

Byrne의 ‘Euclid 원론’에 기초한 증명 지도에 대한 연구¹⁾

장 혜 원*

2009 개정 교육과정의 중학교 기하영역에서 주목할 만한 변화 중 하나는 엄밀한 형식적인 증명대신 도형의 성질을 이해하고 설명하는 활동으로의 대치이다. 이는 수학교육의 꾸준한 논쟁거리였던 증명 교육과 관련한 학습자의 이해 수준 및 어려움을 고려한 결과이다. 본 연구는 학생들이 기하 증명시 경험하는 어려움 중 도형을 지칭하는 문자 및 형식적 기호를 사용한 증명 작성, 기호로 길게 제시된 증명 이해에서 비롯되는 형식적 특성의 것에 주목한다. 증명의 아이디어와는 별개로 문자 및 기호 사용에서 비롯되는 어려움을 극복하고자 문자 대신 채색된 그림이라는 시각적 표현을 이용함으로써 독자의 학습을 쉽게 하려고 했던 Byrne의 ‘Euclid 원론’에 사용된 증명 방법을 이용하여 지도해봄으로써 오늘날 기하 수업에서의 적용가능성을 검토하고자 하는 것이다. 이를 위해 중학교 2학년 한 학급을 대상으로 기하 단원의 세 개 정리에 대한 증명을 원문, 역동적 표현, 교사의 판서 등 세 개의 매체를 활용한 Byrne의 방법으로 지도하고, 학생들의 활동 결과 및 학생과 교사의 설문 결과를 분석함으로써 새로운 대안의 장단점을 토대로 적용가능성을 논의한다.

1. 서론

기하는 오랜 역사를 지닌 수학 분야이자 학교 수학의 중요한 영역이다. 구조주의를 표방하여 대수학의 추상화를 추구한 부르바키 학파의 영향 등으로 대수에 비해 기하의 위상이 약화되기도 하였지만, ‘대수가 수학의 언어라면 기하는 그것을 연결하는 접착제다(Shaughnessy, 2011).’라고 할 만큼 기하는 학교 수학에서 핵심 내용이며 수학적 추론의 발달을 위한 풍부한 매체라는 것에 의심의 여지가 없다. 이렇듯 학교 수학의 중요한 부분인 기하는 도형 및 그

성질과 측도를 위주로 하는 전통적 내용으로부터 도형의 이동이나 입체도형 등을 통한 공간 감각의 신장, 위상기하 등 비교적 새로운 요소에 이르기까지 포괄적인 내용들을 다루고 있으나, 중학교 수학의 기하 영역에서 가장 주목되고 끊임없는 논쟁거리가 되어 온 주제는 바로 증명이다.

그 논쟁의 중심에는 유클리드의 ‘원론’에서 비롯된 형식 논리에 입각한 연역적 전개가 자리하고 있다. 학교 기하에서 유클리드 방법의 수학적으로 엄밀한 전개방식이 학습자에게 심리적으로 무미건조하게 수용된다는 교육적 문제점을 제기하고 그 대안을 제안하려는 시도가

* 진주교육대학교 수학교육과(hwchang@cue.ac.kr)

1) 이 논문은 2012년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2012S1A5A2A01016956)

이어져온 바 있다. 수학교육의 역사를 일견하면, 유클리드의 ‘원론’이 기하를 처음 배우는 학습자에게 적합한 교재인가에 대한 의문에서 비롯된 다양한 시도를 볼 수 있다(Ramus, 1636; Arnauld, 1667; Clairaut, 1719; Davies, 1841; Wilson, 1868; Casey, 1885; Godfrey & Siddons, 1903(Fujita, 2001 재인용) 등). 그러나 이와 같이 학생이 경험하는 심리적 어려움에 대한 배려와는 별개로 유클리드 ‘원론’의 본질적인 영향 하에 논리 연역적 사고를 위한 증명의 지도는 여전히 기하 교육에서 빠질 수 없는 요소로 간주되어 왔다.

증명을 통한 논리 연역적 사고의 지도가 학교 수학의 필수적인 요소라면, 적합한 지도 방법에 대한 논의가 요구되는 것은 당연하다고 할 것이다. 더욱이 학생들이 도형 단원의 증명을 매우 어려워한다는 다수의 연구 결과를 고려한다면 증명의 지도 방법에 대한 논의는 더욱 불가피하다. 우리나라에서도 엄밀한 증명의 교육 시기에 대한 논의는 수학교육 전문가들의 지속적인 관심사여 왔고, 2007 개정 교육과정까지의 증명 도입 시기인 중학교 2학년 학생들이 증명 과정에서 명제들을 논리적으로 연결하는 어려움 때문에 실제로 증명 학습을 얼마나 어려워하는지, 증명 수업이 사실상 어떻게 이루어지는지, 증명에 대한 교사의 관행은 어떠한지 등 증명과 관련된 교수·학습 현상 자체를 다룬 다수의 연구가 있다(고민지, 2008; 류경진,

2010; 정민정, 2011 등). 연구 결과는 학생들이 기하 증명을 매우 어려워한다는 사실을 보여주며, 그 현상을 여러 가지 이유에 근거하여 설명하고 있다. 그 중 본 연구에서 주목하는 이유는 증명 작성의 어려움과 관련된다. 학생들이 증명할 때 반드시 기호를 사용해야 한다는 점에서 많은 어려움을 경험하며, 심지어 증명 학습시 가장 힘든 부분이 증명을 논리적으로 전개하여 공책에 정리하는 단계라는 설문 결과도 있다(이가영, 2002).

이와 관련하여 2009 개정 교육과정에 따른 수학교육과정(교육과학기술부, 2011)의 증명 관련 내용의 변화 측면에서도 논의가 필요하다. 그 변화는 엄밀한 형식적 증명을 대신하여 ‘학생의 이해 수준에 입각한 정당화 수준의 교육을 지향한다(한국과학창의재단, 2011b).’는 차원에서 <표 I-1>에 제시된 바와 같이 ‘이해하고 설명’하는 활동의 도입을 의미한다.

그러나 이와 같이 증명 용어와 의미 및 형식적인 증명 과정의 삭제라는 혁신적인 제안은 연구진의 교육과정 시안 논의 및 공청회 등을 거치면서 그 실천 방안에 대한 많은 논쟁을 야기시켰다(한국과학창의재단, 2011a; 2011b; 2011c). 그 구체적인 방안의 부재와 기하 교육의 중요한 목표로 간주되어 온 논리 연역적 사고의 약화에 대한 우려에서 기인하는 현상으로 볼 수 있다.

이에 대한 한 가지 가능성으로, 본 연구는

<표 I-1> 수학과 교육과정에서 중학교 2학년 증명 관련 내용의 변화

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
<p>⑤ 삼각형과 사각형의 성질(2학년)</p> <p>① 명제의 뜻과 <u>증명의 의미</u>를 이해한다.</p> <p>② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 <u>증명</u>할 수 있다.</p>	<p>⑤ 삼각형과 사각형의 성질</p> <p>① 이등변삼각형의 성질을 <u>이해하고 설명</u>할 수 있다.</p> <p>② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 <u>이해하고 설명</u>할 수 있다.</p> <p>③ 사각형의 성질을 <u>이해하고 설명</u>할 수 있다.</p>

유클리드 ‘원론’에 기초한 기존의 논리적 전개 방식을 그대로 따르지만 문자 표현보다 직관적인 시각적 표현 방식을 택함으로써 학습자들의 신속하고 용이한 이해를 돕고자 했던 Byrne(1847)의 증명 방법의 현장 적용 가능성 및 효과에 대해 조사하는 것을 목적으로 한다. Byrne의 방식을 보여주는 그의 ‘Euclid 원론’²⁾은 그 목적이 학습자가 아주 쉽게 배울 수 있도록 하기 위한 교육적 목적을 지닌 교재이며, 그 목적을 달성하기 위한 방법으로 문자 대신 채색된 그림을 사용한다는 것을 특징으로 한다. Byrne의 방법의 교육적 가치에 대한 판단은 개인의 관점에 따라 다를 수 있지만 (Alexanderson, 2010), 적어도 2009 개정 수학과 교육과정에서 고려한 증명 학습의 어려움 요인 중 ‘증명을 하기 위해 익숙해야 하는 용어와 기호의 사용(한국과학창의재단, 2011b)’과 관련된 어려움을 경감시키는 데 도움이 될 것이라는 기대에서 교실 수업에서의 적용을 시도하는 것이다. 또한 교육과정에서 의도한 도형의 성질을 ‘설명한다’는 성취 기준의 측면에서 Byrne의 방법은 타인에게 증명의 핵심 아이디어를 설명하는 것을 용이하게 할 수 있을 것으로 기대되는 바이다.

본 연구의 목적을 위해 Byrne의 ‘Euclid 원론’의 내용을 분석함으로써 그의 집필 목적과 의도를 이해할 것이다. 그 의도에 부합하는 방식으로 중학교 2학년에게 지도하기에 적합한 정리를 선정하여 Byrne의 교육적 의도가 잘 구현될 수 있는 교수·학습 방법을 고안하고, 이를 증명 수업에 적용할 것이다. 수업을 관찰하고, 연구 참여자인 교사와 학생들을 설문함으로써 그 결과에 기초하여 Byrne 방법의 수업 적용 가능성 및 효과에 대해 논의할 것이다.

II. 선행연구 고찰

증명의 어려움을 극복하고자 증명을 효과적으로 지도하기 위한 여러 가지 방법을 제안하는 다수의 연구를 주목할 수 있다(조정수, 이정자, 2006; 고은정, 2005; 황인경, 2007; 한혜숙, 문수진, 2009; 나귀수, 2009; Fujita & Jones, 2002 등). 제안된 방법들은 논리의 내용적 요소에 초점을 맞춘 것으로, 이를테면 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 단계를 구분한 Branford(1921)의 증명관이나 실험적이고 귀납적인 방식으로 이루어지는 정당화와 수학적으로 완전히 형식화된 수준의 증명 사이에 있는 전형적 증명에 대한 필요성(홍진곤 & 권석일, 2004; 류성림, 1998)등에 기초하여 형식적 수준의 증명에 이르기 전 단계에서 다양한 사고 경험을 할 것을 주장하는 방법들이다.

이에 비해 본 연구의 관심은 증명의 형식적 측면이다. 증명 교육에서 중요한 것은 증명을 이끌어가는 아이디어인데, 이와는 별도로 증명을 기술하는 어려움 또는 제시되어 있는 긴 증명을 이해하는 어려움 때문에 증명의 형식적 측면이 또 다른 차원의 인지적 어려움을 야기시킨다는 사실에 주목하는 것이다.

증명 작성의 어려움은 많은 연구에서 주목된 바 있다. 대규모 프로젝트인 ‘중등학교 기하에서의 인지발달과 성취(CDASSG)’의 결과(Senk, 1985)는 증명을 작성하는 것이 증명 교육에서 중요한 동시에 어려운 요인임을 지적하였고, 그러한 어려움을 극복하기 위한 도구 사용의 효과를 입증하는 연구(Dimakos et al., 2007)나 초등단계에서 출발점으로서 일련의 과제를 고안하여 적용한 연구(Cyr, 2011)도 있다.

증명 작성과 관련한 국내의 연구로, 김명지

2) 이 책의 원저인 유클리드의 ‘원론’과 구별하기 위해 본 논문에서는 Byrne의 저작을 ‘Euclid 원론’이라 칭한다.

(2009)는 기하 명제의 증명시 요구되는 수학적 기호를 이용한 표현의 어려움에 주목한다. 증명을 위해 우선 명제를 적절한 기호로 나타내기 위해 필요한 시간이나 노력에 비해 실제로는 시간을 할애하지도 않고 지도하기 때문에 어려움이 가중된다는 것이다. 이와 같은 형식적 증명의 어려움을 줄이고자 시각적 방법을 이용한 증명 방법을 주장하며 중학교 기하 영역의 몇 개의 정리에 대한 증명을 예로 들어 시각화 방법에 의한 증명을 소개한다. 예를 들어, 도형의 시각적 표현에서 각을 아라비아 숫자로 명명하고 그로써 증명을 작성한다.

이민정(2008)에 따르면, 증명을 하기 위해 명제의 가정과 결론을 반드시 기호로 나타내어야 하고 심지어 기호로 나타내지 않으면 틀린 것으로 간주하기도 하는 것이 교육 현실이다. 또한 실제로 증명 수행 과정에서도 말로 설명하는 것은 부정확하므로 반드시 기호를 써서 증명해야 한다고 할 만큼 기호 표현은 강조되고 있다. 같은 맥락에서 나귀수(1998) 역시 학생들이 증명 학습에서 보이는 어려움 중 하나로서 증명할 때 반드시 기호를 사용해야 한다는 것을 지적하고 있다.

한편 길게 서술된 증명을 이해하는 어려움은 증명 과정에 포함된 문자 및 기호의 사용이 그것이 지칭하는 대상이나 의미에 대한 이해와 별도로 의미 사이의 관계를 동시에 생각하면서 논리 연역적 고리를 연결해야 하는 복잡한 사고 과정을 요구하기 때문으로 볼 수 있다. 증명의 중심 아이디어를 전개하는 어려움 외에 기호를 수단으로 하기 때문에 부수적으로 발생하는 이와 같은 어려움은 작동 기억의 제한된 용량이라는 인지과학적인 측면에서 볼 때 증명을 더욱 어렵게 만드는 본질적인 요소라 할 수 있다. 제시된 증명을 이해하는 어려움과 관련된 선행 연구는 주로 증명의 길이, 기호 및 문

자 사용, 도형 표현에서 색깔의 유무와 관련된 것이다.

Wilson(1868)의 유클리드 ‘원론’에 대한 비판 속에는 증명의 길이에 대한 것이 포함되어 있다. 즉 유클리드의 증명은 너무 길기 때문에 독자가 파악하기 어렵다는 것이다. 문자의 사용이나 증명의 길이와 관련한 증명 학습시의 어려움은 Fetisov(2006)에서 두 학생의 담화에도 보인다:

학생 A: 넌 믿을 수 없을 거야... 선생님이 들어오셔서 칠판에 두 개의 합동인 삼각형을 그리고 나서 수업시간 내내 그것이 합동이라는 것을 보이시는 거야! 나는 보지 않았어. 그게 무슨 소용이 있겠니?

학생 B: 하지만 어떻게 외우려고?

학생 A: 책을 보면 돼... 다만 그 모든 문자들을 어디에 놓아야 할지 기억하는 게 어렵겠지만.

증명의 형식적 측면에는 색깔 요소도 포함된다. 윤상호(2006)는 수학교과서의 도형 단원을 흑백텔레비전에 비유하면서, 하나의 색으로 그린다면 ‘원의 중심과 현의 중점을 이은 직선은 현과 수직이다, 원의 중심에서 현에 수선을 내리면 현을 이등분한다, 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다’의 세 개 정리가 동일하게 표현될 수밖에 없고, 따라서 흑백 그림을 보면서 정리를 증명할 때는 무엇을 이용해서 무엇을 보여야 하는 것인지 혼란을 겪게 된다는 것이다. 시각적 표현에서도 가정과 결론의 구분은 필요하며 색깔을 이용하면 된다.

증명 지도에서 학생이 학습해야 하는 것은 증명의 아이디어에 맞추어져야 하며, 학생의 어려움이 문자와 기호를 이용하여 긴 증명을 기술해야하는 부차적인 것에 있다면 증명 지도와 관련한 분명한 교육적 이슈라 할 만하다.

III. Byrne의 'Euclid 원론'

1. Byrne의 집필 의도

본 연구에서 주목하는 증명 형식은 아일랜드의 수학자 Oliver Byrne(1810?~1890?)이 자신의 책을 집필하며 채택한 방식이다. Byrne의 배경을 말할 때 토목기사 분야의 훈련을 받았으며 측량가 또는 수학교사로 일한 경력을 언급함으로써 그가 전문적인 수학자는 아니었음을 암시하고 있다. 실제로 De Morgan은 Byrne을 기이한 수학 부전공자로 지칭할 정도로(Swetz & Katz, 2012) 그가 정통 수학자로 간주되지는 않지만, 기하를 쉽게 가르치려는 교육적 관심을 보여준다는 점에서 수학교육자로서의 면모를 발견할 수 있다. 책의 도입부는 저자의 저술 의도를 파악하고 책에 담긴 중심 내용을 이해하는 데 필수적이므로, Byrne의 'Euclid 원론'의 부제와 도입부, 그리고 또 다른 교재를 통해 파악할 수 있는 집필 의도를 조사한다.

Byrne의 이 책은 원제목 'The first six books of the Elements of Euclid: in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners'에서 볼 수 있듯이, 수학사에서 빼놓을 수 없는 저작 유클리드의 '원론' 13권 중 첫 여섯 권을 다루고 있고, 문자 대신 채색된 다이어그램과 기호를 이용하였으며, 그 목적이 학습자가 쉽게 배울 수 있도록 하는 것에 있음을 알 수 있다. Byrne 스스로가 밝힌 책의 집필 목적은 한 마디로 기하교수 방법을 소개하는 것인데, 그와 같은 방법을 도입하는 목적이 바로 '학습자에게 더 용이하도록' 하기 위함인 것이다. 오늘날의 교사들이 하는 가장 기본적인 생각도 '어떻게 하면 아이들이 쉽게 이해할 수 있을까?'일 것이다. 그 방법으로서 Byrne이 택한 교수 방법은 도형

의 시각적 표현을 문자 기호를 붙인 이름이 아닌 색깔을 이용하여 직관적으로 파악하게 하는 것이다. 색깔의 이용에 대해 Byrne(1847) 자신이 도입부에서 밝힌 바에 따르면, '그것은 즐거움이나 색과 형의 조합을 위한 것이 아니다. 마음이 진리를 추구하는 것을 돕고, 교육을 용이하게 하고, 영원한 지식을 확산하기 위한 것'이다. 이러한 의도는 '교수학적 삼각형(장혜원, 2000)'이라 일컫는 교과교육학의 연구대상에서 세 꼭짓점에 해당하는 주요소가 모두 언급되고 있다는 의미에서 Byrne의 교육적 관심이 어느 정도인지 나타내는 결정적인 단서가 될 수 있다. 학습자 측면에서 진리 추구, 교사의 측면에서 교육의 용이성, 지식의 측면에서 지식의 확산을 언급하고 있다.

결국 문자와 기호를 포함하는 구문적 설명을 최소화하고 시각화를 이용하여 눈에 호소하여 지도하려는 의도를 분명히 하였다. 그럼으로써 '전통적 방법에 필요한 시간의 1/3 이하로 소요한다.'는 생각이다. 이해의 용이함 덕분에 신속함은 부수적인 이점이 된 것이다.

Byrne이 이러한 기법을 적용한 책은 비단 이한 권이 아니다. '젊은 기하학자: 컴퍼스 없이 하는 실용 기하(The Young Geometrician: Practical Geometry without Compasses)'에서도 색깔을 이용한 시각적 방법을 적용하였는데, 다만 색깔의 용도를 구분하여 설명하고 있다.

내 유클리드에서는 증명이 채색된 기호 부호, 그림을 이용하여 수행되었다. 그것을 사용함으로써 추론을 보다 정확하게 하고 보다 신속하게 파악할 수 있도록 하였다. 이 책에서는 색깔이 움직임과 정지를 나타내는 데 사용된다. : 예를 들어 빨간 자는 움직여야 하고 파란 자는 머물러있다(Byrne, 1865).

이 책에서는 정사각형의 반인 직각이등변삼

각형과 정삼각형의 반인 직각삼각형으로 된 한 쌍의 도구를 이용하여 기하 작도를 다룬다. 이때, 두 삼각형을 빨강과 파랑으로 지시하여 색깔로써 구분한다. 구분하는 속성은 움직임과 정지이다. 전자를 빨강으로, 후자를 파랑으로 나타내어 빨강은 움직임 대상, 파랑은 그대로 두어야 할 대상을 나타낸다. 이 색깔의 역할을 설명하는 도입부에서 다음이 보인다. 자신의 'Euclid 원론'에서 색깔의 사용이 정확성, 이해의 용이함, 신속성에서 우세하다는 점을 말한 것이다.

나의 유클리드에서 색깔 기호, 부호, 그림의 사용을 이미 보였다. 그것들은 추론을 더욱 정확하게 해주며, 이해를 더욱 신속하게 해준다(Byrne, 1865).

한편 "컴퍼스 기하학(The geometry of compasses - or Problems resolved by the mere description of circles and the use of coloured diagrams and symbols)"에서도 같은 방법으로 접근하였는데 역시 책의 부제 및 다음과 같은 도입부에서 색깔 사용의 목적을 일관되게 파악할 수 있다.

(Euclid와 The Young Geometrician에서 색깔의 역할을 말하고,) 이 책에서도 채색된 그림의 도움으로 내 목적을 쉽고, 정확하고, 신속하게 달성한다(Byrne, 1877).

여기서 주목할 점은 그 사용에 있어 Byrne이 원했던 것은 적극적인 의미로의 대체라는 사실이다. 이와 같은 도구의 이점이 무엇이든 간에 현재의 방법을 대체하지 않는다면 현재의 방법에 대한 도입, 회상, 기억을 목적으로 하는 강

력한 보조일 뿐이라고 말함으로써 현 상태를 강화하기 위한 보조의 역할이 아닌 적극적인 대안으로서의 사용을 주장한 것을 볼 수 있다. 실제로 우리나라 교과서에서도 이와 같은 보조적 역할로서의 시각적 이미지를 사용한 예를 찾는 것은 어렵지 않다.³⁾

2. 책의 구성 및 특징

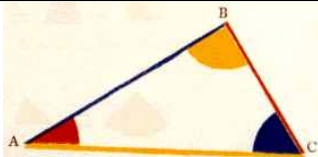

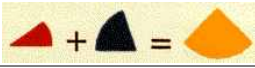




책은 도입부에 이어 유클리드 '원론'의 6권으로 구성된다. 자신의 방법에 대한 설명은 그 방법에서 채택한 기호에 대한 범례를 포함하여 도입부에서 자세히 진술되며, 잘못 작성된 부분에 대한 수정 지침도 있다. 이와 같은 구성에 있어 전반적인 특징을 정리해보면 다음과 같다.


첫째, 이 책의 가장 큰 특징은 책의 제목이나 저자의 집필 의도에 명시된 색깔의 이용이다. 상세한 내용을 살펴보지 않아도 책의 표문상 화려함이나 색채감이 시선을 끌기에 충분하다. 학생들이 증명 과정을 쉽게 파악하기 위해, 문자를 이용하여 도형의 각이나 변을 지칭하고 증명을 써내려가는 대신 그림에 부여된 색과형을 이용하여 증명을 구성하는 것이다. 모든 명제의 증명을 그러한 방식으로 일관되게 전개하고 있기 때문에 그 예를 보기 위해 임의로 하나를 선택하면 충분하다. 그 중 Byrne이 자신의 방법과 보통의 방법을 비교하기 위해 도입부에서 선택한 예를 보자. 다른 아닌 직각삼각형의 성질에 대한 두 가지 방법의 비교이다. 직각삼각형 ABC에 대해 그 성질 6가지를 두 방법으로 각각 나타내면 <표 III-1>과 같다.

각이나 변을 지칭하기 위한 문자 사용은 불 수 없고 각각을 색과 형으로 나타내었다. 기호

3) 예를 들어, 강욱기 외(2012) 등에서 삼각형의 합동조건을 설명한 다음, 인식 및 파지를 돕기 위해 색깔을 이용하여 대응변과 대응각을 나타낸 경우이다.

<표 III-1> 직각삼각형의 성질에 대한 두 방법의 비교

보통의 방법	Byrne의 방법
	
각 BAC와 각 BCA와 각 ABC의 합은 2직각 또는 각 ABC의 2배이다.	
각 CAB와 각 ACB의 합은 각 ABC와 같다.	
각 ABC는 각 ABC나 각 BCA보다 크다.	
각 BCA나 각 CAB는 각 ABC보다 작다.	
각 ABC에서 각 BAC를 뺀 나머지는 각 ACB와 같다.	
AC의 제곱은 AB의 제곱과 BC의 제곱의 합과 같다.	

중에는 오늘날과 동일한 것도 있고 달리 표현된 것도 있는데, 사용한 기호와 약자에 대해서 도입부에서 2쪽 분량으로 뜻을 설명하였다. 기호에서도 시각적 특징이 두드러져 <표 III-1>에서 보듯이 180도, 2직각, 2R을 쓰는 대신 로 나타내었다.

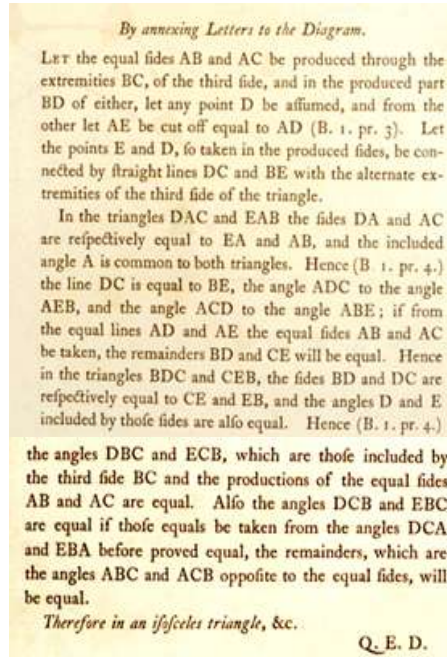
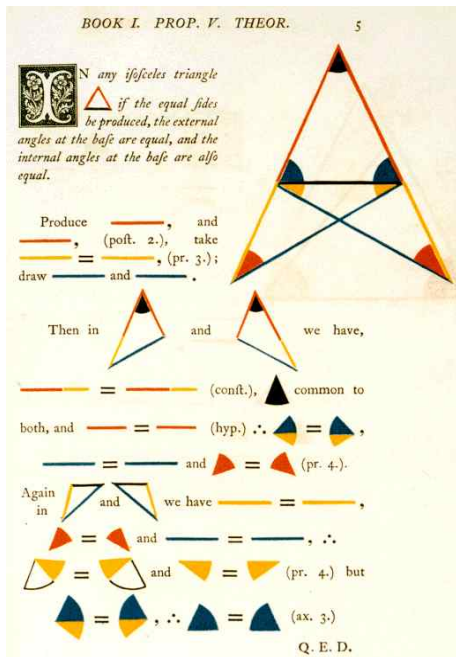
좀 더 적극적인 예로 증명 사례를 들어보자. Byrne이 취한 예인 ‘이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다’의 증명은 [그림 III-1]과 같다. 한 눈에 보아도 보통의 방법은 길이 면에서 부담스럽다. 그리고 무엇보다 지칭하는 대상을 파악하는 것이 더 어렵고 시간이 많이 걸리는 것이 사실이다. 그것이 Byrne의 기본 의도였던 것이다.

둘째, Byrne은 색깔을 이용한 방법의 이점으로 확실성, 간결성, 신속성, 기억에 의한 파지의 영구성을 들고, 그 외에 부수적인 이점 몇

가지를 제안한다. 그 중 특수교육을 위한 시각적 체계의 활용과 점, 선, 면에 대한 수학적 의미의 지도 가능성을 들 수 있다. 전자는 시각적 자료의 활용이 청각, 언어 장애인에게 유효할 것이라는 주장인데, 소리를 듣거나 말하지 못하는 학생에게 언어적 요소를 최소화하고 시각적 명료함을 활용함으로써 교육적 효과를 배가시킬 가능성과 관련된다.⁴⁾

한편 후자와 관련하여, 엄밀하게 말하면 수학적 의미의 직선은 색을 가질 수 없지만, 색깔을 적절히 이용하면 선의 수학적 의미를 나타내는 좋은 수단이 된다는 주장이다. 이를 위해 선에 색을 주는 것이 아니라 평면 두 개에 각각 다른 색을 부여하는 것이다. 한 평면 위에 두 색의 평면을 연결함으로써 그 경계선으로 인해 수학적 직선이 의미하는 바에 대한 아이디어를 분명하게 제공한다. 폭이 없고 길이

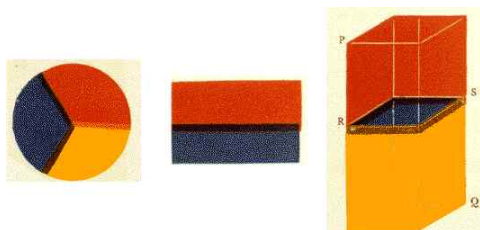
4) 반대로 Byrne의 시각적 방법이 시각장애인에게는 오히려 부정적인 결과를 낳는다. Oechslin(2010)은 De Morgan이 생후 일년 내에 한쪽 눈의 시력을 잃어 평생 동안 추상적 수로만 수학을 연구했다는 일화를 언급하면서 두 수학자 사이의 관계를 암시하였다.



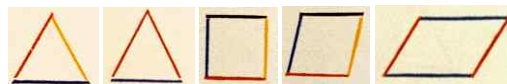
[그림 III-1] Byrne의 방법과 보통의 방법의 비교

만 있는 추상적인 수학적 개념으로서의 직선이다.

점과 평면의 경우도 마찬가지다. 점은 길이나 폭도 없이 위치만 정해주는 기하 개념이고, 따라서 매우 추상적인 개념이다. [그림 III-2]에서 보듯이 수학적 점은 세 색깔의 평면으로, 수학적 선은 두 색깔의 평면으로, 수학적 면은 두 색깔의 입체를 이용하여 이해할 수 있다. Byrne은 이와 같은 방법이 추상적인 점, 선, 면의 아이디어를 갖지 못한 학생들에게 기하 도형의 수학적 본성에 대해 설명하기에 더욱 적절한 경우가 된다고 하였다.



[그림 III-2] 수학적 점, 선, 면에 대한 표현



[그림 III-3] 정삼각형, 이등변삼각형, 정사각형, 마름모, 평행사변형에 대한 시각적 표현

셋째, 정의 및 공준과 같은 일부 내용을 재구성하였다. 유클리드 '원론'의 내용은 그대로 담되 한 항목을 더 세분화하여 다수의 항목으로 기술한다든가 공준의 내용을 공리로 재구성한다든가 하는 자신의 방식을 반영하여 재구성된 부분이 있다. 예를 들어 Fitzpatrick(2007)과 비교할 때, 정의 22에 담긴 여러 종류의 사각형 분류를 각 항목으로 별도로 구성하여 정사각형, 마름모, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴의 다섯 항목으로 구분하여 다루는 것이나, 제 5공준을 12번째 공리로 다루면서 동치인 3가지의 다른 기술 방법을 소개하고 있는 것 등이다. 뿐만 아니라 시각적 표현의 적극적인 활용

이라는 저자의 의도가 반영되어 정의 부분에서도 도형의 채색된 표현이 활용되어 있다.

넷째, Byrne은 자신의 방법을 이용할 때 색 표현상 주의점으로, 색으로 선분이나 각을 나타낼 때 색이 선분과 각에 이름을 줄 뿐 그 크기와는 무관하다는 것을 강조하였다. 그러나 빨강, 파랑, 노랑, 검정의 단 네 가지 색을 이용하므로 모양이 다른데 측도가 같은 것은 같은 색을 써서 나타내기도 한다. 그러나 일관성이 없다는 한계도 지적할 수 있다. [그림 III-3]에서 보듯이, 이등변삼각형이나 평행사변형에서 두 변, 두 쌍의 대변의 길이가 같은 것을 같은 색으로 표현한 것에 반해, 정삼각형이나 정사각형, 마름모의 표현에서는 각기 다른 색의 변을 표현한 것을 볼 수 있다. 이러한 불일치는 본문의 증명에서도 거듭하여 발견된다.

IV. 연구 방법

1. 연구 참여자

본 연구가 의도하는 Byrne 방법에 의한 증명 수업을 적용하기 위해 경상남도 창원시 N 중학교 2학년 한 학급을 선정하였다. N 중학교는 연구자가 수업 지도를 의뢰한 교사의 근무 학교로, 지도를 담당한 교사는 경력 6년의 남교사이다. 수업 적용 당시 수학교육 전공의 박사 수료생으로 사전면담을 통해 본 연구의 취지를 충분히 이해하였고 수업을 시연하는 데 매우 적극적으로 참여하였다.

학년 선정은 수학과 교육과정에 따른 증명 지도 대상 학년에 기초하여 이루어졌다. N 중학교는 평소 수학 수업을 수준별 수업으로 운영하고 있으나 본 연구의 의도는 수학학업성취도에 따른 특정 집단에 대한 새로운 교수 학습

방법의 효과를 검증하기 위함이 아니기 때문에 이질집단으로서의 한 학급을 연구 참여자로 하였다. 32명의 여학생으로 구성된 이 학급은 교과 전반에 걸쳐 수업에 대한 참여도가 비교적 높은 것으로 평가되고 있어, 수업 적용시 학생들의 다양한 활동과 의견이 관찰 가능할 것이라는 기대에서 선정되었다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구는 연구 목표와 관련하여 증명 지도에 대한 기존의 방법과의 비교 연구가 아닌 새로운 대안의 적용을 통한 교사와 학생의 교수-학습상의 유효성을 파악하는 데 초점이 있으므로 교사-학생 활동에 대한 관찰 및 설문 분석의 질적 연구 방법을 채택하였다. 구체적인 연구 절차는 다음과 같다.

- 연구 참여자 선정 및 특성 이해
- 수업 설계 및 교사 면담
- 학생 및 교사 설문지 고안
- 수업 적용 및 관찰 (현장일지, 비디오 녹화에 의한 자료 수집)
- 수업 후 학생 및 교사 설문 실시
- 결과 분석 (녹화 자료, 학생 활동지, 학생 및 교사 설문지, 현장일지) 및 논의

각각의 내용을 좀 더 자세히 설명하면 다음과 같다.

1) 수업 설계 및 교사 면담

먼저 중학교 1, 2학년 교과서 분석을 통하여 Byrne의 방법을 적용하기에 효과적일 것으로 예상되는 지도 내용을 선정하였다. 이를 위한 준거로서, 증명 내용의 어려움이 장애 요인이 되지 않도록 증명의 아이디어가 간단한 것, 색

깔 명명을 통해 증명의 아이디어를 간단히 설명 또는 작성할 수 있는 것, 학생 스스로 증명할 수 있도록 교사가 제시하는 증명과 유사한 증명을 과생시키는 것, 본 연구에서 활용하려는 매체로 구현하기에 효과적인 것 등을 고려하여 다음의 세 가지 정리를 선정하였다.

- 맞꼭지각의 크기는 같다.
- 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180도이다.
- 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.

이상의 세 정리를 지도하기 위한 수업을 계획하였다. 수업 담당 교사가 연구자의 의도를 충분히 파악하여 수업할 수 있도록 가상의 수업을 시나리오 형태로 작성하였다. 본 수업은 교사의 설명에 의한 새로운 증명법 소개, 교사에 의해 제시되는 증명, 이어 학생 활동지 작성 및 증명 설명으로 이어지기 때문에 수업 시나리오의 수업 절차에 따라 교사가 제공해야 할 설명 및 증명, 기대되는 학생 반응, 교수시유의점 위주로 구성하였다.

수업 절차의 개괄적 흐름은 [그림 IV-1]과 같다.



[그림 IV-1] 수업 절차

한편 Byrne의 방법은 색깔이라는 시각적 인식의 효과를 극대화하려는 입장이기 때문에 오늘날 활용 가능한 매체의 다양성을 부가적인 요소로 추가하여, 세 개의 정리를 각각 다른 방법으로 지도할 것을 계획하였다. 19세기 Byrne이 쓴 책의 원문 자체를 이용한 방법, GSP와 같은 역동적 표현이 가능한 컴퓨터 프로그램을 이용한 방법, 교사가 칠판에 직접 그리면서 설명하는 전통적 방법의 세 가지이다. 첫째 방법은 원문의 그림과 증명이 한 행씩 제시되도록 PPT 파일의 애니메이션 기법을 적용하여 구현하였다. 이는 수학사의 원문을 이용함으로써 학교수학의 수확사와의 관련성이나 증명이 돌연히 생겨난 것이 아닌 인간 활동의 산물임을 암시하여 수학 및 증명에 대한 긍정적인 태도 함양이라는 부수적 효과를 겨냥한 것이다. 두 쌍의 맞꼭지각에 대해 한 쌍을 교사가 증명하고 다른 한 쌍을 증명하는 것이 활동지의 첫째 문항이다. 교사의 증명과 거의 동일한 내용과 표현만을 요구하므로 증명의 아이디어가 장애 요인이 되지 않을 것이라는 기대를 포함한다. 둘째 방법은 GSP로 미리 작성해놓은 시각적 표현을 이용하여 설명함으로써 증명의 단계별로 명확한 시각적 표현을 제공하며, 부가적으로 삼각형의 꼭짓점들을 드래그하여 각의 크기가 변하지만 그 합은 일정하다는 정리 자체의 의미를 시각적으로 보여주하고자 한 것이다.5) 마지막으로 셋째 방법은 교사가 보드에 직접 빨강, 파랑, 초록, 검정, 네 가지 색의 마커펜을 이용하여 그림과 증명을 작성하면서 설명하는 방법이다. 교사에 의해 평행사변형의 대변의 길이에 대한 성질의 증명이 완성되면, 대각의 크기에 대한 성질 또한 유추적으로 증명 방법을 찾는 것이 크게 어렵지 않을 것으로

5) 표현의 역동성으로 인한 정리의 시각적 이해는 본 연구의 주제를 벗어나지만, 화면상의 삼각형을 문자가 아닌 색깔로 명명함으로써 제시된 수식 속에서 색깔로 표시되어 있는 어느 각이 어떻게 변화하고 있는지 즉각적으로 인식할 수 있도록 한다는 점에서 동적기하환경에서 Byrne의 방법의 적용가능성을 제안하고 있다.

기대된다. 따라서 증명의 내용 자체에 대한 어려움을 최소화하고자 대각에 대한 증명을 활동지 2번 문항으로 구성하였다.

학생들에게 Byrne의 방법을 소개하고 적용할 때 사용시 유의점을 주시시켜야 한다. Byrne 스스로가 주의시켰듯이 ‘색깔은 선분이나 각을 나타낼 뿐 크기와는 무관하다’는 사실이다. 실제로 책에서 저자가 사용한 색을 보면 빨강, 파랑, 검정, 노랑의 네 가지에 국한되어 있고, 따라서 다른 대상에 같은 색을 사용하는 경우가 있는데 그것은 크기가 같은 대상으로서 모양이 다르게 표현되어 구별이 가능하거나 선분과 같이 점선 표현이 가능한 경우이다. 따라서 학생에게는 색이 문자 이름 대신의 이름 역할을 주시시키고 가능한 범위에서 다른 대상은 가능한 한 다른 색으로 표현하도록 계획하였다.

특히 Byrne의 방법은 국내에서 소개된 바 없기 때문에 수업을 담당할 교사와의 면담은 필수적이었다. 수업 실시 2주 전에 면담을 통해 본 연구의 목적과 Byrne의 방법에 대해 설명하였다. 이후 수업 시나리오를 작성하고 수업을 위한 PPT 파일, GSP 파일, 학생 활동지를 준비하여 4회에 걸친 메일 왕래와 수업 적용 전 면담을 통해 교사의 충분한 이해 및 수업 속지를 위한 질의응답의 시간을 마련하였다.

앞서 말한 대로, 학생용 활동지에는 두 가지 활동이 포함된다. 첫째 활동은 교사가 맞꼭지각의 크기가 같음을 증명할 때 한 쌍만 설명하고 나머지 한 쌍은 ‘같은 방법으로’라고 하면서 생략되는데, 그 부분에 대한 증명이다. 한편 둘째 활동으로, 수업에서 다루는 셋째 정리인 ‘평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.’를 교사가 설명한 후, 유사한 방식으로 증명되는 ‘평행사변형의 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.’를 문자를 이용한 보통의 방법과 색깔을 이용한 Byrne의 방법의 두 가지로 각각 증명할

것을 요구한다. 다시 말하지만, 본 연구의 초점은 증명 아이디어의 파악 능력 여부에 있지 않기 때문에 두 가지 활동 모두 교사가 제공한 증명과 유사한 방식으로 전개되는 정리를 다루었다. 또한 문자와 색깔을 이용한 두 방법에 대한 학생 스스로의 비교를 가능하게 하기 위하여 동일한 명제에 대해 이미 학습한 보통의 방법과 새로운 방법을 이용할 것을 요구한 것이다.

2) 학생 및 교사 설문지 고안

Byrne의 방법은 학생과 교사 모두에게 새로운 증명 방법이기 때문에 그에 대한 연구 참여자들의 생각에 귀 기울이는 것은 본 연구의 목적상 매우 중요하다. 우선 학생용 설문지는 Byrne의 방법의 장단점, 그리고 수업에서 다루었던 세 가지 매체에 대한 선호 및 그 이유에 대한 질문으로 구성하였다. 구체적으로, ‘색깔을 이용한 Byrne의 방법의 장단점을 문자를 이용한 보통의 방법과 비교하여 써봅시다.’와 ‘오늘 수업에서는 색깔을 이용한 Byrne의 방법을 다루되, 다음의 세 가지 도구를 이용하였습니다(하단에 ‘①Byrne의 그림으로 설명, ②컴퓨터를 이용한 설명, ③교사가 직접 그리면서 설명’을 박스로 제시함). 가장 이해하기 쉽다고 생각하는 설명 방법이 어느 것인지 선택하고, 그 이유를 쓰시오.’의 두 가지 질문이다.

한편 교사용 설문지는 세 가지 측면에 관한 물음이다. 첫째, 증명 지도를 위해 Byrne의 방법을 실제로 적용하는 상황에서 지도상의 용이함 또는 어려움, 둘째, 교육과정 개정의 취지에 따라 형식적인 증명 대신 이해하고 설명하는 것으로 대치했을 때 Byrne의 방법이 시사하는 바, 셋째, Byrne의 방법이 학생의 이해도 또는 증명 작성 능력에 미칠 영향에 대한 참여 교사의 의견을 듣고자 하였다.

3) 수업 적용

수업은 2012년 12월 18일 5, 6교시에 수학교과 전담교실에서 이루어졌다. 교실에는 앞쪽에 보드와 전자칠판이 마련되어 있어 판서와 컴퓨터를 이용한 자료 활용이 가능하였고, 책상 배열은 교사를 중심으로 하는 전체 설명식 수업 배열을 유지하였다.

증명을 시작하기 전에 활동지와 4색 볼펜을 분배하고, Byrne의 방법에 대한 소개와 그 방법으로 증명을 할 때 주의할 점을 주지시키는 것으로 수업을 시작하였다. 문자를 대신하여 각이나 변에 이름을 부여하는 색깔의 역할을 강조하였다. 즉 색은 이름 역할이기 때문에 크기와는 관련이 없는데, 다만 네 가지 색으로 표현하려다 보니 같은 크기의 각인데 모양으로 구분이 되는 작은 같은 색으로 표현할 수 있음을 알려주고 가능한 범위에서 다른 대상은 가능한 한 다른 색으로 표현하면 된다는 것을 설명하였다.

수업 계획에 따라 세 가지 정리에 대한 증명을 세 가지 매체를 이용하여 지도하였다. 첫째, ‘맞꼭지각의 크기는 같다.’에 대해 Byrne의 원문을 제시하며 한 쌍의 맞꼭지각에 대한 증명을 교사가 시범 보이고, 나머지 한 쌍의 맞꼭지각에 대한 증명을 활동지 1번 문제로 학생 스스로 작성하도록 하였다. 둘째, GSP로 미리 작성해놓은 시각적 표현을 이용하여 ‘삼각형의 내각의 크기의 합은 180도’임을 증명하고, 동적 기능을 이용하여 삼각형의 모양이 어떻게 변하더라도 그 합이 일정함을 확인하도록 하였다. 셋째, ‘평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.’는 정리를 교사가 네 가지 색 마커펜을 이용하여 직접 보드에 그림을 그리고 증명을 작성하면서 설명하였다. 이어 유사한 방법으로 증명 가능한 활동지 2번 문항인 ‘평행사변형의 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.’를

학생 스스로 문자를 이용한 보통의 방법과 Byrne의 방법으로 각각 증명하도록 하였다.

4) 설문 실시 및 결과 분석

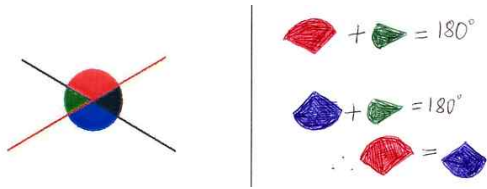
수업을 마친 후 새로운 증명 방법에 대한 연구 참여자의 의견을 듣기 위해 준비한 설문지를 배부하고, 각 물음에 대한 학생들의 생각을 자유롭게 서술하도록 하였다. 그 결과에 대한 분석은 이어지는 V장에서 제시한다.

V. 연구 결과 및 분석

1. 활동지 결과 및 분석

활동 1에 대해서는 22명(69%)의 학생이 적절하게 증명을 작성하였다. 대표적인 사례가 [그림 V-1]의 경우이다. 단 3행으로 구성된 간단한 것이었고, 다른 한 쌍의 맞꼭지각에 대한 교사의 증명이 보드에 있는 상태에서 이루어진 활동이므로 당연한 결과로 해석된다. 반면 오류 중에는 앞선 교사의 증명을 그대로 베낀 경우가 가장 많았고, 또는 $\text{빨간각} + \text{초록각} = \text{파란각} + \text{검정각} = 180^\circ$ 이므로 $\text{빨간각} = \text{파란각}$ 이라고 하는 경우도 있었다. 후자는 단순 논리적 오류이거나 또는 교사에 의한 앞의 증명 결과인 $\text{초록각} = \text{검정각}$ 에 종속적인 사고로 해석된다. 전혀 풀지 못한 학생도 2명(6%) 있었다.

활동 2에 대해서는 한 쌍의 대각의 크기가 같음을 증명한 4명을 포함하여 17명(53%)이 증명을 완성하였다. 성공률에 있어 활동 2가 활동 1에 미치지 못한 점은 증명을 작성하기 위해 무엇보다 증명의 아이디어 파악이 우선이라는 사실을 입증한다. 이들의 증명으로부터 몇 가지 사실을 분석할 수 있다.



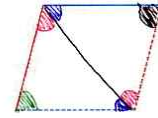
[그림 V-1] 학생 Y의 풀이

첫째, 증명을 완성한 학생 중 3명을 제외한 14명의 학생들이 활동 직전에 교사가 했던 증명과 마찬가지로 삼각형의 합동을 이용하였다. 과제의 성공 비율은 타 연구의 결과와 비교하면 매우 높은 편이다. 이는 본 연구의 초점인 색을 이용한 시각적 표현의 사용에 있기 때문에 증명의 내용과 관련한 어려움이 장애가 되지 않도록 교사의 증명과 거의 동일한 방식으로 증명이 구성되는 명제를 제시했기 때문으로 생각한다. 따라서 학생들은 교사가 대변의 길이가 같음을 증명할 때와 마찬가지로 삼각형의 합동을 이용했고, 색과 형을 이용하여 증명을 작성할 수 있었다.

둘째, 위의 분석에서 제외된 3명의 학생은 [그림 V-3]과 같이 두 개의 대각선과 평행선의 성질을 이용하여 증명하였다. 합동에 대한 고려 없이 대각선을 그어 두 쌍의 평행선의 성질만 이용하여 두 쌍의 엇각의 합으로 한 쌍의 대각이 같음을 보이고, 다른 대각선에 대해 동일한 방법으로 증명하였다.

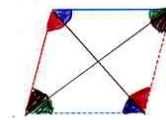
셋째, Byrne 방법의 효율성은 크기가 같은 두 쌍의 각을 주목하고 그 합이 같음을 이용하여 증명하는 부분에서 나타났다. 부분 증명에 그친 4명을 제외하면 첫째⁶⁾, 둘째 분석의 두 증명 모두 [그림 V-2]나 [그림 V-3]에서 보는 바와 같이 각각 같은 크기의 두 각의 합 역시 같음에 주목해야 하는 부분이 있는데, 이것은

문자를 써서 각을 나타내는 증명 작성에서는 쉽게 파악되지 않지만 색을 이용한 시각적 표현에서는 자명하게 드러나는 부분이다. 따라서 Byrne의 방법이 증명의 아이디어 발상면에서도 매우 효과적이었던 부분이다.



— = — ... ①
 — = — ... ②
 대각선(—) = 공통 ... ③
 ①, ②, ③에서 △ ≡ △
 ∴ △ = △, △ = △

[그림 V-2] 학생 K의 풀이



△ = △
 △ = △
 △ = △
 △ = △

[그림 V-3] 학생 J의 풀이

넷째, Byrne의 방법을 적용한 학생 중에 문자를 이용하여 작성하지 못한 경우가 있었다. 역으로 문자로 작성했지만 Byrne의 방법을 이

6) 합동으로 증명한 경우, 각의 합을 고려하지 않으려면 두 개의 대각선에 대한 두 쌍의 삼각형의 합동을 이용해야 하는데 그렇게 증명한 학생은 없었다.

용하지 못한 학생은 없었다. 활동에 앞서 Byrne의 방법을 이용한 교사의 유사한 증명이 있었다는 한계가 있긴 하지만, 이는 Byrne이 자신의 방법을 고안한 의도대로 학습자에게 쉬운 방법일 가능성을 높여준다.

다섯째, 수업 관찰에서 확인한 대변이나 대각과 같은 용어에 대해 학생들이 지닌 오개념이나 불완전한 이해는 표현 방법에 관계없이 증명의 수행을 원활하게 이끌지 못하는 요인으로 간주된다.

좀 더 구체적으로, Byrne의 시각적 표현의 관점에서 주목할만한 두 학생 K와 J의 사례([그림 V-2], [그림 V-3])를 보자.

주어진 성질을 색깔을 이용한 새로운 방법으로 증명하면서 학생 K는 교사의 앞선 증명 결과인 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같음에 근거하여 삼각형의 합동을 이용하였다. 이때 삼각형의 합동을 표시하기 위해 [그림 V-2]의 4행과 같이 색깔 있는 삼각형 그림으로 나타냈는데, 이는 교사가 전혀 사용하지 않았던 표현까지 적극적으로 이용했다는 점에서 주목할 만하다. 한편 학생 J는 매우 명료하게 등호와 채색된 각 그림만을 이용하여 증명을 구성하였음을 본

다([그림 V-3]). 두 대각선을 긋고 평행사변형의 정의에 따라 네 쌍의 엇각의 크기가 같음을 이용하여 요구된 성질을 증명한 것이다. 엄밀한 증명 작성을 양보한다면 증명의 아이디어를 설명하는 데는 이 정도면 충분할 것으로 생각한다.

2. 설문 결과 및 분석

1) 학생의 응답

학생의 설문 내용은 색깔을 이용한 방법과 이용 매체에 관한 것이었다. 먼저, 색깔을 이용한 Byrne의 방법의 장단점에 대한 학생들의 반응은 <표 V-1>과 같다.

좀 더 구체적으로 학생들의 반응을 살펴보면 다음과 같다.

- 어디에 있는 각이나 변인지 알아보기가 아주 쉽다.(학생 G)
- 기호를 사용하면 머리가 복잡해져서 문제 풀기도 싫고 그랬는데 색깔이 툭툭 튀어서 알아보기가 쉬운 것 같다.(학생 C)
- 문자 찾는다고 시간이 많이 걸렸는데 색깔

<표 V-1> Byrne의 방법의 장단점

장점	단점
(각이나 변을) 알아보기 쉽다. 한 눈에 보아 이해가 쉽다. 구별하기 쉽다. 쓰기 쉽다. 틀린 부분을 쉽게 고칠 수 있고 실수가 적다. 흥미롭다. 재미있고 예쁘다. 더 쉽고 재미있게 할 수 있다.	색을 바꾸어 그리는 것이 번거롭다. 불편하다. 귀찮다. 그리는 시간이 오래 걸린다. 복잡하고 헛갈린다. 구별은 쉬운데, 이해하기 어렵다.7) 수정이 힘들다. 색깔 펜이 필요하다.

7) 이해를 언급한 학생 중에는 2명만이 이해하기 어렵다는 단점을 들었는데, 특이점은 두 학생 모두 공통적으로 구별하기는 쉬운데 이해하기는 어렵다는 것이다. 이 경우에는 시각적 인식이 인지적 이해로 이어지지 않았음을 의미하는 것으로 보아야 한다.

은 한 눈에 보이기 때문에 아주 좋은 것 같다. 또한 문자를 잘못 써서 틀리는 일이 없을 테니까 억울하지 않을 것 같다. 그러나 문자는 한 가지 색으로 바로 적을 수 있는데 색깔을 이용한 것은 여러 가지 색을 사용해야 하므로 펜을 쓰는 시간보다 시간이 더 많이 소요되는 점이 아깝다.(학생 S)

이상과 같은 학생들의 반응에는 증명 수정과 관련하여 용이함과 어려움의 반대 의견도 보이지만 이를 개인적 경험에서 기인하는 것으로 간주한다면, 반응은 대체로 Byrne의 방법은 한 눈에 알아보기 쉽지만 작성하기에는 번거롭고 귀찮으며 시간이 걸린다는 것으로 요약된다. 이는 증명 지도시 Byrne의 방법을 이용한다고 할 때 강력한 시사점을 제안한다. 색깔을 이용한 방법이 시각적으로 호소하는 바가 큰 것은 분명하다. Byrne의 의도대로 색깔을 통해 어느 것을 지칭하는가를 쉽게 인식할 수 있는 것이다. 그러나 제공된 증명을 이해하는 것과 증명을 작성하는 것은 별개의 문제로, 여러 색을 이용해서 그리는 것을 번거롭고 귀찮게 여긴다는 것을 알 수 있다. 따라서 본 설문 결과에 따르면, Byrne의 색깔을 이용한 증명은 교사 또는 교과서가 증명을 제시할 때 학생의 이해를 돕는 데 효과적인 반면 학생의 증명 작성에는 효과적이지 않다는 것이다.

다른 하나로, Byrne의 방법을 다루는 세 가지 매체였던 원문, GSP, 교사의 그림에 대한 선호도는 <표 V-2>와 같다. 교사가 직접 그리면서 설명하는 방법이 가장 이해하기 쉬웠던 것으로 나타났으며, 이어 GSP와 원문의 그림이 뒤를 이었다.

<표 V-2> 매체에 대한 선호도

이용 매체	학생수	%
Byrne의 원문	3	9.4
GSP	8	25.0
교사의 그림	19	59.4
무응답	2	6.3

Byrne의 원문을 선호한 이유로는 ‘직접 그려서 설명하는 것에 비해 딱딱한 느낌이 없이 더욱 흥미와 관심을 유발할 수 있다’거나 ‘그림에 선생님의 설명이 더해져 이해하기 쉬웠다’ 등이 있어 연구자가 기대한 수확사적인 관점에서의 흥미는 유발되지 않은 것으로 나타났다. GSP와 같은 역동적 기하 환경에 대한 선호의 이유는 ‘단계별로 제시되고 분명하게 표현되는 것이 이해를 도왔고, 칠판에 하는 것과 비교하여 흥미도 끌고 이해도 잘 된다’는 것이었다. 또한 ‘선생님이 일일이 그럴 필요가 없이 설명만 하면 되니까 쉽고 간편하게 이용할 수 있다’는 점에서 사용상의 편리함을 지적한 학생도 4명 있었다. 가장 많은 빈도수를 차지한 교사의 그림에 대한 선호 이유로는 ‘가장 익숙한 방법이고 따라서 집중과 이해가 잘 된다’, ‘설명과 동시에 적으니까 어려운 부분에 대한 설명과 강조가 있어 좋다’ 등이 있었다.

첫째 질문에서 색깔 표현을 위해 펜을 바꾸어 가며 써야하는 번거로움이나 시간이 걸린다는 단점을 지적했던 학생들이 둘째 질문에서 교사가 직접 그리는 방법을 선호한 것은 일관성이 결여된 측면이 있다. 이에 대해서는 학생 스스로 말했듯이 교사와 늘 해온 교수·학습 방법의 익숙함이 중요한 이유가 될 수 있고, 또한 교사의 순차적인 증명 작성 과정이 곧 학생들이 해야 할 증명 작성을 보여준다는 점과 단계별로 교사의 설명과 학생의 질문이 가능했던 의사소통 때문에 이해를 도왔을 것으로 해석된다.

2) 교사의 응답

교사의 설문 문항은 세 가지 측면에 관한 것이다. 첫째, 증명 지도를 위해 Byrne의 방법을 실제로 적용하는 장면에서 지도상의 용이함 또는 어려움에 관한 것이다. 전자와 관련해서는 증명 아이디어가 있어도 표현하는 어려움을 겪는 학생들에게 증명의 아이디어 설정에 집중할 수 있는 방법이라는 점에서 장점을 다음과 같이 꼽았다.

그런데 제가 서술형 수행평가를 채점하다 보면, 분명 아이디어는 훌륭한데, 그것을 표현하는데 서툰 학생들이 이를 논리적으로 표현해내지 못하는 경우를 많이 보아왔습니다. 이번에 소개받은 Byrne의 방법은 둘째에서 비롯되는 어려움을 해소하는 데 좋은 지도 방법으로 사료됩니다. 즉, 이 방법은 아이디어 설정을 표현하는 어려움을 해소함으로써 증명의 아이디어 설정에 보다 집중하게 하는 효과가 있는 방법이라 생각합니다. 그 동안의 증명은 기호에 초점을 맞추다 보니, 증명에서 정작 중요한 아이디어 설정에 집중하지 못하는 문제가 있었기 때문입니다.

반면 단점으로는 학생들의 반응과 마찬가지로, 복잡한 증명에 사용하기 어려운 제약과 번거로움 등을 들었다.

그러나 이 방식은 다양한 색을 사용해야하기 때문에 복잡한 증명에 사용하기 어렵다는 제한점과 수업 중 다양한 색과 모양을 정확하게 표현해야하는 번거로움이 있기 때문에 익숙해지기 전에는 사용하기 번거로운 제한점이 있습니다. 또한 수학에서 중요한 기호에 대해 그 중요성을 간과하는 문제가 제기될 수 있을 것이라 생각합니다.

둘째, 2009 개정 교육과정에 따라 증명이 이해하고 설명하는 것으로 대체될 때 Byrne의 방법이 시사하는 바에 관해서는, 교사가 파악하

기 어려운 교육과정 상의 문구 변화에 대한 구체화 가능성을 제안한다는 점을 들었다.

‘이해하고 설명할 수 있다’로 성취기준에 변화가 있습니다. 그러나 여기서 설명이라는 것이 여전히 어려움의 하나로 자리 잡고 있습니다. 즉, 설명이라는 것이 대체 어느 정도의 형식성을 갖추고 있어야 하느냐의 문제가 남습니다. 수학교사로서 위와 같은 말만으로는 도저히 감을 잡기 어렵습니다. [...] (Byrne의) 이 방법으로 위 교육과정의 취지를 다시 표현하게 되면, ‘증명’ 대신 ‘도형의 성질을 이해하고, 이를 그림을 그려 설명할 수 있다’는 식으로 보다 구체화할 수 있을 것이라 생각합니다. 따라서 본 방법이 다음 개정 교육과정에 반영된다면 교사들이 교육과정을 보며 느끼는 모호함을 보다 구체화시킬 수 있을 것으로 생각합니다.

셋째, Byrne의 방법이 학생의 이해도 또는 증명 작성 능력에 미칠 영향에 대한 것이다. 이에 대한 응답으로는 첫째 질문에 대한 반응에서와 마찬가지로, 문자로의 증명은 눈으로 하나하나 짚고 넘어가야 하기 때문에 증명의 아이디어에 집중하지 못하는 단점에 주목하여 Byrne의 방법의 시각적 특징은 증명의 이해 부분에서 효과가 있을 것이라고 하였다. 그러나 Byrne의 방법이 증명 표현의 궁극적 목표가 되어서는 안 되고, 형식적 기호를 이용한 증명 표현의 단계에 도달하기 이전의 과도기적 표현으로 활용될 것을 조언하였다.

VI. 결론 및 논의

본 연구에서는 Byrne의 ‘Euclid 원론’에 이용된 새로운 증명 방법에 대해 고찰하고, 2009 개정 교육과정의 기하 영역의 변화 동향에 따라 증명 교육을 위해 Byrne의 색깔을 이용한 방법의 적용가능성을 탐색하였다. 연구 참여자

의 활동 및 설문 분석 결과, Byrne의 방법은 대상의 구별이 뚜렷하여 각이나 변을 알아보기 쉬운 반면 익숙하지 않은 표현 방식 및 활용상의 번거로움 때문에 증명 작성보다는 시각적 표현의 직관성에 근거하여 증명을 제시할 때 이해의 측면에서 도움이 되는 것으로 나타났다.

그러나 색깔에 의해 자명하게 드러나는 도형 요소 사이의 관계에 대한 시각적 추론은 학생 J의 문항 2 결과와 같이 교사가 제시하지 않은 학생 스스로의 증명 방법을 야기시켰다는 점에서 매우 적극적인 활용가능성을 시사하였다. 또한 문항 2의 학생 K와 같이 교사도 사용하지 않은 시각적 표현과 색을 이용하여 증명 과정을 표현했다는 것은 가장 큰 단점으로 지적된 번거로움에도 불구하고 일부 학생들에게는 적극적으로 선호된 방식임을 보여준다.

본 연구의 논의는 Byrne의 방법이 관련되는 증명의 형식에 관한 논의에 국한되기 때문에 증명의 아이디어를 이어가지 못하는 어려움, 무엇을 증명해야 하는지 파악하지 못하는 어려움 등의 증명의 내용에 관한 일반적인 어려움으로 인한 학습 장애는 다루지 못한다는 한계가 있음에도 불구하고, 적어도 증명의 형식면에 있어서는 증명의 내용 전개에 도움이 될 수 있음을 시사한다. 교사 설문에서 보았듯이, 문자 사용의 복잡함으로 인해 증명의 아이디어 전개를 놓칠 위험을 줄일 수 있는 가능성을 함의하기 때문이다. 증명 교육에서 중요한 것은 결국 증명의 내용인 아이디어의 전개인데, 새로운 방법이 학생들을 증명의 아이디어에 집중할 수 있도록 한다는 것이다. 실제로 교사가 보통의 방법으로 문자를 써서 증명을 제시했다 하더라도 그것을 설명할 때는 작성된 문자를 도형 그림에서 일일이 짚는 대신 각이나 변 자체를 짚거나 표시해가며 설명한다는 점을 상기하면 쉽게 수궁할 수 있는 부분이다. 이러한

현상은 학생의 경우에도 마찬가지로 관찰되었다. 활동지 문항 2에서 문자를 이용한 보통의 방법으로 증명을 작성할 때조차 도형 그림에 o , x 와 같은 기호를 써서 표시하면서 증명의 아이디어를 파악한 다음 증명 작성을 별개로 여긴 학생이 있었다. 이에 근거하여 Byrne의 방법이 증명 이해와 설명에 효과적인 표현 방법으로 활용 가치가 있음을 제언한다.

Byrne의 방법이 사라진 이유에 대해 Klotz(1991)는 새로운 형태의 시각화에 필요한 새로운 기술과 관련된 고비용을, Sinclair(2008)는 Byrne의 방법 이후에 출현한 부르바키 학파의 영향으로 대수 위주의 수학 학습 경향이 뚜렷해졌기 때문을 들었다. 후자는 기하에 비해 대수 위주의 학교수학이 이루어진다는 점에서 비단 Byrne의 방법에 국한되는 이유라기보다는 기하 교육 전체에 대한 문제로 지적될만하다. 한편 전자는 경제적 측면에서 오늘날도 영향 미치는 요인이 되겠지만 교과서가 컬러판으로 제작되는 실제적 여건을 고려하면 오히려 부차적인 이유가 될 것이다. 따라서 교육과정의 개정 취지를 반영하여 형식을 갖춘 증명 작성이 아닌 이해를 토대로 한 설명을 수용한다면, Byrne의 방법에 의한 작성은 번거롭지만 이해가 용이하다는 본 연구 결과에서 함의하듯이 교과서나 교사에 의해 증명이 제시될 때 Byrne의 방법을 활용함으로써 학생의 증명 이해와 설명 중심의 활동에 있어 긍정적인 효과가 있을 것으로 기대된다. 특히 2009 개정 교육과정에서 ‘도형의 성질을 이해하고 설명하는 것’에 대한 명백한 함의가 미비하고, 교과서 개발 지침 역시 학생의 다양한 수준을 고려한다는 열린 태도이기 때문에 새로운 성취 기준을 만족시키기 위한 다양한 시도와 노력이 요구되는 시점에서 다양한 접근 중의 하나로 고려될 수 있을 것이다.

참고문헌

- 고민지(2008). **중학교 기하 증명 지도에서 나타난 교사의 수업 관점 분석**. 한국교원대학교 박사학위논문
- 고은정(2005). **증명지도의 효과적인 방법에 관한 연구**. 아주대학교 교육대학원 석사학위논문
- 교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]
- 김명지(2009). **시각화를 이용한 증명교육 : 중학교 기하 영역을 중심으로**. 경성대학교 교육대학원 석사학위논문
- 나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석**. 서울대학교 박사학위논문
- 나귀수(2009). 분석법을 중심으로 한 기하 증명 지도에 대한 연구. **수학교육학연구**, 19(2), 185-206
- 류경진(2010). **분석-종합법을 활용한 기하증명 지도의 연구 : 제 7차 개정교육과정을 중심으로**. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문
- 류성립(1998). 전형식적 증명의 의미와 교수학적 의의에 관한 연구. **대한수학교육학회논문집**, 8(1), 313-326
- 이가영(2002). **중학교 수학에서 직관적 방법을 통한 증명 지도에 관한 연구**. 단국대학교 교육대학원 석사학위논문
- 이민정(2008). **시각화를 활용한 효과적인 증명 지도 방안**. 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문
- 윤상호(2006). **후백텔레비전과 증명 지도**. 수학 이야기 중 열린 칼럼. http://www.mathlove.co.kr/board1/show.php?category=col02&seq=17938&listno=2&page=5&search_value=&mode=&scategory=1
- 장혜원(2000). 프랑스의 수학교육 연구에 대한 고찰. **수학교육학연구**, 10(2), 183-197
- 정민정(2011). **중학교 기하 문제의 증명지도에 관한 고찰**. 조선대학교 석사학위논문
- 조정수, 이정자(2006). 증명보조카드를 활용한 중학생의 증명지도에 관한 연구. **한국학교수학회논문집**, 9(4), 521-538
- 한국과학창의재단(2011a). **창의 중심의 미래형 수학과 교과내용 개선 및 교육과정 개정 시안 연구**
- 한국과학창의재단(2011b). **2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구**
- 한국과학창의재단(2011c). **2011 개정 수학과 교육과정 공청회**
- 한혜숙, 문수진(2009). Freudenthal의 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안에 대한 연구. **수학교육논문집**, 23(1), 85-107
- 홍진근, 권석일(2004). 전형식적 증명의 교수학적 의미에 관한 고찰. **수학교육**, 43(3), 381-390
- 황인경(2007). **8학년 '삼각형의 성질' 증명 지도를 위한 IDEAL 전략별 단계적 발문**. 경북대학교 석사학위논문
- Alexanderson, G.L. (2010). *MAA reviews (the first six books of the Elements of Euclid)*. The MAA mathematical science digital library
- Arnauld, A.(1667). *Nouveaux elemens de geometrie*.
- Branford, B.(1921: 초판은 1908). *A study of mathematical education including the teaching of arithmetic*. Oxford: Clarendon Press
- Byrne, O.(1847). *The first six books of the Elements of Euclid: in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. London: William Pickering
- Byrne, O.(1865). *The Young Geometrician; Practical Geometry without Compasses*,

- London: Chapman & Hall
- Byrne, O.(1877). *The geometry of compasses*.
London: Crosby, Lockwood, and Co.
- Casey, J.(1885). *The first six books of the Elements of Euclid*, Dublin: Hodges, Figgis & Co.
- Clairaut, A.C.(1748, 1920). *Elements des Geometrie*. Paris: Gauthier-Villars et Cle.
- Cyr, S.(2011). Development of beginning skills in proving and proof-writing by elementary school students .
http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG1/Cerme7_WG1_Cyr.pdf
- Davies, C. (1841). *Elements of geometry with applications in mensuration*. Barnes & Co.
- Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S., & Choustoulakis, E.(2007). Developing a proof-writing tool for novice lyceum geometry students. *The teaching of mathematics*, X(2), 87-106
- Fetisov, A.I.(2006: 초판은 1963). *Proof in geometry*. New York: Dover publications, Inc.
- Fitzpatrick, R.(2007). *Euclid's elements of geometry* : The Greek text of J.L. Heiberg (1883 - 1885) from Euclidis Elementa, ISBN 978-0-6151-7984-1
- Fujita, T.(2001). The study of elementary geometry (1903) by Godfrey and Siddons. *Hiroshima journal of mathematics education*, 11-19
- Fujita, T. & Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: Developing the "geometrical eye." *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 84-391.
- Swetz, F.J. & Katz, V.J.(2012). Mathematical Treasures .
<http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2591&bodyId=3555>
- Klotz(1991). Visualization in geometry: a case study of multimedia mathematics education project. In Zimmerman & Cunningham: *Visualization in teaching and learning mathematics*.
- Oechslin, W.(2010). To facilitate their acquirement. *The first six books of the elements of Euclid*. Köln: Taschen
- Ramus, P.(1636) *The way to geometry*. Bedwell, W.(translated in 19c). www.gutenberg.org
- Senk, S. L.(1985). How well do students write geometry proofs?, *The Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456
- Shaughnessy, J.M.(2011). Let's not forget geometry ! ,
<http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=31227>
- Sinclair, N.(2008). *The history of the geometry curriculum in the united states*. Charlotte: Information age publishing, Inc.
- Wilson, (1868). *Elementary geometry*. Macmillan & Co.

Study on the Teaching of Proofs based on Byrne's Elements of Euclid

Chang, Hyewon (Chinju National University of Education)

It may be replacement proofs with understanding and explaining geometrical properties that was a remarkable change in school geometry of 2009 revised national curriculum for mathematics. That comes from the difficulties which students have experienced in learning proofs. This study focuses on one of those difficulties which are caused by the forms of proofs: using letters for designating some sides or angles in writing proofs and understanding some long sentences of proofs. To overcome it, this study aims to investigate the applicability of Byrne's method which uses coloured diagrams instead of letters. For this purpose, the proofs of three geometrical properties were taught to middle school students by Byrne's visual method using the original source, dynamic representations, and the teacher's manual drawing, respectively. Consequently, the applicability of Byrne's method was discussed based on its strengths and its weaknesses by analysing the results of students' worksheets and interviews and their teacher's interview. This analysis shows that Byrne's method may be helpful for students' understanding of given geometrical proofs rather than writing proofs.

* Key Words : Byrne's Elements of Euclid(Byrne의 'Euclid 원론'), geometry(기하), proof(증명), visual representations(시각적 표현), colored diagrams and symbols(채색된 그림과 기호), 2009 revised national curriculum for mathematics(2009 개정 수학과 교육과정)

논문접수 : 2013. 3. 29

논문수정 : 2013. 4. 25

심사완료 : 2013. 5. 20