

논문 2013-50-7-3

# The Toeplitz Circulant Jacket 행렬

## ( The Toeplitz Circulant Jacket Matrices )

박 주 용\*, 김 정 수\*\*, 페렌스 스졸로시\*\*\*, 이 문 호\*\*\*\*

( Ju Yong Park, Jeong Su Kim, Ferenc Szollosi, and Moon Ho Lee<sup>©</sup> )

### 요 약

본 논문에서는 모든 Toeplitz Jacket 행렬이 순환(circulant)하고 동치(equivalence)에 이름을 보여준다. 순환하고 동치에 이르면 Toeplitz Jacket 행렬의 새로운 구조를 만들 수 있다. Toeplitz Jacket(TJ) 행렬의 구성법을 제시하고  $4 \times 4$  과  $8 \times 8$  의 Toeplitz Jacket 행렬의 예를 제시 하였다. 따라서 Toeplitz real Jacket 행렬은 순환하거나 negacyclic임을 보여준다.

### Abstract

In this paper we prove that all Jacket matrices are circulant and up to equivalence. This result leads to new constructions of Toeplitz Jacket(TJ) matrices. We present the construction schemes of Toeplitz Jacket matrices and the examples of  $4 \times 4$  and  $8 \times 8$  Toeplitz Jacket matrices. As a corollary we show that a Toeplitz real Hadamard matrix is either circulant or negacyclic.

**Keywords :** Toeplitz Jacket Matrix, Complex Hadamard Matrix, Circulant, Negacyclic

## I. 서 론

Toeplitz 행렬<sup>[1-2]</sup>은 다음과 같은  $n \times n$  행렬  $T_n$  으로, 대각선을 따라 상수 원소를 가지고 있으며 좌상쪽으로부터 우하쪽으로 천이되는 구조를 가지고 있다.

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & & \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{-n+1} & \cdots & & & t_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

\* 평생회원, 신영대학교 인터넷정보통신학과 (Department of Internet, Information & Communication, Shyngyeong University)

\*\* 정회원, 숭실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과 (Department of Computer, Information & Communication, Korea Soongsil Cyber University)

\*\*\* Budapest University of Technology and Economic, Hungary

\*\*\*\* 평생회원, 전북대학교 전자공학부 (Division of Electronic Engineering, Chonbuk National University)

© Corresponding Author(E-mail: moonho@jbnu.ac.kr)

※ 본 연구는 한국연구재단 세계 수준의 연구중심대학 육성사업(World Class University, WCU R32-2013-000-20014-0, BSRP 2010-0020942, 그리고 MEST 2013-035305의 지원으로 수행되었음.

접수일자: 2013년2월25일, 수정완료일: 2013년6월20일

여기서 언급한 Toeplitz 행렬은 다음과 같이 두 가지로 분류된다. 첫 번째 분류는 순환행렬에 의해 형성된 것으로, 각 행벡터는 이전 열벡터와 관련되어 원소가 좌측에서 우측으로 rotation 된다. 특히, 식 (1)과 같은 rotation으로 순환 행렬 내에서  $i = 1, 2, \dots, n-1$ 에 대해  $t_i = t_{-n+i}$ 이다. 두 번째 Toeplitz 행렬의 분류는 negacyclic 행렬이다. 여기서는  $i = 1, 2, \dots, n-1$ 에 대해  $t_i = -t_{-n+i}$ 이다. Toeplitz 행렬에 대해서는 [2]에 상세하게 서술되어 있다.

본 논문에서는 Toeplitz Jacket 행렬의 존재 여부에 대해 논의한다.  $n$ 차 행렬  $M$  이 만약 그의 역행렬

$[M^{-1}]_{i,j} = \frac{1}{cm_{j,i}}$ 을 만족하면 행렬  $M$  을 Jacket 행렬이다<sup>[4-5]</sup>. 여기서  $c$  는 상수이고  $m_{j,i}$  는 역행렬  $M^{-1}$  의  $j$ 행  $i$ 열 원소를 의미한다. 즉, 역행렬은 원소단위의 역과 transpose로 얻어진다. 이에 대한 동치(equivalent)형태는 Jacket 행렬이 다음 관계를 만족할 때이다.

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_{i,k}}{m_{j,k}} = n\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

이식은 Jacket 행렬의 각 행간의 직교성이 존재함을 나타내고 있다. 이 Toeplitz Jacket 행렬은 MIMO (multiple input multiple output), 릴레이 협력 무선네트워크(relay cooperative wireless network)의 precoding 및 decoding에 이용된다<sup>[14-15]</sup>.

본 논문의 구성은 II장에서 기존 Toeplitz Circulant 행렬에 대해 서술하고, III장에서 제안 Toeplitz Jacket 행렬에 대해 서술하며, IV장에서는 Toeplitz Jacket 행렬의 구성 예를 제시하고, V장에서 결론을 맺는다.

## II. 기존 Toeplitz Circulant 행렬

식(1)에서 보인 바와 같이 이 행렬은 여러 분야에 응용된다. 여를 들어 다음 식에서  $x$ 는 열벡터로 입력을 나타내고,  $i > 0$ 일 때  $t_i$  는 영(zero)이다.

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})' = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

따라서 벡터는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y = T_n x = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ t_{-1} & t_0 & & & & & \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ t_{-n+1} & & & & & & t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_0 x_0 \\ t_{-1} x_0 + t_0 x_1 \\ \sum_{k=0}^2 t_{k-2} x_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=0}^{n-1} t_{k-n+1} x_k \end{pmatrix}$$

이때 행렬 원소는 다음과 같다.

$$y_i = \sum_{k=0}^i t_{k-i} x_k .$$

벡터는  $y$  는 임펄스 응답이  $t_k$  인 이산시간 코잘(causal) 시불변(time-invariant) 필터의 응답을 타나 내고 있다.

Toeplitz 행렬의 특별한 경우로 행렬의 각 행이 상위 행으로부터 한 사이클씩 오른쪽으로 이동하여  $t = 1, 2, \dots, n - 1$ 에 대해  $t_k = t_{-(n-k)} = t_{k-n}$  되도록 하면, 식 (3)처럼 표시되며 순환행렬(circulant matrix)이라 된다.

$$C_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-1)} \\ t_{-(n-1)} & t_0 & t_{-1} & & \\ t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{-1} & t_{-2} & \dots & & t_0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

이 행렬은 DFT(Discrete Fourier Transform)를 포함하여 오류수정을 위한 cyclic 부호연구에 이용되고 있다<sup>[2]</sup>.

Toeplitz 행렬에 대해 가장 잘 알려져 있고 논의되고 있는 중요한 결과는  $n$ 이 무한대로 증가함에 따라 고유값(eigenvalue)이 어떤 역할을 하는지를 다루는 Toeplitz 행렬  $\{T_n\}$ 의 시퀀스에 대한 Szegő의 정리이다. 다음식과 같은 영(zero)이 아닌 벡터  $x$ 가 존재한다면 복소수 스칼라  $\alpha$  는 행렬  $A$ 의 고유값이다.

$$Ax = \alpha x \quad (4)$$

이 경우  $x$  는  $A$ 의 고유벡터(eigenvector)이다. 고유값  $\{\alpha_i\}$ 가  $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \dots$ 와 같이 감소하지 않

는 형태의 순서로 되어 있는 경우, 이는 적분을 이용하여 근사화 될 수 있으며, Hermitian Toeplitz 행렬  $T_n = [t_{k-j}; k, j = 0, 1, 2, \dots, n-1]$  퀴스에 대한 고유값  $\{\tau_{n,i}; i = 0, 1, \dots, n-1\}$  점근적 역할을 다루는 Szegő의 정리에 일반성이 손실되지 않음을 의미한다. 이 정리는 몇 가지 만족해야할 기술적인 요구조건이 있다. 예를 들면 다음 식에 의해 서로 관련되어 있는 계수  $t_k$  인 Fourier series가 존재해야 한다는 조건이다.

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda}; \quad \lambda \in [0, 2\pi] \quad (5)$$

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (6)$$

그래서 시퀀스  $\{t_k\}$ 는 함수  $f$ 를 결정하고, 그 역도 마찬가지로 가능하다. 따라서 행렬의 시퀀스는 가끔  $T_n(f)$ 로 정의 된다. 만약  $T_n(f)$ 가 Hermitian 이라면 즉,  $T_n(f)^* = T_n(f)$  이라면,  $t_{-k} = t_k^*$  이고  $f$ 는 실수 값이다.

적당히 가정을 하면  $f$ 의 범위에서 연속인 함수  $F$ 에 대해 Szegő의 정리는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda \quad (7)$$

### III. 제안 Toeplitz Jacket(TJ) 행렬

제안한 Toeplitz Jacket 행렬은 어떤 제로(zero) 원소도 포함하고 있지 않다. 모든 원소가 모듈로(modulo) 1인 Jacket 행렬을 complex Hadamard 행렬이다<sup>[6-7]</sup>. 만약  $K$ 가 어느 Jacket 행렬이라면, 모든 치환(permutation) 행렬  $P, P^T$ 와 모든 가역적 대각행렬(invertible diagonal matrix)  $D, D^T$ 에 대해 Hybrid 행렬  $H = PDKD^T P^T$  또한 Jacket 행렬이다. 이러한 형태로 표시되는 Jacket 행렬은 동치(equivalent)이다. 동치에 까지 이르는 모든 Jacket 행렬을 찾아내는 것은 아주 어려운 문제여서 현재까지 차수가  $n \leq 5$ 인 경우 까지 찾아낸 상태이다<sup>[4]</sup>.

Jacket 행렬은 조합 분석(harmonic analysis)<sup>[8]</sup>에서 부터 쿼텀 정보이론(quantum information theory)<sup>[5]</sup>에 이르기까지 이론적으로 응용이 가능하며 또한 신호처

리<sup>[9]</sup>에도 응용된다. 특히, 최근에는 무선통신 네트워크(wireless communication network)<sup>[10]</sup>의 공간다중화를 실현하는데 이용되었고, [11]에서는 Jacket 행렬이 MIMO Multiple-Input multiple-Output)시스템에서 unitary beamforming을 분석하는데 이용되었다.

순환 Jacket 행렬은 90년대 초에 cyclic  $n$ -root 라는 문제의 솔루션(solution)을 찾으려던 Björck와 그의 공동 연구원들에 의해 심도있게 연구되었다<sup>[12]</sup>. 최근까지 순환 Jacket 행렬의 특성을 만족시킬 만한 연구는 아직 없으며, 오직 Groebner 베이스스 기법을 이용한 컴퓨터 대수적 기법을 통해서만이 이를 해결할 수 있는 유일한 방법이다.

Complex Hadamard 행렬의 새로운 예를 얻기 위한 방법으로 Toeplitz Jacket 행렬의 경우를 보면, 순환 행렬이 갖는  $n$  자유도(degree of freedom)와 비교되는  $n-1$  자유도를 일반적인 Toeplitz 행렬이 갖고 있기 때문에, 한눈에 보아도 그럴듯해 보인다. 그러나 Jacket의 성질은 Toeplitz 행렬 구조에 심각한 제한을 가하고 있다는 점이 발견되어 다음과 같은 결과를 증명했다.

**정리 1.** 모든 Toeplitz Jacket 행렬은 순환 Jacket 행렬과 일치한다.

**순환 및 Toeplitz Jacket 행렬 :** 먼저 순환 Jacket 행렬의 예로서 다음과 같은 예를 들 수 있다<sup>[12]</sup>.

**예 1.**  $n \geq 2$  을 적분수라 놓고,  $Z_n^*$  을 링(ring)  $Z_n$  의 invertible 원소라 놓으면,  $(\alpha, \beta) \in Z_n^* \times Z_n$  에 대해 다음과 같은 원소를 갖는 길이가  $n$  인 행벡터  $x(\alpha, \beta)$  에 대해 생각해보자.

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \left(\frac{\alpha k^2}{2} + \beta k\right)\right), & k \in Z_n, \quad n \text{ even}, \\ \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \left(\frac{\alpha k(k-1)}{2} + \beta k\right)\right), & k \in Z_n, \quad n \text{ odd}, \end{cases}$$

여기서  $i$ 는 복소수 허수를 의미한다. 첫 번째 행이  $x(\alpha, \beta)$  인 순환 complex Hadamard 행렬은 DFT행렬과 일치한다.

“Potts model”<sup>[10, 13]</sup>이라 부르는 순환 Jacket 행렬의 다른 예를 다음과 같이 들어 증명한다.

**예 2.**  $I_n$  과  $J_n$ 을 각각 단위 행렬과 모든 원소가 1인

$n$ 차 행렬이라 하고, 또  $\alpha_n$ 을 이차방정식  $\alpha^2 + (n-2)\alpha + 1 = 0$ 의 근이라 하자. 그러면 행렬  $P = (\alpha_n - 1)I_n + J_n$ 은 일종의 순환 Jacket 행렬이 된다. 단,  $n > 4$ 인 경우 치환행렬  $P$ 로부터 발생하는 행렬은 unimodular 원소를 갖지 않기 때문에 complex Hadamard 행렬이 아니다.

마지막으로  $n = 4$ 인 경우 다음과 같은 예를 들어 증명한다.

**예 3.**  $a, b, c$ 가 영이 아닌 복소수 일 때 다음과 같이 구성된 행렬은 모두가 4 차원의 Toeplitz Jacket 행렬이다.

$$[TJ]_4(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b & c & -\frac{bc}{a} \\ -\frac{ab}{c} & a & b & c \\ \frac{a^2}{c} & -\frac{ab}{c} & a & b \\ \frac{a^2b}{c^2} & \frac{a^2}{c} & -\frac{ab}{c} & a \end{bmatrix}$$

만약  $[TJ]_4^{-1}$ 이  $[TJ]_4$ 의 원소단위의 역행렬 (element-wise inverse) 이라면  $[TJ]_4([TJ]_4^{-1})^T = 4I_4$ 임을 쉽게 알 수 있다.

이제 구형 Toeplitz 행렬로부터 새로운 Toeplitz 행렬의 구성법을 제시하기 위해 먼저  $Diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 이 대각 원소가  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 인  $n \times n$  대각 행렬이다.

**명제 1.**  $T_n$ 는  $n$  차원 Toeplitz 행렬이고  $a$ 는 임의의 수,  $b$ 는 영이 아닌 복소수라면, 다음 식은 또한 Toeplitz 행렬이다.

$$T'_n = aDiag(1, b^{-1}, b^{-2}, \dots, b^{-n+1})T_nDiag(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \quad (8)$$

**증명 :**  $T'_n$ 의  $(i, j)$  원소는  $t_{i,j}ab^{j-i}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

**제안 1.**  $T_n$ 를 Toeplitz Jacket 행렬  $[TJ]_n$ 라 가정하면 식(1)에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t_{-l} = \frac{t_{-1}}{t_{n-1}}t_{n-l}, \quad l=1,2,\dots,n-1. \quad (9)$$

**증명 :** 식 (9)은  $l=1$ 일 때 만족함을 쉽게 알 수 있고,  $l=2$ 일 때 또한 만족함을 보이면,  $T$ 의 첫 번째 두 개의 행 내에서 식 (2)의 조건을 고려하면, 즉,  $(i, j) = (2, 1)$ 인 경우 다음 식을 얻는다.

$$\frac{t_{-1}}{t_0} + \frac{t_0}{t_1} + \dots + \frac{t_{n-2}}{t_{n-1}} = 0. \quad (10)$$

그 다음 행  $(i, j) = (3, 2)$ 의 쌍에 대해 식 (2)를 고려하면 다음 식을 유도 할 수 있다.

$$\frac{t_{-2}}{t_{-1}} + \frac{t_{-1}}{t_0} + \dots + \frac{t_{n-3}}{t_{n-2}} = 0. \quad (11)$$

양 측에  $\frac{t_{n-2}}{t_{n-1}}$ 을 더하고 식 (10)를 이용하면 결론적으로 식 (9)이  $l=2$ 일 때 역시 만족함을 알 수 있다. 특히,  $l=1$ 일 때 다음식의 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{t_{-l-1}}{t_l} = \frac{t_{n-l-1}}{t_{n-l}}, \quad l = 1, 2, \dots, n-2. \quad (12)$$

이제 수학적 유도를 통해  $1 \leq l \leq n-2$ 의 경우에 식 (12)가 만족됨을 증명한다. 이 식이 어떤  $l$ 에 대해 만족한다고 가정하면 행  $(l+3, l+2)$ 의 쌍에 대해 식 (2)의 조건을 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{k=1}^n \frac{t_{-l-2+k-1}}{t_{-l-1+k-1}} = 0. \quad (13)$$

그리고 식 (12)를 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{t_{-l-2}}{t_{-l-1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n-1}}^n \frac{t_{k-2}}{t_{k-1}} = 0. \quad (14)$$

누락된 항  $t_{n-l-2}/t_{n-l-1}$ 을 양측에 더하고 식 (10)를 통해 간소화 하면  $l+1$ 에 대해 결론적으로 식 (12)의 검증에 이른다. 결국 식 (12)가 연속되는  $t_{-l}$ 과  $t_{-l-1}$ 항을 연결시켜주는 것을 확인함으로써 증명이 완료된다. 명제 1과 제안 1의 결과 Toeplitz Jacket 행렬의 자유

파라미터(parameter) 수는 적어도  $n-1$  로서 정확히 순환 행렬에서와 같다. 이것은 정상은 아니나 정리 1의 유효성을 확신 시켜주는 요소로 볼 수 있다. 이걸 다시 한번 의도적으로 증명한다.

**정리 1의 증명 :** 식 (1)에서 처럼  $T_n$ 를 Toeplitz 행렬이라 하고  $x = \sqrt[n]{t_{-1}/t_{n-1}}$  이라 놓는다. 여기서  $\sqrt[n]{\cdot}$  은  $n$  번째 근을 의미한다. 명제 1에 의해 다음 행렬은  $C$  는 Toeplitz 행렬이다.

$$C_n = \text{Diag}(1, x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n+1}) T_n \text{Diag}(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) \quad (15)$$

뿐만 아니라 이 행렬은 순환행렬이다. 이를 확인하기 위해서는  $i = 2, \dots, n$ 에 대해  $c_{1,i} = c_{n-i+2,1}$  임이 확인된다.  $c_{1,i} = t_{i-1}x^{i-1}$  인 것은 확실하다. 반면에 제안 1에 의하면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} c_{n-i+2,1} &= t_{-n+i-1}x^{-n+i-1} = \frac{t_{-1}}{t_{n-1}} t_{i-1}x^{-n+i-1} \\ &= t_{i-1}x^{i-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

정리 1은 다음과 같이 순환 Jacket 행렬로부터 Toeplitz Jacket 행렬을 얻을 수 있는 직접적인 방법을 제시하고 있다.

**추론 1.**  $n > 1$  은 정수,  $a$ 와  $b$  는 영이 아닌 복소수라 하고  $C_n$  은  $n$  차 순환 Jacket 행렬이라 하면, 다음 행렬

$$[TJ]_n(a,b) = a \text{Diag}(1, b^{-1}, b^{-2}, \dots, b^{-n+1}) C_n \text{Diag}(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \quad (17)$$

은 2개의 자유 파라미터를 갖는  $n$  차 Toeplitz Jacket 행렬이 된다.

이제 Toeplitz real Hadamard 행렬에 대해 간단히 논의해 본다.

**추론 2.**  $H$  가 Toeplitz real Hadamard 행렬이라 하면  $H$  는 순환 하거나 negacyclic 이다.

**증명 :** 제안 1로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있

다. 만약  $t_{-1}/t_{n-1} = 1$  이면 식 (9)에 의해서  $l = 1, 2, \dots, n-1$  일 때  $t_{-l} = t_{n-l}$  이 되어 행렬은 순환한다. 반면에  $t_{-1}/t_{n-1} = -1$  이면  $t_{-l} = -t_{n-l}$  이 되어 negacycle이 된다.

$n > 4$ 인 경우에는 real 순환 Hadamard 행렬이 존재하지 않는다<sup>[6]</sup>.

예 4. 다음 행렬은 Toeplitz real Hadamard 행렬이라고 할 수 있으며 동치라고 할 수 있다.

$$H_1 = [1], \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

#### IV. Toeplitz Jacket 행렬의 구성 예

Toeplitz Jacket 행렬을 구성하기 위해서는 먼저 Jacket 순환 행렬이 필요하고, 이 행렬을 구성하기 위해서는 어떠한 Jacket 순환 행렬을 사용해도 가능하다.

##### 3.1. $4 \times 4$ Toeplitz Jacket 행렬

$4 \times 4$  Toeplitz Jacket 행렬을 구성하기 위해서 먼저  $4 \times 4$  순환 행렬이 필요하다. 다음과 같은  $4 \times 4$  순환 행렬  $C_4$  를 선택한다.

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ -a & 1 & a & 1 \\ 1 & -a & 1 & a \\ a & 1 & -a & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

다음과 같은 대각행렬  $D_4$ 를  $C_4$ 에 좌측과 우측에 곱해  $4 \times 4$  Toeplitz Jacket 행렬  $[TJ]_4$ 을 구성한다.

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[TJ]_4 = c D_4^{-1} C_4 D_4 = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ -a & 1 & a & 1 \\ 1 & -a & 1 & a \\ a & 1 & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c & abc & b^2c & -ab^3c \\ -\frac{ac}{b} & c & abc & b^2c \\ \frac{c}{b^2} & -\frac{ac}{b} & c & abc \\ \frac{ac}{b^3} & \frac{c}{b^2} & -\frac{ac}{b} & c \end{bmatrix}. \quad (20)$$

$$[TJ]_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{(-\frac{ac}{b})} & \frac{1}{\frac{c}{b^2}} & \frac{1}{\frac{ac}{b^3}} \\ \frac{1}{abc} & \frac{1}{c} & \frac{1}{(-\frac{ac}{b})} & \frac{1}{\frac{c}{b^2}} \\ \frac{1}{b^2c} & \frac{1}{abc} & \frac{1}{c} & \frac{1}{(-\frac{ac}{b})} \\ \frac{1}{(-ab^3c)} & \frac{1}{b^2c} & \frac{1}{abc} & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \quad (21)$$

따라서  $[TJ]_4$ 와  $[TJ]_4^{-1}$ 를 곱하면 다음과 같이 단위 행렬이 됨을 알 수 있다.

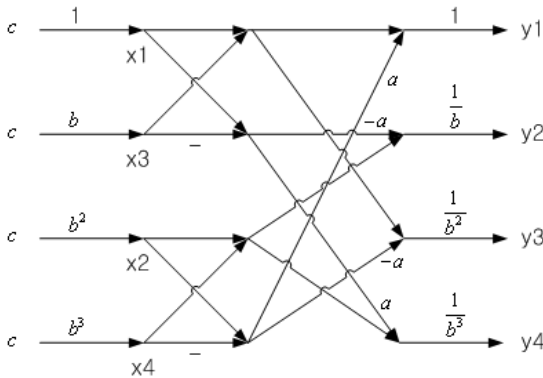


그림 1.  $[TJ]_4$ 의 고속알고리즘

Fig. 1. The Fast Algorithm of  $[TJ]_4$

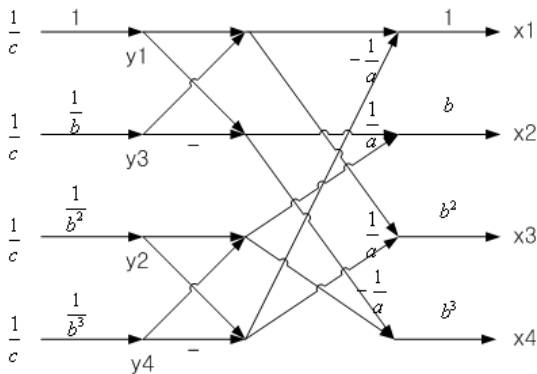


그림 2.  $[TJ]_4^{-1}$ 의 고속알고리즘

Fig. 2. The Fast Algorithm of  $[TJ]_4^{-1}$

$$[TJ]_4[TJ]_4^{-1} = 4I_4. \quad (22)$$

$[TJ]_4$ 의 고속알고리즘은 그림 1,  $[TJ]_4^{-1}$ 의 고속알고리즘은 그림 2와 같다.

### 3.2. $8 \times 8$ Toeplitz Jacket 행렬

$8 \times 8$  Toeplitz Jacket 행렬을 구성하기 위해서는  $8 \times 8$  Jacket 순환 행렬이 필요한데 이를 위해  $n=8, a=1, b=0$ 이라 놓고, 순환 벡터  $x(a,b) = x(1,0)$ 를 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{aligned} [x(1,0)]_k &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(\frac{ak^2}{2} + bk\right)\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\left(\frac{k^2}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{8}k^2\right) \end{aligned} \quad (23)$$

이 벡터를 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [x(1,0)]_k &= \left[ \exp\left(\frac{\pi i}{8}1^2\right), \exp\left(\frac{\pi i}{8}2^2\right), \dots, \exp\left(\frac{\pi i}{8}8^2\right) \right] \\ &= \left[ e^{\frac{\pi i}{8}}, i, e^{\frac{7\pi i}{8}}, 1, e^{\frac{7\pi i}{8}}, i, e^{\frac{\pi i}{8}}, 1 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

순환 행렬의 첫 번째 행이  $x(1,0)$ 으로 구성된 행렬을 순환 Jacket 행렬  $C_8$ 이라 하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_8 = \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi i}{8}} & i & e^{\frac{7\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} & i & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 \\ 1 & e^{\frac{\pi i}{8}} & i & e^{\frac{7\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} & i & e^{\frac{\pi i}{8}} \\ e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{\pi i}{8}} & i & e^{\frac{7\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} & i \\ i & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} \\ e^{\frac{7\pi i}{8}} & i & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{\pi i}{8}} & i & e^{\frac{7\pi i}{8}} & 1 \\ 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} & i & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{\pi i}{8}} & i & e^{\frac{7\pi i}{8}} \\ e^{\frac{7\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} & i & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 \\ i & e^{\frac{7\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{7\pi i}{8}} & i & e^{\frac{\pi i}{8}} & 1 & e^{\frac{\pi i}{8}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서  $C_8$ 은 자유 파라미터를 포함하고 있지 않다. 그래서  $C_8$ 을 이용하여  $4 \times 4$ 의 경우와 유사한 방법으로 8차원 2 파라미터 Toeplitz Jacket 행렬을 구성할 수 있다.

$$D_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[TJ]_8 = (a, b) = bD_8^{-1}C_8D_8$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{8} & abi & a^2be^{\frac{7\pi}{8}} & a^3b & a^4be^{\frac{7\pi}{8}} & a^5bi & a^6be^{\frac{\pi}{8}} & a^7b \\ \frac{b}{a} & be^{\frac{\pi}{8}} & abi & a^2be^{\frac{7\pi}{8}} & a^3b & a^4be^{\frac{7\pi}{8}} & a^5bi & a^6be^{\frac{\pi}{8}} \\ \frac{\pi}{8} & \frac{b}{a} & be^{\frac{\pi}{8}} & abi & a^2be^{\frac{7\pi}{8}} & a^3b & a^4be^{\frac{7\pi}{8}} & a^5bi \\ \frac{bi}{a^3} & \frac{be^{\frac{\pi}{8}}}{a^2} & \frac{b}{a} & be^{\frac{\pi}{8}} & abi & a^2be^{\frac{7\pi}{8}} & a^3b & a^4be^{\frac{7\pi}{8}} \\ \frac{7\pi}{8} & \frac{bi}{a^4} & \frac{be^{\frac{\pi}{8}}}{a^3} & \frac{b}{a} & be^{\frac{\pi}{8}} & abi & a^2be^{\frac{7\pi}{8}} & a^3b \\ \frac{b}{a^5} & \frac{be^{\frac{7\pi}{8}}}{a^4} & \frac{bi}{a^3} & \frac{be^{\frac{\pi}{8}}}{a^2} & \frac{b}{a} & be^{\frac{\pi}{8}} & abi & a^2be^{\frac{7\pi}{8}} \\ \frac{7\pi}{8} & \frac{be^{\frac{7\pi}{8}}}{a^5} & \frac{b}{a^5} & \frac{be^{\frac{7\pi}{8}}}{a^4} & \frac{bi}{a^3} & \frac{be^{\frac{\pi}{8}}}{a^2} & \frac{b}{a} & be^{\frac{\pi}{8}} \\ \frac{bi}{a^7} & \frac{be^{\frac{7\pi}{8}}}{a^5} & \frac{b}{a^5} & \frac{be^{\frac{7\pi}{8}}}{a^4} & \frac{bi}{a^3} & \frac{be^{\frac{\pi}{8}}}{a^2} & \frac{b}{a} & be^{\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$4 \times 4$  의 경우 식(22)와 같이  $[TJ]_8$  과  $[TJ]_8^{-1}$  를 곱하면 단위행렬이 됨을 알 수 있다.

$$[TJ]_8[TJ]_8^{-1} = 8I_8. \quad (28)$$

## V. 결 론

본 논문에서는 순환 Jacket 행렬에 의한 Toeplitz Jacket 행렬의 구성에 대해 논의 하였다. 이 결과 동일 집합으로부터 생성된 Toeplitz Jacket 행렬과 순환 Jacket 행렬은 동일할 수 있다는 것을 증명했다. 이러한 표현은 Toeplitz Jacket 행렬의 시퀀스를 연구하는데 유용하게 이용될 것이고, massive MIMO 채널 해석과 행렬 고유값의 역할 연구 및 릴레이 협력 무선네트워크 (relay cooperative wireless network)의 precoding 및 decoding에 활용된다. 이론적인 응용을 통해 모든 Toeplitz real Hadamard 행렬은 순환적이거나

negacycle하다는 것을 증명했다. 다만 unitary 및 real 직교(orthogonal) 행렬에 대해서 결과가 유사함을 증명하기 위해 연구 중에 있다.

## REFERENCES

- [1] J. D. Haupt, G. M. Raz, S. J. Wright, R. D. Nowak, "Toeplitz-Structured Compressed Sensing Matrices," *Workshop on Statistical Signal Processing*, pp.294 - 298, 2007.
- [2] R. M. Gray, "Toeplitz and Circulant Matrices: A review," *Foundations and Trends in communications and Information Theory*, Vol 2, Issue 3, pp.155 - 39, 2006.
- [3] M. H. Lee, Y. L. Borissov, "A proof of non-existence of bordered jacket matrices of odd order over some fields," *Electronics Letters*, 46, 2010.
- [4] K. Nomura, "Type II Matrices of Size Five," *Graph and Combinatorics*, 15, pp.79 - 92, 1999.
- [5] P. Dită, "One method for construction of inverse orthogonal matrices," *Rom. Journ. Phys.*, 54, pp.433 - 440, 2009.
- [6] K. J. Horadam, *Hadamard Matrices and Their Applications*, Princeton University Press, 2007.
- [7] F. Szöllősi, *Construction, Classification and Parametrization of Complex Hadamard Matrices*, PhD thesis, 2011, Central European University, Budapest, Hungary.
- [8] M. Kolountzakis, M. Matolcsi, "Complex Hadamard Matrices and the Spectral Set Conjecture," *Collect. Math.*, Vol. Extra, pp.281 - 291, 2006.
- [9] M. H. Lee, "The Center Weighted Hadamard Transform," *IEEE Transactions on circuits and systems*, 36, pp.1247 - 1249, 1989.
- [10] M. H. Lee, M. H. A. Khan, M. A. L. Sarker, Y. Guo, K. J. Kim, "A Multiple-Input and Multiple-Output Long-Term Evolution Precoding Based on Fast Diagonal-Weighted Jacket Matrices," *Fiber and Integrated Optics*, 31, pp.111 - 132, 2012.
- [11] S. Wagner, S. Sesia, D. T. M. Slock, "Unitary Beamforming under Constant Modulus Constraint in MIMO Broadcast Channels," *10th IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, Perugia, Italy (2009).
- [12] U. Haagerup, *Orthogonal Maximal Abelian -Subalgebras of the 5x5 Matrices and Cyclic n-roots*, Operator Algebras and Quantum Field

Theory (Rome), Cambridge, MA International Press, pp.296 - 322, 1996.

- [13] V. F. R. Jones, "On Knot Invariants Related to Some Statistical Mechanical Models," *Pacific J. Math*, 137, pp.311 - 334, 1989.
- [14] M.H.Lee and Song Wei, "Fast Method for Precoding and Decoding of Distributive Multi-input Multi-output channels in Relay-based Decode-and-forward Cooperative Wireless Networks," *IET comm.* Vol.4, Issue2 PP144-153, Feb. 2010.
- [15] M. H. Lee, *Jacket Matrices: Construction and Its Applications for Fast Cooperative Wireless signal Processing*, LAP LAMBERT, Germany, 2012.
- [16] 박주용, 김정수, 피렌스 스졸로시, 이문호, "3/5-Modular-Jacket 대칭행렬," 전자공학회 논문지, 제 50권, 제 5호, pp.1029-1037, 2013 5월.

— 저 자 소 개 —



박 주 용(평생회원)  
 1982년 전북대학교 전자공학과 석사  
 1994년 전북대학교 전자공학과 박사  
 1991년 3월~2007년 2월 서남대학교 전자공학부 부교수  
 2007년 3월~현재 신경대학교 인터넷정보통신학과 부교수

<주관심분야 : 무선이동통신>



김 정 수(정회원)  
 1998년 전북대학교 정보통신공학과 석사  
 2003년 전북대학교 컴퓨터공학과 박사 졸업.  
 2002년 6월~현재 송실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과 부교수

<주관심분야 : 이동통신>



Ferenc Szollosi  
 2008년 Budapest University of Technology and Economics, Hungary, Mathematics 석사  
 2012년 Central European University, Hungary, Mathematics and Its Applications 박사



이 문 호(평생회원)-교신저자  
 1984년 전남대학교 전기공학과 박사, 통신기술사  
 1985년~1986년 미국 미네소타 대학 전기과 포스트닥터  
 1990년 일본동경대학 정보통신공학과박사

1970년~1980년 남양MBC 송신소장  
 1980년 10월~2010년 2월 전북대학교 전자공학부 교수  
 2010년 2월~현재 WCU-2 연구책임교수  
 <주관심분야 : 무선이동통신>