

다수단 가변수요 통행배정문제를 위한 부분선형화 알고리즘의 성능비교

박태형^{1*} · 이상건²

¹승실대학교 산업·정보시스템공학과 / ²국토연구원

A Performance Comparison of the Partial Linearization Algorithm for the Multi-Mode Variable Demand Traffic Assignment Problem

Taehyung Park¹ · Sangkeon Lee²

¹Department of Industrial and Information Systems Engineering, Soongsil University

²Korea Research Institute for Human Settlements

Investment scenarios in the transportation network design problem usually contain installation or expansion of multi-mode transportation links. When one applies the mode choice analysis and traffic assignment sequentially for each investment scenario, it is possible that the travel impedance used in the mode choice analysis is different from the user equilibrium cost of the traffic assignment step. Therefore, to estimate the travel impedance and mode choice accurately, one needs to develop a combined model for the mode choice and traffic assignment. In this paper, we derive the inverse demand and the excess demand functions for the multi-mode multinomial logit mode choice function and develop a combined model for the multi-mode variable demand traffic assignment problem. Using data from the regional O/D and network data provided by the KTDB, we compared the performance of the partial linearization algorithm with the Frank-Wolfe algorithm applied to the excess demand model and with the sequential heuristic procedures.

Keywords: Multi-Mode Variable Demand Traffic Assignment, Korea Transport Database, Partial Linearization Algorithm, Mode-Choice Analysis

1. 서론

1.1 연구의 배경 및 목적

교통시설 투자 사업에 대한 타당성 분석과정에는 투자시설의 건설에 소요되는 비용과 사업 완성 후 발생하는 편익의 추정이 포함된다. 예를 들어 Korea Railroad Research Institute(2009)의 고속철도 건설에 대한 타당성 분석에서는 시간, 운행, 사고, 환경비용 절감과 같은 직접적 편익 및 산업생산증가효과, 고용증대효과 및 지역경제과급 효과와 같은 간접적 편익을 고려한다. 이 중 직접적 편익은 지역간 통행수단별 통행시간을 추

정하여 계산한다.

국내의 경우, 교통시설 투자에 대한 교통수요분석은 일반적으로 통행발생, 통행분포, 수단선택 및 통행배정의 4단계 모형을 사용하고 있다. 4단계 모형을 적용할 경우, 통행발생 및 통행분포 모형을 통해서 기종점간 총통행수요가 추정된 후, 기종점별 가능한 수단들에 대한 수단별 통행분담률을 계산하고, 수단별 통행수요는 마지막 단계인 통행배정에 대한 수단별 기종점 통행수요행렬(Origin Destination Trip Table, O/D 행렬)로 주어진다. 4단계 모형을 순차적으로 적용할 경우, 수단선택 모형에서 입력으로 사용한 기종점간 통행시간이 통행배정의 결

* 연락저자 : 박태형 교수, 156-743 서울특별시 동작구 상도로 369 승실대학교 산업정보시스템공학과, Tel : 02-820-0691, Fax : 02-825-1094, E-mail : tpark@ssu.ac.kr

2012년 12월 29일 접수; 2013년 4월 23일 수정본 접수; 2013년 5월 7일 게재 확정.

과로 계산되는 기종점간 통행시간과 다른 값을 가질 수 있다. 이 경우, 수단선택과 통행 배정을 순환적으로 적용하는 휴리스틱 접근법을 사용한다. 이러한 순환적 휴리스틱 절차를 <Figure 1>에 나타내었다.

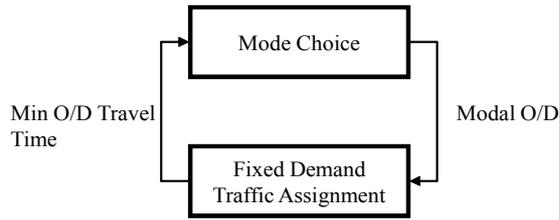


Figure 1. Mode choice/traffic assignment iterative heuristic

본 연구에서는 순환적 휴리스틱 절차의 대안으로, 승용차, 버스, 철도 및 화물트럭의 다수단에 대하여 수단선택과 통행 배정이 결합된 모형을 소개한다. 다수단 지역간 네트워크에서의 수단선택 및 통행배정 결합 모형은 예측연도의 수단별 지역간 사용자평형(user equilibrium) 통행시간을 추정한다. 시간, 운행, 사고, 환경비용과 같은 직접적 편익함수는 통행시간의 함수로 정의되었다. 국내에서 많이 사용하는 시간, 운행, 사고, 환경비용의 함수식은 Korea Development Institute(2008)에 소개되었다. 계획연도의 기종점간 수단분담을 예측 및 고정수요 통행배정 결과를 이용한 타당성분석을 수행한 국내연구는 Lee et al.(2002, 2010), Korea Railroad Research Institute(2009) 등이 있다.

본 연구의 목적은 국내에서 널리 사용되는 다수단 로짓 수단선택함수에 대한 역수요함수와 초과수요함수를 도출하여, 수단선택 통행배정 결합 모형이 가능함을 보이고, 해법으로는 부분선형화 알고리즘이 기존의 Frank-Wolfe 알고리즘에 비해 우수한 성능을 나타냄을 국내 지역간 통행 자료를 통하여 제시하고자 한다.

1.2. 기존연구

고정수요 통행배정(fixed demand traffic assignment) 모형에서는 통행수요가 주어질 경우, Wardrop의 사용자평형 조건을 만족하는 링크 통행량을 계산하는 최적화 모형이다. 통행배정 모형의 알고리즘은 단계별로 현재해의 목적식을 선형화하여 감소방향을 정하고, 최단경로 문제를 풀어서 다음단계 링크 통행량을 계산하는 Frank-Wolfe 알고리즘이 널리 사용된다. 가변수요(variable demand) 통행배정 모형에서는 고정수요 통행배정 문제와 달리 기종점간 통행수요(O/D)가 기종점간 통행비용의 함수로 주어지는 통행배정 모형이다. 승용차와 대중교통의 두 가지 수단이 있는 경우, 대중교통을 이용하는 수요를 가변수요 통행배정 모형의 초과수요로 해석이 가능하다. 따라서 가변수요 통행배정 모형 및 수단선택 통행배정 모형의 해법은 밀접한 관계를 갖고 있다. 다수단 수단선택 및 통행배정에 관

한 기존 연구는 수단별 통행비용이 다른 수단의 통행량과 상호작용이 있는지의 여부 및 수단간 환승이 고려되는가에 따라 분류할 수 있다. 수단간에 상호작용이 없고 환승이 고려되지 않는 모형에 대한 해법은 Gartner(1980), Sheffi(1985), Evans(1976)에 소개된 역수요함수(inverse demand function)를 도입하여 Frank-Wolfe 알고리즘을 적용하는 해법, 가상잉여링크(zero-cost overflow)를 추가한 형태로 네트워크를 수정하는 법, 초과수요(excess demand)를 도입하여 네트워크에 가상의 노드와 가상의 링크를 추가하여 Frank-Wolfe 알고리즘을 적용하는 해법, Evans 알고리즘 혹은 부분선형화(partial linearization) 알고리즘 등이 있다.

수단간 상호작용을 고려할 경우, 특정 수단의 통행비용은 모든 수단의 통행량의 함수로 주어진다. Florian(1977)에서는 승용차와 대중교통 수단이 도로링크를 공유하고 대중교통수단의 통행시간이 승용차의 통행량에 의해 영향을 받는 모형을 연구하고 대각화(diagonalization) 알고리즘을 제시하였다. Florian and Spiess(1983)에서는 승용차와 대중교통 두 가지 수단의 링크통행비용이 두 가지 수단의 통행량의 함수로 주어지는 경우, 수단선택 통행배정 결합 모형을 변동부등식으로 형성하여 고유한 최적해를 갖는 충분조건을 도출하고 동등한 블록최적화문제를 도출하였다. 수단간 상호작용이 존재하고 수단선택 확률이 계층로짓(hierarchical logit)함수로 모형화된 결합 모형에 대하여 최근에 Florian et al.(2002)에서 블록 Gauss-Seidel 알고리즘을 소개하였다. 자동차 및 대중교통수단 간에 주차 및 환승이 고려되는 통합 모형에 대하여 Fernandez et al.(1994)에서는 환승노드의 선택이 포함된 로짓선택함수를 정의하고, 최적 조건과 블록최적화문제로 동등 수리최적화문제가 되기 위한 조건을 제시하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 통합 모형의 수요함수를 소개하고, 역수요함수와 초과수요 모형을 도출하고, 해법으로 초과수요 모형 및 부분선형화 알고리즘을 소개한다. 제 3장에서는 2007년 지역간 자료에 대하여 제안된 알고리즘의 수렴속도를 검증하고, 순환적 휴리스틱 절차와 통합 모형을 비교한다. 제 4장에서는 본 연구의 요약과 향후 연구방향을 소개한다.

2. 다수단 가변수요 통행배정 모형

2.1 역수요 함수 및 초과수요 함수

다음과 같은 기호를 사용한다. 교통네트워크는 노드 $v \in V$ 및 방향이 있는 링크 $a \in A$ 들로 구성된 그래프 $G = (V, A)$ 로 나타내고, 교통수요가 발생하는 기종점의 집합 $W \subseteq V \times V$ 에 대하여 승객 및 화물 수요가 O/D행렬로 주어진다. 링크 a 를 통과하는 통행량을 v_a 로 나타내고, 통행량 v_a 에 해당하는 링크통행시간은 v_a 의 증가함수인 $t_a(v_a)$ 로 나타낸다. 기종점 w

의 수단 m 에 대한 통행수요를 g_w^m 으로 나타내고, P_w 는 기종점 $w \in W$ 를 연결하는 경로들의 집합, h_k^m 은 경로 k 를 통행하는 수단 m 의 경로통행량을 나타낸다.

본 연구에서 고려하는 수단은 승용차(au), 버스(bus), 승객용 기차(pr), 화물트럭(tr) 및 화물용 기차(cr) 등 5가지 수단이고 이를 묶어서 집합으로 표현하면, $M = \{au, bus, pr, tr, cr\}$ 으로 나타낸다. 앞의 5가지 수단은 Korea Transport Database(2009a, 2009b)의 국내 지역간 승객 및 화물 O/D에서 고려하는 수단 중 항공 및 해운을 제외한 나머지 수단에 해당한다. 이를 승객수단을 나타내는 집합 $P = \{au, bus, pr\}$, 화물수단집합 $C = \{tr, cr\}$, 도로를 이용하는 수단의 집합 $R = \{au, bus, tr\}$, 철도이용수단 $T = \{pr, cr\}$ 등으로 표현한다. 따라서 $M = P \cup C$, $M = R \cup T$ 가 된다. 또한 승객 및 화물수요를 묶어서 $g_w^p = \sum_{m \in P} g_w^m$, $g_w^c = \sum_{m \in C} g_w^m$ 로 표시한다.

각 수단별로 기종점 w 의 O/D 수요는 w 를 연결하는 경로통행량의 합으로 나타낼 수 있다. 또한 기종점별로 승객들 수요의 합은 g_w^p , 화물수요의 합은 g_w^c 로 나타낸다. 이를 식으로 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \sum_k h_k^m &= g_w^m, \quad \forall w \in W, \forall m \in M, \\ \sum_{m \in P} g_w^m &= g_w^p, \quad \forall w \in W, \\ \sum_{m \in C} g_w^m &= g_w^c, \quad \forall w \in W. \end{aligned} \quad (1)$$

도로네트워크에서 경로 k 가 링크 a 를 통과하는 경우, $\delta_{ak} = 1$ 로 나타낼 때, 링크 통행량 v_a 는 링크 a 를 통과하는 모든 경로통행량의 합으로 표현된다.

$$v_a = \sum_{m \in R} \sum_w \sum_k \delta_{ak} \beta_m h_k^m, \quad \forall a \in A. \quad (2)$$

여기에서 β_m 은 수단 m 의 승용차환산계수(passenger car unit, pcu)를 나타낸다. 각 기종점을 연결하는 경로의 통행시간은 경로에 포함된 링크통행시간의 합으로서 경로통행시간 $d_k = \sum_a \delta_{ak} t_a(v_a)$ 로 나타낼 수 있다. 기종점 w 를 연결하는 경로들 중 최단통행시간을 갖는 경로의 통행시간은 $u_w = \min_{k \in P_w} d_k$ 로 표시한다. 철도 네트워크상의 기종점을 연결하는 최단경로는 사전에 미리 계산되어 고정되어 있다고 가정하고 최단경로통행시간을 \bar{u}_w 로 표시한다.

Korea Development Institute(2008)에서는 수단선택 모형에서 기종점 w 의 총통행수요 중, 수단 m 을 선택하는 확률로 다음과 같은 로짓함수를 제시하였다.

$$\Pr(m) = \frac{e^{U_m}}{\sum_k e^{U_k}} \quad (3)$$

식 (3)에서 수단 m 의 효용 U_m 은 다음과 같은 선형함수로 나타내어진다.

$$U_m = \alpha_1 (T_{TIME})_m + \alpha_2 (TCOST)_m + (Dummy)_m + (\text{상수})_m \quad (4)$$

여기에서 m 은 기종점 w 를 연결하는 수단 m , $(T_{TIME})_m$ 는 기종점 w 를 연결하는 수단 m 의 통행시간을 나타내고, $(TCOST)_m$ 는 수단 m 의 통행비용, $(Dummy)_m$ 및 $(\text{상수})_m$ 는 수단 m 에 대한 기타 파라미터를 나타낸다. 일반적으로 기종점간 통행시간 $(T_{TIME})_m$ 는 도로의 경우 사용자평형통행시간을 사용하고, $(TCOST)_m$ 는 거리에 비례하는 운임이 포함된다.

수단 m 의 효용이 $U_m = \alpha_1 (T_{TIME})_m$ 으로 정의되고, 수단이 승용차와 철도 두 가지가 있는 경우의 단순한 로짓함수에 대한 수요 역함수는 Sheffi(1985)에 소개되었다. 수단선택에 대한 기존연구는 대개 두 가지 수단간의 선택을 고려하는 로짓함수가 사용되었다. 3개 이상의 수단을 고려한 Florian *et al.*(2002)의 경우, 대각화 알고리즘, 즉 한 가지 수단을 제외한 나머지 수단에 대한 통행량을 고정하고 문제를 푸는 방식을 택한다. 아래에서는 승객에 대한 수단이 승용차, 버스, 철도 3가지가 있고, 수단의 효용이 식 (4)로 주어지는 경우, 수요역함수와 초과수요함수를 직접 도출하여 대각화 알고리즘 대신에 초과수요 통행배정 모형을 구성한다.

U_m 을 $(T_{TIME})_m$ 를 제외한 나머지 항들을 묶어서

$$U_m = -\theta u_w^m + \alpha_w^m \quad (5)$$

로 정의할 수 있다. 여기에서 $\theta = -\alpha_1$, $u_w^m = (T_{TIME})_m$, $\alpha_w^m = \alpha_2 (TCOST)_m + (Dummy)_m + (\text{상수})_m$ 를 나타낸다. 식 (5)을 사용하여 식 (3)을 다시 정의하면 아래와 같다.

$$\Pr(m) = \frac{\exp(-\theta u_w^m + \alpha_w^m)}{\sum_{m' \in P} \exp(-\theta u_w^{m'} + \alpha_w^{m'})} \quad (6)$$

$m = pr$ 이나 $m = cr$ 인 경우, 위 식에서 최단통행시간을 \bar{u}_w 로 대체한다. 기종점 O/D w 의 승객수요 중 수단 $m \in P$ 을 선택하는 수요는 승객수요 g_w^p 에 수단선택확률 $\Pr(m)$ 을 곱하여 다음과 같이 나타내어진다.

$$g_w^m = \frac{\exp(-\theta u_w^m + \alpha_w^m)}{\sum_{m' \in P} \exp(-\theta u_w^{m'} + \alpha_w^{m'})} g_w^p, \quad m \in P \quad (7)$$

식 (7)에 의해 승용차 수요와 기차 통행 수요간의 비율 g_w^{au}/g_w^{pr} 은

$$\frac{g_w^{au}}{g_w^{pr}} = \frac{\exp(-\theta u_w + \alpha_w^{au})}{\exp(-\theta \bar{u}_w + \alpha_w^{pr})} = \exp(\alpha_w^{au} - \alpha_w^{pr} - \theta(u_w - \bar{u}_w)). \quad (8)$$

위의 식을 u_w 에 대하여 풀면,

$$u_w = \frac{1}{\theta} \left[(\alpha_w^{au} - \alpha_w^{pr} - \ln(\frac{g_w^{au}}{g_w^p - g_w^{au} - g_w^{bus}})) \right] + \bar{u}_w. \quad (9)$$

마찬가지로,

$$\frac{g_w^{bus}}{g_w^{pr}} = \frac{\exp(-\theta u_w + \alpha_w^{bus})}{\exp(-\theta \bar{u}_w + \alpha_w^{pr})} = \exp(\alpha_w^{bus} - \alpha_w^{pr} - \theta(u_w - \bar{u}_w)),$$

$$u_w = \frac{1}{\theta} \left[(\alpha_w^{bus} - \alpha_w^{pr} - \ln(\frac{g_w^{bus}}{g_w^p - g_w^{au} - g_w^{bus}})) \right] + \bar{u}_w. \quad (10)$$

식 (9)와 식 (10)을 같게 놓으면, g_w^{bus} 는

$$g_w^{bus} = \exp(\alpha_w^{bus} - \alpha_w^{au}) g_w^{au}. \quad (11)$$

따라서 g_w^{bus} 와 g_w^{au} 간의 비율은 각 O/D별로 고정되어 있으며 (9)에서 u_w 를 g_w^{au} 만의 함수로 표현할 수 있다. $k_w = 1 + \exp(\alpha_w^{bus} - \alpha_w^{au})$ 로 정의할 때, 버스와 승용차 수요의 합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_w^{au} + g_w^{bus} = k_w g_w^{au} \quad (12)$$

식 (9)에서 버스와 관련된 수요량 g_w^{bus} 를 제거하면, 최단통행 시간 u_w 를 승용차통행수요 g_w^{au} 의 함수로 나타낸 역수요함수 (inverse demand function)를 구할 수 있다.

$$u_w = D_{w,p}^{-1}(g_w^{au}) = \frac{1}{\theta} \left[(\alpha_w^{au} - \alpha_w^{pr} - \ln(\frac{g_w^{au}}{g_w^p - k_w g_w^{au}})) \right] + \bar{u}_w. \quad (13)$$

식 (13)에서 로그함수가 정의되기 위해서는 $k_w g_w^{au} < g_w^p$, 즉, $g_w^{au} < g_w^p / k_w$ 를 만족해야 한다. 또한, $g_w^{au} \rightarrow 0, D_{w,p}^{-1}(g_w^{au}) \rightarrow +\infty$ 이며, $g_w^{au} \rightarrow g_w^p / k_w$ 에 따라 $D_{w,p}^{-1}(g_w^{au}) \rightarrow -\infty$ 가 된다. 따라서 $D_{w,p}^{-1}(\cdot)$ 함수는 감소함수이다.

g_w^{pr} 을 초과수요(excess demand)로 간주하는 경우, 다음과 같이 초과수요함수를 계산할 수 있다.

$$u_w = W_{w,p}(g_w^{pr}) = \frac{1}{\theta} \left[(\alpha_w^{au} - \alpha_w^{pr} - \ln(\frac{g_w^p - g_w^{pr}}{k_w g_w^{pr}})) \right] + \bar{u}_w. \quad (14)$$

위의 초과수요함수는 증가함수이고 $g_w^{pr} \rightarrow 0$ 에 따라, $W_{w,p}$

(g_w^{pr}) $\rightarrow -\infty$ 이고, $g_w^{pr} \rightarrow g_w^p$ 에 따라 $W_{w,p}(g_w^{pr}) \rightarrow +\infty$ 이다.

화물수요에 대하여도 역수요함수와 초과수요함수를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_w = D_{w,c}^{-1}(g_w^{tr}) = \frac{1}{\theta} \left[(\alpha_w^{tr} - \alpha_w^{cr} - \ln(\frac{g_w^{tr}}{g_w^c - g_w^{tr}})) \right] + \bar{u}_w, \quad (15)$$

$$u_w = W_{w,c}(g_w^{cr}) = \frac{1}{\theta} \left[(\alpha_w^{tr} - \alpha_w^{cr} - \ln(\frac{g_w^c - g_w^{cr}}{g_w^{cr}})) \right] + \bar{u}_w. \quad (16)$$

위의 문제를 구현할 때 함수에 포함된 로그 함수에서 $\ln(0)$ 나 $\ln(x/0)$ 가 되는 경우를 방지하기 위하여 로그 함수 내부에 $\epsilon = 10^{-6}$ 를 로그내의 분모나 분자에 더하여 0이 되거나 0으로 나누는 것을 방지하였다. 이렇게 ϵ 를 추가함으로써 로그 함수가 항상 정의되도록 하였다.

2.2 초과수요 모형

<Figure 2>는 기존 네트워크에 가상노드와 가상링크를 추가한 확장된 네트워크를 나타낸다. 확장된 네트워크에서 가상노드 (r, p)와 (r, c)가 기점 r 의 승객과 화물의 출발점을 나타내고 (s, p)와 (s, c)가 종점 s 의 승객과 화물의 도착점을 나타내는 가상노드이다. 노드 (r, p)와 (s, p)를 연결하는 초과수요링크의 비용은 $W_{w,p}(g_w^{pr})$ 로 표시되었고, 노드 (r, c)와 (s, c)를 연결하는 초과수요링크의 비용은 $W_{w,c}(g_w^{cr})$ 로 나타내었다. 원래의 기점 r 과 가상노드 (r, p) 및 (r, c)와는 통행비용이 0인 가상링크가 연결되었다.

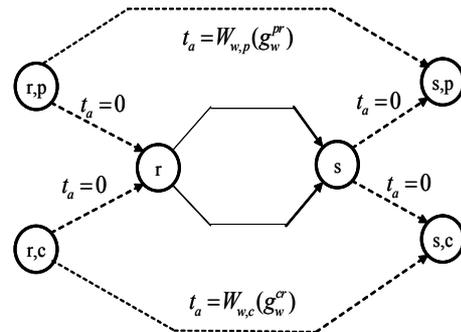


Figure 2. Expanded network including excess demand links

<Figure 2>에 나타난 확장네트워크를 기반으로 식 (14), 식 (16)을 이용하여 다수단 가변수요 통행배정문제는 다음과 같이 4가지 수단(au, pr, tr, cr)이 포함된 고정수요통행배정 모형으로 변환된다. 아래 모형에서 식 (12)에 의해 버스 수요량 g_w^{bus} 는 모형에서 제거되었다.

$$\text{Min } T(v, g) = \sum_a \int_0^{v_a} t_a(\omega) d\omega + \sum_w \int_0^{g_w^{pr}} W_{w,p}(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_w \int_0^{g_w^{cr}} W_{w,c}(\omega) d\omega \\
\text{s.t. } & \sum_k h_k^{au} + g_w^{pr} = g_w^p, \quad \forall w \in W \\
& \sum_k h_k^{tr} + g_w^{cr} = g_w^c, \quad \forall w \in W \\
& h_k^m \geq 0, \quad \forall k \in P_w, \forall w \in W, \forall m \in \{au, tr\}
\end{aligned} \quad (17)$$

여기에서 $v_a = \sum_w \sum_k \delta_{ak} (\beta_{au} h_k^{au} + \beta_{tr} h_k^{tr})$, $\forall a \in A$ 이다. 위 식에서 변수 g_w^{pr} 과 g_w^{cr} 을 여유변수(slack variable)로 간주할 수 있고 로그함수가 정의되기 위해서는

$$0 < g_w^{pr} < g_w^p, \quad 0 < g_w^{cr} < g_w^c \quad \forall w$$

를 가정한다.

문제 (17)의 목적함수는 $t_a(\cdot)$, $W_{w,p}(\cdot)$, $W_{w,c}(\cdot)$ 이 증가함수이므로 일반적인 통행배정문제와 마찬가지로 볼록최적화문제이다. 따라서 KKT 최적조건이 필요충분조건이 된다.

2.3 부분선형화 알고리즘

이 절에서는 식 (17)에 소개된 초과수요 모형 대신에 식 (6), 식 (7)을 직접 사용하는 부분선형화(partial linearization) 알고리즘, 혹은 Evans 알고리즘을 소개한다. Evans(1976)에서는 통행분포/통행배정 결합 모형에 대하여 목적식의 일부만 선형화한 부분문제를 풀어서 감소방향을 결정하는 부분선형화 알고리즘을 제시하였다. Huang and Lam(1992)에서는 통행분포/통행배정 결합 모형을 Evans 알고리즘으로 풀 때, 스텝길이 λ 를 계산하는 절차를 소개하고, Frank-Wolfe 알고리즘에 비해 수렴속도가 빠름을 보고하였다.

부분선형화 알고리즘의 단계 $(l+1)$ 에서는 각 기종점에 대하여, 이전 단계에서 구한 링크통행량 $v_a^{(l)}$ 에 대한 링크통행비용 $t_a(v_a^{(l)})$ 을 사용하여 각 기종점별 최소비용경로를 계산한다. 최소비용경로를 계산한 후, 식 (7)을 이용하여 보조 O/D 수요 $y_w^{(l)}$ 를 계산하고 $y_w^{(l)}$ 을 최단경로에 배정한다. 배정된 보조링크 통행량 $x_a^{(l)}$ 과 보조 O/D 수요량 $y_w^{(l)}$ 을 이용하여, 목적함수를 감소하는 방향을 $(x_a^{(l)} - v_a^{(l)}, y_w^{(l)} - g_w^{(l)})$ 로 정한다. 다음 단계의 링크 통행량과 O/D 수요는 스텝길이 λ 를 정한 뒤, 다음과 같이 갱신한다.

$$\begin{aligned}
v_a^{(l+1)} &= v_a^{(l)} + \lambda(x_a^{(l)} - v_a^{(l)}) \\
g_w^{(l+1)} &= g_w^{(l)} + \lambda(y_w^{(l)} - g_w^{(l)})
\end{aligned}$$

알고리즘의 종료조건을 만족하지 않는 경우, 위의 절차를 반복한다. 이를 정리하면 다음과 같다.

단계 1 : $t_a^{(l)} = t_a(v_a^{(l)}) \quad \forall a \in A$ 로 정하고 기종점 w 에 대한 최단경로를 계산하고 최단통행시간 $u_w^{(l)} = \min_k \sum_a \delta_{ak}$

$t_a^{(l)}$, $\forall w \in W$. 기종점 w 를 연결하는 최단경로를 \bar{k} 로 나타낸다.

단계 2 : 로짓 모형 (7)에서 $u_w^{(l)}$ 을 사용하여, 보조 O/D 수요량 $y_w^{m,(l)}$, $m \in M$ 을 계산한다.

단계 3 : $\sum_{m \in R} y_w^{m,(l)}$ 을 최단경로 \bar{k} 에 배정하고 보조 링크통행량 $x_a^{(l)} = \sum_w \sum_k \delta_{ak} (\sum_{m \in R} y_w^{m,(l)})$ 을 계산한다.

단계 4 : (스텝길이결정) 다음 단계의 링크통행량 $v_a^{(l+1)} = v_a^{(l)} + \lambda(x_a^{(l)} - v_a^{(l)})$, O/D 수요량 $g_w^{m,(l+1)} = g_w^{(l)} + \lambda(y_w^{m,(l)} - g_w^{m,(l)})$ 로 정의하고 스텝길이결정 문제인 $\text{Minimize } 0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda} T(v + \lambda(x - v), g + \lambda(y - g))$ 를 풀 후, 최적 스텝길이 $\lambda^{(l)}$ 를 정한다. 여기에서 목적함수 $T(v, g)$ 는 식 (17)의 목적함수이다.

$$\begin{aligned}
T(v, g) &= \sum_a \int_0^{v_a} t_a(\omega) d\omega + \sum_w \int_0^{g_w^{pr}} W_{w,p}(\omega) d\omega \\
&+ \sum_w \int_0^{g_w^{cr}} W_{w,c}(\omega) d\omega
\end{aligned} \quad (18)$$

단계 5 : (수렴 테스트) $v_a^{(l+1)} = v_a^{(l)} + \lambda^{(l)}(x_a^{(l)} - v_a^{(l)})$, $g_w^{(l+1)} = g_w^{(l)} + \lambda^{(l)}(y_w^{m,(l)} - g_w^{m,(l)})$ 로 링크통행량과 O/D 수요량을 갱신하고, 다음의 종료 조건을 만족하는 지 검사한다.

$$\frac{\|v^{(l+1)} - v^{(l)}\|_2}{\|v^{(l)}\|_2} + \frac{\|g^{(l+1)} - g^{(l)}\|_2}{\|g^{(l)}\|_2} \leq \epsilon \quad (19)$$

그렇지 않은 경우, 단계 1로 되돌아간다.

단계 2, 단계 3에서 계산한 보조 O/D 수요벡터 $y = (y_w^{m,(l)})$ 와 보조링크 통행량벡터 $x = (x_a^{(l)})$ 은 식 (18)의 첫 번째 항을 선형화하고 나머지 항은 그대로 둔 목적함수와 문제 (17)의 제약식을 갖는 문제의 최적해이다. 또한 부분선형화한 목적함수의 1차도 함수와 식 (18)의 1차도 함수가 동일하다. 부분선형화한 문제의 최적해가 (x, y) 이므로 식 (18)의 1차도 함수(gradient) 벡터인 $\nabla T(v, g)$ 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\nabla T(v, g)^T(x, y) < \nabla T(v, g)^T(v, g) \quad (20)$$

즉, 벡터 $(x - v, y - g)$ 는 목적함수 (18)를 감소하는 방향벡터이다. 따라서 부분선형화 알고리즘은 최적해에 수렴한다.

3. 실험 결과

본 연구에서 제안된 초과수요배정 모형과 부분선형화 알고리즘은 Microsoft사의 Visual Studio 소프트웨어를 사용하여 C언어로 구현되어 PC에서 계산되었다. 제안된 초과수요 모형 (17)과 부분선형화 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 교통 DB 센터에서 제공하는 2007년 전국 지역간 네트워크를 사용하였다. 사용된 네트워크는 248개 존으로 구성되고, 27,936노드, 도로와 철도가 통합된 65,226 링크 및 59,780 O/D로 구성된 자료이다. 포함된 수단은 승용차, 버스, 승객철도, 트럭, 화물철도 등 5가지 수단을 고려하였다. 전체 링크 중 3,028개의 링크는 철도링크를 나타내고 나머지는 도로링크를 나타낸다.

승객 O/D(인/일)의 경우, 제공된 자료 중, 승용차, 버스, 철도 자료를 사용했고, 동일 존을 기중점으로 갖는 O/D는 제외하였다. 또한 통행배정에서는 일일 O/D 중 첨두시간(peak hour) 집중률 7%에 해당하는 O/D를 단위시간당 O/D로 사용하였다. 화물트럭에 대한 O/D는 소형, 중형, 대형트럭으로 구분되어 지역간 O/D가 제공되었지만, 승용차환산계수를 소형, 중형, 대형 O/D에 곱하여 세 가지 트럭수단을 단일화물트럭수단 O/D로 대체하였다. 2007년 자료에 대한 상세한 설명은 Korea Transport Database(2009a, 2009b)에 나와 있다.

본 논문에서는 알고리즘의 종료조건으로 gap 함수를 이용하였다. 함수 $f(x)$ 가 볼록함수인 경우, 함수 f 의 정의역에 속하는 모든 y 에 대하여 $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x)$ 가 성립한다. gap 함수는 $\nabla f(x)^T(x-y)$ 로 정의되고, 통행배정문제와 같이 볼록최적화문제에서 gap 함수는 최적해에서 0으로 수렴한다. 문제 (17)의 목적함수에 대한 gap 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$gap = \sum_a t_a(v_a^{(l)})(v_a^{(l)} - x_a^{(l)}) + \sum_m \sum_w W_{w,m}(g_w^{m,(l)} - y_w^{m,(l)})$$

본 연구에서 사용한 대규모 네트워크의 경우, 부분선형화 알고리즘을 사용한 경우, gap 값은 알고리즘이 최대 100단계 진행된 후 10^4 범위내의 값을 가졌다. 이 경우 100단계 후의 종료

값인 $(v^{(100)}, g^{(100)})$ 에서의 목적함수값에 대한 gap의 비율 $gap/T(v^{(100)}, g^{(100)}) < 10^{-7}$ 을 만족하였다. <Figure 3>에는 처음 30단계 동안의 Frank-Wolfe 초과수요 모형과 부분선형화 알고리즘의 gap 값의 수렴과정을 보여주고 있다. <Figure 3>에서 Frank-Wolfe와 Evans' algorithm은 Frank-Wolfe 초과수요 모형과 Evans 모형의 gap 값을 표시한다. <Figure 3>에 나타난 초과수요 모형의 경우 30단계 이후에, gap의 범위가 10^7 범위에 있고 부분선형화 알고리즘의 경우 gap 값이 훨씬 작은 값 범위로 수렴하고 있음을 알 수 있다.

순차적 휴리스틱 절차와 부분선형화 알고리즘의 수렴속도를 비교하기 위하여 다음 식과 같은 측정치를 계산하였다.

$$MRE_SP = \max \left\{ \frac{|u_w^{new} - u_w^{old}|}{u_w^{old}} : w = 1, \dots, OD \right\}$$

여기에서 u_w^{new} 와 u_w^{old} 는 휴리스틱의 다음 단계와 이전 단계의 기중점 최소통행비용을 나타낸다. 따라서 MRE_SP는 이전 단계와 다음 단계간의 최소통행시간의 상대적 변화율의 상한을 나타낸다. 휴리스틱 알고리즘이 수렴할 경우 이러한 최대 변화율은 점점 작아지리라 예상할 수 있다.

<Figure 4>에는 순차적 휴리스틱 절차를 3회 실시한 경우와 부분선형화 알고리즘을 적용한 경우, 위에서 정의한 MRE_SP의 수렴속도를 비교하고 있다. <Figure 4>에서 iterative heuristic은 <Figure 1>의 순환 휴리스틱 절차를 표시하고, Evans' algorithm은 부분선형화 알고리즘을 표시한다. <Figure 4>에서 순환 휴리스틱의 MRE_SP는 초기에 49%의 값을 갖고, 통행배정을 다시 한 후 대략적으로 약 25% 정도로 감소되고, 다음 단계에서는 20% 이하로 떨어짐을 알 수 있다. 따라서 어느 정도의 수렴이 진행되고 있음을 알 수 있다. 순환 휴리스틱의 한 단계는 기중점간 수단별 O/D를 계산하고, 고정수요 통행배정문제를 최적해에 도달할 때까지 푸는 연산에 해당한다. 하지만 부분선형화 알고리즘의 한 단계는 다수단 가변수요 통행배정 모형의 내부단계를 의미한다. <Figure 4>에서 부분선형화 알고리즘의 MRE_SP 값은 부분선형화 알고리즘이 20단계 진행된 후 0.1 이하가 되었음을 알 수 있다.

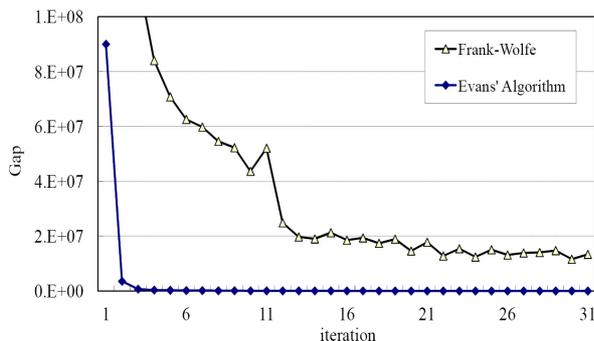


Figure 3. Comparison of gap function value convergences

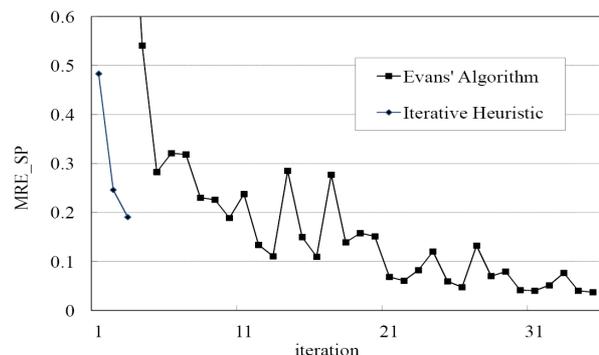


Figure 5. Comparison of MRE_SP convergences

4. 결론 및 향후 연구과제

본 연구에서는 국가교통 DB 센터에서 제공하는 국내 지역간 네트워크 자료에 적합한 다수단가변수요 통행배정 모형을 구성하고 그 해법을 소개하였다. 도로와 철도 네트워크 링크로 구성된 지역간 네트워크에서 승용차, 버스, 화물트럭, 승객철도, 화물철도 등 5가지 수단이 혼재한 경우 로짓수요함수를 만족하는 수단선택/통행배정이 통합된 모형을 제시하였다. 버스와 승용차, 화물트럭간에 상호작용이 없다고 가정하고, 화물트럭의 종류가 한 가지 인 경우, 다수단 가변수요 통행배정 모형이 초과수요링크와 가상노드로 확장된 네트워크에서의 가변수요 통행배정과 동일함을 증명하고 역수요함수와 초과수요함수를 도출하였다. 실험에서는 Frank-Wolfe 알고리즘을 초과통행수요 모형에 적용한 경우와 부분선형화 알고리즘을 적용한 경우 수렴속도를 비교하였다. 또한 수단선택과 통행배정을 순차적으로 푸는 휴리스틱 절차와 부분선형화 알고리즘을 적용한 경우, 기종점간 최단통행 시간의 변화를 비교하였다.

제안된 알고리즘은 국가교통 DB의 2007년 지역간 네트워크 자료를 사용하여 성능을 검사하였다. 통합 모형의 목적은 궁극적으로 계획연도에 새로운 교통시설이 투자된 경우의 수단별 분담율 및 통행시간의 계산에 있다. 본 모형은 계획연도의 지역간 네트워크와 기준연도의 네트워크에 대한 수단분담/통행배정 분석을 수행하고자 개발되었다.

이 논문에서 개발한 통합 모형의 경우, 다음과 같은 한계를 갖는다. 교통 DB에서 조사된 소형, 중형, 대형 트럭과 화물철도간의 수단선택과정이 화물트럭과 화물철도 두 가지로 단순화되었고, 화물트럭 종류별 상호작용이나 승용차, 버스, 화물트럭간의 상호작용은 고려되지 않았다. 또한 존 내부통행량은 제외되었다. 철도의 경우 이러한 모형에서는 용량이 무제한으로 가정된다. 실제 철도에 대하여는 대기시간과 용량을 고려하여 더 정확한 기종점간 비용을 추정하여야 한다. 향후 연구과제로는 수단간 상호작용을 고려하고 철도의 용량이 고려된 통합 모형의 개발이 요구된다.

참고문헌

- Evans, S. P. (1976), Derivation and analysis of some models for combining trip distribution and assignment, *Transportation Research*, **10**, 37-57.
- Fernandez, E., De Cea J., Florian M., and Cabrera, E. (1994), Network equilibrium models with combined modes, *Transportation Science*, **28**(3), 182-192.
- Florian, M. (1977), A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes, *Transportation Science*, **11**(2), 166-179.
- Florian, M. and Nguyen, S. (1974), A Method for computing network equilibrium with elastic demands, *Transportation Science*, **8**(4), 321-332.
- Florian, M. and Spiess, H. (1983) On binary mode choice/assignment models, *Transportation Science*, **17**(1), 32-47.
- Florian, M., Wu, J. H., and He, S. (2002), A multi-class multi-mode variable demand network equilibrium model with hierarchical logit structure, in *Transportation and network analysis : current trends: miscellanea in honor of Michael Florian*, edited by Gendreau and Marcotte, P., Kluwer Academic Publishers, 119-133.
- Gartner, N. H. (1980), Optimal traffic assignment with elastic demands: a review part II. algorithmic approaches, *Transportation Science*, **14**, 192-208.
- Huang, H. and Lam, W. H. (1992), Modified Evans' algorithms for solving the combined trip distribution and assignment problem, *Transportation Research*, **26B**, 325-337.
- Korea Development Institute (2008), *Standard Guide for the Road-Rail Investment Prefeasibility Study*, Revised 5th Edition.
- Korea Railroad Research Institute (2009), *Research on the National High-speed Train Network Construction Strategy*.
- Korea Transport Database (2009a), *2009 Survey, Volume 1. Summary Report*.
- Korea Transport Database (2009b), *2008 National Regional OD and Network Explanation Report*.
- LeBlanc, L. J. and Farhangian, K. (1981), Efficient algorithms for solving elastic demand traffic assignment problems and mode split-assignment problem, *Transportation Science*, **15**, 306-317.
- Lee, S., Ko, Y., and Park, T. (2002), *Development of an Evaluation Model for Infrastructure Investment (Phase III)-Focused on the Road and Rail System*, KRIHS.
- Lee, S., Kim, D., and Ko, Y. (2010), *Development of the Integrated Transportation Planning Model, KRIHS-TAL based on GIS Platform*, KRIHS.
- Sheffi, J. (1985), *Urban Transportation Networks : Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall.