대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 2, 243 ~ 262. Jun 2013

수학적 사고 요소를 이용한 수학 교수 양식 분석틀 개발 및 적용 방안 연구[1)]

박 지 현* · 이 종 희**

본 연구는 인지적 측면에서 수학 교사의 교수 양식을 분석하는 것을 목적으로 하고 있다. 이를 위해 먼저 문헌 연구를 통해 수학에서 서로 대비되는 유형으로 분류될 수 있는 인지적 사고 요소들을 탐색하고, 확인적 요인분석을 통해 이 요소들을 시각적 양식과 분석적 양식으로 범주화할 수 있다는 것을 검증하였다. 요인 분석 결과를 바탕으로 두 가지 양식과 두 가지 양식이 대등하게 나타나는 혼합적 양식을 수학 교수 양식으로 설정하고, 교사들의 양식을 분석할 수 있는 분석틀을 개발하였다. 또한, 수학 교수 양식 분석틀을 Flanders의 언어 상호작용 분석법(Amidon & Flanders, 1967)에 적용하여 교사들의 수학 수업을 통해서 교수 양식을 분석할 수 있는 방법을 설계하였다. 그리고 이를 활용해 수학 수업에서 교사들이 사용하는 수학적 언어를 분석한 결과, 실제로 시각적 양식, 분석적 양식, 혼합적 양식이 나타나는 것을 확인하였다.

Ⅰ. 서론

교사와 학생사이의 의사소통은 현대 교육 사회의 가장 큰 화두이다. 사회적 구성주의가 대두되면서 부터 시작된 교사와 학생 사이의 의사소통 과정에 대한 관심은 텍스트의 전달에 치중해 왔던 기존의 교육 관행을 여러 측면에서 바꾸어 놓고 있다. 지식 전달을 위한 매개체로써 교사의 교수 방식에 대한 논의가 활발히 진행되고 있으며, 지식 전달을 위해 더 효과적인 의사소통방법을 탐색하고 있는 것이다. 이에 지식 전달 과정에서 교실 사회의 구성원이자 지식 전달의 주체가 되는 교사의 역할 및 수업 형태에 대한 관심이 점점 더 고조되고 있다.

가르칠 지식은 많은 부분이 언어를 매개로하여 전달된다. 그러므로 교사들이 수업에서 사용하는 수학적 언어의 형태는 학생들의 수학적 지식의 성장에 긍정적 또는 부정적인 영향을 줄 수 있다. 특히, 교사와 학생은 각자가 가지고 있는 경험이 다르고, 경험을 통해 조직된 인지 구조가 다르기 때문에, 같은 내용에 대해 사고하더라도 그 표현 방식과 그에 대한 해석이 달라질 수 있다. 그러므로 교사와 학생 사이에서 일어나는 의사소통 방식과 전달 주체에 의한 표현 형태에 따라서 지식은 많이 파손될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다.

수학적 의사소통 과정에서 사용되는 교사의 수학적 언어는 가르칠 지식을 전달하기 위한 가장 기본적이면서 핵심적인 전달체로 의사소통을 논

* 한국교육과정평가원(pjh210@kice.re.kr)
** 이화여자대학교(jonghee@ewha.ac.kr)
1) 이 논문은 박지현의 박사학위논문인 “교사의 수학적 언어에 반영된 교수 양식에 관한 연구(2012)”의 일부를 발췌 및 재구성한 것임.

할 때 빠질 수 없는 요소이다. 이에 수학교육 연구에서도 교사와 학생 사이의 의사소통에 쓰이는 수학적 언어에 대한 관심은 지속적으로 이어져왔다. 그러나 수학적 언어에 관한 대부분의 연구는 각 학교급 학생들의 수학적 언어 수준 차에 대한 연구(김선희, 이종희, 2003; 윤채원, 2007)이거나 수학적 언어의 표현 형식에 대한 연구(고정화, 1998; 이화정, 2006)이었다. 이 연구들은 수학적 언어 능력과 관련되어 있지만 교사와 학생 사이의 의사소통 과정에서 사용되는 매개체로써의 수학적 언어에 관한 것은 아니다. 그러므로 기존의 연구들과 더불어 언어의 또 다른 측면으로 교사 또는 학생 개인의 인지적 사고 경향성에 따라 달라지는 언어 표현 양식의 차이와 그것이 교수·학습에 미치는 영향에 관한 연구가 수행될 필요가 있다.

한 개인의 사고 양식(Thinking Style)은 어떤 정보에 대한 개인의 지속적인 사고 경향성을 의미한다. 특히, 교사의 사고 양식은 가르칠 내용을 해석하는 틀로 작용하여 일정한 교수 형태로 나타나게 된다. 또한, 학생의 사고 양식은 교사의 교수 형태에 담겨진 내용을 받아들이는 하나의 해석 틀로써 작용을 하게 된다. 그러므로 교사와 학생의 사고 양식의 차이는 수학적 의사소통을 위한 하나의 요인이 될 수 있다. 특히, 교사의 수학적 언어에 나타나는 교수 양식은 교수-학습의 성패를 좌우하는 매우 중요한 요인 중 하나라고 할 수 있다.

이처럼 교사와 학생 사이의 의사소통 과정을 이해하기 위해서는 학생뿐만 아니라 교사의 사고 양식과 그에 따른 언어 표현을 분석하는 것이 필요하다. 그러나 수학교과에서 기존의 양식 연구들은 대다수가 학생들의 학습 양식을 규명하는 것(Ferri, 2010; Krrutetskii, 1976; Zaslavsky et al., 2002; 백희수, 2009)에 중점을 두고 있으며, 수학교과의 특성이 반영되기 보다는 영역 일반적인 경향이 있다. 그렇기 때문에, 수학교과에서 교사들의 교수 양식을 체계적으로 분석할 수 있는 분석틀과 그 적용 방안이 마련될 필요가 있다. 이에 본 연구에서는 수학적 사고 요소와 관련지어 수학 교수 양식의 분석틀을 개발하고, 이를 바탕으로 교사들이 수업에서 사용하는 수학적 언어를 분석하여 수학 교수 양식이 실제로 어떤 차이를 보이는지 분석하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 사고 양식

사람들은 의식적으로 계획하여 말을 하고 행동을 한다. 그러나 결과적으로 나타나는 언어 표현과 행동에는 각 개인의 무의식적인 습관이 잠재되어 있다. 개인의 사고를 통제하고 행동을 조정하는 이러한 요인 중 하나가 사고 양식이다. Fischer와 Fischer(1979)는 양식을 한 사람의 행동에 퍼져있는 특성으로, 학습 내용이 변할지라도 바뀌지 않고 저항하는 특징을 지닌 것으로 보았다. 또한, Sternberg(1997)는 개인이 가지고 있는 능력을 사용할 때 선호되는 하나의 사고방식을 양식으로 규정지었다.

이처럼 양식은 개인의 능력이 아닌 어떤 선호하는 사고 경향이며, 좋거나 나쁜 것이 아니고 단지 개인에 대한 적합성과 관련된 것이다(Sternberg, 1997). 그러므로 양식은 능력과 다른 특징을 지닌다. 즉, 능력은 얼마나 잘할 수 있느냐의 문제라면, 양식은 어떻게 하기를 선호하느냐의 문제이며, 능력처럼 일정한 수준으로 구분되어 점점 높은 쪽으로 발전되어 가는 것이 아니고 개인의 선택성이 전제되어 있는 특성이다. 백희수(2009)는 능력이 수행 수준에 보다 관심을 가진 것이라면, 양식은 수행 방법에 중점을 두는

것이라 하였다. 또한, 능력이 한 방향으로만 진행되는 것이고 한쪽의 차원은 가치 있고 다른 쪽은 그렇지 않다는 첨부된 가치이지만, 양식은 양방향으로 진행되며 양식의 차원은 양쪽 모두 가치를 지닌다고 하였다. 이와 같은 능력과 양식의 서로 다른 특징은 <표 II-1>과 같이 정리할 수 있다.

<표 II-1> 능력과 양식의 특징

능력(Ability)	양식(Style)
• 변화에 적응 • 수준의 차이 • 수행 수준에 중점을 둠 • 단방향으로 진행 • 두 차원 중 한쪽이 더 가치 있음	• 변화에 저항 • 선호도의 차이 • 수행 방법에 중점을 둠 • 양방향으로 진행 • 두 차원이 동등한 가치를 지님

이처럼 양식은 능력과 다른 특성을 가진 것으로 정의되고 있기 때문에 능력이 설명하지 못하는 행동의 변화를 설명할 수 있다(Sternberg & Grigorenkon, 2001). 그러므로 교수-학습 과정에 대한 설명을 도울 수 있는 또 하나의 가설적 구조가 될 수 있다(Fischer & Fischer, 1979).

Sternberg와 Grigorenkon(2001)에 따르면 양식에 관한 연구는 인지적 측면, 활동적 측면, 성격적 측면에서의 연구로 나눌 수 있다. 이 중 특히 인지적 측면에 관한 연구는 개인의 정보 처리 방법, 사고하는 방법 등에 관심을 두는 것으로 교육 분야에서 교과의 인지적 사고 특성과 접목되어 영역 특수적 양식 연구로 발전될 수 있다.

인지적 양식에 대한 여러 가지 분류 중 시각적-이미지적 양식과 언어적-분석적 양식으로 나누는 경향은 수학교과와 관련지어 볼 수 있다. 왜냐하면 그래프, 도형의 형태 등으로 대표되는 수학의 시각적인 측면과 명제, 식, 대수적 표현 등으로 대표되는 분석적인 측면은 수학교과에서 각각 대등한 지위를 가지고 있으면서, 수학 학습에서 서로 상보적인 역할을 하기 때문이다. 실제로 인지 중심의 사고 양식 또는 교수-학습 양식 이론들에 의하면, <표 II-2>와 같이 다수의 연구에서 시각적-이미지적 측면과 언어적-분석적 측면으로 양식을 분류하는 경향이 나타나고 있다.

<표 II-2> 인지적 양식의 분류

연구자	인지적 양식	
	시각적-이미지적	언어적-분석적
Galton(1883)	Visual Image	Verbal
Krutetskii(1976)	Geometric	Analytic
Kirby(1988)	Global	Analytical
Riding & Rayner(1998)	Holist/ Imagery	Analytic/ Verbal
Massa & Mayer(2006)	Visualizer	Verbalizer
Ferri(2010)	Visual	Analytic
백희수(2009)	시각적, 전체적	언어적, 분석적

2. 수학적 사고 양식

가. 수학적 사고의 이분법적 특성

역사적으로 개념의 발생적 측면에서 보았을 때 수학은 시각적이고 동적인 특성이 강조되는 형태를 거쳐 분석적이고 형식적인 특성이 강조되는 형태로 발달해왔다. 이러한 과정을 거친 수학의 여러 영역들에는 기하적 사고와 대수적 사고가 공존하며, 이를 통해 인간은 강력한 두 가지 수학적 힘을 갖게 되는데, 그 하나는 심상의 힘이고, 또 하나는 대수의 힘이다(우정호, 1998). 예를 들어 함수 개념은 역사적으로 변화를 관찰하기 위해 출현하였으며, 종속에서 대응, 동적에서 정적, 규칙적에서 임의적, 다가에서 일가로 변화되었다(김남희 등, 2011). 그러므로 함수 개념에는 변화현상을 좌표평면 위에 곡선으로 나타내어 종속 관계를 기술하는 기하학적이고 운

동학적인 측면과 유한개의 혹은 무한개의 항으로 이루어진 소위 '해석적인 식'으로 나타나는 대수적인 측면 및 대응관계로서의 논리적인 측면이 내재되어 있다(우정호, 1998).

이러한 수학의 시각적 측면과 분석적 측면을 고려할 때, 수학 내용 영역인 기하, 대수와 일치시켜서는 안 된다. 즉, 동일한 수학적 개념이라도 시각적 형태나 언어-대수적 형태로 이해되고 표현될 수 있으며 수학적 개념을 완전히 이해하기 위해서는 이러한 표현들이 유기적으로 연결되어 있음을 이해하고 이들 간의 가역적 해석을 할 수 있어야 한다.

이처럼 수학적 사고에서도 인지적 사고 양식에서 시각적 양식과 분석적 양식으로 분류하는 것과 같은 분류 경향성을 찾아볼 수 있다. 그러므로 교사들의 수학적 언어를 학생들에게 수학을 지도할 때 사용하는 수학과 관련된 설명 또는 발화라 할 때, 수학의 특성이 반영된 수학적 언어를 통해 나타나는 수학 교수 양식도 시각적 양식과 분석적 양식으로 분류할 수 있을 것이다.

나. 수학 학습에서 시각적 특성과 분석적 특성

수학교과와 관련된 학습 양식과 교수 양식은 수학의 학문적 특성과 결합된 형태로 발달한다. 이와 관련하여 수학적 언어 또는 수학 학습 능력 및 유형을 시각적 측면과 분석적 측면으로 분류한 선행연구들을 살펴보면 다음과 같다.

Skemp(2000)는 수학적 언어를 시각적 기호 체계와 언어-대수적 기호 체계로 분류하였다. 시각적 기호는 다이어그램들 특히 기하학적 도형으로 정의하였고, 대수적 기호는 수학적 기호를 식이나 기호로 표현하는 것이라 하였다. 이에 따르면 시각적 표현과 언어-대수적 표현은 서로 다른 성질을 지닌다. 시각적 표현이 통합적, 동시적, 직관적인 반면, 언어-대수적 표현은 분석적, 순서적 논리적이다(Skemp, 2000). 이처럼 각각이 지니는 장단점이 있기 때문에 시각적 기호와 언어적 기호는 수학 학습에서 함께 쓰이기도 하고 각각 사용되기도 한다. 예를 들어 동일한 아이디어를 나타낼 때 시각 기호는 언어-대수적 표현보다 매우 유용하고 이해하기 쉬운 반면, 언어 기호는 시간을 절약하고 번거로움을 줄일 수 있으며 기호가 나타내는 각각의 아이디어를 훨씬 더 짧은 시간에 일깨울 수 있다. 그러므로 두 가지 기호는 수행하는 기능은 다르지만, 많은 이점을 가지도록 이들을 결합하여 사용하는 것이 필요하다(Skemp, 2000).

Krutetskii(1976)는 학생들의 수학 학습 능력에 따라 학습 유형을 분류하였다. 즉, 학생들의 학습 유형이 기하적 유형(Geometirc type), 분석적 유형(Analytic type), 조화 유형(Harmonic type)으로 구별될 수 있음을 밝혔다. 또한, Zaslavsky 등(2002)은 기울기의 개념에 기하적 체계와 대수적 체계가 연관되어 있음을 밝히고, 기울기에 대한 학생들의 관점을 시각적 관점, 분석적 관점, 혼합적 관점의 세 가지로 분류하였다. 이 때, 시각적 관점은 기울기를 직선의 특성으로 보고 좌표의 단위에 따라 변화될 수 있는 것이며 직선과 x축의 각에 의해 결정되는 것으로, 함수 그래프의 특성이고 tan(α)이거나 수직거리를 수평거리로 나눈 몫이라고 생각하는 것이다. 대조적으로 분석적 관점에서 기울기는 단위의 비동질적 변화에 대해서도 변하지 않는 것으로 도함수나 차분몫 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 또는 방정식 $y=mx+b$에서 x의 계수로 지각된다. 그러므로 기울기에 대한 분석적 관점은 형식적이고, 식, 또는 계산 중심의 정적 특징을 지닌다고 할 수 있다. 또한 혼합적 관점은 기울기에 대한 시각적 관점과 분석적 관점이 결합되어 나타나는 것으로 정의하였다.

Ferri(2010)는 학생들의 수학 학습 양식을 시각

적 양식, 분석적 양식, 통합적 양식으로 나누었다. 이에 따르면 시각적 사고자는 전체적인 표현을 통해서 수학적 사실과 연결들에 대해 이해하는 것을 선호하고, 내적으로는 그림 형태로 상상하는 것을 외적으로는 그림으로 나타낸 표현들을 선호한다. 반면 분석적 사고자는 내적인 형식적 상상력과 외적인 형식적 표현을 선호한다. 또한, 실제로 표현된 기호와 언어적 표현들을 통해 수학적 사실을 더 잘 이해할 수 있고 일련의 형식적 단계에 따르는 것을 선호한다. 마지막으로 통합적 사고 양식을 가진 학생들은 시각적 사고와 분석적 사고를 결합하여 생각하고, 서로 다른 측면의 표현들 사이에서 유연하게 바꿔나갈 수 있다.

본 연구에서는 이러한 선행 연구들을 바탕으로 수학의 특성 및 사고 요소 중 시각적 측면과 분석적 측면으로 나누어질 수 있는 요소들을 분석하고, 이를 기반으로 수학 교수 양식 분석틀을 개발하였다. 또한, 각각의 양식이 실제 수업에서 어떻게 나타나는지를 분석하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

본 연구는 수학 교수 양식 관련 요소에 대한 분석과 실제 사례를 통한 검증을 위해 다음과 같은 연구 방법과 절차에 따른다. 먼저 문헌 분석을 통해 수학적 사고 요소들을 비교, 검토하고 비슷한 특징을 가진 것끼리 모아 범주화하였으며 각 범주의 특성을 파악하였다. 이 때, 수학교육 박사과정 이상인 전문가 5명과의 논의를 거쳐 범주별 특징을 파악하고, 범주들 사이의 관계를 분석하였다. 이를 통해 시각적 양식 및 분석적 양식과 관련지을 수 있는 30가지 수학적 사고 요소들을 추출하고, 개념들을 범주화하여 5가지 상위 범주를 구성하였다.

또한, 추출된 개념들이 각 양식의 하위 요인으로 분류될 수 있는지에 대한 확인적 요인분석을 실시하였다. 이를 위해 수학교육 박사 수료 이상의 전문가 6명과 전문가 협의를 거쳐 각 개념을 설명하는 문항을 [부록]과 같이 설정하고 이에 대한 설문을 7점 척도로 제작하였다. 이에 대한 설문은 e-mail 및 URL을 이용한 온라인 설문 조사 형태로 진행하였으며, 2011년 12월부터 2012년 2월까지 110명의 사례를 수집하였다. 설문에 참여한 110명의 인구통계학적 분포를 살펴보면, 남자가 20명, 여자가 90명이었고, 초등학교 교사 13명, 중학교 교사 27명, 고등학교 교사 26명, 예비교사 22명, 석사 이상의 수학교육전문가 22명이었다.

수집된 자료를 통해 SPSS 18.0을 이용한 확인적 요인분석을 실시하였다. 요인분석에는 대표적으로 많이 사용하는 직각 회전 중 Varimax 회전을 이용한 주성분 분석을 실시하고, Bartlett의 구형성 검정, 공통성, 성분 행렬 등을 조사하였다. 분석 결과 표본의 적절성을 측정하는 KMO값은 .714이고, Bartlett의 구형성 검정 통계값이 1218.347(df=435, p=.000)으로 나타나 상관행렬이 단위행렬이라는 귀무가설이 기각되었으며 표본이 요인분석을 하기에 적합한 것으로 나타났다. 즉, 각각의 문항은 각 개념에 잘 적재되었다고 할 수 있고 측정 타당도가 있다고 볼 수 있다. 또한 30개 항목에 대한 신뢰도를 조사한 결과 Cronbach' α값이 .806으로 .60보다 큰 것으로 나타나 신뢰도가 높은 것으로 분석되었다.

요인 분석을 거쳐 수학 교수 양식 분석틀을 설정한 후 실제 교사의 수학 수업 사례를 통해 양식 분류의 타당성을 밝히고, 하위 범주들 간의 통합성과 차별성을 구별하는 등 범주 간의 관계에 대한 분석을 실시하였다. 양식이 가지고 있는 지속성과 안정성이라는 특성상 교사의 교수 양식을 분석하기 위해서는 교수 양식이 나타나는

일정 기간의 수업 자료를 확보하여 분석하는 것이 필요하다. 따라서 중학교 수학 교사 6명(M1~M6)을 연구 대상으로 선정하고 각 교사별로 4차시에서 9차시의 수업을 녹화하고, 이를 전사한 후 수업 분석을 실시하였다. 각 교사의 수업 촬영 분량과 내용은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 사례 연구 대상

교사	경력	성별	영역	대상	분량	
M1	1	여	기하	중1	4차시	4차시
M2	1	여	함수	중1	4차시	9차시
			기하	중1	5차시	
M3	1	남	함수	중1	4차시	9차시
			기하	중1	5차시	
M4	3	남	함수	중2	4차시	6차시
			기하	중2	2차시	
M5	5	여	함수	중1	4차시	8차시
			기하	중1	4차시	
M6	8	여	함수	중1	4차시	8차시
			기하	중1	4차시	

수업 전사 자료를 이용해 빈도 분석을 실시하여 수학 교수 양식 분석틀을 실제 수업 분석에 적용할 수 있는 방안을 탐색해 보았다. 교사의 수학적 언어에 대한 빈도 분석을 위해서는 Amidon과 Flanders(1967)에 의해 개발된 Flanders의 상호작용 분석법(Flanders' Interaction Analysis System)을 변형하여 활용하였다. Flanders의 상호작용 분석법은 교사들의 수업을 정량적 방법으로 분석하도록 고안된 것이다(변영계, 김경현, 2006). Flanders의 상호작용 분석법은 교실 수업의 대화를 크게 10가지로 범주화하고 이에 근거하여 교사의 수업을 체계적으로 분석한다(김영천, 2008). 본 연구에서는 Flanders의 상호작용 분석법을 연구의 목적에 맞게 수학 인지 양식 분석법(the Mathematics Cognitive Style Analysis System: MCSAS)으로 변형하였다.

수학 인지 양식 분석법(MCSAS)은 교사의 수학적 언어를 분석하기 위한 것으로 교사 또는 학생들이 사용하는 수학적 언어에 반영되는 인지 양식 분류에 활용할 수 있도록 설계한 것이다. 수학 인지 양식 분석법(MCSAS)의 분류 항목은 수학 교수 양식 분석틀의 범주와 동일하게 설정하였고, 수업 동영상 전사 자료를 분석자가 교수 양식 분류 항목에 따라 분류하고 각각에 맞는 분류 항목을 계속적으로 기재하도록 하였다. 이때, 일정 간격에 따라 표시하는 고정-간격 관찰법을 사용하는 Flanders의 상호작용 분석법과 다르게 항목이 바뀌는 시점을 분류 지점으로 삼아 표시하는 임의-간격 표집법을 사용하였다.

또한, 언어 분석에서 관찰 기록이 잘못되면 그 해석을 신뢰할 수 없기 때문에, Flanders의 상호작용 분석법에서는 같은 수업을 2인 이상이 관찰하거나 관찰자 본인이 녹음 자료를 1, 2차로 나누어 분석하고 분류 항목별 빈도수의 일치 여부를 확인한다. 이러한 절차를 통해 얻어지는 신뢰도 계수를 Scott 계수라 하는데 0.85이상이 되어야 관찰자의 측정 결과가 신뢰할 수 있는 것으로 본다(김종서, 김영찬, 1970, p.101). 본 연구에서도 이러한 절차에 따라 각 연구 대상을 분석한 자료에 대해 연구자와 수학교육 박사 과정인 다른 관찰자가 전사 자료에 항목을 표시하고, Scott 계수를 산출하여 모든 자료에 대해 0.85이상의 계수를 얻음으로써 분석의 신뢰도를 확보하였다.

이와 같은 절차를 거쳐 각 교사의 전사 자료에 나타난 전체 코드 수, 항목별 코드 수와 각각의 비율을 계산하고, 5개 범주의 빈도를 유형별로 표현한 방사형 그래프를 통해 유형별 점유면적을 비교하여 교사들의 수학 교수 양식을 분석하였다. 또한, 각각의 양식과 하위 요소들이 실제 수업에서 나타나는 양상에 대한 질적 분석을 통해 수학 교사들의 교수 양식의 특징을 파악해보았다.

Ⅳ. 수학 교수 양식 분석 결과

1. 수학적 사고 양식 분석틀 개발

가. 수학적 사고 요소 선정

인지 양식 연구 또는 수학 학습 능력 및 양식에 관한 선행 연구 결과를 종합하면 시각적-분석적 양식과 관련된 특성을 크게 공간적-수치적 측면, 동적-정적 측면, 전체적-분석적 측면, 직관적-논리적 측면, 영상적-기호적 측면의 다섯 가지 정도로 분류할 수 있다. 수학의 인지적 사고 요소들 중에는 시각적 양식 또는 분석적 양식과 관련되는 것이 있기 때문에, 이러한 인지적 요소들을 분류하여 시각적 양식과 분석적 양식의 관련 요소를 추출하면 수학과 관련하여 두 양식을 좀 더 명확하게 이해하고 체계적으로 분석할 수 있게 된다. 그러므로 선행 연구들의 인지적 사고 요소 분류 경향에 따라 수학적 사고 요소를 분류하였으며, 각각에 대한 세부적인 설명은 다음과 같다.

첫째, 공간적-수치적 측면은 Skemp(2000)가 시각적 체계와 대수적 체계의 하위 요인으로 분류한 것이다. 공간적 측면은 모양, 위치와 같은 공간 성질을 추상하는 것을 의미하며, 수치적 측면은 수와 같이 공간적 형태와 무관한 성질을 추상하는 것을 의미한다. 선행 연구들에 따르면 Krabbendam (1982)의 그래프 지도에서 논하는 질적-양적 사고, 측도를 정의함으로써 얻어지는 수량화의 과정과 관련된 비수치적-수치적 사고, 수학적 모델링과 관련된 현상적 해석-수학적 해석 등이 공간적-수치적 측면과 관련된 하위 사고 요소가 될 수 있다.

둘째, 동적-정적 측면은 Zaslavsky 등(2002)이 기울기에 대한 관념을 고찰하면서 시각적 관점과 분석적 관점의 하위 요인으로 분류한 것이다. 이에 따르면 동적 측면은 시간의 흐름, 변화성과 관련되며, 외부의 변화에 영향을 받는다는 특징을 지닌다. 반면에 정적 측면은 외부의 변화에 저항적인 특징을 지니며, 완성된 체계로서 구조를 바라보고 개념을 대상화하는 사고 특성을 지닌다. 그러므로 동적-정적 측면과 관련된 요소로 김남희 등(2011)의 변수 개념에 대한 고찰에서 설명하는 동적-정적 사고, Dubinsky와 McDonald (2001)이 주장한 APOS 이론에서 설명하는 과정적 측면과 대상적 측면, Sfard(1991)가 동적 변화적 측면으로 본 조작적 접근과 정적인 특징을 중심으로 해석하는 구조적 접근 등이 있다.

셋째, 전체적-분석적 측면은 Skemp(2000)와 다른 많은 학자들(Ferri, 2010; Riding & Rayner, 1998; Schmeck, 1988)이 시각적 관점과 분석적 관점의 하위 요인으로 분류한 것이다. 이들에 따르면 전체적 측면은 통합적이고 연결들에 대해 이해하려는 특성과 관련되며, 분석적 측면은 부분적인 세부 사항에 주목하는 특징을 지닌다. 그러므로 전체적-분석적 측면과 관련된 요소로 Sternberg(1997)가 설명한 개념의 통합을 위한 연결성과 개념을 나누어 구분 짓는 구획화, 인간의 언어 사용과 관련하여 Lakoff와 Nunez(2009)가 설명한 특성인 영역 간 연결을 위한 은유의 사용과 사실적이고 단순한 언어 표현, 통합된 조직자를 만드는 전체적 지각과 대상의 국소적 측면에 주목하는 부분적 지각을 들 수 있다.

넷째, 직관적-논리적 측면은 수학적 사고와 관련하여 Skemp(2000)와 우정호(1998)가 시각적 관점과 분석적 관점의 하위 요인으로 분류하였다. 직관적 측면은 개연적이고 통찰을 통한 발산적 사고와 관련되며, 논리적 측면은 형식적 절차와 수렴적 사고와 관련된다. 그러므로 이 측면에 대해서 Fischbein(2006)이 분석한 직관적 사고와 논리적 사고, Schmeck(1988), Skemp(2000) 등이 분류한 우뇌적 사고와 좌뇌적 사고, 수학교육에서

추론과 관련하여 자주 대비되는 개념인 비형식적인 개연적 사고와 형식적 사고가 관련된다고 할 수 있다.

마지막으로, 영상적-기호적 측면은 많은 학자들(Galton, 1883; Riding & Rayner, 1998; Villarreal, 2000)이 시각적 관점과 분석적 관점을 분류할 때 가장 빈번하게 선택하는 것이다. 선행연구들에 따르면 영상적 측면은 어떤 사실 또는 개념을 이미지화하여 표현하는 특성과 관련되며, 기호적 측면은 언어적 또는 기호, 식의 형태로 표현하는 특징을 지닌다. 그러므로 영상적-기호적 측면에 대해서는 Dreyfus(2007)가 시각적 표현의 특성으로 분류한 구체적 지각과 하나의 정신적 표상의 형태로 통합되는 과정인 추상적 지각, Lakoff와 Nunez(2009)가 이미지 기반 추론을 위한 설명방식으로 분류한 묘사 및 이와 대비되는 추상적 표현으로 설명한 형식적 기호 표현, Vinner(1983)에 의해 정의된 개념 이미지와 개념정의와 관련지어 볼 수 있다.

나. 수학적 사고 요소 분류

앞서 연구자가 문헌 자료 분석을 거쳐 다섯 가지 범주로 분류한 30가지 수학적 사고 요소들은 시각적 양식과 분석적 양식을 분석할 때 분석 지표로 활용할 수 있는 요소인지 검증할 필요가 있다. 이를 위해 30가지 요소에 대한 설문조사를 실시하고, 수집된 자료를 2요인 확인적 요인분석을 실시하였다. 요인분석을 통해 두 가지 성분을 추출한 결과는 <표 IV-1>과 같다.

이에 따르면 두 가지의 성분은 고유값이 모두 1이상이며, 두 가지 성분에 의해 전체분산의 31.443%가 설명되고 있다. 각 문항에 해당하는 요인에 대한 가중치를 나타내는 성분행렬의 요인 부하량은 일반적으로 ±.3이상이면 해당 성분과의 상관이 높다고 해석한다.

<표 IV-1> 성분 행렬

	성분	
	1	2
기호적	.713	-.020
추상적	.687	.049
수치적	.683	.007
개념정의	.648	-.036
논리적	.622	-.088
구조적	.591	.229
국소적	.589	.229
양적	.560	.028
좌뇌적	.531	.203
정적	.499	-.135
수학적해석	.490	.490
구획화	.416	.127
단순화	.402	.077
형식적	.396	-.146
대상	.302	-.020
조작적	.271	.038
현상적해석	.102	.733
전체적	-.089	.649
우뇌적	.251	.645
질적	.199	.612
연결성	.231	.603
묘사적	-.066	.577
구체적	-.090	.549
개념이미지	.263	.508
비수치적	-.340	.470
개연적	-.074	.455
은유정교성	-.123	.383
직관성	-.303	.313
동적	.078	.278
과정	.123	.138
고유값	5.562	3.726
설명분산	18.634	12.808
누적분산	18.634	31.443
문항수	16	14

두 가지 성분에 대해 .3이상의 요인 부하량을 나타내는 문항을 해당 성분에 포함되는 것으로 볼 때 두 가지 성분과 관련된 요소들은 다음과 같다.

- 성분1: 기호적, 추상적, 수치적, 개념정의, 논리적, 대상, 국소적, 양적, 좌뇌적, 정적, 수학적 해석, 구획화, 단순화, 형식적, 구조적 등의 요소로 구성됨

- 성분2: 현상적 해석, 전체적, 우뇌적, 질적, 연결성, 묘사적, 구체적, 개념이미지, 비수치적, 개연적, 은유, 직관성, 동적, 과정 등의 요소로 구성됨

수학적 사고 요소에 대한 요인분석 결과는 수학 인지 양식 분석틀을 설정하기에 앞서 몇 가지 시사점을 제공한다. 30개의 항목 중 수학적 해석의 항목은 두 성분 모두와 상관이 높은 것으로 나타났다. 이처럼 수학적 해석이 두 성분에 걸쳐서 모두 높은 상관이 있는 것으로 분석된 이유는 수학적 모델링 과정에서 수학적 해석이 현상적 해석과 함께 연속적으로 사용되는 경우가 많기 때문에 이 두 개념을 통합적 생각했기 때문일 수 있다.

또한, 동적이고 과정적인 사고는 시각적 양식과 조금 더 상관이 있는 것으로 나타났지만 산술을 중시하는 조작적 사고는 문헌 조사 및 전문가 협의를 통해 분류한 것과 다르게 분석적 양식과 가까운 것으로 인식되고 있었다. 본 연구에서 조작적 사고의 변화성과 순차적 처리라는 두 가지 특성 중 조작적 사고의 의미를 Sfard (1991)의 분류에 따라 변화성을 중심으로 해석했지만, 일반적으로 조작적 사고에 대한 수학교육 관계자들의 인식이 순차적 처리 쪽에 치우쳐 있기 때문이라 분석할 수 있다. 그러므로 조작적 사고는 변화성과 순차성이라는 두 가지 특성에 의해 혼동될 여지가 있으므로 동적 변화 중심 요인의 하위 요소에서 제외하였다. 조작적 사고뿐만 아니라 동적 변화와 관련된 사고 요소들은 시각적 양식 쪽으로 분류되기는 하지만 상관이 높지 않게 나타났다. 이를 통해 동적 변화와 관련된 사고 요소들을 동적인 변화성을 중심으로 조작적 정의를 더 명확하게 하여 분석틀을 설정하고 사례 분석에 활용하여야 한다는 시사점을 얻었다.

다. 수학적 인지 양식 분석틀 설정

앞서 수학적 사고 요소에 문헌 분석 결과와 요인분석 결과를 토대로 다음과 같이 두 가지 양식에 대해 5가지 하위 범주를 조작적으로 정의하고 각각에 대한 분석코드를 설정하였다.

첫 번째 범주는 수치적 인식에 대한 선호와 관련된 것으로, 어떤 문제 상황에서 질적이고 현상적인 해석을 중시하는지 아니면 수치적이고 수학적인 해석을 중시하는지에 관한 것이다. 이 범주에서 시각적 양식과 관련된 것은 현상적 해석 요소로 Vp라 설정하였고, 분석적 양식과 관련된 것은 수치적 해석 요소로 An이라 설정하였다.

두 번째 범주는 변화에 대한 선호와 관련된 것으로, 개념의 이해나 문제 해결 상황에서 개념 또는 절차의 변화 과정을 강조하는지 아니면 각 개념을 하나의 대상으로 인식하고 한 시점에서 파악되는 조건들 간의 관계나 구조를 강조하는지에 관한 것이다. 이 범주에서 시각적 양식과 관련된 것은 동적 요소로 Vd라 설정하였고, 분석적 양식과 관련된 것은 정적 요소로 As라 설정하였다.

세 번째 범주는 연결성에 대한 선호와 관련된 것으로, 어떤 한 대상을 연결된 형태로 통합적으로 지각하는지 아니면 분리된 형태로 국소적으로 지각하는지에 관한 것이다. 이 범주에서 시각적 양식과 관련된 것은 통합적 요소로 Vg라 설정하였고, 분석적 양식과 관련된 것은 국소적 요소로 Al이라 설정하였다.

네 번째 범주는 직관에 대한 선호와 관련된 것으로, 학생들의 추론적 사고를 비형식적이고 개연적인 방향으로 유도하는지 아니며 형식적이고 논리적인 방향으로 유도하는지에 관한 것이다. 이 범주에서 시각적 양식과 관련된 것은 직관적 요소로 Vi라 설정하였고, 분석적 양식과 관

련된 것은 형식적 요소로 Af라 하였다.

다섯 번째 범주는 이미지 또는 기호에 대한 선호에 관한 것으로, 개념을 설명할 때 시각적이고 사실적인 묘사를 선호하는지 아니면 기호, 식 중심의 표현과 개념 정의를 통한 설명을 선호하는지에 관한 것이다. 이 범주에서 시각적 양식과 관련된 것은 영상적 요소로 Vc라 설정하였고, 분석적 양식과 관련된 것은 추상적 요소로 Aa라 설정하였다.

이와 같이 5가지의 범주에 묶인 요인들은 연구자가 시각적 양식과 분석적 양식의 특성을 더 명확하게 드러내기 위해 선행 연구 결과들을 수렴하여 범주화 한 것으로, 각 범주에 대한 특성이 더 많이 드러날 뿐이지 하나의 양식 내에서 다른 범주의 요인들과 전혀 다른 속성을 지닌 요인이라고는 할 수는 없다. 이러한 결과를 종합하여 <표 IV-2>와 같이 수학 인지 양식 분석틀을 개발하였다.

<표 IV-2> 수학 인지 양식의 다섯 가지 범주

범주	시각적	혼합적	분석적
1	<Vp>현상적		수치적<An>
2	<Vd>동적 변화		정적 대상<As>
3	<Vg>통합적		국소적<Al>
4	<Vi>직관적		형식적<Af>
5	<Vc>영상적		추상적<Aa>

2. 수학 교사의 양식 분석 결과

본 절에서는 앞서 설정한 수학 인지 양식 분석틀과 분석 방법을 이용해 수학 교사가 실제 수업에서 사용하는 수학적 언어에 반영되는 수학 교수 양식을 유형별로 분류해보았다.

가. 수학 교수 양식 사례 분석

○ 시각적 교수 양식

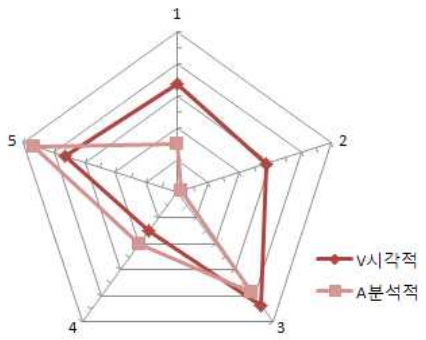
본 연구에서 설정한 수학 교수 양식 분석법을 활용하여 중학교 교사 M2의 수학 수업에 대해 빈도 분석한 결과는 <표 IV-3>와 같다.

<표 IV-3> 교사 M2 양식 빈도 분석

분류항목			빈도	백분율(%)
교사의 설명	시각적 양식	Vp.	27	12.11
		Vd.	23	10.31
		Vg.	35	15.70
		Vi.	12	5.38
		Vc.	29	13.00
		계	126	56.50
	분석적 양식	An.	12	5.38
		As.	1	0.45
		Al.	31	13.90
		Af.	16	7.17
		Aa.	37	16.59
		계	97	43.49
총계			223	100.00

교사 M2가 8차시 수업에서 사용한 수학적 언어를 대상으로 분석한 결과 전사 자료에 기록된 코드 전체 수는 223번이었고, 이 중 시각적 양식의 하위 요소가 126번 나타나 56.50%를 차지했고, 분석적 양식 하위 요소가 97번 나타나 43.49%를 차지하였다. 즉, 교사 M2는 자신의 수학 수업에서 시각적 양식 하위 요소를 더 빈번히 사용하므로 시각적 교수 양식을 가진 것으로 분류할 수 있다. 교사 M2는 시각적 양식의 항목 중 Vp, Vd, Vg, Vc의 활용 비중이 높음을 알 수 있다. 빈도가 높은 순서대로 나열해보면 Vg항목은 15.70%, Vc항목은 13.00%, Vp항목은 12.11%, Vd항목은 10.31%에 해당하며, Vi항목은 5.38%의 낮은 빈도를 나타내고 있다. 또한, 분석적 교수 양식 중에서도 Al항목이 13.90%, Aa가 16.59%로 나타나 이 두 항목에 대한 활용 빈도가 상대적으로 높은 것으로 나타났다. 즉, 특정 양식을 선호하는 교사라도 각 양식의 하위 범주 중 선호하지 않는 항목이 있을 수 있음을 알 수 있다.

빈도 분석을 통해 얻어진 M2의 교수 양식 프로파일을 방사형 그래프로 표현하면 [그림 IV-1]과 같다.

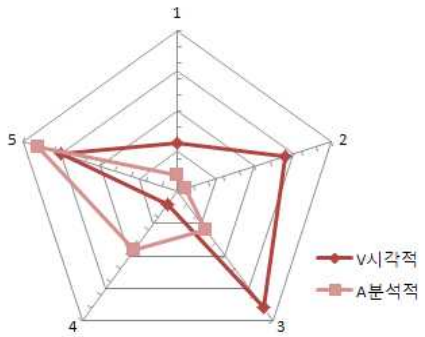


[그림 IV-1] 교사 M2 교수 양식의 분포

그래프의 꼭짓점에 해당된 숫자는 5개 범주를 나타내며 그래프 안쪽 영역의 크기가 클수록 영역이 나타내는 양식에 더 치우치는 것으로 볼 수 있다. [그림 IV-1]에서 교사 M2는 시각적 교수 양식이 분석적 교수 양식보다 더 큰 영역으로 분포되어있고, 시각적 교수 양식의 분포 형태는 사다리꼴 형으로 하위 범주 중 Vi를 제외한 네 개의 항목은 수업에서 다양하게 활용되고 있는 것을 알 수 있다.

즉, 교사 M2는 시각적 양식을 선호하며, 과정, 움직임을 표현하는 설명과 전체적으로 지각하고 비유 또는 은유를 사용해 다른 영역과 연결해서 설명하는 것을 선호한다고 할 수 있다. 또한, 묘사적인 형태의 설명을 통해 이미지 중심으로 이해시키려고 노력하는 것으로 나타났다. 그러나 분석적 양식을 아주 배제한 설명을 하는 것은 아니고, 항목별로 보았을 때 각 개념의 특징을 구획화하여 설명하거나 개념 정의를 활용하는 설명은 시각적 양식의 항목들 못지않게 빈번하게 활용하는 교수 양식을 가지고 있었다. 정리하면 교사 M2의 설명은 시각적 교수 양식 형태가 많고 하위 범주의 항목들을 다양하게 활용하는 특징을 갖는다.

동일하게 시각적 양식으로 분류된 교사 M1의 프로파일인 [그림 IV-2]를 교사 M2의 프로파일과 비교해보면, 두 교사는 공통적으로 Vd, Vg, Vc 항목을 더 선호하며, 시각적인 양식을 선호함에도 불구하고 Vi항목에 대한 활용빈도가 낮다는 특징이 있다. 이러한 공통성은 시각적 교수 양식을 가진 교사들에 대한 더 많은 조사를 통해 시각적 양식을 선호하는 교사들의 특징으로 일반화될 가능성을 가진다고 볼 수 있다. 또한, 시각적 양식을 나타내는 교사가 시각적 양식 하위 요소인 Vi 항목의 활용 빈도가 낮다는 것은 다른 양식을 선호하는 교사들도 그럴 가능성이 크다는 것을 내포한다. 실제 분석 결과에서는 6명의 교사 중 5명이 Vi 항목을 잘 활용하지 않는 것으로 나타났다.



[그림 IV-2] 교사 M1 교수 양식의 분포

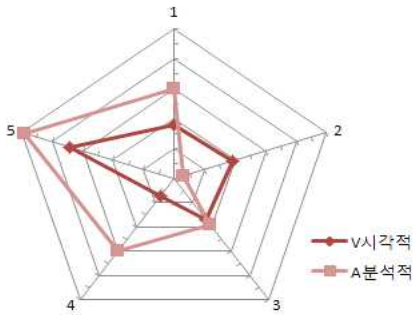
○ 분석적 교수 양식

분석적 교수 양식을 선호하는 것으로 분류된 교사 M3의 빈도 분석 결과는 <표 IV-4>에 나타나 있다. 이에 따르면 교사 M3의 설명은 분석된 항목 중 시각적 양식 관련 항목이 92개로 42.01%를 차지하고 있었고, 분석적 양식 관련 항목이 127개로 57.99%를 차지하고 있었다.

<표 IV-4> 교사 M3 양식 빈도 분석

분류항목			빈도	백분율(%)
교사의 설명	시각적 양식	Vp.	18	8.22
		Vd.	19	8.68
		Vg.	14	6.39
		Vi.	7	3.20
		Vc.	34	15.53
		계	92	42.02
	분석적 양식	An.	29	13.24
		As.	3	1.37
		Al.	17	7.76
		Af.	29	13.24
		Aa.	49	22.37
		계	127	57.98
합계			219	100.00

교사 M3는 분석적 양식 중 An, Af, Aa항목을 많이 활용하는 것을 알 수 있다. 비율 순으로는 Aa항목이 22.37%로 가장 많은 비율을 차지하고 있고, An, Af항목이 동등하게 13.24%를 차지하고 있었다. 그러나 교사 M3가 분석적 양식에 치우친 것으로 나타났음에도 불구하고 분석적 양식 항목 중 As는 1.37%로 수업에 거의 활용하지 않는 것으로 나타났다. 반면에 시각적 양식 항목은 대부분 비슷하게 낮은 빈도로 활용되고 있었으며, Vc항목은 15.04%로 다른 항목에 비해 자주 활용하는 것을 확인할 수 있다. [그림 IV-3]의 그래프에는 교사 M3의 교수양식 프로파일이 나타나있다.



[그림 IV-3] 교사 M3 교수 양식의 분포

그래프에 따르면 연한 실선으로 나타나 있는 분석적 양식이 진한 실선으로 표현되어 있는 시각적 양식에 비해 넓게 분포되어 있음을 알 수 있다. 이는 교사 M3가 수업에서 사용한 수학적 언어가 분석적 양식에 좀 더 치우친다는 것을 의미한다. 범주별로 살펴보면 1, 4, 5범주에서 분석적 양식이 우위를 점하고 있으며, 3범주에서는 시각적 양식과 분석적 양식이 비슷하게 나타나지만 두 항목 모두 빈도가 낮은 것으로 나타났다. 분석적 양식을 나타내는 그래프에서 다른 영역에 비해 2범주인 As항목 방향이 오목한 형태로 나타고 있어 As항목이 모든 항목 중 가장 활용도가 낮다는 것을 알 수 있다. 또한, 시각적 양식을 선호하는 것으로 분류된 M1, M2 교사와 마찬가지로 Vc와 Aa에 해당하는 5범주의 활용도가 가장 높은 것으로 분석되어, 시각적 양식 또는 분석적 양식에 치우치는 교사들이 모두 5범주를 강조하고 있는 것으로 나타났다.

○ 혼합적 교수 양식

혼합적 양식으로 분류된 교사는 M4, M5, M6 이었다. 이 교사들의 양식별 빈도 조사 결과는 <표 IV-5>와 같다.

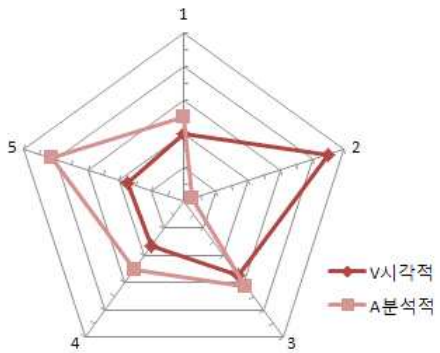
<표 IV-5> 교사 M4, M5, M6 양식 빈도

분류항목		빈도	백분율(%)
M4	시각적 양식	49	49.00
	분석적 양식	51	51.00
	총계	100	100.00
M5	시각적 양식	101	50.25
	분석적 양식	100	49.75
	총계	201	100.00
M6	시각적 양식	61	50.83
	분석적 양식	59	49.17
	총계	120	100.00

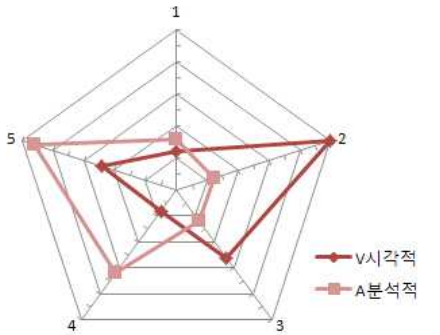
이 세 명의 교사는 시각적 양식과 분석적 양식 요소들의 빈도가 거의 유사하게 측정되었다. 그러므로 이 교사들은 교수 양식이 어느 한쪽에

치우쳐 있지 않고 수업에서 두 가지 양식을 거의 동등한 비율로 섞어서 활용하고 있는 것이다. 이는 선행 연구들에서 두 극단의 양식이 혼합되어 나타날 수 있다고 주장한 것과 일치되는 결과로 이 교사들은 혼합적 양식을 가졌다고 할 수 있다. 특징적인 것은 이 교사들이 연구 대상 중 경력이 높은 편에 속한다는 점이다.

또한, 같은 혼합적 양식으로 분류되었음에도 불구하고, 교사 M4, 교사 M5의 수업과 교사 M6의 수업 분석 결과는 조금 다른 양상을 보였다. 교사 M5와 M6의 양식을 나타낸 그래프는 [그림 V-4], [그림 V-5]와 같이 두 양식이 비슷한 크기로 분포되어 있다.



[그림 IV-4] 교사 M5 교수 양식의 분포



[그림 IV-5] 교사 M6 교수 양식 분포

M5는 시각적 양식과 분석적 양식이 비슷한 면적을 차지하고 있음을 알 수 있다. 그러나 2범주를 제외한 모든 범주에서 분석적 양식이 더 우세하게 나타나고 있으며, 2범주인 As항목을 거의 사용하지 않는 것에 비해 4범주인 Vd항목의 비율이 높아서 두 양식이 비슷한 비율로 사용된 것으로 나타난다. 또한 교사 M5의 그래프의 분포는 교사 M3의 그래프와 전체적으로 유사한 형태를 나타내고 있다. 이는 교사 M5의 양식이 분석적 양식에서 변형된 형태라는 것을 알 수 있다.

반면, M6은 시각적 양식이 오른쪽 날개에 해당하는 2범주와 3범주에서 우세하고, 분석적 양식이 왼쪽 날개에 해당하는 4범주와 5범주에서 우세하다. 또한 1범주는 두 양식이 분석적 양식이 약간 우세하지만 유사한 비율로 나타나고 있음을 확인할 수 있다. <표 IV-6>에 나타나있는 교사 M6의 양식 빈도 분포를 통해 교사 M6의 양식을 자세히 살펴보면 다음과 같다.

<표 IV-6> 교사 M6 양식 빈도 분석

분류항목			빈도	백분율(%)
교사의 설명	시각적 양식	Vp.	6	5.00
		Vd.	25	20.83
		Vg.	14	11.67
		Vi.	4	3.33
		Vc.	12	10.00
		계	61	50.83
	분석적 양식	An.	8	6.67
		As.	6	5.00
		Al.	6	5.00
		Af.	16	13.33
		Aa.	23	19.17
		계	59	49.17
총계			120	100.00

많이 나타나는 항목 순서로 교수 양식의 빈도를 살펴보면 Vd항목 20.83%, Aa항목 19.17%, Af항목 13.33%, Vg항목 11.67%, Vc항목 10.00%의 순으로 나타났으며, Vi항목이 3.33%로 가장 낮은 빈도로 나타남을 확인할 수 있었다.

이에 따르면 교사 M6은 같은 혼합적 양식 내의 두 교사와는 다른 형태의 혼합 양상을 가지고 있다. 교사 M5가 2범주를 제외한 모든 범주에서 분석적 양식이 우세한 것과는 다르게 M6은 두 가지 양식을 골고루 활용하고 있다. 이처럼 혼합적 양식 내에서도 서로 다른 혼합 양상이 나타나고 있으므로, 이 교사들에 대한 자세한 수업 분석을 통해 사용하는 수학적 언어의 특징을 파악할 필요가 있다.

항목이 분류된 전사 자료를 통해 실제 수업에서 교사들이 사용하는 수학적 언어를 분석한 결과 혼합적 양식을 가진 교사들의 설명은 한 가지 요소로 분류되지 않고, 두 가지 항목에 해당되는 경우들이 발견되었다. 이 때, 두 교사는 각 양식의 요소들을 혼합하여 사용하는 방식이 다르게 나타났다. 빈도 분석에서 혼합적 양식을 가지지만 범주별로 보았을 때 2범주를 제외하고 분석적 양식이 우세했던 교사 M5의 설명은 두 가지 항목에 해당하는 경우, 한 가지 양식의 하위 요소들 끼리 혼합해서 사용하는 경우가 대부분이었다. 다음은 M5의 설명 중 분석적 양식 3범주의 구획화 요소(Al)와 5범주의 개념 정의(Aa)가 동시에 나타난 것으로 분석된 교사의 설명 예시이다. 교사는 도형을 각각의 점, 선분 등 구성 요소들로 분할하여 구획화하면서 그 특징을 통해 도형의 정의를 지도하고 있다.

교사 M5: 자 우리 다각형 지난 시간에 배웠었지. 다각형의 정의가 무엇이었더냐? 그렇지. 선문으로 이루어진 도형이라고 이야기를 했는데, 자 몇 개 이상의 선분? 3개 이상의 선분으로 이루어진 도형. 자 평면 도형 중에서 선분으로 둘러싸인 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형 이런 것을 다각형이라고 했어요. 자 여기에서 자 변? 선분을 변이라고 그러고, 선분의 양 끝점을 뭐라고 불렀어? 꼭지점 5개 있었죠. 오각형이에요. 그 다음에 대각선은?...

반면, 범주별로 보았을 때 두 양식 하위 요소를 대체로 비슷하게 활용한 M6의 설명은 두 가지 항목에 해당하는 경우 서로 다른 양식 요소들끼리 혼합되는 경우가 많았다. 다음은 M6 설명 중 시각적 양식 2범주의 동적 요소(Vd)와 분석적 양식 4범주의 형식적 요소(Af)가 함께 나타난 것으로 분석된 교사의 설명 예시이다. 이 수업에서 M6은 그래프가 그려지는 동적 과정을 설명하는 데 형식적 기호와 식을 함께 도입하고 있음을 알 수 있다.

교사 M6: x축, y축 써주시고요, 길게길게 늘여주세요. 얘는 x를 아무거나 하나 찍어보세요. x에 얼마를 곱하는데? y=3x니까 그럼 얘는 어디를 지나는 직선이다? 원점과 (2, 6)을 지나는 직선이다. 그러면 여기 원점이 있지? (2, 6)을 찍어보세요. 그렇지 원래는 점을 다 찍어야 하는데, 2일 때 4를 지나간데. 그리고 x축, y축 다 찍어 줘야지.

이처럼 서로 다른 요소들을 하나의 설명 안에서 혼합하는 설명 방식은 앞서 시각적 또는 분석적 양식으로 분석된 교사들에게는 거의 나타나지 않은 것이다. 이 두 가지 혼합 방식은 기술적으로는 동일한 것이라 할 수 있으나 하나의 양식 내에서 두 가지 요소들을 혼합해서 사용하는 경우와 두 양식의 요소들을 넘나들면서 혼합해서 사용하는 경우는 교수 양식에 차이가 있다고 볼 수 있다.

나. 수학 교수 양식의 특징

선행 연구 분석을 통해 정리한 수학적 사고 요소들의 특징과 각 양식별로 분류된 교사들의

수업 사례 분석 결과를 종합하여 수학 교사들이 사용하는 수학적 언어에 반영되는 교수 양식의 특징을 파악해보면 다음과 같다.

시각적 양식으로 분류된 수학 교사는 수업에서 현실 맥락을 통해 전체적인 양감을 파악하고 직관적인 비교와 발산적인 사고를 유도하는 설명을 주로 사용하는 것을 확인할 수 있었다. 또한, 은유와 같은 비유법을 활용해 영역 간, 내용 간의 통합을 강조하고, 묘사를 통해 수학적 개념을 설명하는 것을 선호하였다. 이에 따라 풍부한 표현이 담긴 언어를 구사하게 되며, 학생들에게 개념의 이해를 위한 많은 자원을 제시할 수 있게 된다. 그러나 자칫 잘못하면 복잡한 메시지를 전달하게 되어 설명이 길어지고 메시지 전달 과정에서 잡음이 섞이게 된다. 그렇기 때문에 지식이 전달되는 과정에서 파손되는 부분이 많아지고 명확성이 떨어져 학생들이 잘못 이해하거나 오개념이 형성될 가능성이 높아질 수 있다.

반면, 분석적 교수 양식으로 분류된 교사는 논리적이고 형식적인 언어를 사용하므로 비본질적 요소들을 제거하고 간단명료한 방식으로 설명하게 된다. 그러므로 수치적인 표현을 강조하고 고정된 대응관계를 가진 형식적 언어를 사용하여 내용을 전달하기 때문에 내용 표현의 추상성이 높아지게 된다. 이러한 양식을 가지게 되면 가르칠 지식 위주로 간략하게 메시지를 전달하게 되어 의사소통 과정에서 잡음이 섞일 위험이 적지만 표현에 있어서 세밀함과 정교함이 떨어지기 때문에 학생들이 추상성이 높은 내용을 이해하기 위해서는 많은 인지적 부하가 생길 수 있다.

두 양식을 대등하게 나타나는 것으로 정의한 혼합적 양식은 사실 일반적인 양식의 정의에 부합하는 것은 아니다. 왜냐하면 양식은 개인의 선호도를 나타내며, 두 가지 선호 양식이 섞여서 나타나는 것은 한 측면에 치우치는 선호도라고 할 수 없기 때문이다. 그러나 본 연구에서는 선행 연구결과들을 토대로 혼합적 양식이 나타날 수 있다는 것을 가정하고 사례 분석을 통해 실제로 수학 교사들에게 혼합적 양식이 나타날 수 있다는 것을 확인하였다. 즉, 본 연구에서는 혼합적 양식이 나타날 수 있다는 것을 밝힘으로써, 한쪽 측면에 치우쳐 나타날 수 있는 학생들의 학습 양식을 모두 보완해줄 수 있는 혼합적 양식을 교사들이 가질 수 있는 가능성을 얻은 것이다.

이러한 연구 결과는 기존의 수학 학습 능력 및 양식 연구에서 설정하는 혼합적 양식의 두 가지 형태와 매우 다른 것이다. Krutetskii(1976)의 연구와 같은 기존의 수학 학습 능력 및 양식 연구에서는 혼합의 정도에 따라 분석적 양식에 치우친 혼합 양식과 시각적 양식에 치우친 혼합 양식으로 혼합적 양식을 나누고 있다. 그러나 이는 학습 능력의 측면에서 보았을 때 시각적 양식으로부터 분석적 양식으로 발전되는 과도기적 양식으로 혼합적 양식을 정의하는 모델에 적합한 분류 방식이라 할 수 있으며, 아직 수학 내용을 배우고 인지구조가 발전해나가는 단계에 있는 학생들에게 적용할 수 있는 관점이다. 그러나 교사들은 이미 수학 내용을 알고 있는 상태에서 이를 탈개인화, 탈배경화하는 과정을 거쳐서 전달 매개체로 변환한다. 그렇기 때문에, 개인의 인지적 선호에 의해 양극단의 양식 중 하나를 선택하고 이를 유지하거나 혼합적 형태로 변화하게 되므로, 한쪽 극단에서 다른 극단으로 발전해가는 전자 형태의 모델은 교수 양식 모델로 적절하지 않다고 할 수 있다.

또한, 본 연구에서 혼합적 양식은 혼합 방식에 따라 두 가지 유형으로 나타나는 것을 확인하였다. 즉, 같은 혼합적 양식으로 분류되었음에도 불구하고, 교사 M4, 교사 M5의 수업과 교사 M6의 수업 분석 결과는 조금 다른 양상을 보였는데, 혼합적 양식 중 M4 또는 M5는 전체적으로

는 두 양식 요소들을 동등한 비율로 사용하지만 2범주를 제외하고 분석적 양식이 우세하였다. 이와 같이 혼합적 양식을 가졌지만 범주별로 보았을 때 한쪽 양식에 치우치는 교사들은 단순히 두 영역을 동등한 비율로 결합하여 사용한다고 볼 수 있으며, 각 양식 내에서 하위 요소 간의 통합이 가능하다. 이에 반해 M6과 같은 경우는 서로 다른 양식의 항목들끼리 양식 간 혼합이 이루어지는 형태로 설명을 전개하였다. 이 양식은 두 양식을 각각 활용하기도 하지만, 두 양식 형태의 설명을 필요한 순간에 동시에 활용할 수도 있기 때문에 더 발전된 차원이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 혼합적 교수 양식 중 전자를 결합형이라 하고, 후자를 융합형이라 하였다.

수학 학습의 내용에 있어서 시각적 양식과 언어적 양식은 서로 상보적이며(백희수, 2009), 학습 과제가 두 가지 양식 형태로 동시에 제시될 때 학습자의 인지적 부하를 줄일 수 있고(Paivio, 1991), 두 양식을 연결하여 활용할 때 수학 학습에 효과적이다(Schmeck, 1988). 즉, 한쪽 양식에 치우치는 것에 비해 혼합적 양식이 학생들의 이해도를 높일 수 있다(Schmeck, 1988). 학생들의 수학 학습 양식이 한쪽에 치우치는 경우 다른 양식으로 지도하는 교사의 설명을 이해하기 어려우며, 이와 반대로 학생들은 두 양식을 모두 경험하여 자신의 학습 양식과 다른 쪽의 양식으로부터 새로운 방식의 이해를 얻을 수도 있기 때문이다. 이러한 연구 결과들은 융합형 교수 양식이 결합형 교수 양식에 비해 더 발전된 형태임을 지지하는 것이라 할 수 있다. 그러므로 교사들은 혼합적 교수 양식으로 나아가는 것을 지향해야하며 그 중에서도 융합형 교수 양식을 가질 수 있도록 노력해야 할 것으로 보인다.

Ⅴ. 요약 및 시사점

수업 상황에서 지식의 변형 및 전달은 교육의 주체로 활동하는 교사와 학생에 의해 일어나며 이에 따른 긍정적 또는 부정적 결과도 이들에 의해 발생하는 것이 대부분이다. 그러나 수업 상황에서 일어나는 지식을 통한 상호작용에 대한 연구는 학생 변인에 비해 교사 변인에 대해서는 체계적으로 이루어지지 못하고 있다. 이에 본 연구에서는 수학적 지식 전달 과정에서 나타나는 수학 교사의 교수 양식 분석 방법과 그 적용 방안에 대해 탐색해보았다.

본 연구는 크게 두 가지 목적을 가지고 진행되었다. 첫째, 수학 교수 양식을 분석하기 위한 분석틀을 고안하는 것이다. 이를 위해서는 문헌 분석을 통해 수학교육에서 강조되는 사고 요소들 중 시각적인 특성을 가지는 것과 분석적인 특성을 가지는 것으로 대비될 수 있는 요소들을 30가지 추출하였고, 이를 5가지로 범주화하여, 3가지 양식과 그에 따른 5가지 범주로 구성된 수학 교수 양식 분석틀을 설정하였다.

둘째, 수학 교사들의 수학적 언어에 교수 양식이 분포되어 있는 양상에 대한 연구이다. 앞서 구성한 수학 교수 양식 분석틀을 사용하여 실제 수업에서 수학 교수 양식이 나타나는 형태를 분석하였다. 이를 통해 실제로 수학 교사들 사이에 시각적 교수 양식, 분석적 교수 양식, 혼합적 교수 양식이 모두 나타난다는 것을 확인할 수 있었다. 또한, 혼합적 양식을 가진 교사들이 두 양식을 혼합하여 활용하는 방식에 차이가 나타난다는 것을 발견하였다. 즉, 혼합적 교수 양식을 가진 교사들은 두 가지 요소를 단순히 유사한 비율로 사용하거나, 하나의 양식 내에서 하위 항목끼리 혼합한 형태의 설명을 하는 결합형 교수 양식과 시각적 양식과 분석적 양식의 하위 항목들을 동시간대에 유연하게 융합하여 사용하

기도 하는 융합형 교수 양식으로 나눌 수 있었다.

시각적 교수 양식과 분석적 교수 양식은 교사 개인의 인지적 사고 양식에 따라 한쪽으로 더 선호하는 경향이 나타날 수 있다. 또한, 교수 양식은 개인의 지속적이고 안정적인 선호도를 나타내는 것이므로 그 특성상 쉽게 바뀌지 않는다. 그러나 교사는 가르칠 지식의 온전한 전달을 위해 두 양식 중 자신의 양식과 다른 부분을 보완함으로써 혼합적 양식으로 나아가야 할 것이다. 이를 위해서 교사들이 스스로 자신의 교수 양식을 파악하고, 강점과 약점을 분석하여 이를 보완할 필요가 있을 것이다.

본 연구는 연구 대상 교사의 수가 적고, 학교급이 중학교로 한정되어 있어 연구 결과를 일반화하기에는 제한이 있다. 그러므로 본 연구 결과를 발판으로 하여 수학 교수 양식 분석틀을 더 정교하게 개발하는 인지 중심의 교수 양식 연구, 수학 교수 양식 분석틀을 활용하여 우리나라 교사들의 특성을 파악하고 다른 나라 교사들과의 차이점을 파악하는 비교 연구, 수학 교수 양식과 학습 양식이 학업 성취도에 미치는 영향에 관한 연구 등을 후속 연구로 제안한다.

참고문헌

고정화(1998). **학교수학의 언어적 측면에 대한 분석**. 석사학위논문. 서울대학교.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

김선희, 이종희(2003). 중학생들의 수학적 언어수준. **수학교육학연구, 13**(2), 123-141.

김영천(2008). 질적연구방법론I. 서울: 문음사.

김종서, 김영찬 (1970). **수업형태 분석법**. 서울: 배영사.

백희수(2009). **수학학습 양식 구성요인 탐색과 수학학습자 유형 분류 연구**. 박사학위논문. 이화여자대학교.

변영계, 김경현(2006). **수업장학과 수업분석**. 서울: 학지사.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

윤채원(2007). **고등학교 1학년 학생들의 수학적 언어 수준 비교 연구**. 석사학위논문. 한국교원대학교.

이화정(2006). **언어를 통해 바라본 수학적 사고의 확장**. 석사학위논문. 고려대학교.

Amidon, E. J., & Flanders, N. A. (1967). *The role of the teacher in the classroom*. Minneapolis, MN: Association for Productive Teaching.

Dreyfus, T. (2007). **고등수학적 사고 과정**. 수록처: 고등 수학적 사고. 류희찬, 조완영, 김인수 역. 서울: 경문사. (원본은 1991년 출판).

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. 7*(3), 275-282. Publisher: Springer.

Ferri, R. B. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematikdidaktik, 31*(2), 99-118.

Fischbein, E. (2006). **수학 과학 학습과 직관**. 우정호, 박교식, 이종희, 유현주, 김수미, 장혜원, 서동엽, 나귀수 역. 서울: 경문사. (원본은 1987년 출판).

Fischer, B. B., & Fischer, L. (1979). Style in teaching and learning. *Educational Leadership, 36*(4), 245-254.

Galton, F. (1883). *Inquiries into human faculty and its development*. London: MacMillan & Co.

Kirby, J. R. (1988). Style, strategy, and skills in

reading. In R. R. Schmeck (Ed.), *Learning strategies and learning styles*(pp. 229-274). New York: Plenum Press.

Krabbendam, H. (1982). The non-quantitative way of describing of relations and the role of graphs. *Conference of functions report1* (125-146). Enschede: SLO Foundation for curriculum development.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Wirszup, I. & Kilpatrick, J., (Eds.). Chicago: The University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Nunez, R. E. (2009). 수학의 은유적 구조. 수록처: **수학적 추론과 유추, 은유, 이미지**. 권석일, 김성준, 나귀수, 남진영, 박문환, 박영희, 변희현, 서동엽, 이경화, 장혜원, 최병철, 한대희, 홍진곤 역. 서울: 경문사. (원본은 1997년 출판).

Massa, L. J., & Mayer, R. E. (2006). Testing ATI hypothesis: should multimedia instruction accommodate verbalizer visualizer cognitive style? *Learning and Individual Differences, 16*(4), 321 – 335.

Paivio, A. (1991). Eual coding theory: Retrospect and current status. *Canadian Journal of Psychology, 45*(3), 255-287.

Riding, R. J., & Rayner, S. (1998). *Cognitive styles and learning strategies: Understanding style differences in learning and behavior.* London, UK: David Fulton Publishers.

Schmeck, R. R. (1988). *Learning Strategies and Learning Styles.* New York: Plenum Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Skemp, R. R. (2000). **수학학습 심리학**. 황우형 역. 서울: 사이언스북스. (원본은 1987년 출판).

Sternberg, R. J. (1997). *Thinking Styles.* New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. & Grigorenkon, E. L. (2001). A Capsule History of Theory and Research on Styles. In Sternberg, R. J., Zhang, L. F.(Eds.), *Perspectives on thinking, learning, and cognitive styles* (pp. 1-22). London: Lawrence Erlbaum Associations.

Villarreal, M. (2000). Mathematical thinking and intellectual technologies: The visual and the algebraic. *For the Learning of Mathematics, 20*(2), 2-7.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: the effect of changing the scale. *Educational studies in mathematics, 49*(1), 119-140.

A study about the analysis of mathematical teaching styles

Park, Ji Hyun (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)
Lee, jeong Hee (Ewha Womans Uinversity)

This study attempts to create an analytical framework of the transformation and transmission of knowledge by teachers to students. I focuses on the assertion that the cognitive thinking of a teacher is reflected in his use of mathematical language. Mathematical language is one of the critical elements of communicating mathematical knowledge to students. I examined the cognitive teaching style of different teachers as expressed in their use of mathematical language.

An analytical framework of Mathematics Teaching styles was created integrating thinking factors of each visual and analytic style into 5 categories. After that, I regarding the teaching style of mathmatics teachers places its significance not on which teaching style is right or wrong but on identifying the strong and weak points of the teaching styles through actual analysis. With the help of this analytical framework, I conducted an analysis on the videotaped classes and found that the teachers were not biased to one side but in fact there were teachers who demonstrated visual, analytic or mixed teaching style.

Therefore, I concludes that math teachers can analyze their teaching styles and improve them through the analytical framework provided in these findings.

* Key Words : Mathematical teaching style(수학 교수 양식), Cognitive style(인지적 양식)

논문접수 : 2013. 4. 29
논문수정 : 2013. 5. 31
심사완료 : 2013. 6. 14

[부록] 사고 요소별 설문 문항

사고 요소		문항
공간적	질적	그래프를 지도할 때 전체적인 모양이나 변화 양상을 해석해주는 것에 비중을 둠
	비수치적	양을 비교할 때 수치를 구하는 것 보다는 전체 양이나 크기를 가늠하여 대략적으로 비교하는 데 더 중점을 둠
	현상적 해석	수학 내용의 현실적 의미와 그 쓰임을 해석하는 데 중점을 둠
동적	조작적	등호'='는 양쪽이 대등하다는 의미보다는 한쪽 계산을 했을 때 다른 쪽에 결과가 나오는 과정으로 설명함
	동적	삼각형의 내각의 합을 지도할 때 한 각의 위치를 변화시켜보면서 내각의 합이 일정함을 설명하는 데 중점을 둠
	과정	세는 과정, 문제를 푸는 과정 등 과정에 중점을 둠
전체적	연결성	개념의 전체적 개요를 중심으로, 알고 있는 개념과 가르칠 개념 간의 연계성을 이해시키는 데 비중을 두어 지도
	정교화	함수-기계, 집합-그릇과 같은 각 개념의 은유적인 표현을 자주 사용
	전체적	수학 내적, 외적인 풍부한 맥락에서 구체적 예시를 많이 가져와서 전체적으로 밀도있게 설명
직관적	직관적	논리, 판단에 의존하지 않고 직관에 의존하여 개념의 특성을 직접적으로 파악하도록 지도
	우뇌적	수업을 준비할 때 설명을 위한 새롭고 창의적인 방법을 찾음
	개연적	형식적 증명 보다 개연적 설명과 비형식적 증명의 지도에 중점을 둠
영상적	개념 이미지	올바른 개념 이미지의 형성에 중점을 두어 지도
	묘사	현상을 묘사하거나 눈에 보이는 듯한 화법으로 설명
	구체적	좀 더 사실적이고 이미지화된 표현(노래, 이야기 등)을 사용하여 구체적으로 지도
수치적	양적	그래프를 지도할 때 각 점에 해당되는 값이나 순서쌍을 확인시키는 데 중점을 둠
	수치적	양을 비교할 때 대략적 비교보다는 정확한 값을 찾아 수치적으로 확인하도록 지도
	수학적 해석	측정하거나 계산을 하여 얻은 결과의 수학 내에서의 의미와 해석에 중점을 둠
정적	대상	함수 f(x)=y는 x에 따라 y가 변한다는 의미보다는 그 자체가 하나의 대상임에 더 중점을 두어 설명
	정적	삼각형의 내각의 합을 지도할 때는 한 삼각형을 중심으로 내각의 합이 180도임을 정당화하는 것에 중점을 둠
	구조적	문제 푸는 과정의 전체적 특성을 깨닫고, 과정 전체를 하나의 대상으로 생각하도록 지도
분석적	구획화	가르칠 개념을 새로운 구획으로 분리하여 공통점 보다는 각 개념들이 구분되는 차이점 중심으로 설명
	국소적	한 개념에 초점을 두고 그 개념 고유 속성을 깊이있게 이해시키려고 함
	단순화	개념의 본질적 속성을 중심으로 분석하여 작은 단위로 하위 개념을 나누고 단순화하여 지도하는 것을 선호
논리적	논리적	논리적 인과관계에 따라 개념을 이해하도록 단순하고 체계적으로 설명하는 것을 더 선호
	좌뇌적	기존에 제시되어 있는 교수 전략들을 검토하여 적절하게 수업에 적용
	형식적	형식적인 정당화와 증명에 더 많은 비중을 두어 지도
기호적	개념 정의	개념의 시각적 표상보다 정의를 명확하게 기억하는 것에 중점을 두어 지도
	추상적	이질적인 속성을 제거하고 개념의 본질적 속성을 나타낼 수 있는 추상화된 수학적 언어로 설명함
	기호적	수학적 기호나 언어를 사용하여 체계적이고 객관적으로 설명