대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 2, 213 ~ 235. May 2013

특성화 고등학교 수학부진 학생들의 엑셀을 활용한 함수의 과정-대상 관점 형성에 대한 연구

최 지 연* · 허 혜 자**

본 연구는 수학과목 학습이 부진하고, 특히 함수식과 그래프의 관계에 대한 이해가 부족한 특성화 고등학생들을 대상으로 학생들에게 친숙한 엑셀 프로그램을 사용하여 지도한 효과를 살펴보았다. 엑셀의 식, 표, 그래프를 한 화면에 담을 수 있는 기능과 스크롤바를 이용하여 그래프를 움직이는 기능이 주로 사용되었다. 함수개념을 과정관점과 대상관점으로 나누고, 함수 표상을 표, 식, 그래프로 나누었을 때 학생들이 지도를 통하여 표상 내에서 또는 관점 간 유연한 전환이 일어나는 것을 목표로 지도하였고 긍정적인 효과가 나타났다. 실험은 특성화 고등학교 2학년 학생 5명을 대상으로 5일간 컴퓨터실에서 실시되었다. 학생들에 대한 진단평가를 토대로 중학교 수준의 함수와 그래프를 엑셀을 이용해서 지도하였다. 학생들에게는 엑셀파일이 제공되었고, 학생들은 수업 중에 실제 조작해보고 조작결과를 배포된 활동지에 적고 함께 토론하는 방식으로 수업을 진행하였다.

Ⅰ. 서론

함수단원의 지도에 있어서 여러 가지 변화하는 현실 상황과 관련된 제 변인 사이의 종속관계를 조직하는 활동을 통해 함수의 특성이 심상으로 형성될 수 있도록 하는 교수학적 배려가 필요하고, 두 변인간의 관계 그래프를 그려서 살펴보는 것이 매우 효과적이고 자연스럽다. 그러나, 학생들은 함수의 본질은 기호적 표현 양식인 '식'이며, 그래프는 그것을 시각화한 보조수단에 불과하다는 인식을 갖고 있고(우정호, 1998; Tall, D, 2003), 그래프의 형태를 간략하게 형상화 하는 과정을 매우 어렵게 생각하는 경향이 있어서 계산을 통해서만 기계적으로 문제를 해결하려고 한다.

특성화 고등학교의 수학 부진 학생들의 경우는 함수식과 그래프와의 관계에 관한 이해가 매우 부족한 상태로서 함수의 개념과 그래프의 특징 및 함수식과 그래프를 연결하는 부분을 정확하게 이해하지 못하고 있다. 이미 학습된 경험에 의해 기계적으로 함수식을 작성하고 기울기과 y절편을 구할 수 있더라도, 그것이 그래프의 기울어진 정도를 나타내는 값이며, y축과 만나는 점이라는 점을 인식하지 못하여 응용문제를 해결하지 못한다. 즉 함수에서 함수식과 그래프 그리고 표 사이의 표상 간의 연결이 부족하다. 따라서 특성화 고등학교 수학 부진아들의 경우, 그래프의 형태가 갖는 의미에 대한 명확한 학습이 이루어져서 함수 문제 상황에서 보다 쉽게 그래프의 심상을 떠올릴 수 있도록 하기 위한 보다 효과적인 학습 방법이 요구된다.

순서쌍의 집합, 대응, 그래프, 종속, 공식, 행동의 과정, 대상 등 함수는 다양한 측면을 지니는데, Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi(1993)는 과

* 동해상업고등학교 (cjyeon@naver.com)
** 관동대학교 (hjheo@kd.ac.kr)

정(process)으로서의 함수개념과 대상(objects)으로서의 함수개념에 주목했다[1]. 과정은 동일한 본래의 양에 대하여 변환된 양이 항상 동일하게 산출되도록 하는 어떤 반복 가능한 방법에 따른 역동적인 변환을 의미하므로, 과정으로서의 함수는 각각의 x값에 대응하는 y값을 갖는 것으로 이해될 수 있다. 대상은 함수의 개념과 표상이 전체로 인식되는 것인데, 행동을 대상에 실행할 수 있을 때 함수가 대상으로 인식되었다고 판단할 수 있다. 더 직관적으로 Schwartz는 함수의 기호적 표현은 '과정'으로서의 함수의 본질을 보여주고 함수의 그래프적 표현은 대상으로서의 함수의 본질을 분명히 하는 것이라고 보았다(Selden & Selden, 1992). 일반적으로 구조적 개념(대상)은 조작적 개념(과정)으로부터 발전되며[2], 이것은 함수개념의 역사적 발달 과정을 통해서도 알 수 있다(Sfard, 1992). 그런데, '과정'개념에서 '대상'개념으로의 전이는 쉽게 이루어지지 않기 때문에(Sfard, 1991) 수학적 과정에 내재된 과정에 대한 이해를 증진시키고, 관련된 절차(과정)를 익혀서 알고리즘을 능숙하게 사용하는 것, 적절한 표상을 제공하는 것과 같은 교수학적 지원이 필요하다. Dubinskey와 동료들에 의한 연구에 의하면 컴퓨터의 적절한 활용은 함수를 대상으로 사고하는 능력에 긍정적인 영향을 미친다(Sfard, 1992).

함수는 학생들이 함수를 통해 다양한 규칙성을 알고 확장하고 분석하고 창조할 수 있어야 하며, 도표와 그래프와 법칙을 이용하여 관계를 기술하고 분석할 줄 알아야 하고, 한 양의 변화가 다른 양의 변화에 어떤 영향을 주는 지도 알고, 함수 관계를 분석할 것을 목표로 지도되어야 한다(NCTM, 1992). 대학진학과 직업에 대한 준비로 미국 학생들이 준비해야할 공통핵심교육과정(Common core state standards: CCSS)에서도 고등학생들이 함수와 관련하여 함수의 개념을 이해하고 기호로 나타낼 수 있으며, 응용문제 속의 함수를 상황에 맞춰 해석할 수 있고, 다양한 표상을 사용하여 함수를 해석할 수 있는 능력을 갖출 것을 요구하고 있는데, 이러한 능력은 특히 졸업 후 취업을 목표로 공부하는 특성화 고등학교 학생들에게 우선적으로 필요하다. 그러나 특성화 고등학교 학생들의 대부분은 수학과목에 매우 부진하며, 특히 함수식과 그래프의 관계에 대한 이해가 매우 부족하다. 고등학교 과정의 함수 단원은 나선형 교과인 수학 과목의 특성 때문에 중학교 과정에서 선수학습 되어야 할 일차함수와 분수함수의 개념과 그래프에 대한 명확한 이해의 과정이 없이 학습을 지속하기 어렵다. 임소라(2012)의 정보고등학교 3학년을 대상으로 한 연구에서 60%의 학생들이 보충수업이 필요하다고 답했고 배우고 싶은 영역으로는 '함수' 단원이 71%로 압도적으로 높게 나타났다.

한편, 엑셀은 현재 모든 학교에서 가장 널리 사용되고 있는 프로그램으로 쉽게 접할 수 있으며, 초등학교 때부터 컴퓨터를 접해온 현재 학생들이 어렵지 않게 배울 수 있는 프로그램이다. 또한 간단한 조작으로 수식, 대응표, 그래프 등을 쉽게 만들고, 그릴 수 있는 표상능력을 갖추었을 뿐만 아니라 한 화면에 담을 수 있어 표상들 사이의 번역활동을 통해 학생들의 의사소통능력을

---

1) 수학적 사고에 있어서의 대상과 과정에 대한 인식은 Piaget, Dubinsky, Sfard 등 많은 학자들에 의해 논의되었으며, 함수개념에 대하여 D. Breidenbach et al(1992)는 과정과 대상이란 용어로, Sfard는 구조적 개념화와 조작적 개념화란 용어를 사용하여 유사한 주장을 하였다(Sfard, 1992).

2) Sfard는 사람들이 계산적 과정에 몰두해서 내면화(interiorization), 압축(condensation), 구상화(reification)의 3단계를 통해 대상(구조적 개념)을 형성하는데 , 내면화와 압축은 점진적인 양적 변화이지만, 구상화는 갑작스런 질적 비약이 이루어지는 것으로 단기간에 이루어질 수도, 오랜 시간이 걸릴 수도 있다고 주장한다. 과정과 대상은 모두 학습과 문제해결에서 필요하며 상보적인 역할을 하는데 특히, 대상은 인지적 과정을 효율적으로 만든다.

길러줄 수 있고(허혜자, 2005), 전통적인 지필환경에서는 수업시간에 하기 힘들었던, 산술로부터 일반화하고 학생들의 비형식적인 산술 전략을 확장하기 위한 맥락을 제공한다(Sutherland & Rojano, 1993). 학생들이 표현을 유연하게 바꿀 수 있으면 서로 다른 관점에서 수학적 대상을 조작할 수 있는 능력이 생기며 수학적 힘이 형성된다(NCTM, 2007).

따라서 본 연구는 엑셀 사용의 경험이 있고 수학과목에 부진한 특성화고등학교 학생들을 대상으로 한 함수 수업에서 엑셀 활용이 함수 그래프의 과정-대상관점 형성과정에 미치는 영향에 대한 사례를 분석하여 특성화 고등학교 학생들이 함수 학습에 대한 자신감과 흥미를 가질 수 있는 교수방법과 도구를 제시하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 함수의 과정-대상 관점과 표상의 연결

학생들이 함수와 그래프를 어떻게 연결하여 이해하는지를 파악하기 위해, 'GRAPHER'라는 컴퓨터 프로그램을 사용하여 학습하는 장면을 촬영 분석한, 버클리 대학의 연구자들은 '컴퓨터 화면에 보여진 그래프'를 학생들이 잘 이해할 것이라는 가정을 하였다. 그러나, 학생들은 실제로 컴퓨터 화면에 보여진 $y=2x+1$, $y=3x+1$, $y=4x+1$의 그래프에서 x값의 계수가 기울기를 나타낸다는 것은 알아냈지만, 그래프가 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 뻗어나간다는 방향성만 인식하고, 점$(0,1)$을 지난다는 것을 알지 못했다. 또한 모니터 해상도의 문제로 나타난 그래프의 계단현상을 그래프의 특성으로 오인하여 x계수가 클수록 울퉁불퉁한 그래프가 그려진다는 대답을 하기도 하는 등 의외의 결과를 나타냈다 (Moschkovich et al., 1993). 좌표평면에 익숙한 사람은 무엇을 간과하고 무엇에 초점이 맞춰야 하는지 쉽게 알지만, 초보자는 그렇지 않은 것이다. 따라서 학생들이 바라보는 관점에서 좌표평면을 보고 그들의 관점에서 그래프를 인지하고 이해하도록 돕는 새로운 교수-학습법이 필요하다. Moschkovich 외(1993)는 일차함수의 이해과정에서 고려해야 할 2차원의 프레임워크를 제시하였다 (표 Ⅱ-1). 프레임워크는 일차함수를 표현하는 수단인 일반적인 표상(표, 대수식, 그래프)과 일차함수를 다루는 관점(과정, 대상)에 따라 6개의 셀로 구분되었다. 문제 해결 상황에서 학습자의 사고는 하나의 관점에서 표상 간 이동하거나, 하나의 표상에서 관점 사이를 이동하면서 또는 표상과 관점사이를 가로질러 이동하게 된다.

<표 Ⅱ-1> 함수의 전형적 표상을 포함한 Moschkovich의 프레임워크

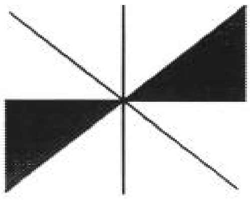
표상 / 관점	표	대수식	그래프
과정			
대상			

예를 들어, '$y=3x+3$에서 $x=5$일 때 y값은?'는 (대수식 표상, 과정 관점)의 셀에, '대응표를 보고 일차방정식을 구하라'는 (표와 대수식 표상 간 이동, 과정 관점)에, 그리고 '$y=3x+4$에서 y절편이 왜 4가 되는가?' 또는 '$y=2x-2$에서 x절편을 구하라'는 (대수식과 그래프 표상 간 이동, 과정 관점)에 해당하는 문제이다.

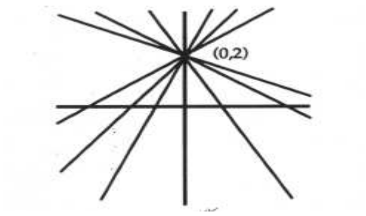
또한, '$y=x^3+3x^2+2x$의 함숫값을 나타내는 다음 표를 보고 $y=x^3+3x^2+2x+1$에 대한 표를 완성하라.'는 문제의 경우는 $y=x^3+3x^2+2x$를 함수 $f(x)$로 놓고, $y=x^3+3x^2+2x+1$를 함수 $g(x)$라고 하면

$g(x)=f(x)+1$이 성립하므로 (대수식 표상, 대상 관점)에 해당하는 문제로 볼 수 있다.

[그림 Ⅱ-1]에서 어둡게 표시된 영역에 존재하는 모든 선의 기울기로 가능한 값의 범위를 구하는 경우와 [그림 Ⅱ-2]에서 임의로 선택한 직선의 방정식을 구하는 문제의 경우를 살펴보자.



[그림 Ⅱ-1] Moschkovich의 예제 그래프1



[그림 Ⅱ-2] Moschkovich 예제 그래프2

[그림 Ⅱ-1]에서 직선은 $y=mx$로 표현할 수 있다. 이 때, x축과 $y=x$ 인 직선을 경계로 표시되는 영역은 기울기가 0에서 1사이이다. [그림 Ⅱ-2]에서 모든 직선은 점$(0,2)$를 지난다. 점 $(0,2)$를 지나는 직선들을 대수식으로 표현하면 $y=mx+2$ ($m\in R$) 이다. 이 두 가지 예제는 그래프를 대상관점에서 본 것이다. 마찬가지로, "왜 $y=3x$의 그래프는 $y=2x$의 그래프보다 가파른가?"라는 문제에서 x의 계수에 따라 그래프의 모양이 다르다는 것은 대상관점에서 대수식과 그래프를 본 것이다. 그러나 위와 같은 예제에서 그래프의 기울기를 결정짓는 m값 또는 x의 계수를 구하려고 할 때, 그래프의 직선은 과정관점의 설명을 요구한다. 직선위의 두 점을 (x_1,y_1), (x_2,y_2)라고 하면 기울기는

$$y_2-y_1=(mx_2+b)-(mx_1+b)=m(x_2-x_1)$$

이므로 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이 된다. 따라서 이와 같은 문제해결은 대수식과 그래프의 표상에서 대상관점과 과정관점의 전환이 일어나는 경우라고 볼 수 있다.

2. 함수 표상 간의 연결과 엑셀 프로그램

다양한 표상 간의 연결이 수학적 개념의 형성 과정이나 의사소통에 미치는 중요성은 많은 학자에 의해 강조되고 있다(NCTM, 1992; 이종희 & 김선희, 2001; 장혜원, 1997). 장혜원(1997)은 다중표현과 표상의 다양성이라는 양 측면을 고려한 교수학적 전략은 주어진 하나의 표현에 대하여 학생들이 구성한 단편적 표상들 간에 걸쳐있는 수학의 본질로서의 개념을 형성하도록 하는 것을 주목표로 하여, 각각의 표상을 의미 있게 구성하기 위해 다중 표현을 이용하는 것인바, 그 과정은 번역을 독려함으로써 유발가능하다고 주장하였다.

엑셀은 표, 식, 그래프 등 다양한 수학적 표현을 하나의 화면에 담을 수 있는 스프레드시트이다. 다양한 수학적 표현을 하나의 화면에 담는 능력은 특히 함수의 지도에도 강력한 역할을 한다. 대수적 해결을 강조하는 상황에서 그래프를 불필요한 것으로 또는 단지 보조수단 정도로 밖에 여기지 않는 경향(Knuth, 2000)을 지닌 학생들에게 엑셀을 활용하면 각각의 표현들을 대등한 위치에서 바라볼 수 있게 할 수 있을 것이다. 엑셀을 활용하게 되면 실생활 자료를 수학 수업에서 직접 활용할 수 있도록 해주고, 이를 여러 가지 다양한 표상으로 연결해 줌으로써 다양한 수학적 경험을 할 수 있도록 한다. 이를 통하여 전체적인 함수의 패턴과 흐름을 파악함으로써 올바른 함수 개념을 형성하는데 큰 도움을 얻을 수 있다.

표상 간의 연결이 자연스럽게 이루어지도록 하기 위해서 교사는 학생들에게 기호와 표의 형태로 표현된 함수의 그래프를 그리는 경험을 자주 제공해 주어야 한다. 그리고 함수의 그래프를 대수식으로 변환하는 기회도 역시 중요하게 다루어야 한다. 복잡한 상황을 단순화하여 결과를 예측하게 하는 함수의 위력은 두 변수 사이에 함수관계가 성립하는 현상을 관찰하고, 관찰된 자료를 수집하고, 점을 찍고, 그래프를 완성하고, 그래프를 사용하여 변수 사이의 관계를 형식화 하면서, 한 변수의 관찰되지 않은 값을 예상하는 것을 통해 설명되어질 수 있다. 이러한 맥락에서 엑셀은 함수 개념의 학습과 그 응용을 학생이 학습 가능한 것으로 만드는 도구로서 사용될 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구대상

본 실험은 강원도 소재 특성화 고등학교 2학년 학생 5명(표 Ⅲ-1)을 대상으로 실시되었다. 실험교는 비평준화지역에 위치하고 있고 주변의 일반고등학교에 비해서 입학 성적이 상대적으로 매우 낮다(지난 3년간 입학생의 중학교 평균 내신이 168점 만점에 85, 89, 106이었다). 고등학교 입학 후에도 국가수준학업성취도(수학과목) 결과를 보면 기초학력미달이 약 30%, 기초학력이 61-63% 수준으로 보통학력 이상이 10%미만이다. 이는 인근 인문계고등학교와 비교할 때 현저하게 낮아서 일반적인 수준의 고등학교수학수업을 진행하기에는 무리가 따른다[3]. 실험교의 대부분의 학생들이 수학부진아로 중학교 수준의 수학에 대해서도 학습결손이 심각한 상태이다. 한편, 실험참가 학생들은 모두 1학년 때부터 정규 수업과 방과 후 수업을 통해 엑셀을 학습한 경험이 있어서 별도의 지도 없이 본 실험에서 사용된 엑셀의 기능을 다룰 수 있는 수준이었다.

<표 Ⅲ-1> 연구대상의 특징

학생	특징
A학생	전과목 학성성취도가 매우 우수한 편으로 금융계열 사무직 취업을 목표로 회계관련 자격증을 취득하는 등 목표한 바를 이루기 위해 다방면으로 노력을 기울이고 있으나 수학 과목을 공부하자고 했을 때, ‘공부하기 싫어요.’라는 거부감을 가장 많이 나타내는 등 수학과목을 유난히 싫어하고 자신감이 없었다.
B학생	엑셀을 포함한 다양한 소프트웨어의 기능을 배우는 것에 상대적으로 자신감이 있으며, 교과성적도 좋은 편이다. 엑셀로 수학을 공부할 수 있다는 것에 상당한 기대를 나타내며 흥미가 높았다.
C학생	컴퓨터를 조작하는 것에는 관심이 많고 실력도 좋은 편이나 수학 과목을 특히 싫어하며 수학성적이 좋지 않은 편이다. 수학 수업에 대해 흥미가 없어 마지못해 참여하는 태도를 보였다.
D학생	모든 과목에 고른 성적 분포를 보이며 성실한 수업태도를 보이며, 수학 과목을 잘 하고 싶은 욕심이 있으나 생각만큼 성적이 오르지 않고 공부하는 방법을 도무지 모르겠다고 하였다.
E학생	전과목 성적이 중간 정도이고, 수학과목의 성적은 상대적으로 낮은 편이다. 조용하고 내성적인 성격으로 교사의 지시에 순응하여 열심히 수업에 참여하나 기본기가 갖춰지지 않아서 수업 내용을 따라오기 힘들어 했다.

---

3)
<강원도 실험교 인근 고등학교의 국가수준 학업성취도 평가 결과 비교 (수학과목)>

년도	2010년			2011년		
수준	기초학력미달	기초학력	보통학력이상	기초학력미달	기초학력	보통학력이상
특성화고(실험고)	30.8	62.9	6.3	29.2	60.8	10
일반(8)+실업(2)	6	33	61	7.5	24.9	67.6
일반고A	9.2	55.2	35.6	15	43.8	41.2
일반고B	2.1	22.1	75.8	5.1	13.4	81.5
일반고C	1.3	10.5	88.2	21.4	50.9	27.7

2. 연구 방법 및 절차

본 실험은 위의 학생들을 대상으로 5일간 방과 후에 컴퓨터실에서 실시되었으며, 실험 전·후에 사전조사와 총괄평가를 실시하였다. 사전조사에서는 피험자의 수학학습에 대한 생각과 엑셀을 활용한 수학에 대한 흥미도 측정을 위한 설문지와 고등학교 함수 단원학습에 앞서 반드시 알아야 할 중학교 함수에 대한 기초 지식을 재기 위한 진단평가가 이루어졌다. 진단평가지는 고등학교 수학 교과서(최용준, 2011d)의 함수단원 준비학습 문제(3문항)를 사용했다.

실험 2일차부터 4일차까지 3일간 3차시(1차시: 함수 $y = ax\ (a \neq 0)$의 그래프, 2차시 : a값의 변화와 $y = ax\ (a \neq 0)$, $y = \dfrac{a}{x}\ (a \neq 0, x \neq 0)$그래프, 3차시: 일차함수의 그래프) 분량의 수업이 진행되었다. 1차시와 2차시는 중학교 1학년, 3차시는 중학교 2학년의 함수의 그래프에 해당하는 내용이다. 각 수업에서 연구자는 미리 활동 파일을 만들어 학생들에게 배포하고 학생들이 컴퓨터상에서 작업한 것을 적을 수 있는 활동지도 배포하였다. 활동지에는 식, 표, 그래프가 모두 포함되었다. 컴퓨터 작업이 순간적으로 이루어지는데 비하여 활동지는 답을 기입하면서도 생각하고 나중에 작성된 결과를 보면서 토론하는데도 이용되는 등 지속성이 있으므로 학생들의 성과를 파악하는데 효과적이다. 또한, 수업 과정도 디지털 카메라로 녹화하여 사후 분석을 위한 자료로 활용하였다.

마지막 날에는 형성평가1(3문항), 형성평가2(4문항), 총괄평가(16문항)및 사후 설문조사를 실시하였다. 총괄평가지는 중학교 교과서(이준열, 2011a, 2011b, 2011c; 최용준, 2011a, 2011b, 2011c)에서 발췌한 16개 문항으로 구성하였다. 수업시간이 50분으로 형성평가를 보기에는 부족하고 수업 중에는 학생들이 활동지를 작성하기 때문에, 마지막 날에 형성평가를 보았고, 형성평가 후 학생의 답안에 대해 분석하고 토론 시간을 가지고 나서, 총괄평가를 실시하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 사전 조사(설문지 및 진단평가) 분석

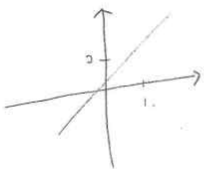
실험 첫날은 학생들에게 연구의 목적을 설명하고 동의를 구한 후, 평소 수학과목에 대해 갖고 있던 생각과 엑셀로 하는 수학 수업에 대한 의견을 묻는 사전 설문지를 5점 척도로 작성하게 하였다. 설문 결과 학생들은 수학 교과에 대한 흥미가 낮고(2.2점), 학습하는 내용에 대해서는 이해하기 어려워하였으나(2.8점) 수업시간에 열심히 참여하려는 의지(3.2점)와 수학시간에 컴퓨터를 이용한 수학 수업에 대한 기대(3.2점), 수학시간의 교수학습 방법에 대해서는 (3.4점) 보통 정도를 나타났다.

한편, 고등학교 함수단원의 학습에 앞서 중학교 때까지 배웠던 내용을 얼마나 알고 있는지 알아보기 위해 실시한 진단 평가 결과는 다음과 같다.

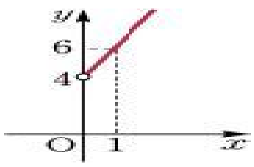
(과정 관점, 대수식 표상)의 문제인 '문제1: 두 집합 $X = \{-1,0,1\}$, $Y = \{0,1,2,3\}$에 대하여 다음 보기 중 X 에서 Y로의 함수인 것을 모두 찾아라.'은 정의역과 공역이 정수값으로 주어졌을 때 함수식을 찾는 문제로 단 1명의 응답자만이 정확한 답을 찾았다. 학생들은 $y = ax + b$형태의 식은 쉽게 함수식이라고 답했으나, $y = |2x|$와 $y = x^2$에 대해서는 선택을 망설인 흔적을 보였다. 그리고 정의역과 공역이 실수 전체일 때 함수식이 성립하는 보기를 무심코 정답으로 고르는 실수를 범하였다.

역시, (과정 관점, 대수식 표상)의 문제인 '문제 2: 가로의 길이가 $x\,cm$, 세로의 길이가 $2\,cm$인

직사각형의 둘레의 길이를 $y\,cm$라고 할 때, 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f(1), f(2), f(x)$를 구하여라'에 대해, 3명의 학생은 $f(1)$과 $f(2)$의 값을 정확하게 구했고, 다른 학생들은 함수식 자체를 만들지 못하였다. 또한 모든 학생이 $f(x)$식을 정확하게 작성하지 못하였다. (그래프 표상, 대상 관점) 문제인 '문제3: 문제2의 $f(x)$의 그래프를 그려라'의 경우 그래프를 정확하게 그린 학생은 한 명도 없었으며, 2명의 학생은 아예 그래프를 그릴 엄두를 내지 못하였다. [그림 Ⅳ-1]은 B학생이 제출한 답안지이다. '문제3'의 경우는 과정관점에서 작성된 대수식 표상을 그래프 표상으로 연결 짓지 못하여 해결할 수 없었다고 볼 수 있다. 또한 그래프를 그린 학생들조차 그래프가 나타내는 좌표평면상의 요소들에 익숙하지 않으므로 [그림 Ⅳ-2]와 같이 표시하여야 함에도 불구하고 정의역과 공역에 대한 고려는 물론, x축과 y축을 표시하지 않았고, 눈금의 간격 또한 일정하지 않은 그래프를 그렸다.



[그림 Ⅳ-1] B학생의 문제3 답안의 예



[그림 Ⅳ-2] 준비학습 문제 3의 정답

진단평가의 결과를 통해 학생들이 함수와 관련한 모든 학습상황에서 많은 곤란을 겪고 있다는 것을 확인하였고, 이후의 학습에 심각한 문제가 있음이 증명되었다. 특히 실험에 참가한 학생들이 $f(1)$과 $f(2)$의 정답을 안다는 것은 이전에 분명이 학습한 경험이 있고 문제 풀이의 경험도 있다는 것을 의미한다. 그럼에도 불구하고 함수식을 그래프로 표현하는 데에는 어려움을 나타냈다. 따라서 학생들이 고등학교 수학에서 다뤄지는 함수의 학습은 물론 일상생활에서 그래프를 이해하고 각종 통계 자료를 사용하는 데 매우 큰 어려움이 있다고 예상할 수 있었다. 중학교 과정에서 선수학습 되어야 할 일차함수와 분수함수의 개념과 그래프에 대한 정확한 이해의 과정 없이 나선형 교과인 고등학교 수학을 학습하는 것은 무의미하다. 그러므로 고등학교 수준의 함수 학습을 시작하기에 앞서 학생들에게 보다 흥미롭고 쉬운 도구를 활용한 학습 방법을 적용하여 함수의 학습에 자신감을 갖게 하고, 실생활과 연계지어 쉽게 함수식과 그래프를 활용할 수 있도록 하는 새로운 방법이 요구되었다.

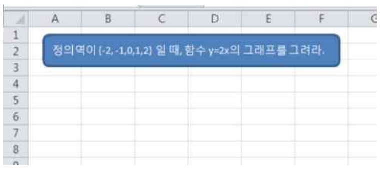
2. 연구수업 분석

학생들에게 해결할 과제가 입력된 엑셀 파일을 먼저 배포하였고, 표상 간의 연결을 이해시키기 위하여 대수식에 따른 대응표를 작성한 후, 그래프를 작성하게 하였다. 교수-학습 과정에서는 교사의 안내와 발문을 적절히 제시하여 함수의 특성이 심상으로 형성될 수 있도록 유도하였으며 컴퓨터 화면을 통해 관찰된 표상을 학생이 정확히 인식하였는지를 확인하기 위해 학습 활동지를 별도로 제시하여 활용하였다.

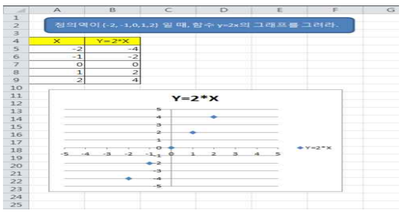
가. 1차시 : 함수 $y=ax\ (a\neq 0)$의 그래프

1차시는 정수 범위의 정의역이 주어졌을 때, 함수 $y=ax\ (a\neq 0)$의 그래프를 그리는 것과 정의역이 실수 전체일 때 함수 $y=ax\ (a\neq 0)$의 그래프를 그리는 것을 학습목표로 하였다. 수업은

학생들에게 [그림 Ⅳ-3]과 같이 문제가 표시된 엑셀 파일을 배포하고, [그림 Ⅳ-4]와 같이 직접 작성해 보도록 하였다. 우선 A5:A9 영역에 정의역의 값을 표시하고, B5셀에 입력할 수식에 대해 생각해 보도록 하였다.



[그림 Ⅳ-3] 문제1의 제시화면



[그림 Ⅳ-4] 문제1의 그래프 작성 화면

○ 문제1: 정의역이 {-2,-1,0,1,2}일 때, 함수 $y=2x$의 그래프를 그려라.

교사 : x값이 A5부터 A9까지 나열되어 있습니다. $y=2x$ 수식에 따라 B5:B9영역에 y값이 나열되도록 하려면 B5셀에 어떤 수식을 넣으면 될까요? =2 곱하기...?

학생 A: A5입니다.

교사 : 맞았어요. 수식을 그렇게 넣으면 x값이 -2일 때, y값이 -4라고 계산되어 나오죠? 그럼 그 다음은 어떻게 할까요?

학생 C: 당겨요.

교사 : 예, 채우기 핸들을 이용하여 이렇게 드래그하면, 수식이 복사되어 원하는 답을 모두 얻을 수 있죠. x값이 -1일 때, y값은 얼마인가요?

학생 B: -2가 나와요.

교사 : 예, 대응표가 완성이 되었어요. x값이 변함에 따라 y값이 변하는 것을 확인 했나요?

학생들 : 예.

위의 수업 상황에서 학생들은 과정관점에서 대응표를 작성하게 된다. 엑셀의 채우기 핸들을 사용하여 수식을 복사하면서 x, y값들이 변수임을 자연스럽게 인식하게 된다. 그래프를 작성하기 위해 A4:B9 영역을 블록 범위로 한 후 '삽입-차트-분산형' 메뉴를 이용하여 차트를 작성하였다. 이때 x축의 서식에서 최소값, 최대값 및 주 단위를 y축과 일치되도록 설정하여 그래프의 기울기가 정확하게 표현될 수 있도록 하였다. 분산형 차트를 이용하면 정의역이 정수일 때 함숫값이 점으로 표시되는 것을 직접 확인할 수 있다.

학생 B : 신기하다

학생 A : 와~!!

교사 : 어때요? 재미있어요?

학생 E : 신기해요. 엑셀로 그래프가 이렇게 그려지네요? 그런데 '점'이예요.

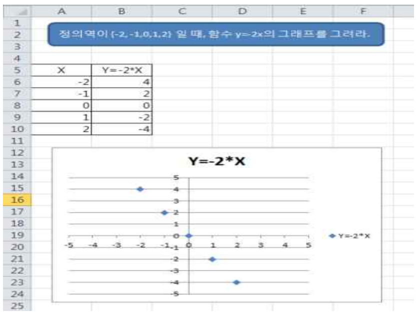
교사 : 예~정의역이 정수니까. 정의역과 공역이 만나는 곳에 점이 나타났어요. 그려진 그래프가 정확하게 잘 그려진 것 같아요?

학생들 : 예. 잘 그려졌어요.

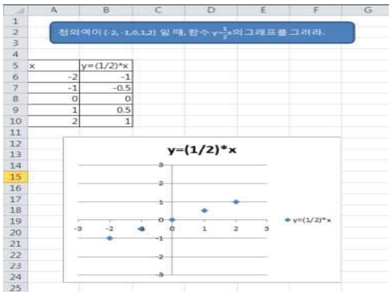
그래프가 화면에 나타났을 때 학생들은 매우 신기해하며 즐거워하였다. 자신들이 직접 그래프를 그렸다는 것에 대해 매우 뿌듯해 했으며 많은 흥미를 보였다. 이 활동은 대수식이 대응표 표상으로 연결되고, 다시 그래프 표상으로 자연스럽게 이어지도록 하는 것이다(대수식→대응표→그래프). 학생들은 엑셀에서 표를 작성하면서 대응표의 함수식에 따라 값들이 규칙적으로 바뀌는 대응표를 자연스럽게 받아들이게 되고, 그래프를 작성하려면 표가 있어야 하므로 대응표와 그래프 간의 관계를 받아들이게 된다.

학생들이 두려워하는 그래프에 대한 이미지를 심상으로 기억하게 하려면 비슷한 형태의 그래프를 반복적으로 경험하게 할 필요가 있으므로, 실험수업에서는 정의역이 정수인 함수식을 다양한

형태로 제시하고 비교해 보도록 하였다. 다음 [그림 Ⅳ-5]와 [그림 Ⅳ-6]은 학생들에게 제시한 다양한 함수식의 예시이다.



[그림 Ⅳ-5] $y=-2x$ 그래프 작성 화면



[그림 Ⅳ-6] $y=\frac{1}{2}x$ 그래프 작성화면

교사 : 여러분들이 그린 그래프들을 비교해 보면 어떤 점이 다른가요?

C 학생 : 점의 방향이 달라요.

교사 : 예, 점이 방향이 다른 것을 '기울기가 다르다'라고 표현해요. '기울기'라는 말을 사용해 본 적이 있죠?

학생들 : 예.

교사 : 그럼 기울기가 다른 그래프들의 함수식에서는 뭐가 달라서 기울기가 달라진 걸까요?

학생 A : x 앞의 숫자가 달라요.

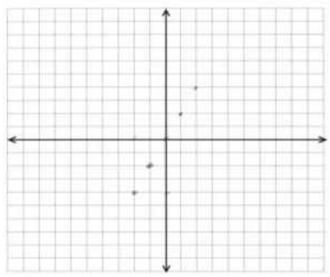
교사 : 그래요. x 앞의 숫자, 즉 x 의 계수가 양수일 때에는 왼쪽아래에서 오른쪽 위 방향의 그래프가 그려졌고, x 앞의 숫자가 음수일 때에는 왼쪽 위에서 오른쪽 아래 방향의 그래프가 그려졌죠. 양수일 때에는 1사분면과 3사분면을 지나고, 음수일 때에는?

학생 B : 예, 알아요. 2사분면과 4사분면을 지나죠.

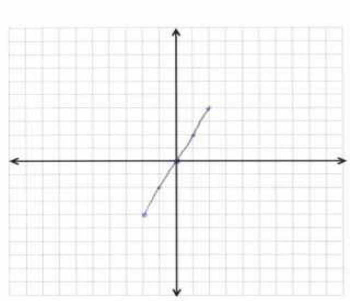
교사 : 숫자가 클수록 기울기는 어떤가요?

학생들 : 더 세워졌어요.

학생들이 그래프에 대한 심상을 제대로 갖고 있는지를 검증하기 위해 활동지를 통해 확인해 보았다. 아래 [그림 Ⅳ-7]과 [그림 Ⅳ-8]은 학생이 그린 $y=2x$ 그래프이다. 다른 학생들의 그래프도 A학생의 그래프와 같았다. 한 가지 아쉬운 점은 학생들은 그래프의 기울기나 점의 위치는 정확하게 표현하였으나, 그것을 종이(활동지)위에 표현할 때, 축 이름과 눈금이 나타내는 값을 표시를 생략했다는 점이다. 교사는 이러한 점을 미리 예측하고 학생들에게 알려줘야 할 것이다.



[그림 Ⅳ-7] A학생이 그린 $y=2x$ 그래프



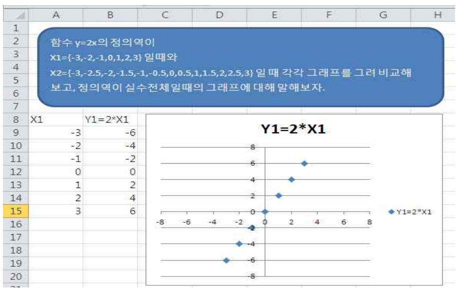
[그림 Ⅳ-8] B학생이 그린 $y=2x$ 그래프

B학생의 그래프([그림 Ⅳ-8])를 살펴보면 필요치 않은 직선을 그려 넣은 것을 볼 수 있다. 실험에 참가한 학생들은 이미 정규 수업시간에 일차

함수를 배운 경험이 있었으나 사전검사 결과로 볼 때 일차함수 그래프를 정확하게 표현하지는 못하는 상황이었다. 다음의 대화를 살펴보면 학생이 직선을 그려 넣은 이유를 알 수 있다.

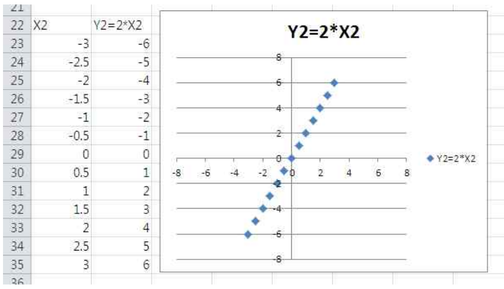
교사 : 이 직선을 왜 그려 넣었지?
학생 B : 일차함수 그래프는 직선 아닌가요?
교사 : 문제에서 정의역의 값이 뭐였지?
학생들 : -2, -1, 0, 1, 2요.
교사 : 공역은?
학생 A :-4, -2, 0, 2, 4.. 그러니까..여기 이 점들이 이렇게..
교사 : 정의역의 값이 정수인데 직선이 필요할까?
학생 B : 원래 그래프는 직선이나 곡선 아니에요?

위 대화를 보면 학생들은 정의역의 범위가 실수로 확장되었을 때 직선형태의 그래프로 표현된다는 것을 바르게 이해하지 못하고 있다. 일반적으로 중학생들은 일차함수를 판별하는데 개념정의보다는 일차함수의 그래프가 직선이라는 개념이미지를 사용하는 경향이 있다(변희현 & 주미경, 2013 재인용). 피험자들이 중학교 때 이미 일차함수의 그래프를 배웠고, 정의역이 확장되어가는 과정에서 처음에는 점선형태의 그래프를 배우지만 정의역이 실수일 때 직선이 됨을 배운 이후에는 직선형태만을 다루었기 때문에 그러한 개념이미지가 강하게 영향을 미치는 것으로 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-9] 정의역 x값의 간격이 1일 때, $y=2x$ 그래프의 작성화면

따라서 그래프 표상의 과정-대상관점의 유연한 전환을 돕기 위해, 정의역의 범위가 실수 전체로 확장되는 과정을 살펴볼 수 있는 그래프를 관찰해 볼 필요가 있다. 따라서 [그림 Ⅳ-9], [그림 Ⅳ-10]과 같이 대응표의 x값의 간격을 좁혀 실수집합으로 표현해 보도록 하고, 이전의 그래프와 비교해보도록 하였다.



[그림 Ⅳ-10] 정의역 x값의 간격이 0.5일 때, $y=2x$ 그래프의 작성화면

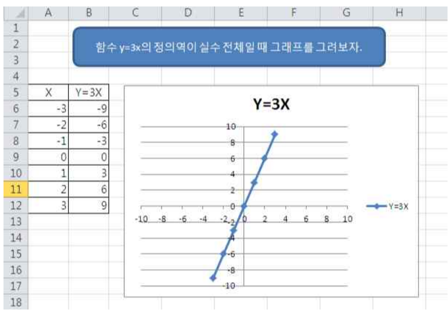
교사 : 정의역과 공역이 실수를 포함하도록 숫자의 간격을 좁혀서 대응표를 다시 그려봅시다. 이전에 작성한 대응표는 정의역이 -2부터 1씩 커지는 정수값을 사용했었지만, 이번에는 -3부터 0.5씩 커지도록 수정해 보겠어요. 정의역의 숫자들을 일일이 입력해야 할까요?
학생 D : 아니오, -3과 -2.5만 입력하고 블록을 씌워서 드래그하면 되요.
교사 : 예, 이미 배워서 잘 알고 있네요? 아주 쉽고 빠르게 대응표를 작성할 수 있겠죠?
학생들 : 예~
교사 : 숫자의 간격이 더 촘촘하게 많아도 금방 할 수 있을까?
학생들 : 물론이죠.

위 대화의 내용을 살펴보면 숫자의 간격을 조절하려고 했을 때에는 엑셀이 가진 장점이 매우 유용하다는 것을 알 수 있다. 엑셀은 이미 그려진 대응표를 쉽게 복사하여 다른 셀에 붙여 넣을 수 있으며, 채우기 핸들을 이용하면 숫자의 간격이나

범위에 구애받지 않고 간단하게 대응표를 그릴 수 있다. 학습자들은 앞의 수업과정을 경험하면서 이미 대응표를 작성하는 방법에 익숙해져 있다.

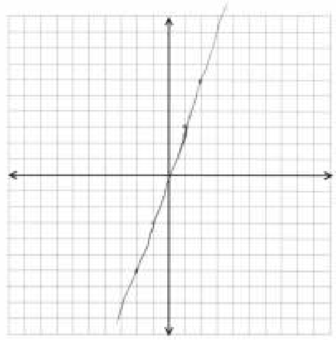
교사 : 여러분이 그린 2개의 그래프를 비교해 보면 어떤 점이 서로 다른가요?
학생 C : 점의 간격이 촘촘해요.
교사 : 그래요.. 그럼 만약 정의역이 실수 전체, 즉 숫자 간의 간격이 셀 수 없을 정도로 촘촘하고 정밀한 소수들로 이루어져 있다면 그래프의 모양은 어떻게 될까요?
학생 A : 직선이 되요.

위 2개의 그래프를 비교하는 과정에서 학생들은 '정의역이 실수 전체일 때 그래프의 모양이 어떻게 변하겠느냐?'는 질문에 대하여 자연스럽게 '직선이다'라고 대답하였다. 그래프 표상을 과정 관점에서 이해하였다. 학생들의 이해를 대상관점으로 전환하기 위해 다음과 같이 정의역이 실수 전체일 때 일차함수의 그래프를 엑셀을 활용하여 직접 표현해 보도록 하였다. 이 때 차트 종류는 '곡선 및 표식이 있는 분산형'을 사용하였다.

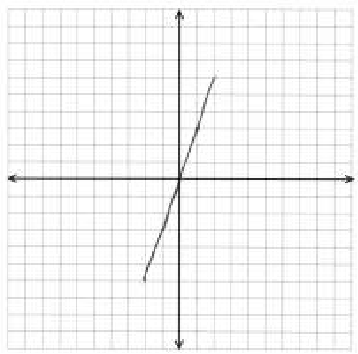


[그림 Ⅳ-11] 정의역일 실수 전체일 때, $y=3x$ 그래프의 작성화면

엑셀을 이용하여 정의역의 범위를 정수에서 실수 범위로 확장할 때, 학생들이 그래프를 보는 관점은 점들의 연결에 의해 그래프가 생성되는 과정의 관점에서 시작되어, 직선의 형태를 띠는 가장 일반적인 $y=ax$ 의 그래프의 표상, 즉 대상관점으로 전환이 일어난다.



[그림 Ⅳ-12] A학생이 그린 $y=3x$의 그래프



[그림 Ⅳ-13] D학생이 그린 $y=3x$의 그래프

위 [그림 Ⅳ-12], [그림 Ⅳ-13]은 학생들이 활동지에 작성한 그래프이다. [그림 Ⅳ-12]를 살펴보면 A학생은 대응표를 활용하여 x축과 y축이 만나는 지점을 표시하고 점들을 연결하여 직선형태의 그래프를 완성하였다. 다른 학생들의 그림도 모두 이와 유사한 형태였으며, 학생들이 $y=ax$형태의 일차함수의 그래프를 이해했다고 볼 수 있다.

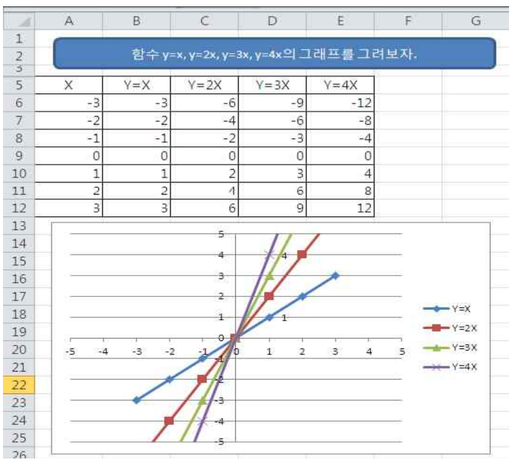
그러나 D학생이 그린 [그림 13]의 그래프는 좀 더 자세히 살펴볼 필요가 있다.

D학생의 경우 직선 그래프의 양끝을 확장하지 못하고 [그림 Ⅳ-13]과 같이 표현하였다. 엑셀로

그래프를 표현하면, 그래프의 양 끝이 직선의 형태를 갖추지 못하고 점과 점을 잇는 선분의 모양으로 그려지므로 학생의 심상에 잘못된 일차함수 그래프의 이미지가 새겨진 것이다. 따라서 엑셀은 학생들이 대응표와 그래프의 관계를 이해하는데 도움이 되는 좋은 학습도구가 될 수 있지만, 교사는 학생들이 가질 수 있는 이러한 유형의 오류에 대하여 미리 예측하고 대비하여 지도해야 한다.

나. 2차시 : a값의 변화와 $y=ax\ (a\neq 0)$, $y=\dfrac{a}{x}\ (a\neq 0, x\neq 0)$ 그래프

2차시는 a값의 변화에 따른 $y=ax\ (a\neq 0)$의 그래프 그리기와 분수함수 $y=\dfrac{a}{x}\ (a\neq 0, x\neq 0)$의 그래프 그리기를 목표로 하였다. a값의 변화에 따라 기울기가 다른 $y=ax\ (a\neq 0)$ 그래프를 비교해 보면서 대수식의 x값의 계수에 따라 그래프의 기울기가 달라진다는 사실을 관찰하도록 하기 위하여 [그림 Ⅳ-14]와 같이 대응표를 작성하게 하고, A5:E12영역에 대하여 곡선 및 표식이 있는 분산형 차트를 작성하게 하였다.



X	Y=X	Y=2X	Y=3X	Y=4X
-3	-3	-6	-9	-12
-2	-2	-4	-6	-8
-1	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12

[그림 Ⅳ-14] 기울기가 양수일 때 표식이 있는 분산형 차트를 이용한 그래프

교사 : 그래프를 그리기 어렵나요?

학생 D : 아뇨, 쉬워요. 신기해요.

교사 : $y=x$ 그래프는 무슨 색이죠?

학생 D : 파란색이요.

교사 : $y=2x, y=3x, y=4x$의 그래프는 각각 무슨 색인가요?

학생들: 빨강, 초록, 보라색이요.

교사 : 그럼 각 그래프에서 x값이 1일 때 y값은 각각 무엇입니까?

학생들: 1, 2, 3, 4 입니다.

교사 : 그래프는 모두 0점을 지나는 직선인데요, 다른 점은 뭘까요?

학생 A : 기울기요, 기울기가 달라요.

교사 : 예 기울기가 달라요. 그럼, 함수식에서 달라진 것인 기울기겠죠? 함수식에서 기울기에 해당하는 값은 뭘까요?

학생 B : $y=2x$에서 2가 기울기입니다.

교사 : 예, 그렇다면 정리해볼 때, $y=ax$ 형태의 함수식에서 기울기는?

학생들 : a 입니다.

교사 : 그럼 만약 $a<0$이라면 그래프는 어떤 모양일까요?

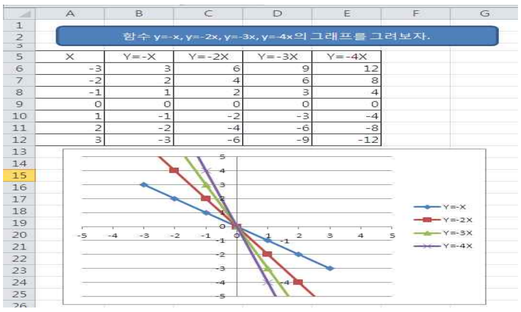
학생 B : 2사분면과 4사분면을 지납니다.

교사 : 예, 2사분면과 4사분면을 지나는 직선의 형태가 되겠죠. 여러분들이 직접 그려볼 수 있을까요?

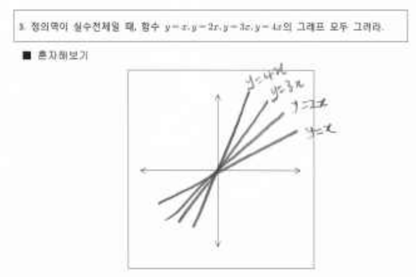
위 대화에서와 같이 학생들은 색상이 다른 4개의 직선 그래프가 간단하게 그려지는 것에 많은 흥미를 보였으며, 색상이 다르게 그려진 직선의 차이점이 기울기에 있다는 것을 관찰하고, $y=ax(a\neq 0)$의 함수식에서 a값에 따라 직선의 기울기가 달라진다는 점을 알게 되었다.

아래 [그림 Ⅳ-15]와 같이 기울기가 음수인 4개의 함수식에 대한 그래프를 작성하도록 하였을 때 학생들은 비교적 쉽게 그래프를 작성하였으며, 그래프의 모양이 2사분면에서 4사분면을 지난다는 것도 쉽게 인식하였다. 엑셀로 그래프를 그리는 과정이 반복되면서 학습자들은 교사의 설명이

끝나기 전에 이미 그래프를 완성해 놓았다. 많은 연구에서 ICT 활동 교수법의 장점에 대해 논하였으므로 따로 언급하지 않겠지만 수업상황에서 학생들이 보여주는 관심은 그러한 논의를 증명해 주었다.



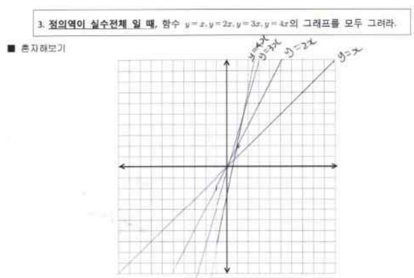
[그림 Ⅳ-15] 기울기가 음수일 때 표식이 있는 분산형 차트를 이용한 그래프



[그림 Ⅳ-16] 눈금 없는 활동지의 학생 답안

여기에서 한 가지 간과하지 말아야 할 것은 대상관점에서의 그래프 표상을 학생들이 어떤 형태로 인지하느냐 하는 것이다. Moschkovich 외(1993)의 논문에서는 교사의 관점에서 그래프의 모양이 익숙하다고 해서 학생들이 같은 관점으로 그래프를 읽는 것은 아니라는 점을 지적하였다. 교사는 그래프를 바라볼 때, 그래프가 원점을 지나고, 정의역이 정수값이므로 점의 형태로 나타나며, 일정한 기울기를 가진다는 사실을 알고 있다. 그러나 학습자는 좌표평면과 그래프의 방향성만을 인식할 뿐 그것의 세부적인 의미까지 받아들였다고 볼 수 없다.

교사는 그래프를 작성할 때 좌표평면을 이루는 두 축이 각각 정의역과 공역을 표현하기 위하여 표현된 x축과 y축으로 이루어져 있다는 사실을 알고 있고, 눈금이 정수 값을 표현한다는 것을 당연하게 여긴다. 그러나 학생들은 활동지에 그래프를 표현할 때 교사가 당연시 한 것과 같은 맥락에서 x축과 y축의 의미를 알고 눈금이 나타내는 값에 대한 표식을 생략한 것이 아니다. 학생들은 앞서 [그림 Ⅳ-12]와 [그림 Ⅳ-13]에서처럼 점이나 직선으로 그려진 그래프의 모양에만 집중한다. 따라서 수업 중 학생이 눈금 없는 활동지에 표현한 그래프([그림 Ⅳ-16])를 살펴보면 축 이름과 축 값에 대한 어떠한 표식도 없이 단지 직선만으로 그래프를 표현하였다. 또 학습자는 화면에서 보았던 눈금은 전혀 고려하지 않고 단지 기울기만 다른 직선으로 표시하였다. 따라서 교사는 학습자가 화면에 제시된 표상에 대해 보다 자세히 관찰할 수 있도록 학습상황을 유도해야 할 필요가 있다.

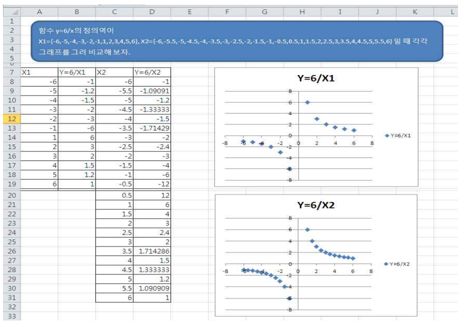


[그림 Ⅳ-17] C학생이 그린 기울기가 다른 $y=ax$ 그래프

C학생이 작성한 [그림 Ⅳ-17]의 활동지를 살펴보자. C학생은 화면에서 강조되어 색상으로 표현된 그래프의 기울기가'다르다'라는 것은 정확하게 인식하고 있었지만, 그래프가 모두 원점을 지난다는 사실을 바르게 인식하지 못했다. 그래프의 색상과 기울기에 치중한 나머지 $y=ax$의 형태의

그래프는 x값의 변화에 대응하는 y값의 값들을 표현한 표상이므로 반드시 원점을 지난다는 사실, 즉, 과정관점과의 연결에 실수를 범하였다. 모든 학생들이 이러한 실수를 한 것은 아니지만, 교수-학습과정에서 교사는 학습자가 과정관점과 대상관점의 어느 한쪽에 치중하지 않고 표상을 이해할 수 있도록 하는 세심한 지도를 해야 한다.

한편, 정의역이 0을 제외한 실수전체 일 때, 분수함수의 그래프를 작성하는 교수-학습 과정을 살펴보자. 곡선의 형태가 잘 드러나도록 [그림 Ⅳ-18]과 같이 정의역 원소들의 간격을 조절하여 2개의 그래프를 각각 그려보도록 하였다.



[그림 Ⅳ-18] 엑셀로 표현한 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프

교사 : 자동채우기 기능을 이용하여 대응표를 작성하면 간단하죠?

학생 B : 에러가 생겼어요.

교사 : 무슨 에러입니까?

학생 D : x가 0일 때 y값이 에러입니다.

교사 : 왜 일까요?

학생 A : x는 0일 될 수 없으니까요.

교사 : 예, x가 0이 되면 분수식이 성립하지 않죠? 그래서 0이 있는 행은 삭제해 주세요.

학생 C : 그래프 모양이 이상해요.

교사 : 어디보자. '곡선 및 표식이 있는 분산형' 그래프를 그렸구나. 정의역 x값에서 0을 제외하려면 x값이 0일 때 선이 연결되면 안되지? 그러니까 꼭 '표식만 있는 분산형' 그래프를 그려야 한단다.

학생 C : 아하~ 잘 그려졌어요. 그렇지만 x가 0일 때를 제외하고 나머지 점들을 연결하면 곡선이 되겠네요? 곡선 그래프는 그리기도 어렵고 이해하기도 어려웠는데, 이렇게 그리니까 쉬워서 참 좋아요.

교사 : 그래? 그럼 이 곡선은 x축이나 y축과 만날까?

학생 C : 만나지 않아요.

교사 : x가 커지면 y는 커질까? 작아질까?

학생 C : 작아져요.

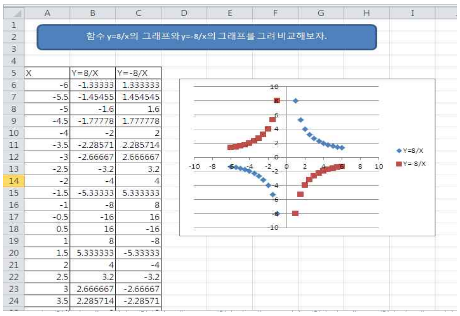
교사 : 여러분, x가 커지면 y는 작아진다는 것은 정비례와 반비례 중에서 뭘까요?

학생 D : 반비례입니다.

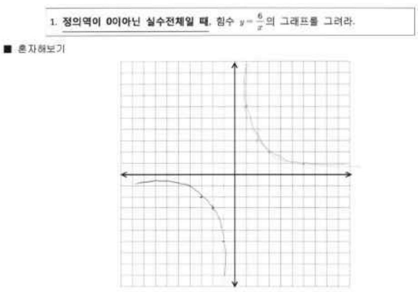
위 대화를 살펴보면, 대응표를 작성하는 과정에서 엑셀의 에러 현상을 겪음으로 인해 분수함수의 정의역이 0을 포함할 수 없다는 사실이 자연스럽게 강조되었음을 알 수 있다. 학생들은 $y=\dfrac{a}{x}$형태의 분수함수에서 정의역이 0을 포함할 수 없다는 사실을 대수식의 과정관점에서 이미 알고 있었으나 대응표의 작성에서 정의역의 범위에서 0을 제외하여야 한다는 점을 잊고 그래프를 작성하였다. 그러나, 엑셀이 에러코드를 표시하는 상황을 경험함으로서 대수식의 표현에서도 '$x \neq 0$'이 반드시 표기되어야 한다는 사실을 알게 되었다. 또, 엑셀을 활용한 수업이 수작업으로 그리기 힘든 곡선 형태의 분수함수 그래프를 손쉽고 정확하게 그릴 수 있어 학생들의 흥미와 이해를 높일 수 있었고, 자신이 그린 그래프를 관찰하면서 정의역이 실수전체로 확대되었을 때의 그래프 모양에 대해 연상해 낼 수 있다는 사실을 확인할 수 있었다.

또한, [그림 Ⅳ-19]와 같이 함수$y=\dfrac{8}{x}$와 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프를 비교해 보는 과정을 통해 $y=\dfrac{a}{x}$에서 a가 양수일 때와 음수일 때 그래프 개

형을 익히도록 하였다. 컴퓨터를 이용한 활동 후에 학생들은 활동지에 분수함수의 개형을 그려 넣었는데, [그림 Ⅳ-20]을 보면 정의역이 정수일 때 그래프를 그리고 나서 부드러운 곡선으로 이어서 분수함수의 그래프를 그린 것을 볼 수 있다.



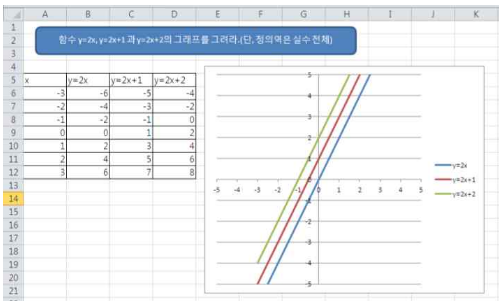
[그림 Ⅳ-19] $y=\dfrac{8}{x}$와 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프 비교



[그림 Ⅳ-20] 활동지에 그린 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프

다. 3차시 : 일차함수의 그래프

3차시는 기울기와 y절편이 다른 일차함수를 그래프로 표현하는 것을 목표로 하였다. 다음과 같이 y절편이 다른 여러 개의 그래프를 한 화면에 그려 살펴보면, 그래프의 위치관계를 보다 명확히 구분할 수 있다. [그림 Ⅳ-21]은 함수 $y=2x, y=2x+1, y=2x+2$의 그래프를 한 번에 그려서 그래프의 위치관계를 알아보는 엑셀 화면이다.



[그림 Ⅳ-21] $y=2x, y=2x+1, y=2x+2$의 그래프

교사 : $y=2x+1$의 그래프는 무슨 색입니까?

학생 B : 빨강색입니다.

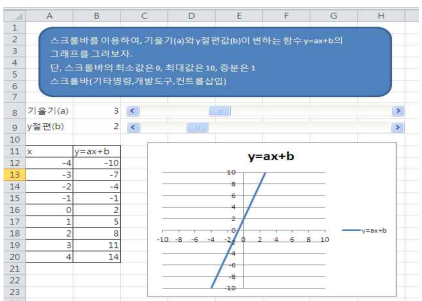
교사 : 그럼 $y=2x$의 그래프와 기울기가 같고, 무엇이 다릅니까?

학생 B : y축 방향으로 1만큼 이동한 모양입니다.

교사 : 예, 그렇습니다. $y=2x+2$의 그래프도 y축 방향으로 2만큼 이동했죠?

학생 B: 예 그렇습니다.

학생들은 자신들이 그린 그래프를 관찰하여 그래프의 위치관계를 쉽게 확인해 볼 수 있었다. 엑셀에서도 GSP와 같은 기하 프로그램을 사용하여 학습할 때와 마찬가지로 x의 계수값 변화에 따라 기울기가 변하는 과정, 또는 b값(y절편)의 변화에 따라 직선의 위치가 변하는 과정도 스크롤바를 이용하여 다이나믹한 변화를 표현하고, 관찰할 수 있다.

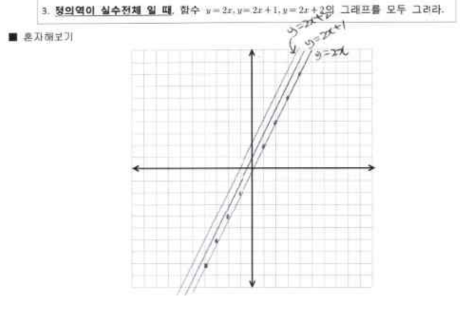


[그림 Ⅳ-22] 엑셀에서 스크롤바를 이용하여 그린 $y=ax+b$ 그래프

따라서 [그림 Ⅳ-22]와 같이 스크롤바를 삽입하여 기울기의 변화에 따라 그래프의 모양이 변하는 과정을 살펴보게 하고, y절편의 변화에 따라 그래프의 위치가 변하는 과정을 살펴보는 것도 도움이 된다.

학생들: (스크롤바를 이리저리 움직여 보면서 매우 신기해하고 있음)와~
교사: a값이 커지면 그래프가 어떻게 변하죠?
학생들 : 점점 세워져요.(기울기가 커져요)
교사 : 그럼 b값이 커지면?
학생들 : 그래프가 위로 올라가요.
교사 : y절편이 커지는 거죠?
학생들 :네~

위 학습상황에서 학생들은 처음 접하는 스크롤바를 사용하는 데에도 두려움이나 어려움 없었고, 마치 움직이는 것처럼 표현되는 그래프를 관찰하는 것은 그래프를 겹쳐서 살펴보는 방법과는 다른 관점에서 그래프를 관찰 할 수 있어 학습상황의 몰입도가 매우 컸다. 학생들은 결과를 빨리 확인하고 싶어서 서둘러 완성하려는 태도를 보였으며, 그래프가 완성된 이후에는 스크롤바를 이리저리 드래그 해 보면서 매우 신기해하였다. 처음 엑셀로 수업을 시작할 때의 상황에 비해 매우 진전된 적극적인 태도를 보이며 대답하는 목소리에도 자신감이 붙었다.



[그림 Ⅳ-23] C학생이 그린
$y=2x, y=2x+1, y=2x+2$의 그래프

[그림 Ⅳ-23]은 C학생이 활동지에 직접 그린 그래프이다. 그림 Ⅳ-19에서는 원점을 지나는 직선들을 정확하게 표현하지 못했지만, 이번에는 y절편까지 정확하게 그려낸 것을 볼 수 있다.

3. 사후평가지의 결과 분석

가. 형성평가 분석

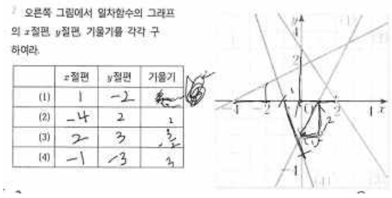
형성평가1의 문항들은 그래프를 과정관점에서 이해하여 표와 연결할 수 있는지를 묻는 문제인데, 그래프와 표, 대수식의 관계에 대하여 잘 이해하고 있음을 알 수 있었다. 단, 분수함수 $y=\frac{12}{x}$의 표현을 $y=12/x$와 같이 표기하는 실수를 하는 학생이 있어, 주의를 필요로 했다.

형성평가 2의 '문제1: 다음 중 일차함수인 것을 모두 골라라'에 대하여 학생들은 대수식에 대한 과정관점의 풀이 없이 대상관점에서 대수식을 바라보고, 일차함수인 것과 아닌 것을 구분하여 답했다. 정답은 (1)$y=3x-1$, (2)$y=1-x$ 번이었는데, (3)$y=-\frac{4}{x}$의 분수함수를 일차함수라고 생각한 학생이 1명 있었으며 (3)을 골랐다가 지워버린 학생이 2명 있었다.

교사 : (3)을 일차함수라고 생각한 이유가 뭘까요?
학생 A : x^2이 아니라 x니까요.
교사: (3)을 그래프로 그리면 어떤 모양이 될까?
학생 A : 반비례 그래프요. 아하~ 모양이 다르구나. 맞아요 이건 곡선으로 그려지는 분수함수였어요. 깜박했어요.

일부 학생의 경우 대상관점에서 대수식과 그래프를 연결짓지 못하여 오답을 고르는 실수를 하였다. 그러나 수업 시간의 경험을 떠올릴 수 있도록 유도하자 쉽게 이해했다.

형성평가 2의 ‘문제2’는 4개의 일차함수의 그래프를 보고 x절편과, y절편 및 기울기를 찾는 문제이다. 이 문제에서 x절편이나 y절편은 대상관점에서 쉽게 찾을 수 있으며 그래프의 기울기(m)는 직선위의 두 점(x_1, y_1)과 (x_2, y_2)를 찾아서 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$을 계산하는 과정관점에서 해결해야 하는 문제로서 학생들에게는 상대적으로 어려웠지만, ①, ②, ③번은 다섯 명 모두 맞추었고 ④번 문제에서 3명이 y절편의 부호를 틀렸고, 기울기를 틀린 학생은 한명이었다. 기울기를 틀린 학생 B의 답안에서 유추할 때 학생은 계산을 통해서 기울기를 구하다 틀린 것으로 파악되는데 ([그림 Ⅳ-24]) 대상관점에서 그래프를 바라봤다면 기울기가 음수이어야 한다는 것을 알아차렸을 것이다. 따라서 과정 관점과 대상관점의 신속한 전환이 일어나서 상호 보완하도록 지도하는 것이 필요하다.



[그림 Ⅳ-24] 형성평가 2-2의 답지(학생 B)

형성평가2의 ‘문제3: 대수식 (1) $y = 1 - 4x$, (2)$y = \frac{2}{3}x - 2$ 에서 각각 x절편, y절편 및 기울기를 구하라’는 대수식에서 y절편과 기울기는 대상관점에서 바로 구할 수 있으므로 학생들은 비교적 쉽게 답을 구했다. 그러나, (1)의 경우 학생 A, B는 <표 Ⅳ-1>과 같이 $y = -4x + 1$과 같이 표기하지 않고 $y = 1 - 4x$와 같이 1차 항과 상수항의 순서가 다르게 표현되어 있는 것을 잘못 인식하여 기울기와 y절편 값을 바꾸어 답하였다. 이들 학생의 경우는 기울기를 x의 계수로 보지 않고 ‘=’ 뒤에 먼저 쓰인 항으로 위치적인 인식을 하였다. x절편의 경우 A학생은 그래프 표상에서 y값이 0일 때 직선이 x축과 만나게 된다는 사실을 근거로 과정관점으로의 바람직한 변환을 생각해 냈고, x값을 계산하여 정확한 답을 구하였으나 나머지 학생들은 x절편을 계산하지 못했다. 학생들은 엑셀을 통해 그래프를 작성하고 관찰하는 과정에서 $y = ax$형태의 그래프가 원점을 지나고, $y = ax + m$의 그래프는 y축 방향으로 m만큼 평행 이동한 그래프이므로 m이 y절편이 된다는 것은 이해하였으나, 대수식에서 y절편이 $x = 0$일 때의 y값이며, 마찬가지로 x절편이 $y = 0$일 때의 x값이 된다는 것은 알지 못했다.

<표 Ⅳ-1> 형성평가 2-3에 대한 학생 반응

학생 A

	x절편	y절편	기울기
(1)	$\frac{1}{4}$	-4	1
(2)	3	-2	$\frac{2}{3}$

학생 B

	x절편	y절편	기울기
(1)	-4	-4	1
(2)	-3	-2	$\frac{2}{3}$

학생 C

	x절편	y절편	기울기
(1)	-4	1	-4
(2)	-3	-2	$\frac{2}{3}$

형성평가2의 ‘문제4: 두 일차함수 $y = \frac{4}{3}x + 2$, $y = ax + 2$의 그래프가 평행할 때 a의 값을 구하여라’는 일차함수 그래프의 평행에 대한 문제로 대상관점에서 바라본 그래프의 표상과 대상관점의 대수식을 연관지어 해결하는 문제인데, 학생들은 모두 정답을 하였다. ‘문제4’의 경우에서 볼

때, 평행한 그래프의 표상은 엑셀을 활용한 실험 수업에서 기울기가 같은 일차함수의 y절편의 변화과정을 살펴보면서 학생들에게 충분히 내면화된 것으로 보인다.

나. 총괄평가지 분석

총괄평가 실시 결과는 <표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>과 같다. 사전 진단평가에서 일차함수식을 찾는 문항에 대해 A학생만 정답이었고, 대수식의 계산에서 3명, 그래프를 그리는 문제에 대해서는 정답자가 아무도 없었던 것에 비교하면, 총괄평가지의 결과는 학습효과가 뚜렷한 것으로 평가할 수 있다. 특히 A, B 학생은 총괄평가에서 94, 81%의 높은 성취율을 보였고 C, D, E 학생도 약 70%의 성취율로 본 연구수업의 함수와 그래프에 대한 학습이 학생들에게 긍정적인 영향을 미친것으로 판단할 수 있다.

<표 Ⅳ-2> 총괄평가 성적

학생 구분	A 학생	B 학생	C 학생	D 학생	E 학생
정답 개수	15개	13개	10개	11개	11개
정답 성취율	94%	81%	63%	69%	69%

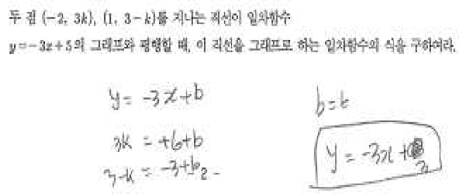
한 가지 관점에서 한 개의 표상을 사용한(대상관점에서 대수식을 사용하거나, 대상관점에서 그래프를 또는 과정관점에서 대수식을 사용하는 문항) 4번, 7번, 8번, 9번, 11번, 12번, 13번 문항의 결과는 매우 우수하였으며(정답률 100%), 대상관점에서 대수식과 그래프간의 전환을 평가한 1번, 6번, 10번, 16번 문항의 결과도 매우 우수했다(정답률 90%). 대상관점과 과정관점의 전환을 필요로 하는 문항 2번, 3번, 5번, 14번, 15번 문항을 학생들이 어려워하였고(정답률 32%), 진단평가시 그래프에 손도대지 못했던 학생들이 x절편과 y

<표 Ⅳ-3> 총괄평가 문항별 정답자 수

분석 기준		번호	문제 유형	정답자수
한 가지 관점 한 가지 표상 (정답률: 100%)	대상관점, 대수식	4	일차함수식 고르기	5
	대상관점, 그래프	7	그래프를 보고, x절편과 y절편 구하기	5
	대상관점, 대수식	8	일차함수식 고르기	5
	대상관점, 대수식	9	일차함수식에서 기울기값 구하기	5
	대상관점, 그래프	11	일차함수의 평행이동 그래프 위의 한 점의 좌표 구하기	5
	대상관점, 대수식	12	함수식의 x절편과 y절편 구하기	5
	대상관점, 그래프	13	함수식에서 기울기를 구하는 원리 알기	5
대상관점에서 대수식과 그래프 전환 (정답률: 90%)		1	일차함수 및 분수함수식과 그래프 짝짓기	5
		6	일차함수의 평행이동 값 구하기	5
		10	일차함수의 평행이동 그래프 그리기	3
		16	그래프를 보고 일차함수식 구하기	5
대상관점(대수식)과 과정관점(그래프) 간의 전환 (정답률: 32%)		2	일차함수 및 분수함수식을 보고 그래프 그리기	1
		3	원점을 지나는 직선과 한 점이 나타내는 함수식 구하기	3
		5	일차함수식을 보고 대응표를 작성하고, 그래프 그리기	1
		14	평행한 직선의 식과 직선위의 두 점을 알 때 일차함수식 구하기	1
		15	일차함수식을 보고 그래프 그리기	2

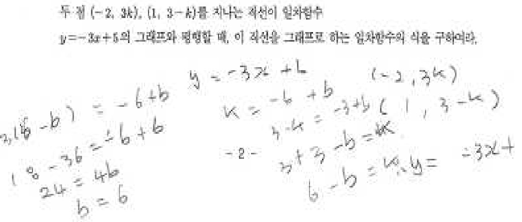
절편을 정확히 표현하지는 못했지만(틀린 것으로 채점) 그래프의 기울기를 비슷하게 그려놓은 것은 고무적인 일이라고 할 수 있다. 또한 14번의 경우에도 학생들의 풀이를 살펴보면 대수식의 계산을 하지 못해서 답을 적지는 못했지만 문제 풀이를 위한 구상에서 관점과 표상 간에 전환은 이루어 진 것을 볼 수 있다([그림 Ⅳ-25, 26]).

한편, 문제3(원점을 지나는 직선이 점$(1,-3)$을 지날 때, 이 그래프가 나타내는 함수의 식을 구하라.)을 해결하는 방법은 우선 대상관점에서 원점을 지나는 직선을 떠올리고, $y=ax$형태의 대수식을 떠올려야 한다. 이 직선이 점$(1,-3)$을 지나므로 대수식을 과정관점으로 전환하여 y값을 -3으로 x값에 1을 대입하여 기울기 a를 찾아서 $y=-3x$라는 대수식으로 표현해야 한다. 또 다른 방법으로는 원점과 점$(1,-3)$을 지나는 직선의 그래프를 과정관점에서 그려본 후, 대수식에서 대상과점으로 a가 기울기라는 사실을 알고, 과정관점으로 구한 기울기를 이용하여 함수식을 완성하는 방법이 있다. 이 2가지 방법 모두 그래프와 대수식 표상 간에 대상관점과 과정관점을 오가는 복잡한 전환이 자연스럽게 이루어져야 하는 문제였지만, 절반이상이 문제를 해결하였고, 문제를 해결한 학생들은 엑셀을 사용한 수업에서 그래프의 표상과 대수식 표상 간의 연결이 학습되어 이런 유형의 문제를 해결할 수 있게 되었다.



[그림 Ⅳ-25] 총괄평가 문제14의 학생A의 답안

총괄평가 문항분석을 통하여 본 실험수업의 결과 학생들은 식과 그래프 간의 표상 전환이 유연해지는 긍정적인 결과를 얻었고, 과정과 대상 관점의 전환 효과는 미약했지만 발전 가능성은 보여주었다고 판단된다.



[그림 Ⅳ-26] 총괄평가 문제14의 학생B의 답안

다. 설문지 분석

실험에 참가한 학생들에게 엑셀을 활용한 수학 수업을 하면서 느꼈던 소감을 적어보게 하였다. 학생들은 ‘엑셀을 사용하여 수학을 배우니 그래프도 정확하게 나오고 … 더욱 머리 속에 들어와 배우기가 쉬웠습니다. … 함수와 그래프를 정확히 알 수 있어서 좋았고 쉽게 이해가고 재밌게 수업을 할 수 있게 되었습니다.’ ‘수업시간 때 배웠던 함수는 어렵고 직접 풀기가 어려웠는데 수업시간에 자주 활용하던 엑셀로 함수를 풀 수 있다는 점이 놀라웠다. …손으로 푸는 것보다 오히려 더 쉽고 이해가 잘되었다.’ ‘수업시간에 배웠던 함수와 그래프는 어려웠는데 엑셀로 함수를 풀었더니 쉽고 재미있고 손으로 풀 때보다 쉽게 이해가 잘 되었다.’ ‘ … 엑셀을 통해 수학을 할 수 있음(을 알게 되었고)과 이젠 엑셀하면서 내 실력도 늘여난 것 같아 기분이 좋았다.’ ‘...함수는 함수(그래프)를 그리기 위해 만들어진 프로그램에서만 할 수 있는건지 알고 있었는데 이번 수업을 통해 자주 사용하는 엑셀을 활용하여 함수를 그리는 방법을 알게 되었다. 그로 인해 평소에 잘 하지 못했던 함수를 더 쉽게 이해할 수 있게 되

어 매우 좋았다. …'라고 소감문을 작성하였다. 학생들의 의견을 분석해 보면 '엑셀로 함수를 배울 수 있다는 사실이 놀랍고 재미있다.' '손으로 풀 때보다 쉽고 이해가 잘 되었다.''함수의 이해가 잘 되고 엑셀을 더 활용하고 싶다.'라는 긍정적 대답이 많았다. 따라서 엑셀을 활용한 수업이 학생들에게 재미있고 흥미로운 수업 참여 의지를 북돋우고, 함수와 그래프를 쉽게 이해시킬 수 있다는 결론을 얻을 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 특성화 고등학교 수학부진 학생들에게 엑셀을 활용한 함수의 그래프에 대한 교육이 함수의 과정-대상 관점과 다양한 표상 간의 전환에 미치는 영향을 분석하는 것이었다. 설문지와 진단평가를 통한 사전조사에서 중학교 수준의 함수학습에 문제점이 발견되었고, 수학의 특성상 중학교 수준의 학습이 부진한 상태에서 고등학교 과정의 학습이 이루어지기 어렵기 때문에 수학부진 학생들을 대상으로 중학교 수준의 함수 $y = ax\ (a \neq 0)$와 $y = \dfrac{a}{x}\ (a \neq 0, x \neq 0)$의 그래프, 일차함수의 그래프를 엑셀을 이용해서 지도하였다. 특성화 고등학교 학생들은 다른 교과 수업에서 엑셀을 학습한 경험이 있으므로 수업에서 엑셀을 사용하는 부담이 적고, 엑셀의 다양한 표상능력은 함수의 과정 대상 관점의 전환에도 도움을 줄 것으로 판단되어 사용하게 되었다. 학생들이 실험 후 소감문에서 보여준 수업에 갖는 관심과 흥미를 볼 때 엑셀의 활용은 동기유발 측면에서 매우 효과적이었다고 볼 수 있다. 사전 진단평가에서 그래프를 그리는 문제에 대해 전혀 손을 대지 못하였던 학생들이 기울기와 y절편을 활용하여 그래프를 그리고, 대수식을 보고 그래프를 찾아낼 수 있게 되었으므로 엑셀을 활용한 수업이 함수와 그래프의 학습에도 매우 효과적이며 함수의 과정-대상관점이 형성에 도움이 된 것으로 볼 수 있다. 본 연구의 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 엑셀의 활용은 일차함수와 분수함수의 그래프를 과정관점에서 이해하는데 효과적이다. 둘째, 엑셀은 기울기가 다른 여러 개의 그래프를 하나의 좌표평면위에 겹쳐서 표현할 수 있으므로 일차함수의 식과 그래프의 기울기와 평행이동의 의 관계의 학습에 효과적이다. 즉, 대상관점에서 식과 그래프의 전환이 가능하게 한다. 셋째, 엑셀을 사용하여 함수의 대응표와 그래프를 작성하는 교수-학습은 그래프의 이미지적 심상을 학습자에게 내면화 시킬 수 있다. 넷째, 학생들에게 함수의 과정-대상관점 형성과 표상 간의 유연한 전환에 도움을 준다. 다섯째, 엑셀의 사용경험이 있는 특성화 고등학교 학생들의 경우 엑셀을 활용한 함수 단원의 수업이 학생들의 자신감과 흥미를 높이므로 정의적 측면에서 매우 효과적이다. 여섯째, 부진아 지도와 관련하여, 수학적 개념의 계통성(누적적 특성)을 고려하여 학생이 부진을 겪는 근본 개념의 학습을 통해 학생들이 자신감을 갖도록 할 수 있다.

한편, 엑셀을 이용한 수업에서 교사가 주의해서 지도하지 않으면 오히려 학생들에게 혼란을 유발 할 수 있는 측면도 발견되었으므로, 이러한 한계를 고려해서 지도해야 할 것이다. 본 연구과정에서 드러났던 엑셀 활용시 주의점을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 엑셀에서 분산형으로 그린 그래프의 모양이 두 수직선이 아니라 두 선분이 교차된 모양임에 유의한다. 둘째, 그래프의 가로와 세로 눈금의 비율이 다른 경우는 '축 옵션'에서 최대값과 최소값을 자동으로 한 경우에 그래프의 크기에 따라 눈금의 크기가 달라진 것인데, 이 경우 그래프의 모양에 대해 오개념을 가질 수 있기

때문에 축-축옵션을 선택하고 최대값과 최소값을 지정하고 그래프의 크기를 조절하여 가로와 세로 축의 눈금의 비율이 같도록 해주어야 한다. 셋째, 엑셀화면에서 분수함수 $y=\frac{a}{x}$를 y=a/x로 적는 경우 기호에 대한 혼란을 줄 수 있다. 엑셀2010에서는 삽입-개체-Microsoft Equation 3.0의 수식편집기를 이용하면 분수함수식을 바르게 적을 수 있다. 더 낮은 버전에서 수식편집기가 깔려있지 않는 경우는 설치 CD를 이용하면 된다. 넷째, 엑셀에서 표를 그리고 표에 대한 분산형 그래프를 그렸을 때 축 이름이 자동 생성되지 않는데, 이러한 점이 축 이름의 중요성을 간과하게 할 수도 있다고 생각된다. 다섯째, 본 연구에서는 좌표평면만 그려진 활동지를 제공하고 학생이 컴퓨터에서 한 활동을 적게 한 후 교사와 대화를 하는 형식의 수업이 이루어졌는데, 학생 수가 많은 경우에는 활동지에 학생활동을 이끌 수 있는 질문의 목록을 포함하여 제공하는 것이 더 좋을 것으로 생각된다.

본 실험에서 보여준 엑셀 활용의 긍정적인 결과는 특성화 고교생 뿐 아니라 일반적인 수학부진 학생들이 수학에 대한 흥미를 되찾고 이후의 교육과정을 이수할 수 있도록 도움을 줄 수 있는 방안의 하나로 생각되며, 또한 함수의 그래프를 배우는 중학교 학생들에게도 적용될 수 있는 방법이라고 생각된다.

참 고 문 헌

변희현 & 주미경(2013). **우리나라 중학생의 함수 개념화 특성 1)**. 수학교육학연구, 22(3), 353-370.

이종희 & 김선희(2001). **수학적 의사소통**. 서울: 교우사

이준열(2011a). **중학 수학 1**. 서울: 천재교육.

(2011b). **중학 수학 2**. 서울: 천재교육.

(2011c). **중학 수학 3**. 서울: 천재교육.

임소라(2012). **특성화 고등학교 수학교육의 실태 및 개선방안**. 인하대학교 교육대학원 석사학위 논문.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울:서울대학교 출판부.

장혜원(1997). **수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구-표상 모델 개발을 중심으로-**. 서울대학교 박사학위논문.

최용준(2011a). **중학 수학 1**. 서울: 천재교육.

(2011b). **중학 수학 2**. 서울: 천재교육.

(2011c). **중학 수학 3**. 서울: 천재교육.

(2011d). **고등 수학 1**. 서울: 천재교육.

허혜자(2005). **스프레드쉬트가 수학교육에서 발휘할 수 있는 역량에 대한 고찰**. 관동대학교 교육과학연구소논문집, 제 11집(vol.1).

Knuth, E. J. (2000). Understanding Connections between Equations and Graphs. *The Mathematics Teacher, 93*(1), 48-53. NCTM.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H. & Acavi, A. (1993). Aspects of inderstanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter(Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions*(pp.60~100). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations, Publishers.

NCTM (1992). **수학교육과정 평가의 새로운 방향**. (구광조, 오병승, 류희찬 역). 서울:경문사. (영어 원작은 1989년 출판)

NCTM (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. (류희찬외 5인 역). 서울:경문사. (영어원작은 2000년 출판)

Selden, A & Selden, J.(1992) Research perspectives on conceptions of functions: Summary and overview. In E. Dubinsky & G. Harel(Eds). The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes and Report Series. Washington DC: Mathimatical Association of America.

Sfard, A (1991) On the dual nature of mathematical conception : Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, pp.1~36.

Sfard, A (1992). Operational origins of mathematical objects and the Quandary of Reification-The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel(Eds). The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes and Report Series. Washington DC: Mathimatical Association of America.

Sutherland, R. & Rojano, T.(1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, pp353~383.

Tall, D(2003). **고등수학적 사고**. (류희찬 조완영 김인수 역). 서울:경문사. (영어 원작은 1991년 출판)

Common core state standards: CCSS, http://www.corestandards.org

A Study on Formation of the Process-Object Perspective of Function Using Excel to Specialized High School Math Underachievers

Choi, Jiyeon (Donghae Commercial High School)
Heo, Hye Ja (Kwondong Univ.)

The purpose of this study is to analyze how the teaching activities which used EXCEL influence the specialized high school underachieved students. They have difficulties in making use of various representations for better understanding of function.

EXCEL is helpful for learning function because it enables the students to use real life materials in math learning as well as formulates Tabular, Algebraic and Graphical which represent function. Furthermore, the students in specialized high school also have the experience of using EXCEL while studying other subjects. For that reason they have no burdens and fears on using EXCEL in learning activities. Utilizing EXCEL in the classroom gives an expectation that it helps to have interests on studying function and prepare for the next learning in the end. Research classes were conducted in a group of five students who have different hopes of career and a variety of mathematical interests. Though the students couldn't transfer Algebraic to Graphical in the diagnostic evaluation, they could resolve the problem of connections between Graphical, Tabular and Algebraic in the process perspectives, and could also express graphical representation by linking object perspectives with process perspectives. Therefore, they solved the connection problem of Tabular, Algebraic and Graphical in the object perspectives. As a result, the students could make transitions between Algebraic and Graphical in object perspectives through the classes applying EXCEL. Consequently, teaching the students with underachievement utilizing EXCEL enables them to recover their interests on math and it helps them to complete their following curriculum.

* key Words : process-object perspective(과정 대상 관점), Excel(엑셀), function(함수), representation (표상), Specialized High School(특성화 고등학교)

논문접수 : 2013. 3. 30
논문수정 : 2013. 4. 26
심사완료 : 2013. 5. 21