 보인다. 하지만 Piaget의 발생적 인식론 전체에서는 어떤 (준) 조작이 발생하는 과정과 그 메커니즘에 대해 항상 관심을 기울이고 있으며, 실제로 Inhelder와 Piaget(1963)에서는 그것에 대해 상세하게 기술하고 있다. 한편, 두 번째 연구문제는 '필연성'과 관련된 양상적 사고의 출현과도 일정부분 관련된다고 할 수 있다.

하는지의 여부를 통해 판단하고자 하였고, 두 번째 연구문제에 대해서는 그 아동들이 어떤 발달의 경로를 거치면서 재귀적 추론을 사용하는지를 통해 알아보고자 하였다.

Inhelder와 Piaget는 아동의 수학적 귀납법 추론을 탐구하기 위해 다음의 5종류의 실험을 설계하고 수행하였다. 실험 Ⅰ은 Ⅰ-(A) 대등한 두 집합을 동일한 두 컵에 넣은 이후에 1대1 대응을 반복하여 새로운 원소를 첨가할 경우 두 집합이 보이지 않을 때도 대등함이 유지된다는 것을 예상하고 일반화하는 과제와 Ⅰ-(B) 다른 형태의 두 컵에 대해 마찬가지의 예상과 일반화를 하도록 요구하는 과제로 구성되었다. 실험 Ⅱ는 Ⅱ-(A) 대등하지 않은 두 집합을 두 컵에 넣은 후 1대1 대응을 반복하여 새로운 원소를 첨가할 경우 두 집합이 보이지 않을 때도 비-대등성이 유지된다는 것을 예상하고 일반화하는 과제와 Ⅱ-(B) 연속적으로 2대1 대응을 수행할 경우 작은 집합과 큰 집합 관계를 파악하는 과제로 이루어져있다. 실험 Ⅲ에서는 1대1 대응에 의해 동등하게 일부를 제거할 때 나머지의 대등과 비대등을 예상하고 일반화하는 과제를, 실험 Ⅳ에서는 두 컵에 연속양인 액체를 부을 때 그 더해지는 양을 변화시키면서 1대1 대응을 반복할 때 대등함이 유지되는 것을 예상하고 일반화하는 과제를, 실험 Ⅴ에서는 어떤 두 구간을 막대를 이용하여 채우게 했을 때 총 길이와 그 안의 막대수를 구별하도록 하는 과제를 실시하였다.

그런데 이 중에서 실험 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ는 '아동들이 내포와 외연의 구별 부족으로 문제를 전체적으로 파악하지 못한다는 것(Ibid, p.107)'을 보여주기 위한 것이다. 즉, 이 4종류의 실험은 실험 Ⅰ에서 '아동들이 1대1 대응에 의해 두 류가 대등할 것임을 확신하는 조기 추론의 성격을 확립하기 위한 일종의 통제 상황(Ibid, p.106)', 보존과 관련된 여러 조작이 형성되지 않았음을 보이는 부차적 실험이다. 이런 점에서, Inhelder와 Piaget는 연구문제를 규명함에 있어서 실험 Ⅰ의 아동 추론을 해석하는 일에 가장 중점을 두었다.

Inhelder와 Piaget 연구의 초점이 되는 실험 Ⅰ에서는 각 아동에게 색깔이 다른 두 구슬 더미와 두 개의 비어 있는 투명한 잔을 보여주고 그들에게 각 구슬 더미에서 한 개씩을 꺼내어 두 잔에 각각 넣을 것을 요구한다. 그리고 실험을 변형하여, 한 컵에는 구슬더미를 넣고 다른 컵에는 성냥, 조약돌 더미를 넣는 상황을 제시하기도 한다. 그와 같은 행동을 반복하게 한 후에는, 다음의 세 가지 질문을 아동에게 하였다: (a) 몇 번의 반복 후에 아동들에게 잔에 있는 두 개의 집합이 같은지에 대해 물어보고, (b) 좀 더 반복한 후에 두 컵을 가리고서 두 컵에 있는 집합이 같은지에 대해 답하게 하고, (c) 반복을 더 하고서, 오후 내내 또는 오랫동안 이러한 반복이 있을 경우에 두 컵에 있는 집합이 같을지에 대해 예상해 보게 하였다.

이 때, 동일한 형태의 두 컵을 가지고 수행한 실험 Ⅰ-(A)에서는 "어떻게 아니?", "구슬을 더 이상 볼 수 없는 데 어떻게 알 수 있니?", "많은 구슬이 있다는 것은 결과에 아무런 영향을 주지 않니?"와 같은 물음을 던지고, 모양이 다른 두 컵을 가지고 수행한 실험 Ⅰ-(B)에서는 "높이가 더 올라가는데도 두 집합이 같다는 것을 어떻게 아니?", "그것이 이것보다 더 많다는 느낌을 갖게 하니?"와 같은 질문을 함으로써 아동들이 대답한 것에 대한 이유도 함께 알아보았다.

<표 1> 수학적 귀납법 실험 Ⅰ의 결과

나이/수준	실험 Ⅰ에 대한 66명의 반응		
	수준 A	수준 B	수준 C
5세	5%	35%	60%
6세	0%	7%	93%
7세	0%	9%	91%

<표 2> 보존 실험결과

나이/수준	류 보존 실험에 대한 90명의 반응		
	수준 A	수준 B	수준 C
5세	38%	40%	22%
6세	6%	40%	54%
7세	0%	4%	96%

한편, Inhelder 와 Piaget는 66명의 5-7 세 학생들을 대상으로 한 수학적 귀납법 실험 I 의 결과를 자신들의 보존실험의 결과와 비교하여 위의 두 표[5]로 제시하면서, 실험 I 에서 보인 아동의 반응수준을 3가지 수준으로 나누어 인식론적 차원에서 그 각각의 수준과 수준 간의 상승에 대해 설명하고자 하였다. 두 표의 결과에서 두드러지게 나타나는 점은 보존 조작을 획득하지 못한 5, 6세의 아동들이 실험 I 의 과제에 대해 매우 뛰어난 수행능력을 보여주었다는 사항일 것이다. 이러한 결과는 첫 번째 연구문제에 대해 '논리가 발현되기 전에 아동은 행동 차원에서 이미 재귀적 추론을 사용한다.'는 답을 해준다. 여기서, Inhelder 와 Piaget는 그 결과를 인식론적으로 더 정교하게 해석하고 두 번째 연구문제에 답하기 위해, 아동들의 반응을 질적 기준으로 분류하여 세 가지 수준으로 나누었다[6].

수준 A는 아동의 반응이 안정되지 못한 상태로서 처음의 옳은 추론도 그렇지 못한 추론으로 벗어나게 되는 시기인데, 예를 들어, 컵이 보일 때에는 "같아요. 왜냐하면 내가 항상 그렇게 넣었으니까요."라는 반응을 보이다가도 컵이 보이지 않을 때는 "구슬을 더 이상 볼 수 없으니까, 아무 말도 할 수 없어요."라는 대답을 하는 수준이다. 수준 B는 눈에 보이지 않더라도 옳은 판단을 할 수 있지만 자신의 판단에 대해 확신과 의심이 공존하는 시기이고, 수준 C는 확신을 가지고 예견적 일반화를 수행하는 추론의 단계를 각각 나타낸다. 세 수준을 구분함에 있어, 아동이 사용하는 양상언어(modal language)을 사용하는 방식이 중요한 분류기준이 되는데, 예를 들어, 어떤 아동이 반복어 '항상'을 완성된 행위를 단순히 요약하는데 사용했다면 수준 A와 B에 있는 것으로, 그 반복어를 사용할 때 확신을 가지면서 예견하고 일반화하는 면이 있다면 수준 C에 있는 것으로 판단하였다.

이처럼 실험 I 의 반응을 세 수준으로 분류하여 분석하면서, Inhelder 와 Piaget는 "과도기적 사례들은 단순 요약적인 '항상'으로부터 반복적이고 재귀적인 '항상'으로 이행하는 모습을 보여주는데 이러한 예가 일부 특별한 아동의 것은 아니다(Ibid, p.65)."고 주장하고 그러한 수준상승을 가능하게 하는 인식론적 메커니즘을 제시하고자 하였다. 예를 들어, 아래 Stion 아동(4세 11개월 →5세 9개월)의 경우처럼 시각에 기초해 판단하는 수준 A로부터, 자신의 판단에 대해 확실성을 의심하는 수준 B를 거쳐, 그 확실성을 수용하고 인정하는 수준 C 로 상승하는 아동의 빈도가 높은데, Inhelder 와 Piaget는 이러한 현상을 인식론적 차원에서 설명하였던 것이다. 다음의 두 대화록은 실험 I 에서 Stion(4세 11개월)이 수준 A에 머물고 있는 모습과 수준 A로부터 수준 B로 나아가는 모습을 각각 보여준다.

<수학적 귀납법 실험 I -(A)에서 Stion(4세 11개월)의 반응 : 수준 A>

질문자 : 만약 각각에 하나의 구슬을 10번 연달아 넣는다면 같은 양이 있을까? 아니면 알 수 없는 것일까?

Stion : 잘 알 수 없을 걸요 너무 많이 계속하지 말아야 해요. 그렇지 않으면 잘 알 수 없어요.

5) 표의 출처 : Inhelder & Piaget, 1963, p.68

6) 보존실험에서는 가역성의 유무를 기준으로 비가역적 수준 A, 과도기 B, 가역적 수준 C로 분류한다.

질문자 : (10개의 구슬까지 계속 넣는다.) 양 쪽에 같은 양이 있니?
Stion : 네.
질문자 : 어떻게 아니?
Stion : 보았으니까요.
질문자 : 다른 방법으로 알 수 있을까?
Stion : 아니요. 그렇지 않다고 생각해요.
질문자 : 우리가 낮 동안 계속한다면, 그러면 알 수 있을까?
Stion : 아니요. 왜냐하면 너무 많아질 것이기 때문이에요.
질문자 : (두 컵을 감추고서, 각각 20~25개씩 구슬을 넣는 수행을 지속하였다.) 두 컵에 같은 구슬이 들어 있니?
Stion : 알 수 없어요.
질문자 : 왜 그렇지?
Stion : 왜냐하면 볼 수 없으니까요
질문자 : 한번 보렴. (감춰졌던 것을 다시 보이게 한다.)
Stion : 같네요.
질문자 : 어떻게 알았니?
Stion : 두 부분이 서로 같다는 것을 보았으니까요.

<수학적 귀납법 실험 Ⅰ-(B)에서 Stion(4세 11개월)의 반응: 수준 A →수준 B>

질문자 : 왜?
Stion : 우리가 볼 수 없는 부분이 있으니까요. (6번째까지 계속한다.)
질문자 : 같니?
Stion : 네.
질문자 : 어떻게 알지?
Stion : 여전히 볼 수 있으니까요
질문자 : (계속한다.) 아직도 같은 것이니?
Stion : 지금 감춰져 있어요. 아! 같아요. 왜냐면 알 수 있으니까요. 왜냐하면 각각에 하나씩 넣었으니까요.
질문자 : 하루 종일 계속해도, 여전히 같을까?
Stion : 아니요. 알 수 없어요. (계속한다.) 맞아요. 그래도 알 수 있어요. 각각에 하나씩 넣었으니까요. 셀 수는 없지만, 그래도 알 수 있어요. (중략)
질문자 : (실험자는 계속한다.) 그리고 이제 여기(가는 병)에 더 많지?
Stion : 그래도 항상 각 병에 하나를 넣었으니까 여전히 같아요.
질문자 : 그러면 내가 여러 번 반복하면?
Stion : 알 수 없어요. 그것은 너무 많아지니까요(Inhelder & Piaget, 1963, pp.62-3).

그런데 이전 실험에 대한 망각을 위해 10개월이 지난 이후 5세 9개월이 된 Stion을 대상으로 한 실험을 했을 때, 그 아동은 수 보존 개념을 획득하지 않고도 '일단 알게 된다면, 항상 알 수 있다.'는 재귀적 추론과 관련된 반응을 보이기 시작한다. 이러한 반응은 90명의 5세 아동 중 22%, 6세 아동 중 54%만 수 보존 개념을 획득하지만 수학적 귀납법 실험에 참여한 66명의 5세 아동 중 60%, 6세 아동 중 93%나 재귀적인 추론을 한다는 것의 전형적 모습을 보여준다. 다음의 두 대화록은 실험 Ⅰ에서 Stion(5세 9개월)이 수준 B로부터 수준 C로 나아가는 모습과 수준 C에 정착된 모습을 각각 보여준다.

<수학적 귀납법 실험 Ⅰ-(A)에서 Stion(5세 9개월)의 반응: 수준 B →수준 C>

질문자 : 여기에 같은 것들이 있어. 8번째 대응 후, 두 컵을 감추었다.)
Stion : 감출 필요 없어요, 저 알아요! 내가 한 번에 두 개씩 가졌었다면(1개를 갖는 것과 비교하여) 두 가지는 달랐을 것이지만, 저는 절대로 한 손에 하나 이상을 잡지 않았어요.
질문자 : 그러면 우리가 오후 내내, 아주 오랫동안 계속하면 어떻게 될까?
Stion : 그렇게 하려면 정말 큰 컵이 필요해요, 그렇지만 그렇게 큰 컵은 존재하지 않아요.
질문자 : 하지만 우리가 상상해 볼 수는 있잖니?
Stion : 우리는 그 안에 얼마나 있는지는 더 이상 알 수 없어요
질문자 : 맞아, 하지만 같은 것일지 아니면 다른 것일지는 알 수 있지 않을까?

Stion : 아, 맞아요! : 한 번 알게 되면, 우리는 항상 알 수 있어요!

<수학적 귀납법 실험 Ⅰ-(B)에서 Stion(5세 9개월)의 반응: 수준 C>

Stion : 더 할 필요는 없어요. 알아요. 한 컵이 다른 컵보다 더 많을 일은 절대로 없어요.

질문자 : (우리는 컵들을 감추고 계속한 후에 다시 보이게 하였다.)

Stion : 이쪽(가는 컵)이 훨씬 더 높아요. (가는 컵)

질문자 : 그러면 두 컵 안에 같은 양의 구슬이 있다는 것을 알 수 있을까?

Stion : 네 알아요, 우리는 항상 같게 두 컵에 넣었으니까요

질문자 : 그런데 이게 더 높이가 높잖아?

Stion : 그건 가는 컵이 더 많은 것 같은 느낌을 주는 것이에요. 하지만 그래도 두 개는 같은 것이에요. 하나의 컵에 항상 하나를 넣었다는 것을 알고 있어요(Inhelder & Piaget, 1963, pp.66-7).

양적인 지표와 질적인 자료 모두에서 어떤 특별한 추론이 아동기의 초기에 발생하게 된다는 점은 분명해 보인다. 그렇다면, 아동들은 행동의 결과를 어떻게 단순 요약하는 것으로부터 재귀적 반복으로 구성해나갈 수 있었던 것일까? Inhelder 와 Piaget 는 이러한 상승이 아동이 반복적 행동의 결과뿐만 아니라 그 행동의 조작적 역동성을 감지했기 때문에 가능하다고 간주하였다(Ibid, pp.64-6). 다시 말해, 그들은 "반복적 행동을 통한 장점이 근원적 원형(type assez primitiz)과 준-재귀적(quasi-recurrentiel) 발달 과정 사이의 중재자로 개입된다(Ibid, p.48)."고 주장하였다.

한편, 이러한 해석은 가역성을 전제로 한 보존 개념이 형성되지 않은 전-조작기의 아동들의 추론발달 과정 속에서 일종의 반영적 추상화가 이루어지고 있음을 주장하는 것이다. 이와 관련해, Inhelder 와 Piaget 는, 아동의 재귀적 추론은 가역적이지 않기 때문에 완전한 조작은 아니지만 반복적 행동에 대한 일반적 조정을 통해 획득된 내적 행동이기 때문에 '전달(transmission)' 준-조작이라 지칭하였다.

> 이러한 여러 가지 사항들을 정당화하기 위해, 우선 단어를 명확히 하며 《보존》과 《전달》이 의미하는 바를 구별하는 것이 유익할 것이다. (중략) 보존에 의해 총체 A가 특성화되고 총체 A가 새로운 총체 B로 변형되어도 그 특성이 변화되지 않을 때, 어떤 특성의 보존과 대비해서 특성의 '전달'이 있다고 말할 수 있다. 그 경우에, 내부적 수정에 대해서 뿐만 아니라 새로운 대상 또는 모임을 구성하는 것에 대해서도 불변성이 유지되는 것이다. 그러므로 우리는 어떤 대상이 외부의 영향으로부터 수정되는 인과적 '전달' 또는 어떤 성질 ψ가 n에서부터 $n+1$로 이동하는 재귀적 '전달'에 대해 이야기할 것이다 (Inhelder & Piaget, 1963, pp.107-8).

실험에서 보인 아동의 반응을 <두 개의 대등한 양에 대해서 어떤 대등한 양을 더하거나 빼는 경우 그 양의 대등함이 유지된다.>는 Euclid 크기 공리에 가까운 것이라고 해석할 수 있다. 그런데 Inhelder와 Piaget는 그러한 크기 공리의 사용은 기본적으로 양과 집합의 보존을 전제로 하기 때문에 아동이 사용한 '전달'에 대해 그 공리에 기인한 것으로 판단할 수 없다고 보았다 (Ibid, pp.108-10). 왜냐하면 크기의 공리는 '$A = B$ 이면 $A_n = B_n$'와 같은 상징적 조작이라 할 수 있고 이는 '어떤 수치적 대등이 그 수가 무엇이든지 대응하는 대등을 함의한다.'는 '보존' 조작을 전제로 할 수밖에 없는데 실험에 참여한 아동들은 아직 보존 조작을 형성하지 못했기 때문이다.

여기서, "피험자들이 요점 반복적인 '항상'에서 예견적이며 재귀적인 '항상'으로 이동하는 때에는 확실히 전달이 있으며 이는 보존이 구성되

기 전에 이루어지는 것이다(p.112).”는 연구결과는 인식론적으로 어떤 의미를 지니는 것일까? 연구결과 그 자체는 전-조작기의 아동들이 수의 재귀적 성질을 어떤 구체적 대상에 대한 반복적 행동과 그에 대한 일반적 조정을 통해 획득하게 되는 심리발생의 모습을 보여주는 데, 그 결과는 연구문제와 관련해서는 (1) 수학적 귀납법 추론이 행동적 차원에서 발생하는 원초적인 추론이라는 것, 즉 수학적 귀납법 추론은 논리로 환원되지 않는다는 것, (2) 원초적인 수준의 재귀적 추론 역시 행동에 대한 일반적 조정 작용을 통해 발생한다는 것을 나타낸다. 그렇다면, 이러한 재귀적 추론의 발생의 모습을 교육적으로 어떻게 해석해야 하는 것일까?

Ⅴ. Piaget의 실험 결과의 교육적 해석

Inhelder와 Piaget(1963)의 수학적 귀납법 실험은 수 개념 발생의 전체 맥락 속에서 어떤 측면을 규명한 것일까? 우선, 그들의 연구에서는 “어떤 면에서 실질적이며 제 1원인이라고도 할 수 있는 수적인 통합의 전조를 발견할 수 있다(p.115).”는 점이 중요하다. 즉, 기수와 순서수의 완전한 통합은 7-8세가량 되어야만 안정적 형태가 되고 그 이상의 연령이 되어서 비로소 완성된 형태가 될 수 있지만 그들의 연구는 “아동이 반복적인 행동과 그 행동으로 인한 결과들의 결합을 수용할 때 이 자체로서 어떤 통합이 구성된다(Ibid, p.115).”는 점을 보여준다고 할 수 있다. 사실, 재귀적 추론이 보존 조작 이전에 출현한다는 것은 그 추론양식이 ‘수 그 자체의 성격과 관련이 있음(Ibid, p.116)’과 ‘수치적 실재에 딱 들어맞는 독특한 추론체계(Ibid, p.117)’임을 나타내는 것이다.

사실, 이러한 점에 주목해 Inhelder와 Piaget는 재귀적 추론을 ‘특별한 추론’이라 명명했다고 할 수 있다. 그들에 따르면, 수 개념은 류와 관계의 논리로 이루어진 군성체들의 종합으로 구성되는 것이며 다시 그러한 각각의 군성체로 환원될 수 없는 독특성이 있다. 이 경우, 이러한 종합의 특수성은 그에 상응하는 어떤 특별한 추론을 요구한다고 할 수 있는데 그들은 “수 종합이 안정적으로 이루어지기 전에 생기는 초기 추론들의 반복적 특성을 증명함으로써 반복에 의한 추론이 수 구성의 시작부터 작용하는 증거(Ibid, p.50)”를 보였다고 할 수 있다.

요컨대, Inhelder와 Piaget는 1963년의 연구를 통해 “단지 한번으로 그 재귀적 추론에 의해 자연수에 있어서 최종적 수열의 구성을 완결하게 되는 것인지 아니면 그 추론이 수 개념의 중간 또는 심지어 초기 구성에조차 중재적 역할을 하였는지를 검토(Ibid, p.50)”하였던 것이다. 수학적 귀납법 실험은 “수의 배열에 대한 이해가 정립되고 난 이후에야 재귀적 추론이 조직화되는 것이 아니라, 오히려 그 추론이 수 종합에 관여하게 된다(Ibid, p.50).”는 것을 보임으로써 ‘재귀적 추론’이 수 개념 형성에 있어서 중핵적인 역할을 담당함을 보여주었다고 할 수 있다.

그런데 이러한 Piaget의 실험 결과는 새 수학 당시에 교육적으로 적절하게 해석되고 적용되지 않았다. Piaget(1998)의 소회와 같이, ‘현대수학을 낙후된 방식으로 가르치는 통탄할 만한 일’이 벌어졌다고 할 수 있다. 예를 들어, 수 개념에 대한 교육과 관련해서는 ‘새 수학’ 운동 당시에 현대수학을 조기에 도입하고자 하는 의도에 의해 Piaget의 실험 결과를 수세기 활동보다 집합 사이의 1-1 대응에 기초한 기수개념을 강조해야 하는 것으로 교육적으로 해석하고 그에 입각해 수학교육을 하였다고 할 수 있다. 당시의 교육방식은 논리-수학적 경험을 야기하는 활동, 즉 어

떤 일련의 행동에 대한 일반적 조정을 경험하게 하는 방식이 아니라 일명 EIS이론에 의해 완성된 수학을 하향 초등화하여 표현해 주는 방식, 즉 학생들의 발달수준에 맞게 번역 제시해주는 교수-학습이 주로 이루어졌는데, 그러한 방식은 그들의 활동과 그 결과에 대한 반성에 의한 추상화보다는 제시된 표현 자체로부터의 추상화, 즉 경험적 추상화를 추구하는 '낙후된 방식'에 가깝다고 할 수 있다.

그렇다면, Piaget의 심리학적 실험의 연구결과가 교육적으로 잘못 해석되고 적용되었던 원인은 어디에 있었던 것일까? 이것은, 단순히 '수 보존' 실험에만 주목하고 '수학적 귀납법' 실험에는 주목하지 않았기 때문에 발생했던 것이 아니라, Piaget의 발생적 인식론 전체의 목표에 주목하지 못한 것과 깊은 관련이 있다. '새 수학' 운동 당시의 수학계 및 수학교육계는, Piaget의 실험의 연구결과는 심리발생과 수학발생의 순서가 역 평행의 관계를 보여주고 수학교육은 아동의 심리발생의 순서를 존중해야 하므로, 그 결과에 입각한 수학교육의 순서는 역사발생의 순서와는 반대로 수학의 논리적 순서를 따라야 한다고 보았다. 이러한 모습은 Piaget의 발생적 인식론에서의 심리학적 실험의 연구결과의 '내용'과 '형식' 중 그 내용에만 주의를 기울였다는 것을 보여준다(민세영, 2002).

하지만 Piaget의 발생적 인식론에서는 아동의 심리에서 '무엇이 발생하느냐?'보다는 '그 무엇이 어떻게 발생하느냐?'에 관심을 기울였다. 그렇다면, 이러한 Piaget의 발생적 인식론의 주요 관심을 고려할 때 그의 심리학적 실험의 결과를 교육적으로 어떻게 해석해야 하는 것일까? 예를 들어, 수학적 귀납법과 관련한 심리학적 실험결과는 수학적 귀납법을 조기에 도입하여 가르치는 것이 가능하다는 것을 시사해주는 것이라 보면 될까? 이러한 의문과 관련해, 우리는 행동과 의식화의 국면을 명확히 구별할 필요가 있다. 일반적으로, 전-조작기의 심리발생은 무의식적 차원에서 이루어지는 행동과 조작의 발달을 보여준다. 즉, "개인행동의 대부분은 자신의 인지적 활동에서 문제에 대한 답을 얻는 과정에서 행동이 지속되는 무의식적 상태로 남아있다. (그런데) 의식하게 되는 것은 행동 이후에 가능하며, 의식화에 대한 필요가 없으면 일어나지 않는다(민세영, 2002, p.102)."

따라서 Inhelder 와 Piaget (1963)의 실험결과는 수학적 귀납법에 대한 조기교육 가능성을 시사해주는 것이 아니라 오히려 그 추론이 매우 원초적이기 때문에 그것을 의식화하는 것이 지극히 어렵다는 것을 나타낸다고 할 수 있다. 직관적으로 자명한 것이 역설적으로 그만큼 의식하기가 힘든 것이다(Fischbein, 1987). 결론적으로, 그들의 연구결과는 수학적 귀납법 추론은 전체 교육과정을 통해 의식화하고 고양해야 하는 추론이라는 것을 시사해준다고 할 수 있다(Smith, 2002).

여기서, 지식의 심리발생과 역사발생의 메커니즘이 유사하다는 주장이 정확히 무엇을 뜻하고, 그러한 유사성이 어떤 면에서 의식화 교육을 지지한다는 것인지에 대해 보다 구체적으로 다룰 필요가 있을 것이다.

우선, 지식의 심리발생의 메커니즘과 역사발생의 메커니즘이 유사하다는 것은 한 단계에서 다음단계로 변해가는 과정이 유사하다는 것을 뜻한다. Piaget와 Garcia(1989)는, 기하와 대수 등의 역사발생과 그것에 대한 아동의 심리발생을 비교하면서, 심리발생과 역사발생의 과정 모두 내-대상(intra-object), 간-대상(inter-object), 초-대상(trans-object)의 단계를 거친다고 주장한다. 여기서, 내-대상의 단계는 특수한 대상에 대한 활동을 하는데 그러한 내적 대상 사이의 결합이 이루어지지 않는 수준이고, 간-대상의 단계는 그러한 대상 사이의 관계를 다루는 수준이고, 초-대

상의 단계는 대상 사이의 관계의 구조를 다루는 수준이다. 요컨대, 두 발생의 과정이 유사하다는 것은 두 발생의 과정이 요소, 요소 사이의 관계, 요소 사이의 관계의 구조를 다루는 방식으로 발달해간다는 것이다.

이와 관련해, Inhelder와 Piaget(1963) 의 연구는 무엇을 보여주는 것일까? 그것은, 심지어 전-조작기의 아동의 심리발생의 국소적 차원에서 '내-대상, 간-대상, 초-대상 단계'를 거치는 수준 상승 메커니즘이 작동한다는 것을 보여주는 것이라 할 수 있다. 그들의 수학적 귀납법 실험 I 에서 아동의 반응이 수준 A, 수준 B, 수준 C로 변해가는 과정은 무의식의 차원에서 '전달' 준-조작이 형성되는 과정이라 하겠는데, 수준 A는 눈에 보이는 대상만 다룬다는 점에서 내-대상 단계에, 수준 B는 눈에 보이지 않는 대상 사이의 관계를 다룬다는 점에서 간-대상 단계에, 수준 C는 그러한 관계의 본질적 특성을 다룬다는 점에서 초-대상 단계에 해당한다. 요컨대, Inhelder 와 Piaget의 수학적 귀납법 실험 결과는 무의식적 심리발생의 수준상승 과정 역시도 내-대상, 간-대상, 초-대상 단계를 거친다는 점을 밝혀준 것이다(Smith, 2002).

그런데 Piaget와 Garcia(1989)는 지식발생의 메커니즘은 심리발생과 역사발생의 모든 수준 내에서도 다시 발견된다고 주장한다. 예를 들어, 내-대상 단계의 발달에서도 intra-intra, intra-inter, intra-trans의 하위 수준의 단계를 거치며 더 세분화된 하위단계를 거칠 수 있다는 것인데, Inhelder와 Piaget(1963)의 수학적 귀납법 실험 결과은 내-대상의 초기 단계 intra-intra 내에서 이루어지는 세분화된 발달과정을 보여준다고 하겠다. 한편, 이러한 측면은 지식 발달의 메커니즘이 '상대성', '계열성', '재조직성'의 특성을 지니고 있음을 나타내는 것이다. 각 단계는 이전 단계에 의해 개발될 가능성이 있는 단계인데 그 다음 단계는 이전 단계에서 구성된 방식을 주제화하여 재조직함으로써 이루어지는 것이다. 요컨대, 심리발생과 역사발생 모두에서 이전 단계의 도구가 사고의 주제로 변하는 '주제화(thematization)'가 일어나는 것이다.

다음으로, 이러한 심리발생과 역사발생 메커니즘의 유사성이 어떤 면에서 의식화 교육을 지지하는지에 대해 생각해보자. 이와 관련해, 민세영(2002)과 박교식(1992)은, Piaget의 발생적 인식론은 의식화 차원에서 심리발생과 역사발생이 평행함을 나타내는 것이기에 개인 지식과 인류 지식의 발달과정에 입각한 의식화 교육이 그의 인식론을 반영한 교육의 방향이라는 입장을 나타낸 바 있다(민세영, 2002; 박교식, 1992). Piaget의 다음 인용문은 그러한 해석의 타당함을 보여주는 듯하다.

> 인류의 진보와 개인의 발달 사이의 이러한 유사성에서 행동과 의식화되는 이론 사이에 존재하던 관계를 발견하게 된다. 그것이 바로 두 메커니즘 사이의 가장 놀라운 평행성 중의 하나이다. 수학사의 모든 시기에 수학자들은 그가 의식하고 있지 못하고 있는 도구를 사용한다. Euclid 는 변환군을 계속 사용하였지만 군의 아이디어는 Galois에 이르러서야 나타났다. Euclid에 있어서 군은 의식되지 않고 행동에서만 존재하였던 것이다(Bringuier, 1980, pp.96-7; 민세영, 2002, pp.102-3 재인용).

구체적, 형식적 조작기의 아동들이 보인 반응은 무의식적인 심리발생의 과정이라기보다는 의식적인 반성의 과정을 보여주는 것에 가깝다. 그러므로 Piaget가 보통 10세 이후의 아동과 청소년을 대상으로 해서 구체적 조작과 형식적 조작의 형성과정을 보인 일부 실험은 의식화의 측면에서 심리발생과 역사 발생의 메커니즘이 유사하다는 것을 보인 것으로 간주할 수 있기 때문에, 민세영(2002)와 박교식(1992)의 주장이 설득

력을 가진다. 하지만 전-조작기 아동을 대상으로 한 실험은 무의식적 행동의 수준을 드러낸다는 점에서, 그러한 실험결과가 의식화 측면에서 역사발생과 심리발생의 메커니즘의 유사성을 보이는 것이라고 말하기는 다소 힘들다.

그렇다면, Piaget가 지식의 본질과 그 발생의 메커니즘을 규명하기 위해 전-조작기의 아동을 대상으로 수행한 실험의 결과는 역사발생의 메커니즘과 관련해 어떤 면에서 의식화 교육을 지지한다고 할 수 있을까? 기본적으로, 전-조작기 아동의 심리 발생은 행동 수준의 사고, 자각되지 않는 무의식적인 사고의 과정을 보여주는데, 그 심리 발생의 결과는 무의식의 차원에서도 내-대상, 간-대상, 초-대상 단계를 거치는 메커니즘이 발견된다는 것이라 하겠다. 그런데 이러한 결과는 사고의 도구가 대상이 되는 '주제화'가 무의식적 차원에서도 이루어짐을 보여준다. 내면화된 가역적 행동으로서의 조작이 형성되는 과정에는 '자각되는 의식적 주제화'가 이루어지는 반면에, 전-조작이 형성되는 과정에는 '자각되지 않는 무의식적 주제화'가 일어나는 것이다.

이러한 '무의식'과 '의식'의 차이는 '행동의 수준'과 '개념과 이론의 수준'이 차이를 나타내는 동시에, 행동의 수준으로부터 개념의 수준으로 그 발달을 어떻게 이끌지에 대한 단서를 제공한다. 인류의 학습 과정으로서의 지식의 역사 발생에서도 이전의 사고도구를 의식적으로 주제화하는 모습을 보여주는데, 이러한 모습은 개인에 있어서 행동의 수준으로부터 개념의 수준으로 진척하도록 하기 위해 무엇이 필요한지를 알려준다. 개인에 있어서 행동의 수준으로부터 개념의 수준으로 변화하도록 하는 학습이 일어나게 하기 위해서는, 학생 자신의 사고과정을 의식하게 하는 수밖에 없는 것이다. 역사발생과 무의식적 심리발생의 메커니즘의 유사성과 그 이면의 차이는 '자각되는 의식적인 주제화'가 일어나야만 논리-수학적 조작이 형성될 수 있다는 것을 강력하게 시사해주는 것이다. 비유적으로 말해, 기어 중립 '무의식' 상태의 자동차의 경우도 그 실린더 엔진이 구동되어 차가 움직이는 원리는 '흡입-압축-폭발-배기'의 사이클인데, 그 차가 앞으로 나아가도록 하기 위해서는 기어중립 '무의식'의 상태에서 기어에 단을 넣어 '의식' 상태로 전화해야 하는 것이다. 요컨대, 학습을 통해 개념의 수준으로 전진하기 위해서는 주제화가 '의식적'으로 일어나게 해야 하는 것이다.

이제, Piaget의 실험 결과를 교육적으로 해석하여 접목시킨 '의식화' 교육이 구체적으로 어떤 것인지를 알아보기 위해, Piaget의 발생적 인식론에 근거한 교육을 지지했거나 반대했던 학자들이 수학적 귀납법의 교수-학습에 대해 주장했던 바에 대해 검토하고자 한다. 이 논문에서는 새수학의 대표격인 Dieudonné, Piaget의 발생적 인식론을 수학교육에 접목시키고자 했던 Dubinsky, 그리고 Piaget의 발생적 인식론에 따른 교육에 반대했던 Freudenthal이 주장했던 각각의 수학적 귀납법의 교수-학습에 대해 살펴보고자 한다.

Piaget의 영향을 다소간 받은 것으로 알려진 Dieudonné[7]는 수학적 귀납법의 교육과 관련해 Peano 의 공리적 접근방식을 되도록 일찍 학교수학에 도입하자는 다음과 같은 주장을 제기한 바 있다.

---

7) 1960-70년대에 전개된 일명 새수학(New Math) 운동은 Piaget의 발생적 인식론에 근간한 것으로 널리 알려져 있다. 하지만 그 운동을 전개한 수학자와 교육학자들이 그의 이론을 정확히 반영했는지에 대해선 논란의 여지가 있다(박교식, 1992). Dieudonné 의 경우에도, 그가 Piaget의 이론을 발판으로 이러한 교수학적 주장을 제기했는지의 여부는 불분명하다. 다만, 그가 수학적 모구조에 관한 Piaget의 강연을 들은 후 아동의 사고와 수학적 구조 사이의 유사성에 깊은 인상을 받고 "내가 심리학을 진지하게 받아 들였던 것은 이번이 처음이다. 마지막일 수도 있지만 어찌되었건 처음이다(Piaget, 1970, p.26 재인용)."는 언급을 한 적은 있다.

Peano의 공리로부터 시작하여 일반적인 산술법칙을 전개하는 것은 논리적으로 가장 단순하면서도 아름다운 훈련 중의 하나이다. 나는 이것이 좀 더 빠른 시기에 시도되지 않을 이유가 없다고 본다. 이것은 학생들에게 전통 수학과 현대 수학 모두의 가장 기초적인 도구 중 하나인 수학적 귀납법 사용을 제공한다. 말할 필요도 없이, 학생들로 하여금 매우 큰 자연수가 의미하는 것과 우리의 직관적인 이해를 완전히 넘어서는 그러한 대상에 대해서도 산술법칙이 타당하다는 것을 받아들여야 하는 이유를 생각하도록 함으로써 그들이 그러한 공리적 취급에 대한 필요를 이해할 수 있도록 해야 한다 (Dieudonné, 1961, pp.41-2).

Dieudonné 는, 수학의 본질은 추상적인 개념을 창안하여 그것으로부터 추론하는 힘에 있는 것이며 그렇게 하는 것이 바로 수학적 방법의 본질이라는 신념을 가지고, 새 수학을 옹호하였으며 추상적 사고의 특성을 가장 잘 반영하고 있는 대수 중심의 교육을 강조하였다 (우정호, 1998, pp.262-71). 이런 배경 속에서, 그는 Peano 공리로부터 일반적인 산술 법칙을 전개시키는 것은 탁월한 논리적 사고훈련이기 때문에 그것을 가능한 빨리 도입해야 한다고 주장했던 것이다. 물론, 이러한 주장 이면에는 수학적 활동의 가장 기본적 도구인 수학적 귀납법을 조기(대략 중학교 1학년 정도)에 도입하려는 교육적 의도[8]가 있다 할 수 있다. Peano 공리체계를 체계적으로 도입하기 위해선 학령 초부터 셈수에 대한 의식적인 지도를 강화하는 교수-학습 계열이 요구되지만, Dieudonné의 제안이 그러한 계열에 대한 충실한 고려를 통해 이루어졌는지에 대해서는 의문의 여지가 있다(고정화, 2005, p.135).

기본적으로, Dieudonné의 방식은 두 가지 측면에서 의식화를 추구하는 교육과는 거리가 멀다고 하겠다. 첫째는, Dieudonné 가 제기한 산술법칙의 타당성에 대한 의문이 산술체계의 공리화와 긴밀한 관련을 맺지 못한다는 점이다. 다시 말해, Peano가 느꼈던 '엄밀화'란 지적 필요성과 어떤 산술법칙의 타당성 여부에 의문은 질적으로 다른 것이다. 공리화를 하기 위해서는 산술법칙의 타당성을 의심한 것이 아니라 그 법칙이 참이 되는 더욱 근원적인 기초(타당성의 궁극적 근거)를 찾아야 하는 것이다. 즉, 공리화는 '회의적 성향에서 나온 것이 아니고 복잡한 명제들의 구조를 명확하게 보고 산술의 개별적 진리들의 결합망을 알려는 욕구의 표현(Waismann, 1951, p.81)'이라 할 수 있는 것이다. 두 번째는, 비록 Dieudonné 의 접근방식이 셈수의 형식성을 의식화하려는 것일지라도 그것은 가장 중요한 의식화의 단계를 누락하고 있다는 점이다. 그의 접근방식은 공리적 체계 속에서 수학적 귀납법 증명을 수행하는 것의 이전 단계, 즉 암묵적 차원에서 귀납적으로 정의하고 수학적 귀납법 증명을 사용하면서 그 원리를 인식하는 단계, 수학적 귀납법을 사용하면서 그 유용성을 인식하는 단계를 전혀 반영하고 있지 않다.

한편, Dubinsky(1986,1989,1991)는 수학적 지식 발생의 메커니즘인 반영적 추상화의 관점에서 고등 수학적 사고의 본질과 개념의 학습과정에서 학생들이 겪는 어려움의 원인을 분석하고 그들이 수준 높은 사고능력을 개발할 수 있도록 하는 방안에 대한 시사점을 찾고자 하였다. 즉, Dubinsky는 수학 학습에 있어서 가역성, 행동의 내면화, 조절, 대상화, 일반화 등을 Piaget의 반영적 추상화에 관련된 것으로 간주하면서 그 틀을 가지고 수학적 사고의 본질과 학생들이 겪는 근원적 어려움을 설명하고 그 대안을 제공하고자

8) 새 수학 시대 당시, 학교수학에 대한 캠브리지 보고서에서는 수학적 귀납법의 간단한 사용은 초등학교 후반기에 도입될 수 있고 수학적 귀납법은 가장 기본적인 개념을 증명하는 데 이용되기 때문에 가능한 빨리 도입되어야 한다는 제안이 있었다(Reeves, 1972).

하였다. 수학적 귀납법의 교수-학습과 관련해서는, 일명 수학적 귀납법의 발생적 분해 모델을 제시하고 수학적 귀납법을 이해하기 위해 함수, 명제 함수, 후자 함수, 무한 개념, 함의 관계, 증명 방법, 긍정 논법 등과 관련된 조작이 구성되어야 하는데, 이 모든 것에 대한 내면화, 대상화가 이루어지지 않았기 때문에 학생들은 수학적 귀납법의 진정한 의미를 이해하지 못한다는 주장을 제기하였다. 그의 주장을 긍정적으로 평가하자면, 그것은 학습의 준비성, 즉 지도하려는 수학적 지식의 구성에 필요한 선행 shèmes 이 무엇인지를 말한 것으로 간주할 수도 있다.

하지만 Dubinsky의 수학적 귀납법의 발생적 분해가 Piaget의 반영적 추상화에 따른 의식화 교육의 모습을 구현하고 있는지에 대해서는 의문의 여지가 있다. 기본적으로, 그의 발생적 분해 모델은 수학적 분석, 심리적 분석을 바탕으로 하여 반영적 추상화를 접목시켜 개발했다고 밝히고 있다. 하지만 수학적 귀납법의 발생적 분해 모델은 명제함수, 긍정식 추론 등의 논리적 형식에 근거한 수학적 귀납법을 가르친 후 그 교수 실험 결과를 가지고 만든 것이다. 즉, 기성의 완성된 수학적 귀납법을 학생들에게 가르친 후 그들에게 나타나는 모습을 가지고서 반영적 추상화 이론을 접목시켜 발생적 분해 모델을 만든 것이다.

그런데 이러한 방식에 의해 학습 준비성을 드러낸다는 것은 말 앞에 마차를 놓는 것에 불과하다고 하겠다. 왜냐하면 학습 준비성은 발달의 도달점뿐만 아니라 이후의 '불균형'을 극복할 수 있는 적응정도(adaptive reach)와 관련해서 해석되어야 하기 때문이다(김지현, 1998). 사실, Piaget의 평형화 메커니즘 입장에서 바라본다면, 학생들이 새로운 지적 필요성을 느끼는 상황, 즉 어떤 불균형을 경험하는 상황이 진정한 '학습 준비성'을 규명할 수 있는 장이다. Dubinsky(1986)는, "수학적 귀납법이 문제 상황을 해결하기 위한 수단으로 자연스럽게 적용되지는 않았다(p.312)." 고 말했듯이, 학생들이 수학적 귀납법 아이디어가 도입될 수 있는 상황 속에서 이해하고 사고해 가는 '변화 과정'에 대해서는 관심을 기울이지 않았다. 결론적으로 말해, 그의 수학적 귀납법에 대한 발생적 분해는 그 학습을 위한 준비성 측면을 선명히 드러내거나 수학적 귀납법을 의식화하는 방식을 제공하는 것이 아니며 다만 어떤 컴퓨터 언어를 배우는 환경 속에서 '수학적 귀납법'을 도입하였을 때 학생들이 그것을 어떻게 설명하고 적용하는지 그 양상만을 보여줄 뿐이다.

Piaget의 발생적 인식론과 그에 따른 수학적 귀납법 실험의 결과는 '수학적 귀납법(의 원리)'에 대한 점진적인 의식화 교육을 지지한다. 그런데 아이러니하게도 이러한 교육의 모습은 Piaget의 발생적 인식론과 그것의 교육적 적용을 가장 반대했던 Freudenthal 에 의해 제기되었다. 수학적 귀납법의 교육과 관련해, Freudenthal (1973)은 최초의 수학과 완성된 수학 사이의 근본적 차이에 주목하고 점진적인 수학화를 통해 그것을 극복하고자 하였다. 사실, 그는 소박한 수세기로부터 셈수의 공리적 체계화에 이르는 수학 발달의 생생한 역사를 경험하게 하는 교육을 실천하려 하였다. 다시 말해, Freudenthal은 인간의 본유적 능력에 의해 '이후로 계속 된다.'는 것에 대한 인식이 이루어진다는 수학적 인식론을 기초로 하여 체계적인 수 세기 활동을 거친 후 다음과 같이 수학적 귀납법의 원리를 의식화, 형식화, 공리화하는 교수-학습을 제안하였다.

> 완전귀납법에 대해 함께 생각해보자. 이때, 그 원리는 아동들이 재-발명에 의해 명확하게 형식화해야 할 만큼 중요한 것으로 간주된다. 완전귀납법을 발명한다는 것은 사소하지 않은 또는 적어도 사소해 보이지 않는 완전귀납법의 예에 익숙해져 있어야 하는 것을 분명히 전제로 한

다. 역사에서, 이항계수와 이항정리는 그러한 예인데, (중략) 자연수에 대한 Peano의 형식적 이론으로부터 완전귀납법을 유도해낸다면 이 역시 유사한 교수학적 악순환에 불과하다. 완전귀납법에 대해 형식화하지 않은 채 Peano의 공리론을 발명할 수 없다는 것은 당연한 것이다. 완전귀납법을 형식화하기 위해서는 완전귀납법이 무엇인지를 아는 것이 필수불가결한데 그것을 알기 위해서는 이항정리와 같은 것에 숙달해 있어야만 하는 것이다. 연역적 과정은 Peano의 공리들로부터 수학적 귀납법의 원리를 정리로서 유도하고 이것을 이후에 여러 가지 예에 적용하는 것이다. 이것은 반-교수학적 전도(antididactic inversion)의 현저한 예이다(Freudenthal, 1973, pp.121-2).

사실, Freudenthal은 역사발생을 하나의 패러다임으로 삼아 수학적 귀납법의 교수-학습이 이루어지기를 희망하면서, 학생들이 다음과 같이 '무의식적으로 수학적 귀납법을 도구로써 사용하는 수준'으로부터 '의식적으로 수학적 귀납법을 대상화하는 수준'으로 상승하는 과정을 거치는 '수학화' 활동을 하기를 희망하였다.

여기서, 학습과정의 수준은 두드러지게 부각된다. 고려해야 할 가장 낮은 수준은 수학적 귀납법을 실행하는 것이다. 그 다음 수준은 그것을 조직화의 원리로서 의식하는 것이고 반성의 주제로 삼는 것이다. 그것을 언어적 패턴으로 만드는 것은 같거나 더 높은 수준이다. 여기서부터 Peano 공리계에 이르는 길은 더 이상 국소적으로 결정되지 않는다. (중략) 역사는 이러한 발전을 따라 전개되었다(Freudenthal, 1973, pp.122-3).

Freudenthal이 수학적 귀납법 교수-학습에서 무엇보다 강조한 것은 수학적 경험을 대상화하여 반성하는 '의식성'이다. 수학화는 현상을 본질로 정리하는 것이며 암묵적으로 사용하던 것을 의식화하는 과정이기 때문에, 그는 학생 자신과 다른 학생의 수학적 활동을 의식, 반성, 비교하도록 하는 활동을 수학교육에서 중요시해야 하는 정신적 활동으로 간주했던 것이다(정영옥, 1997). 물론, Freudenthal이 이처럼 '의식성'을 강조하는 수학적 귀납법의 교수-학습을 주장했던 것은 그가 수학사에 대한 철저한 분석을 통해 수학적 지식 발달의 메커니즘을 파악했기에 가능했다고 할 수 있다(Freudenthal, 1953; Wasén, 2001; 박선용, 2008).

수학적 귀납법을 '수학하는 활동'으로, 그리고 '의식화하는 수준상승'의 경험으로 학습하게 하자는 Freudentahl의 제안은 Inhelder와 Piaget(1963)의 심리학적 연구결과가 암시하는 교육 방향인 반영적 추상화에 의한 질적인 수준상승, 내용(현상)-형식(본질)의 끊임없는 교대작용이 일어나게 하는 교육을 가장 정확하게 보여주고 있다. Freudenthal이 수학적 귀납법의 역사발생에 기초해 '수학적 귀납법의 의식화 교육'을 주장했다는 사실은 역설적으로 그가 Piaget에 대해 그만큼 심하게 오해하고 있었음을 보여주는 대목이라 할 것이다(우정호, 1984).

Ⅵ. 결론

이 연구에서는, Inhelder와 Piaget(1963)가 수학적 귀납법 실험을 기획하고 실행하고 분석하는 일련의 과정을 살펴보면서, Piaget의 발생적 인식론의 문제의식, 연구문제, 실험과 그 결과, 그 결과에 대한 인식론적 해석의 특징을 분석하고 Piaget의 발생적 인식론의 실험 결과가 갖는 교육적 의미에 대해 논의하였다.

Piaget가 발생적 인식론에서 일관되게 규명하고자 했던 것은 지식의 심리발생과 역사발생에서 보이는 공통된 메커니즘이고, Inhelder와 Piaget의 연구는 전-조작기의 심리발생에서 보이는 메커니즘을 보여준다고 할 수 있다. 그들의 수학적

귀납법 실험 Ⅰ에서 아동의 반응이 수준 A, 수준 B, 수준 C로 변해가는 과정은 무의식의 차원에서 '전달' 준-조작이 형성되는 과정이라 할 수 있는데, 그러한 과정은 '전달' 준-조작이 국소적 차원에서 내-대상, 간-대상, 초-대상의 단계를 거쳐서 발달해가는 모습을 보여준다(Sierpinska, 1994; Smith, 2002). 요컨대, Inhelder와 Piaget(1963)의 연구는 심지어 전-조작기의 아동의 심리발생에서도 '내-대상, 간-대상, 초-대상 단계'를 거치는 수준 상승 메커니즘이 작동한다는 것을 보여주는 것이다.

이러한 실험 결과를 수학교육에 접목시켜 볼 때, 수학적 지식의 심리발생과 역사발생의 메커니즘의 유사성과 차이는 자기 자신의 수학적 활동을 지속적으로 반성하도록 하는 의식화 교육이 Piaget의 발생적 인식론에 근거한 교육 방향이라는 점을 지지해준다.

참고문헌

고정화(2005). **학령 초의 활동주의적 수 개념 구성에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

김지현(1998). 피아제와 비고스키 이론의 쟁점에 관한 교육학적 해석. **교육원리연구, 3**(1), pp.197-238.

민세영(2002). **역사발생적 수학 학습-지도 원리에 대한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

박교식(1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근**. 서울대학교 박사학위논문.

박선용(2008). **수학적 귀납법에 대한 교수학적 분석**. 서울대학교 박사학위논문.

우정호(1984). 피아제 이론의 수학교육에의 적용은 수학적 교육학적 심리학적 오류인가?. **수학교육, 22**(3), pp.1-13.

_____(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

_____(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교 출판부.

은은숙(2011). 피아제의 발생학적 인식론의 방법론에 대한 주요 비판들과 그 문제. **철학연구, 120**, pp.185-206.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

Bickhard, M. H.(1992). Piaget on variation and selection models: Structuralism, logical necessity, and interactivism. In L. Smith(Ed.), Jean Piaget Critical Assessment(pp.388-434). London : Routledge.

Bringuier, J. C. (1980). Conversations with Jean Piaget. Chicago : University of Chicago Press.

Dehaene, s.(1997). The Number Sense. London : Allen Lane.

Dieudonné, J.(1961). New thinking in school mathematics. Paris : OEEC.

Dubinsky, E. (1986). Teaching mathematical induction Ⅰ. Journal of Mathematical Behavior, 5, pp.305-17.

_____(1989). Teaching mathematical induction Ⅱ. Journal of Mathematical Behavior, 8, pp.285-304.

_____(1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall.(Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp.95-123). Dordrecht : Kluwer.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics : An educational approach. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H.(1953). Zur Geschichte der vollständigen Induktion. Archives Internationales d' Histoire des Sciences, 22, pp.17-37.

_____(1972). Recent Studies in the Teaching of Mathematics. In W. E. Lamon (ed.), Learning and the Nature of Mathematics (pp.11-18). Science Research Associates.

_____(1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). The Child's Understanding of Number. Cambridge, MA : Harvard University Press.

Guedj, D. (1996). L'empire des nombres. Découvertes Gallimard Sciences.

Hughes, M.(1986). Children and Number. Oxford : Blackwell.

Inhelder, B. & Piaget, J.(1963). Itération et récurrence. In P. Gréco, B. Inhelder, B. Matalon, & J. Piaget (Eds.), La formation des raisonnements récurrentiels. Paris : Presses Universitaires de France.

Kitcher, P. (1983). The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford University Press.

Pascual-Leone, J.(1980). Constructive problems for constructive theories : The current relevance of Piaget's work and a critique of information-processing simulation psychology. In R. H. Kluwe, & H. Spada(Eds.), Developmentaal Models of thinking(pp.263-296). New York : Academic Press.

Piaget, J.(1936/1952). The Origins of Intelligence in Children. New York : International University Press.

_____(1937/1954). The Construction of Reality in the Child. Routledge & Kegan Paul.

_____(1941/1965). The child's conception of number. New York : W. W. Norton and Company, Inc.

_____(1966). Mathematical Epistemology and Psychology. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

_____(1970). Genetic Epistemology. New York : Columbia University Press.

_____(1971). Psychology and Epistemology. Kingsport, Tennessee : Kingsport Press.

_____(1998). De la Pédagogie. Paris : Odile Jacob.

Piaget, J & Garcia, R.(1989). Psychogensis and the History of Science. New York : Columbia University Press.

Poincaré, H. (1902/1952). Science and Hypothesis. New York: Dover.

_____(1908/1952). Science and Method. New York: Dover.

Reeves, C. A. (1972). The comparative effects of two methods of introducing mathematical induction and two methods of presenting succeeding problems. Unpublished doctoral dissertation, The Florida State University.

Russell, B. (1919/1953). Introduction to mathematical philosophy. London : George Allen and Unwin LTD.

Sierpinska, A. (1984). Understanding in mathematics. London : The Palmer Press.

Smith, L. (2002). Reasoning by Mathematical Induction in Children's Arithmetic. Amsterdam: Pergamon.

Thompson, I. (2000). The Early Years Number Curriculum Today. In I. Thompson (Ed.), Teaching and Learning Early Number (pp. 1-6). Open University Press.

Waismann, F. (1951). Introduction to Mathematical thinking. New York : Frederick Ungar Publishing Co.

Wasén, R. (2001). A note on the principle of mathematical induction, intuition, and consciousness in the light of ideas of Poincaré and Galois. Chaos, Solitons and Fractals, 12, pp.2123-5.

A Study on the Educational Implications of the Results of the Piaget's Experiment about the Psychogenesis in his Genetic Epistemology
-Based on the Experiment of Inhelder and Piaget(1963) -

Park, Sun Yong (Yeungnam University)

This study considers the experiment of Inhelder and Piaget(1963) in various aspects, and reveals the characteristics of the 'the formation of a critical mind', 'the transformation into the research question', 'the translation into the experiment', and 'the interpretation of the result of the experiment' in Piaget's genetic epistemology. According to these analyses, this study discusses the educational implications that the results of the Piaget's experiment support the education which raises the student's awareness.

* Key Words : genetic epistemology(발생적 인식론), psychogenesis(심리발생), histogenesis(역사발생), awareness(의식성)

논문접수 : 2013. 4. 25
논문수정 : 2013. 5. 31
심사완료 : 2013. 6. 14