

상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수; 시간 영역 해석

김기범¹·이승준^{1,†}
충남대학교 선박해양공학과¹

Natural Frequency of 2-Dimensional Heaving Circular Cylinder; Time-Domain Analysis

Ki-Bum Kim¹·Seung-Joon Lee^{1,†}
Dept. Naval Architecture & Ocean Eng., Chungnam National University¹

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

The concept of the natural frequency is useful for understanding the characters of oscillating systems. However, when a circular cylinder floating horizontally on the water surface is heaving, due to the hydrodynamic forces, the system is not governed by the equation like that of the harmonic one. In this paper, in order to shed some lights on the more correct use of the concept of the natural frequency, a problem of the heaving circular cylinder is analyzed in the time domain. The equation of motion, an integro-differential equation, was derived following the fashion of Cummins (1962), and its coefficients including the retardation function were obtained using the numerical solution of Lee (2012). The equation was solved numerically, and the experiment was also carried out in the CNU flume. Using our numerical and experimental results, the natural frequency was defined as its average value given by the motion data excluding those of the initial stage. Our results were then compared with those of the existing investigations such as Maskell and Ursell (1970), Ito (1977) and Yeung (1982) as well as the newly obtained results of Lee (2012). Comparison showed that the natural frequency obtained here agrees well with that of Lee (2012), which was found through the frequency domain analysis. It was also shown that the approximation of heaving motion by a damped harmonic oscillation, which was regarded as suitable by most previous investigators, is not physically suitable for the reason that can be clearly shown through comparing the shape of MCFRs (Modulus of Complex Frequency Response). Furthermore, we found that although the previous approximations yield the damping ratio significantly different from our result the magnitude of natural frequency is not much different from our result.

Keywords : Natural frequency(고유진동수), Heaving circular cylinder(상하동요하는 원주), Time domain(시간 영역), Damping ratio(감쇠비), Added mass(부가 질량), Retardation function(지연 함수)

1. 서론

수면 상에 수평하게 떠 있는 원주가 상하동요하는 경우, 시간 영역에서의 자유동요에 대한 연구는 Cummins (1962), Ursell (1964), Maskell and Ursell (1970), Oortmerssen (1976), Ito (1977), Yeung (1982), Ursell (2007) 등에 의해 이루어져 왔으나, 고유진동수의 관점에서 자유동요에 대한 연구는 거의 이루어지지 않은 것으로 보인다.

질량-스프링 계의 경우, 운동 방정식이 다음과 같을 때,

$$m\ddot{Y} + kY = 0, \quad (1)$$

여기서 m 은 물체의 질량, k 는 복원력 상수, Y 는 운동의 변위이며, 고유진동수 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 로 명확하게 정의된다. 상하동요하는 2차원 원주에 대한 주파수 영역에서의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$(m + m_a(\omega))\ddot{Y} + \mu(\omega)\dot{Y} + CY = 0. \quad (2)$$

여기서 m_a 는 부가질량, μ 는 조파 감쇠, C 는 복원력 상수이고, $m_a(\omega)$ 와 $\mu(\omega)$ 는 진동수의 함수이다. 시간 영역에서의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$(m + m_0)\ddot{Y} + \int_0^t \beta(t-\tau)\dot{Y}(\tau)d\tau + CY = 0. \quad (3)$$

여기서 β 는 지연 함수(retardation function)이다. 식 (3)은 적분미분 방정식(integro-differential equation)이므로 식 (2)와 식 (3)의 해에 대해 식 (1)의 해에 대해서와 같이 고유진동수를 정의할 수 없다. 그러나 고유진동수의 개념은 매우 유용하므로, 상하동요하는 2차원 원주에 대한 고유진동수를 어떻게 정의하는 것이 타당한지에 대해 시간 영역 해석을 통해 고찰하였다.

상하동요하는 2차원 원주의 자유동요를 충남대학교의 2차원 수조에서 수행된 실험을 통해 측정하였고, 또한 Cummins (1962)의 방법을 이용하여 얻어진 식 (3)을 수치적으로 해석하여 운동 응답을 구하였다. 이와 같은 방법으로 얻어진 결과를 기존의 해석적, 실험적 연구 결과와 정성적, 정량적으로 비교하였다. 감쇠 조화 동요로 근사한 기존의 연구 결과를 MCFR(Modulus of Complex Frequency Response) (Meirovitch, 1967)을 이용하여 본 논문에서 얻어진 결과와 비교하였다.

얻어진 운동 응답으로부터 초기 결과를 제외하고 계산된 평균치로 정의된 고유진동수는 실험으로부터 얻은 값은 수치 계산으로부터 얻은 값보다 작게 나타나고, 주파수 영역에서 MCFR을 이용하여 극부 최대값으로부터 얻은 고유진동수보다 약간 크게 얻어졌다. 결론적으로 상하동요하는 2차원 원주에 대해서는 주파수 영역 또는 시간 영역의 어떠한 방법을 사용하여 고유진동수를 얻어도 큰 차이가 없음을 확인하였다.

2. 시간 영역에서의 운동 방정식

2.1 운동 방정식의 유도

상하동요하는 2차원 원주에 대한 좌표계는 Fig. 1과 같이 y 축이 연직상방을 향하는 직각 좌표계로 잡고, 반경이 a , 길이가 무한한 2차원 원주가 정수 중에 수평으로 떠있으며, 평형 상태의 원주의 중심은 원점과 일치한다고 가정한다. 또한 전체 유동장의 유동은 포텐셜 유동으로 가정한다.

어떤 시각 t 에서 Δt 동안 일정한 속도 V 에 의해 생긴 변위 ΔY 는 다음과 같고,

$$\Delta Y = V\Delta t, \tag{4}$$

속도 V 의 물체 운동에 기인하는 유동의 속도 포텐셜을 $\Phi_I(x, y, t)$ 라고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_I(x, y, t) = V(t)\phi_I(x, y). \tag{5}$$

여기서 $\phi_I(x, y)$ 는 정규화된 순간 속도 포텐셜이고, 다음과 같은 경계조건들을 만족한다.

$$\phi_I|_{y=0} = 0. \tag{6}$$

이 식은 자유수면 경계조건이다. 물체 표면에서는 다음과 같은 경계조건을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial n} = -n_y. \tag{7}$$

여기서 n_y 는 원주 안쪽을 향하는 단위 법선 벡터의 y 방향 성분이다. 바닥 조건은 다음과 같다.

$$|\nabla \phi_I| \rightarrow 0, \quad \text{as } y \rightarrow -\infty. \tag{8}$$

Δt 동안에 생긴 변위 ΔY 에 의해 자유 수면의 형상이 변하게 되는데, 이때 자유 수면의 형상의 변화를 $\Delta \eta$ 라고 하면, Φ_I 와 η 의 관계는 자유수면에 대한 운동학적 조건의 선형 근사로부터 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \text{on } y = 0. \tag{9}$$

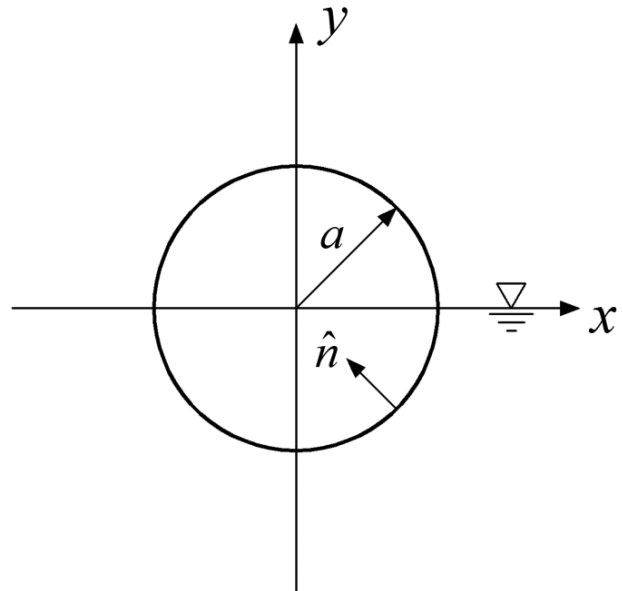


Fig. 1 Co-ordinate system

ΔY 에 의해 생성된 자유 수면의 형상의 변화 $\Delta \eta$ 는 Δt 이후에도 유동장에 지속적으로 영향을 미친다. 이에 상응하는 유동의 속도 포텐셜을 $\Phi_w(x, y, t)$ 라고 하면, 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_w(x, y, t) = \Delta Y \phi_w(x, y, t). \tag{10}$$

여기서 $\phi_w(x, y, t)$ 는 정규화된 파동 속도 포텐셜이고, 다음과 같은 자유수면 경계조건, 물체 경계조건, 바닥 조건, 초기 조건을 만족한다.

$$\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_w}{\partial y} = 0, \quad \text{on } y = 0. \tag{11}$$

$$\frac{\partial \phi_w}{\partial n} = 0. \tag{12}$$

$$|\nabla \phi_w| \rightarrow 0, \quad \text{as } y \rightarrow -\infty \tag{13}$$

$$\phi_w(x, y, 0) = 0. \tag{14}$$

여기서 g 는 중력 가속도 이다. $t = t_0 + \Delta t$ 에서, 즉 $t = 0$ 에서 수면의 형상 η 와 ϕ_w 의 관계는 베르누이 방정식의 선형 근사 (Oortmerssen, 1976)로부터 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \phi_w}{\partial t} = -g\Delta\eta, \quad \text{on } y = 0. \tag{15}$$

결국 위 식 (10)과 식 (15)로부터 ϕ_w 와 ϕ_I 의 관계를 다음과 같이 얻는다.

$$\left. \frac{\partial \phi_w}{\partial t} \right|_{y=0} = g \left. \frac{\partial \phi_I}{\partial y} \right|_{y=0}. \tag{16}$$

전체 속도 포텐셜 Φ 는 임의의 시간 t 에서 Δt 동안에 일어난 물체의 운동에 기인하는 ϕ_I 와 그 이전의 시간 동안 발생한 파도에 기인하는 ϕ_w 의 합으로 볼 수 있고, 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi = V_j \phi_I(x, y) + \sum_{j=1}^J \phi_w(x, y; t_0 + (J-j)\Delta t) V_j \Delta t. \tag{17}$$

여기서 $V_j = V(j\Delta t)$ 이다. 따라서 $\Delta t \rightarrow 0$ 일 때, 식 (17)은 다음과 같은 적분의 형태로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\Phi(x, y, t) = \dot{Y}(t) \phi_I(x, y) + \int_{-\infty}^t \phi_w(x, y; t - \tau) \dot{Y}(\tau) d\tau. \tag{18}$$

위와 같이 정의된 속도 포텐셜 Φ 는 앞에서 얻은 속도 포텐셜들 사이의 관계를 이용하여 선형화된 자유수면 경계조건을 만족함을 보일 수 있다.

선형화된 수동압 p 는 베르누이 정리(Bernoulli's theorem)로부터 다음과 같이 얻는다 (Kim, 2012).

$$\frac{p(x, y, t)}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left\{ \ddot{Y}(t) \phi_I(x, y) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \phi_w}{\partial t}(x, y; t - \tau) \dot{Y}(\tau) d\tau \right\} \tag{19}$$

여기서 ρ 는 유체의 밀도이다. 상하동요 시에 원주에 작용하는

중력, 부력, 압력에 기인하는 전체 연직방향 힘의 합 F_y 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_y = F_g + F_b + F_p. \tag{20}$$

F_g 는 원주에 작용하는 중력에 기인하는 힘, F_b 는 부력에 기인하는 힘이다. 원주의 운동에 기인하여 원주가 물에 잠겨있는 부분에 작용하는 압력에 의해 원주가 연직 방향으로 받는 힘 F_p 는 식 (19)를 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F_p = \int_S p n_y ds = -\rho \left\{ \ddot{Y}(t) \int_S \phi_I(x, y) n_y ds + \int_S n_y ds \int_{-\infty}^t \frac{\partial \phi_w}{\partial t}(x, y; t - \tau) \dot{Y}(\tau) d\tau \right\} \tag{21}$$

위 식에 포함된 적분들을 다음과 같이 정의하고,

$$m_0 = \rho \int_S \phi_I(x, y) n_y ds, \tag{22}$$

$$\beta(t) = \rho \int_S \frac{\partial \phi_w}{\partial t}(x, y; t) n_y ds, \tag{23}$$

위에서 얻은 결과들을 식 (20)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 자유동요에 대한 운동 방정식을 얻는다.

$$(m + m_0) \ddot{Y} + \int_{-\infty}^t \beta(t - \tau) \dot{Y}(\tau) d\tau + CY = 0. \tag{24}$$

여기서 m_0 는 가속도의 위상에 상응하는 양으로 부가질량의 일부이며, β 는 물리적으로는 과거 시점에 발생한 운동의 영향을 나타내는 기억 함수(memory function)이며 지연 함수(retardation function)라고 부른다.

2.2 시간 영역과 주파수 영역에서의 운동 방정식 사이의 관계

식 (24)와 관련하여 조화 기진 $\text{Re } F_0 e^{-i(\omega t + \delta)}$ 에 의한 물체의 조화 운동 $Y = \text{Re } e^{-i(\omega t + \epsilon)}$ 에 대해 생각한다. 여기서 l 은 운동의 진폭이다. 복소 진동 응답, CFR(Complex Frequency Response)은 다음과 같다.

$$\frac{l}{F_0} = R_t = \frac{1}{\left\{ C - (m + m_0)\omega^2 - i\omega \int_{-\infty}^t \beta(t - \tau) e^{i\omega(t - \tau)} d\tau \right\}}. \tag{25}$$

한편 주파수 영역에서의 운동 방정식에 대한 CFR은 다음과 같
으므로,

$$R_f = \frac{1}{\{C - (m + m_a)\omega^2\} - i\omega\mu(\omega)}, \quad (26)$$

$R_t = R_f$ 를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\mu(\omega) = \int_0^\infty \beta(\gamma) \cos \omega\gamma d\gamma \quad (27)$$

$$m_w = -\frac{1}{\omega} \int_0^\infty \beta(\gamma) \sin \omega\gamma d\gamma \quad (28)$$

$$\beta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mu(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (29)$$

$$m_a = m_0 + m_w \quad (30)$$

$$m_0 = m_a - m_w = m_a(\omega_1) + \frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty \beta(t) \sin \omega_1 t dt \quad (31)$$

식 (27)에서 $\mu(\omega)$ 는 β 의 푸리에 코사인 변환이므로 푸리에
코사인 역 변환 (Greenberg, 1978)을 이용하여 식 (29)를 얻는
다. 따라서 위 결과에 의해 ϕ_L 와 ϕ_w 를 구하지 않아도 주파수 영
역 해석 결과를 이용하여 시간 영역 해석에 필요한 양들을 얻을
수 있다.

2.3 고주파수 영역에서 조파 감쇠의 근사

식 (29)로부터 지연함수 β 를 계산하기 위해서는 모든 주파수
에 대해 정의된 조파 감쇠 $\mu(\omega)$ 를 알아야 하나, 실제 계산 시에
는 유한한 ω 의 범위에 대해 계산할 수 밖에 없으므로 정확한 β
의 계산을 위해서는 $\omega \rightarrow \infty$ 일 때에 대한 $\mu(\omega)$ 의 해석적 근사
가 필요하다. 이를 위해 다음과 같은 일-에너지 원리를 사용하기
로 한다.

$$\mu(\omega) = \frac{\rho g}{\omega K} \left(\frac{b}{l}\right)^2 = \frac{\rho g^2}{\omega^3} \left(\frac{b}{l}\right)^2. \quad (32)$$

여기서 b 는 상하동요에 의한 $|x| \rightarrow \infty$ 일 때의 방사파의
진폭이고, $K = \frac{\omega^2}{g}$ 은 방사파의 파수이다. 또한, $\omega \rightarrow \infty$ 일
때, Ursell (1949, 1959)로부터 다음을 얻는다.

$$\mu(\omega) \simeq \frac{\rho g^2}{\omega^3} \left(\frac{4g}{a\omega^2}\right)^2 = \frac{16\rho g^4}{a^2\omega^7} = \frac{c_L}{\omega^7} \quad (33)$$

충분히 큰 ω_L 에 대하여 지연 함수 β 는 식 (33)을 이용하여
다음과 같이 두 개의 적분으로 분리하여 구할 수 있다.

$$\beta(t) = \frac{2}{\mu} \int_0^{\omega_L} \mu(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{2c_L}{\pi} \int_{\omega_L}^\infty \frac{\cos \omega t}{\omega^7} d\omega. \quad (34)$$

여기서 β 는 $t = 0$ 일 때 최대값을 가지며, $\omega_L = 7$ 일 때
 $\beta(0) = 1.3324$, $\omega_L = 8$ 일 때 $\beta(0) = 1.3329$ 로 0.04%의
차이를 보이므로, $\omega_L = 8$ 까지 조파 감쇠를 계산 할 수 있다면
식 (34)의 우변의 두 번째 적분항은 무시할 수 있다. 여기서
 $\omega_L = 8$ 은 주파수 영역에서 부가 질량과 조파 감쇠를 모두 고려
하지 않았을 때의 고유진동수, 즉 원고유진동수(pre-natural
frequency) ω_0 의 4배에 상응한다.

2.4 무차원화된 운동 방정식

본 논문에서 사용한 무차원량들은 이 절에서 하첨자 *을 사용
하여 나타내었고 각 변수들을 다음과 같이 무차원화 하였다.

$$Y_* = \frac{Y}{Y_0}, \quad \omega_* = \omega \sqrt{\frac{\pi a}{g}} = \omega \frac{2}{\omega_0}, \quad (35)$$

$$t_* = t \sqrt{\frac{g}{\pi a}} = t \frac{\pi}{T_0}.$$

여기서 T_0 는 ω_0 에 상응하는 주기이고, ω 는 $\omega_0/2$ 로 무차원
화하여 ω_0 에 상응하는 $\omega_* = 2$ 이고, t 는 T_0/π 로 무차원화하
여 T_0 에 상응하는 $t_* = \pi$ 이다. 또한 질량과 조파 감쇠의 무차
원화는 다음과 같다.

$$C_0 = \frac{m_0}{m}, \quad C_a = \frac{m_a}{m}, \quad C_w = \frac{m_w}{m}, \quad C_\mu = \frac{\mu}{m\omega}. \quad (36)$$

식 (35)와 식 (36)을 이용하여 식 (24)를 무차원화하면 다음을
얻는다.

$$(1 + C_0) \ddot{Y}_* + \int_{-\infty}^{t_*} \beta_*(t_* - \tau_*) \dot{Y}_* d\tau_* + 4Y_* = 0. \quad (37)$$

이하에서는 표기상의 편의를 위해 하첨자 *을 생략하므로 이
하에서 나오는 변수들은 무차원량임에 유의한다.

3. 실험

실험은 충남대학교의 2차원 수조에서 수행하였으며, 수조의
제원은 Table 1과 같다. 원주의 상하동요 시 발생하는 파에 의한
반사파의 영향을 최소화하기 위해 수조의 중간 지점에서 수행하
였다. 원주가 상하동요만 하도록 수조 벽면에 가이드를 설치하였

고, 상하동요 외의 운동을 최대한 줄이기 위해 원주에 부착된 핀과 가이드 사이의 유격을 최소화하였다.

수조의 최대 수심은 0.3m이며, 상하동요의 무차원 파수 $\xi = Ka$ 이므로, 여기서 무한 수심에 대한 가정을 고려하여 원주의 직경 D 는 10cm로 정하였다. 여기서는 선형이론을 사용하고 있기 때문에 초기 변위 Y_0 는 선형 이론의 한계를 만족하도록 1cm로 정하였다.

실험 결과는 디지털 캠코더를 이용하여 기록하였고, 반사파의 영향을 받지 않도록 파의 전파 속도를 고려하여 계측 시간은 최대 7.5초로 하였다.

Table 1 Particulars of CNU flume

Length	13m
Breadth	0.4m
Depth	0.34m
Water depth	0.3m

4. 수치 계산

4.1 지연 함수와 부가 질량 계수 계산

지연 함수의 계산은 위에서 설명한 바와 같이 수행하였고, 그 결과를 Fig. 2에 도시하였다.

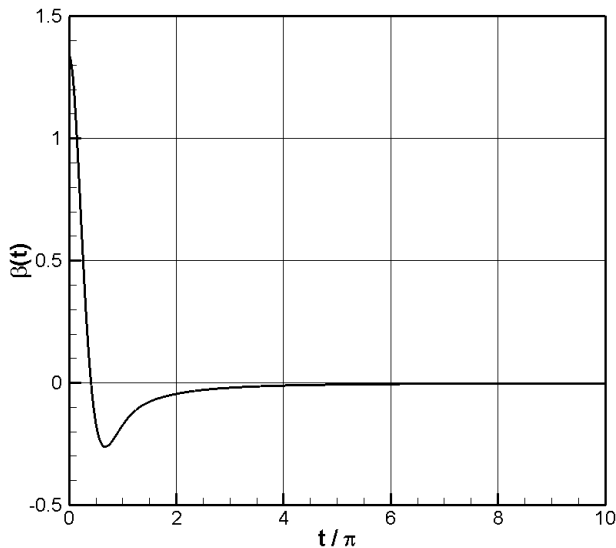


Fig. 2 Retardation function $\beta(t)$

지연 함수는 과거 시점의 운동이 현재 시점에 주는 영향을 나타내는 기억 효과(memory effect)로 볼 수 있으며, Fig. 2에서 보이는 바와 같이 $t/\pi < 2$ 일 때까지 무시할 수 없을 만한 값을 가진다. 이와 같은 경향은 현재 시점보다 $2T_0$ 이전의 운동이 미치는 영향은 그리 크지 않음을 뜻한다.

식 (31)로부터 얻는 무차원화한 부가 질량 계수 C_0 에 대한 계산 결과를 C_a , C_w 에 대한 결과와 같이 Fig. 3에 도시하였다.

$\omega \rightarrow \infty$ 일 때, 무한 유체 중에서 원주가 상하동요하는 경우의 부가 질량 계수인 $C_0 = 1$ 의 값으로 접근함을 확인할 수 있다.

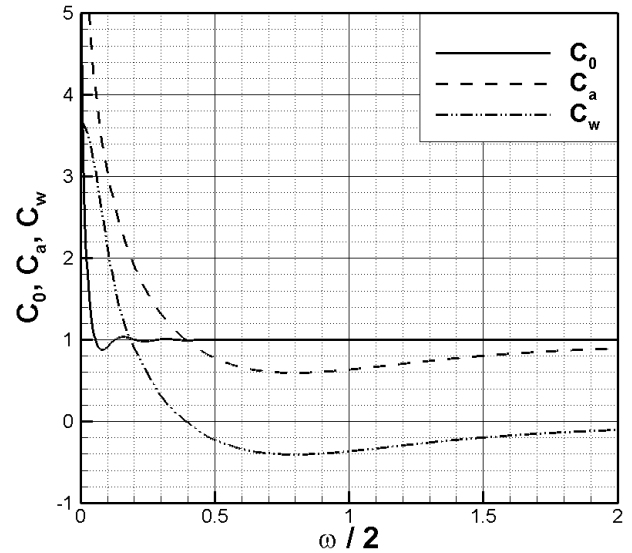


Fig. 3 Comparison of C_0 , C_a , C_w

4.2 Runge-Kutta방법을 이용한 시간 영역 해석

적분-미분 방정식인 식 (37)을 풀기 위해 Runge-Kutta 방법 (Greenberg, 1978)을 사용하였다. 시간 간격 Δt 에 따른 오차의 크기를 검토하기 위해 감쇠 조화 동요에 대해 $\Delta t = 0.5, 0.1, 0.05$ 를 사용하여 개발된 수치 코드를 검증하였다. 최소 자승법 (least square method)을 이용하여 $\Delta t = 0.1$ 과 $\Delta t = 0.05$ 를 사용하여 얻어진 수치해의 차이는 0.3%이므로 수치계산 시에 $\Delta t \leq 0.1$, 즉 1주기에 31점 이상으로 계산할 때 만족할 만한 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 정확한 지연 함수의 계산을 위해 컨볼루션의 계산에 Romberg 적분을 사용하였다. Romberg 적분의 정확도는 적분 소구간, $\Delta \tau$ 의 6승에 비례하므로, $\Delta \tau = 0.1$ 을 사용하여 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있다.

5. 결과 검토 및 고찰

5.1 실험 결과

위에서 설명한 방법에 의해 얻어진 수치 계산 결과와 본 연구의 실험 결과를 Ito (1977)의 실험 결과와 비교하여 Fig. 4에 도시하였다.

Fig. 4에서 볼 수 있는 바와 같이 수치 계산 결과와 실험 결과는 대체적으로 일치한다. 단, 수치 계산 결과는 Ito의 실험 결과와 두 번째 국부 최소값 이후, 보다 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

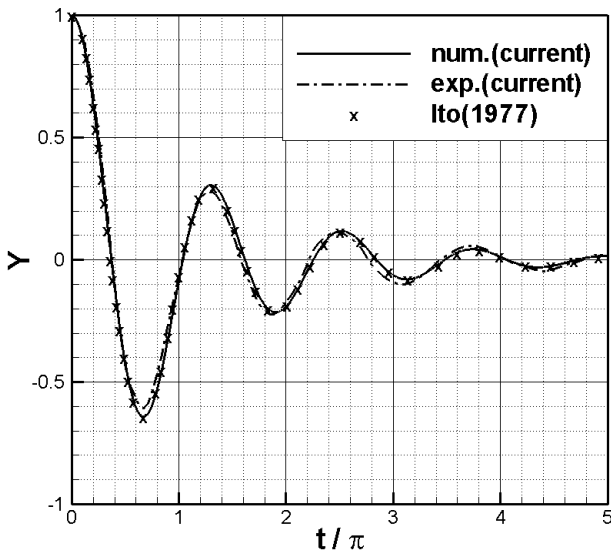


Fig. 4 Comparison of current numerical and experimental results with the experimental result of Ito (1977)

원주의 상하동요와 관련하여 고유진동수는 몇 가지 방법으로 정의할 수 있다. 강제동요와 자유동요로 나누어 생각할 수 있는데, 강제동요는 주파수 영역, 자유동요는 시간 영역 해석으로부터 운동 응답을 얻는다. 자유동요의 응답으로부터 평균주기를 구하여 고유진동수를 정의할 수 있다. 평균주기를 얻는 기준점으로는 국부 최대값(local maximum), 국부 최소값(local minimum), 하향 영점(Down-Crossing Zero point), 상향 영점(Up-Crossing Zero point)의 네 점을 사용할 수 있으며, 이 점들을 사용하여 얻은 평균주기를 Table 2, Table 3에 보였다.

Table 2와 Table 3에서 Average 1,3은 전체의 평균 주기이고, Average 2, 4는 첫 번째 값을 제외하고 얻은 평균 주기이다.

네 기준점을 사용하여 얻은 주기들로부터 얻은 평균 진동수는 Average 1의 경우, $\omega_{e1} = 1.613$, Average 2의 경우, $\omega_{e2} = 1.597$, Average 3의 경우, $\omega_{n1} = 1.621$, Average 4의 경우, $\omega_{n2} = 1.631$ 이다. Lee (2012)가 얻은 부가 질량과 조파 감쇠가 고려된 주파수 영역에서의 고유진동수 $\omega_1 = 1.594$ 와 비교하면 ω_{e2} 가 0.19%의 차이를 보여 가장 잘 일치한다고 볼 수 있다.

Table 2 Average period from experimental data

Index	Local max.	Local min.	D-C-Z	U-C-Z
Avg. 1	1.244	1.244	1.225	1.247
Avg. 2	1.223	1.268	1.238	1.281

Table 3 Average period from numerical data

Index	Local max.	Local min.	D-C-Z	U-C-Z
Avg. 3	1.249	1.229	1.232	1.225
Avg. 4	1.225	1.226	1.224	1.230

5.2 수치계산

시간 영역에서의 자유동요는 적분-미분 방정식의 해, 감쇠 조화 동요는 2계 선형 미분 방정식의 해로 각각 주어지므로 시간 영역에서의 자유동요를 감쇠 조화 동요로 근사하는 것은 그 타당성을 증명해야 할 필요가 있다. 시간 영역에서의 자유동요의 응답과 유사한 양태를 보이는 감쇠 조화 동요의 고유진동수와 감쇠비를 구하기 위해, 고유진동수로 ω_{n2} 를 사용하고, 최소 자승법을 이용하여 감쇠비 $\zeta_L = 0.1635$ 를 얻었다. 수치계산 결과와 $\omega_{n2} = 1.631$, $\zeta_L = 0.1635$ 일 때의 감쇠 조화 동요의 해를 Fig. 5에 비교, 도시하였다.

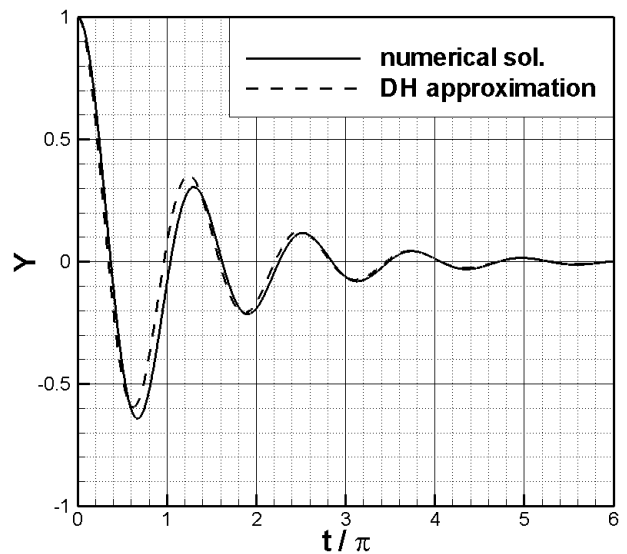


Fig. 5 Comparison of numerical solution with damped harmonic approximation

Maskell and Ursell (1970)이 설명한 바에 근거하여 $t/\pi < 2$ 일 때의 초기 결과를 제외하고 최소 자승법을 사용하여 감쇠 조화 동요로 근사하였기 때문에 $t/\pi > 2$ 일 때의 응답은 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

일반적으로 시간 영역에서의 자유동요로부터 감쇠비를 구할 때, 고유진동수를 알고 있다고 하면 각각의 국부 최대값의 진폭에 대한 대수 감소(logarithmic decrement)를 이용하여 감쇠비 ζ 를 결정할 수 있으며, 그 결과를 Table 4에 보였다. 세 번째와 네 번째 국부 최대값을 이용하여 구한 감쇠비와 ζ_L 의 차이는 0.424%로 무시할 만큼 작은 것을 확인할 수 있다.

Table 4 Damping ratio obtained by logarithmic decrement

Location of local max.	1	2	3
2	0.1822		
3	0.1694	0.1557	
4	0.1677	0.1600	0.1642

수치계산 결과와 Maskell and Ursell (1970)의 이론적 결과를 비교하였다. 그들의 이론적 결과에서 구한 극성분(polar component) $h_{2p}(t)$ 는 다음과 같다.

$$h_{2p}(t) = 0.9664e^{-0.232t} \cos(1.616t - 0.8517). \quad (38)$$

이 식을 감쇠 조화 동요의 해로 간주하여 얻은 고유진동수와 감쇠비는 $\omega_{MU} = 1.633$ 이고, $\zeta_{MU} = 0.1421$ 이다. ω_{n2} 와 ω_{MU} 는 0.122%의 차이 밖에 없으며, 수치 계산으로부터 얻은 복소 적분에 대한 특이점(pole)의 위치가 정확하지 않은 것에 기인하여 ζ_{MU} 는 ζ_L 보다 13.09% 작게 나타나는 것으로 보인다. 수치 계산 결과와 $h_{2p}(t)$ 는 Fig. 6에 비교, 도시하였다.

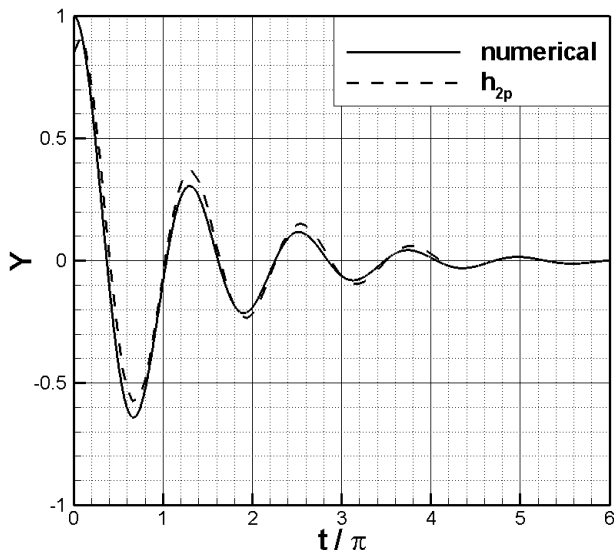


Fig. 6 Comparison of numerical result with polar solution of Maskell and Ursell (1970)

수치계산 결과와 Yeung (1982)의 이론 해석에 따른 근사 결과를 Fig. 7에 비교 도시하였다. 그의 이론적 결과는 다음과 같이 감쇠 조화 동요로 쓸 수 있으며,

$$Y(t) = 1.0134e^{-0.2569t} \cos(1.5623t - 0.1652). \quad (39)$$

이 식으로부터 얻은 고유진동수와 감쇠비는 $\omega_Y = 1.583$, $\zeta_Y = 0.1622$ 를 얻는다. ω_Y 는 ω_{n2} 보다 3.03% 작고, ζ_Y 는 ζ_L 보다 0.8% 작다. Yeung은 감쇠 조화 동요로 근사할 때, 초기 조건을 만족시켜 근사하였으므로, 그림에서 보는 바와 같이 첫 번째 국부 최소값과 두 번째 국부 최대값에도 차이가 있고 시간이 지남에 따라 주기의 차이가 발생하는 것을 볼 수 있다.

시간 영역에서의 응답을 비교하면 다양한 연구 결과들 사이에 차이를 인식하기 곤란하므로, MCFR을 이용하여 비교하면 그들

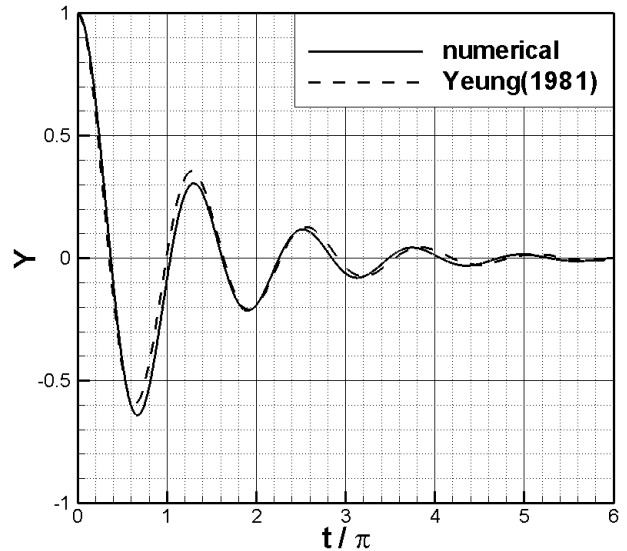


Fig. 7 Comparison of numerical result with approximate solution of Yeung (1982)

의 차이를 보다 간명하게 보일 수 있다. 시간 영역에서 얻은 평균 진동수와, MCFR의 값이 국부 최대가 되는 진동수 ω_{max} 를 Table 5에 비교하여 보였다. ω_1 을 기준으로 하여 얻은 ω_{max} 에

Table 5 Natural frequency, damping ratio, ω_{max}

	Frequency domain	Numerical computation	Maskell & Ursell	Yeung
ω_n	1.594	1.631	1.633	1.583
ζ	N/A	0.1635	0.1421	0.1622
ω_{max}	1.594	1.587	1.600	1.541
Error(%)	0%	0.439%	0.376%	3.325%

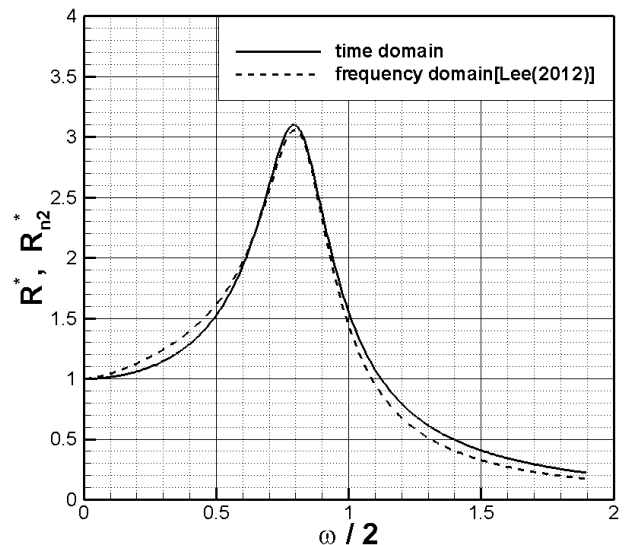


Fig. 8 MCFRs obtained from time domain and frequency domain analyses

대한 상대 오차는 Yeung을 제외하고 거의 무시할 만큼 작은 것을 확인할 수 있다. Yeung은 초기 조건을 만족하도록 감쇠 조화 동요를 근사하였으므로 주기 및 진동수에 차이를 보이는 것으로 생각된다.

Fig. 8에 수치 계산 결과, 주파수 영역 해석의 결과, Fig. 9에 수치 계산 결과, Maskell and Ursell (1970), Yeung (1982)의 MCFR을 비교, 도시하였다. 수치 계산과 주파수 영역 해석의 MCFR은 국부 최대값 부근에서는 잘 일치하나, 그 형상에는 근본적인 차이가 있음을 알 수 있다. 수치 계산 결과와 Maskell and Ursell (1970)은 감쇠비가, Yeung (1982)은 고유 진동수가 다르게 나타나는 것을 확인할 수 있다.

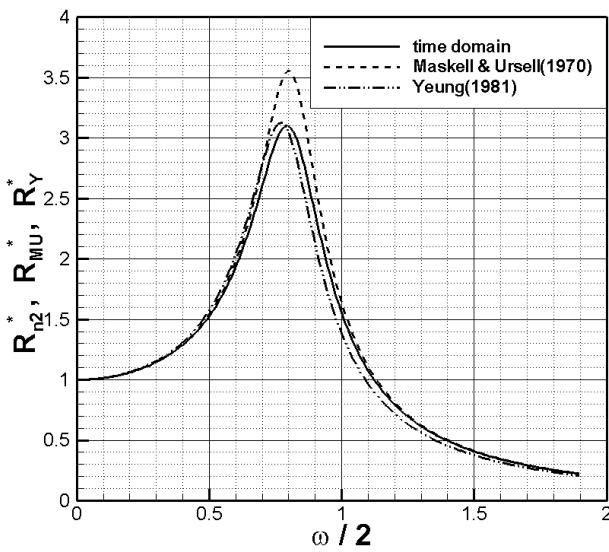


Fig. 9 MCFRs obtained from time domain analysis, Maskell and Ursell (1970) and Yeung (1982)

6. 결론

초기 결과를 제외하고 시간 영역에서의 계산 결과로부터 얻은 평균 진동수 ω_{n2} 는 실험 결과로부터 얻은 평균 진동수 ω_{e2} 보다 2.1% 크고, ω_{e2} 는 주파수 영역에서 MCFR을 이용하여 얻은 고유 진동수 ω_1 과 비교하여 0.188%크므로, 그 차이가 가장 작다. 또한 시간 영역 해석 결과를 감쇠 조화 동요로 근사하여 얻은 MCFR과 주파수 영역에서 얻은 MCFR은 국부 최대값 부근에서 매우 유사하다.

따라서 본 논문에서 고려한 상하동요하는 2차원 원주에 대해서는 주파수 영역 또는 시간 영역의 어떠한 방법을 사용하여 고유진동수를 얻어도 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

후 기

이 연구는 2011년도 충남대학교 학술연구비에 의해 지원된 연구의 결과입니다.

References

- Cummins, W.E., 1962. The Impulse Response Function and Ship Motions, *DTMB Report 1661*.
- Greenberg, M.D., 1978. *Foundations of Applied Mathematics*. Prentice-Hall Inc.
- Ito, S., 1977. *Study of the transient heave oscillation of a floating cylinder*. M.S. Thesis. Massachusetts Institute of Technology.
- Kim, K.B., 2012. *Natural frequency of 2-dimensional heaving circular cylinder; time-domain analysis*. M.S. Thesis. Chungnam National University.
- Lee, D.Y., 2012. *Natural frequency of 2-dimensional heaving circular cylinder; frequency-domain analysis*. M.S. Thesis. Chungnam National University.
- Maskell, S.J. & Ursell, F., 1970. The Transient Motion of a Floating Body. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(2), pp.303-313.
- Meirovitch, L., 1967. *Analytical methods in vibrations*. Macmillan Company: New York.
- Oortmerssen, G.V., 1976. *The motion of a moored ship in waves*. Ph.D. Dissertation. Delft University of Technology.
- Ursell, F., 1949. On the Heaving Motion of a Circular Cylinder on the Surface of a Fluid. *Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, 2(2), pp.218-231.
- Ursell, F., 1959. On the Virtual Mass and Damping of Floating Bodies at Zero Speed Ahead. *Proceedings of Behavior of Ships in a Seaway*, Wageningen, 7-10 September 1957, pp.374-387.
- Ursell, F., 1964. The decay of the free motion of a floating body. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(2), pp.305-319.
- Ursell, F., 2007. Water-wave Problems, Their Mathematical Solution and Physical Interpretation. *Journal of Engineering Mathematics*, 58(1-4), pp.7-17.
- Yeung, R.W., 1982. The Transient Heaving Motion of Floating Cylinders. *Journal of Engineering Mathematics*, 16(2), pp.97-119.



김기범

이승준