韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2013. 8. 제 16권, 제 2호, 93-106

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Aug. 2013, Vol. 16, No. 2, 93-106

분수 나눗셈의 지도에서 단위비율 결정 맥락의 실제 적용을 위한 기초 연구

조 용 진 (개화초등학교)
홍 갑 주 (부산교육대학교)†

분수 나눗셈 알고리즘에 대한 학생들의 어려움 중 상당 부분은 현행 교과서의 알고리즘 유도방법 자체에 기인한 것으로 보인다. 본 연구에서는 분수 나눗셈 알고리즘을 유도하는 대안적 방법들 중 단위비율 결정 맥락의 교육적 가치를 분석하고 학생들에 대한 설문과 면담을 통해 그 실제 도입의 가능성을 확인하였다. 또한 이 결과를 바탕으로 분수 나눗셈의 지도 방법 및 교육과정 구성에 대한 대안적 방법을 제안하였다.

Ⅰ. 서론

학생들이 분수 나눗셈 알고리즘을 이해하지 않은 상태로 기계적으로 적용하는 문제는 여러 연구에서 지적되었다. Van de Walle(2004)에 의하면 분수의 나눗셈에서 제수를 뒤집어서 곱하는 방법은 초등학생이 학교 수학에서 가장 이해할 수 없는 규칙들 중의 하나이다. Ma, L.(2002)에 의하면 분수 나눗셈은 초등학교 수학의 수와 연산 영역의 최상위의 내용으로, 학생들 뿐 아니라 교사들도 분수 나눗셈의 의미와 관련하여 적절한 개념적 이해에 도달하지 못하는 경우가 적지 않다.

임재훈·김수미·박교식(2005)은 학생들이 ‘뒤집어서 곱하는’ 이유를 모르거나 제수의 역수의 의미를 모르는 상황을 주목하고, 이의 개선을 위해 분수 나눗셈 알고리즘의 대안적인 도입 맥락들을 검토하였다. 이 연구에 의하면 도입 맥락들 중에서도 북한, 중국, 일본 교과서에서 이용하는 ‘단위비율 결정 맥락’은 제수가 피제수보다 커도 상황이 어색하지 않고, 제수의 역수의 의미가 분명해진다는 등의 장점을 가지고 있다.

* 접수일(2013년 8월 2일), 게재확정일(2013년 8월 26일)
* ZDM분류 : C32
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 단위비율 결정 맥락, 분수 나눗셈
* 본 연구는 조용진의 부산교육대학교 석사학위논문을 수정・보완한 것임.
† 교신저자

그러나 현재의 2007 개정 교육과정 교과서에서도 그 맥락이 도입되지는 않았으며, 제수의 역수의 의미와 관련한 큰 개선점도 찾기 힘들다. 방정숙・이지영(2009)이 지적하였듯이, 분수의 나눗셈 계산 원리를 설명하는 다양한 문장제 상황이 있음에도, 우리나라 교과서는 등분제와 포함제의 상황으로만 시작하여 절차적으로 알고리즘을 지도하고 있다.

물론 교과서에서 어떤 수학적 내용의 도입 방법의 큰 틀을 바꾸거나 완전히 새로운 내용을 추가하는 것은 부담이 따르는 일이다. 그러나 실증적 검토를 통해 단위비율 결정 맥락의 도입 가능성을 확인하고, 실제 수업에서 예상되는 어려움을 찾아 보완하는 과정을 거친다면 이러한 부담은 완화될 수 있을 것이다.

본 연구에서는 우선 단위비율 결정 맥락의 교육적 가치를 분석하고, 실제 수업에 도입할 때 어떤 어려움이 있을지 전망할 것이다. 이어서 그 결과를 바탕으로 학생들과의 면담을 실시하여 학생들의 이해 과정과 단위비율 결정 맥락의 도입 가능성을 조사할 것이다. 마지막으로 이상의 결과를 종합하여 수업 및 교재 구성에의 시사점을 얻을 것이다.

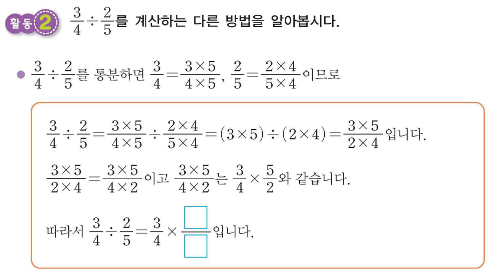
Ⅱ. 단위비율 결정 맥락의 교육적 고찰

1. 현행 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법

현행 2007 개정 교육과정 교과서에서 분수 나눗셈의 전체 전개과정은 총 두 학기에 걸쳐 매우 세분화된 단계로 제시되고 있다. 또한 전체 소요 차시도 상당히 많은 편이다. 우선, 수학 5-1에서 배우는 약수와 배수, 약분과 통분, 분수의 곱셈은 분수 나눗셈을 위한 직접적 선행지식이 된다. 수학 5-2에서는 제수가 자연수인 분수의 나눗셈을 배우며(교육과학기술부, 2011a), 6학

년 1학기에서는 다음과 같은 단계로 일반적인 경우의 분수나눗셈에 이르게 된다(교육과학기술부, 2011b). ①(자연수)÷(단위분수)의 계산, ②분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈, ③분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈, ④(자연수)÷(진분수)의 계산, ⑤대분수의 나눗셈, ⑥분수의 나눗셈 활용.

여기서 ①의 설명에는 동수누감의 방법이 이용된다. ②에서는 동분모인 경우에 (분자)÷(분자) 즉, (자연수)÷(자연수)의 연산으로 답을 구할 수 있음을 확인한다. 분수 나눗셈 알고리즘의 핵심적 설명을 하는 ③에서는 예를 통해, 분수끼리의 나눗셈은 분모가 다른 경우 통분을 통해 분모가 같은 분수끼리의 나눗셈으로 고칠 수 있고, 이렇게 얻어진 식은 몇 차례의 형식적 조작을 통해 결국 분수의 곱셈 형식으로 바꾸어질 수 있다는 사실을 보여준다([그림1]).


활동 2 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 계산하는 다른 방법을 알아봅시다.

- $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 통분하면 $\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}$이므로

$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3\times5}{4\times5}\div\frac{2\times4}{5\times4}=(3\times5)\div(2\times4)=\frac{3\times5}{2\times4}$입니다.

$\frac{3\times5}{2\times4}=\frac{3\times5}{4\times2}$이고 $\frac{3\times5}{4\times2}$는 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$와 같습니다.

따라서 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{\square}{\square}$입니다.

[그림1] 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘 유도과정 (교육과학기술부, 2011b, p.9)

[Fig.1] The derivation of the fractional division algorithm in the textbook(Ministry of Education, 2011b, p.9)

[그림1]에서 보듯, ③단계 전체의 과정은 초등학교의 내용으로서는 상당히 긴 추론의 열이라고 볼 수 있다. 초등 수학 교과서에서 활용되는 추론의 종류와 특징을 분석한 서동엽(2003)의 연구에 의하면, 분수 나눗셈 알고리즘을 유도하고 있는 ③의 설명 방법은 한편으로는 연역추론의 범주에 속하며, 또 한편으로는 한 가지 예를 통해 일반적인 분수의 계산 방법을 지도하고 있다는 점에서 귀납추론이라고 할 수 있다.

학생들이 단계 각각은 쉽게 받아들일 수 있겠지만 그 전체의 과정을 숙지하여 기억하기는 힘들 것으로 보인다. 더욱이, 각 단계에 대해서도, [그림1]의 $\frac{3\times5}{2\times4}=\frac{3\times5}{4\times2}$에서 분모의 2와 4의 교환, 그리고 $\frac{3\times5}{2\times4}$의 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$로의 항의 분해와 같은 과정은 수학적으로 옳지만 분수의 실제적 의미와는 무관한 식의 형식적 조작으로서, 초등학생들에게 의미 있게 전달되기는 힘들 것이다. 결국, 학생들은 이유를 모르는 채 각 단계를 따라가다가 갑자기 결론을 마주치게 되는 경험을 가질 수 있을 것이다.

2. 단위비율 결정 맥락의 교육적 가치

임재훈·김수미·박교식(2005)은 분수 관련 여러 연구와 교재들을 분석하여 분수 나눗셈 알고리즘의 의미를 ‘포함제’, ‘단위비율 결정’, ‘비와 측정단위의 세분’, ‘곱셈의 역연산’, ‘분수의 곱셈으로부터의 유추’의 다섯 가지로 정리한 바 있다. 이 연구에서 단위비율 결정 맥락에 대해 설명한 내용은 다음과 같이 요약할 수 있다. 즉, 단위비율 결정 맥락은 북한, 중국, 일본 등의 교과서에서 이용되고 있는데, 북한 교과서의 예를 들면 “순철이네는 꽃밭 48평을 $\frac{1}{3}$시간에 가꾸었습니다. 이렇게 하면 1시간 동안에 몇 평을 가꿀 수 있겠습니까?”라는 문제에 이어 “$\frac{2}{3}$시간에 가꾸었다면 1시간에는 몇 평을 가꾸게 되겠습니까?”와 같은 문제를 통해 도입된다. 북한 교과서는 이 문제에 대해, $\frac{1}{3}$시간에 가꾼 평수를 구하기 위해 2를 나누고, 다시 1시간에 가꾼 것을 구하기 위해 3을 곱하는 과정에서 알고리즘과 답을 이끌어 낸다. 즉, ‘$(48\div2)\times3=\frac{48}{2}\times3=48\times\frac{3}{2}$(평)’이라는 식을 통해 72평이라는 답을 구할 수 있다는 것이다. 이 상황에서 제수의 역수는 ‘줄이고 늘이는 연산자’로서의 의미를 가지게 된다. 현행 교과서의 포함제 맥락과 견주어 볼 때 단위비율 결정 맥락은 제수가 피제수보다 큰 경우 혹은 몫이 분수가 되는 분수 나눗셈의 경우에도 어색하지 않다는 점, 제수의 역수의 의미가 분명하게 된다는 점 등에서 상대적 장점이 있다. 실생활 문제에서 포함제 맥락 이외의 맥락을 제공함으로써 분수 나눗셈의 다양한 측면을 반영한다는 측면에서도

이 맥락의 도입을 고려할 필요가 있다.

이에 덧붙이자면, 단위비율 결정 맥락에서는 동분모 분수끼리의 특수한 경우를 따로 다룰 필요가 없으며, 하나의 설명으로 동분모와 이분모 분수 나눗셈에 대한 일반적인 결론을 유도하게 된다. 이것은 교육적인 측면에서, 그리고 교과서를 구성하는 측면에서 가지는 실질적인 장점이라 할 수 있다. 제수의 역수의 의미 부재가 우리나라의 분수 나눗셈 알고리즘 지도의 중요 문제였음을 고려하면, 적합한 분수 나눗셈 도입 맥락의 선정은 우리나라 분수나눗셈 알고리즘 지도의 문제를 해소하는 단초가 될 것이라고 기대하게 된다.

단위비율 결정 맥락의 이러한 장점에도 불구하고, 현행 2007 개정 교육과정 교과서에서도 이 맥락은 아직 다루어지고 있지 않으며, 박교식・송상헌・임재훈(2004)의 연구에서 보듯 이 맥락에 대한 예비 초등 교사들의 이해도 매우 부족한 실정이다. 단위비율 결정 맥락에 대한 다각도의 현장 연구를 거쳐 교육 과정에의 실제 도입 가능성을 적극적으로 모색할 필요가 있다고 보인다.

3. 실제 도입을 위한 고려사항

단위비율 결정 맥락을 실제 도입할 때 예상되는 어려움은 학생들의 입장에서 주어진 상황이 '왜 나눗셈의 문제인지' 의아해 할 수 있다는 점이다. 이것은 계산식의 유도와는 또 다른 문제이다. 즉, 철수가 $\frac{2}{3}$시간 동안 $10m^2$의 땅을 맨다고 할 때, 1시간동안 매는 땅을 알기 위해서 어떠한 계산을 해야 하는지에 대해서는 학생들이 단위비율 결정 맥락의 설명을 통해 이해하더라도, 정작 이것이 $10 \div \frac{2}{3}$의 문제라는 사실은 받아들이기 어려워할 수 있다. 이는 포함제의 맥락 즉, 10개의 빵을 $\frac{2}{3}$개씩 나누어 먹을 때 몇 명이 먹을 수 있는지를 알기 위해 $10 \div \frac{2}{3}$을 해 주어야 한다는 사실에 비해서도 분명하지 않아 보인다. 이러한 점을 고려하면, 단위비율 결정 맥락을 통한 분수 나눗셈 알고리즘의 지도에 대해서 '이것이 왜 나눗셈의 문제가 되는지', 그리고 '왜 이러한 공식이 나오는지'를 함께 고려해야 할 것이다.

분수의 나눗셈은 그 계산 과정만을 놓고 본다면 분수의 곱셈의 연장으로 볼 수 있다. 따라서 학생들에게는 분모를 통분하는 과정을 거쳐야 되는 분수의 덧셈 계산보다 분수의 나눗셈이 쉬울 수 있다. 그렇기 때문에 분수의 나눗셈 지도에서 중요한 점은 분수의 나눗셈 계산 과정이 아니라 주어진 문제가 분수의 나눗셈 상황임을 아는 것과 분수의 나눗셈 알고리즘이 왜 그렇게 되는가를 의미 있게 이해시키는 것이다. 많은 학생이 선행학습을 받아 알고리즘은 이미 알고 있는 상황에서, '왜 그렇게 되니?'라는 질문으로 시작하여 학생 자신이 계산은 할 수 있으나 사실 그 이유는 알고 있지 못하다는 것을 인식시켜 주는 것에서부터 시작하여 교사와 학생이 함께 그 이유를 찾아가는 수업이 되는 것이 바람직할 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구에서는 단위비율 결정 맥락에 대한 학생들의 이해 과정과 어려움을 파악하고 실제적인 지도 방법을 모색하기 위한 두 차례의 임상적 면담(clinical interview)[2)]을 2013년 3월에 실시하였다. 이를 위해, 앞서 2012년 12월에는 분수 나눗셈에 대한 학생들의 이해 상태를 파악하고 단위비율 결정 맥락의 도입 가능성을 검토하기 위한 예비적인 조사를 실시하였다.

1. 예비 조사

2012년 12월 부산시 K 초등학교의 6학년 4학급 96명의 학생들을 대상으로 설문조사를 하였다. 이 학생들은 학교에서 같은 해 3월 초에 분수의 나눗셈을 배웠다. K 초등학교의 학생들의 평균적 생활수준은 보통 수준으로 대부분 아파트에 거주한다. 대부분의 학생들은 수학 선행학습을 하고 있다.

설문은 총 2장의 설문지로 제공되었다. 첫 설문지에는 4개의 문제를, 두 번째 설문지에는 1개의 문제를 두었다. 첫 설문지에 제시된 4개의 문제 중 3개는 분

2) Wittmann(1995)에 의하면 임상적 면담은 학생들이 배울 내용에 대한 정신적 구조를 밝히고자 하는 것이고, 이 과정에서 학생들의 학습요소에 대한 이해 정도를 진단할 수 있고 문제점이나 개선점에 대한 처방도 가능하다.

모가 서로 다른 분수의 나눗셈 계산문제로서 교과서에서 선택한 것이다. 나머지 한 문제는 “철수가 $\frac{2}{3}$시간 동안 10정보의 땅을 매었을 때 1시간동안 매는 땅의 넓이는 얼마인가?”라는, 북한 교과서의 문제와 비슷한 분수 나눗셈의 문장제 문제이다. 첫 번째 설문에 대한 학생들의 풀이가 끝난 후, 설문지를 회수하고 두 번째 설문지를 배부하였다. 두 번째 설문지에는 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$로 계산할 수 있는 이유를 아는 대로 적으라고 하는 문제가 제시되었다.

예비 조사의 결과는 다음과 같다. 첫 번째 설문의 계산 문제 3개에 대해서는 거의 모든 학생이 정확하게 계산을 할 수 있었다. 문장제 문제의 경우, 46.9%의 학생은 $10\div\frac{2}{3}$의 계산식을 세워 풀었다. 19.8%의 학생은 10÷2×3으로 계산하였는데, 이는 단위비율 결정 맥락의 방법과 일치한다. 9.3%의 학생은 먼저 10분 혹은 1분 단위의 값을 구하기 위해 각각 4 혹은 40으로 10을 나누고, 1시간의 값을 구하기 위해 다시 6 혹은 60을 곱하는 계산을 하였다. 시간을 분으로 바꾸어 적용하면서 곧바로 분수 나눗셈의 알고리즘이 유도되지는 않게 되었지만, 이 방법 역시 ‘줄이고 늘이는’ 단위비율 결정 맥락의 사고 과정을 이용하고 있다고 볼 수 있다.[3)]

반면, 두 번째 설문지에서 제시된, 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈을 이용하여 계산할 수 있는 이유를 설명하는 문제에 대해서는 4명(4.1%)만이 답하였으며, 이 학생들은 교과서의 방식 그대로 설명하였다.

첫 번째 설문의 문장제 문제에 대해 상당히 많은 학생들이 올바른 풀이 방법을 제시한 것과 비교할 때 이 결과는 상당히 시사적이다. 즉, 학생들은 교과서의 알고리즘 유도과정은 잘 기억하지 못하였지만, 단위비율 결정 맥락이 잘 적용되는 문장제 문제에 대해서 자연스럽게 식을 유도하고 답을 구해낸 경우는 상대적으로 많았다. 이 사실은 식의 형식적 조작보다는 단위비율 결정 맥락과 같은, 문제 상황 속의 실질적인 맥락을 통해 분수 나눗셈 알고리즘이 유도되도록 학생들을 지도하는 것이 교육적으로 더욱 적합하다는 사실을 암시한다.

2. 면담의 방법 및 대상

예비 조사의 결과는 단위비율 결정 맥락의 실제 도입 가능성과 타당성을 보여준다. 이 결과를 근거로 하여, 실제로 학생들에게 분수 나눗셈에 대한 단위비율 결정 맥락으로 지도할 때 학생들이 겪을 어려움을 이해하고 바람직한 지도방법을 모색하기 위한 두 차례의 임상적 면담을 2013년 3월 셋째 주에 실시하였다.

1차 면담은 본 연구자 중 1인이 담임을 맡고 있는 K 초등학교 6학년의 한 학급에서, 부산시 진단평가 수학 성적 기준으로 각각 상, 중, 하 수준인 총 3명의 학생을 선발하여 실시하였다. 교과서의 단원 순서상 6학년 1학기 1단원인 ‘분수의 나눗셈’ 단원은 3월 초에 배우게 된다. 따라서 교과서의 ‘분수의 나눗셈 단원’은 면담이 이루어진 직후에 배우도록 단원 지도 순서를 조절하였다.

면담은 1대1로 이루어졌으며, 각 학생들에게 똑같은 질문과 과제가 주어졌다. 최대한 편안한 분위기가 조성될 수 있도록 하였으며, 학생들의 반응에 대해서 수용적인 면담이 될 수 있도록 노력하였다. 학생들이 문제 해결을 어려워하는 경우 우선 그 원인을 파악하고, 점진적으로 단위비율 결정 맥락에서의 이해를 위한 방향으로 유도하였다.

3명의 학생에게 임상적 면담을 실시한 후 그 결과를 분석한 결과 추가적 면담의 필요성이 발견되었다. 내용 자체와 관계된 어려움과 별개로, 문제에 등장한 특정한 수들이 학생들에게 영향을 주었을 가능성이 있다고 판단되었고, 또한 하나의 문제에 초점을 맞추어 학생들의 반응을 보다 심도 있게 확인하는 과정이 필요하다고 판단되었기 때문이다.

1차 면담이 이루어진 다음 날, 기본과제 중 1문제에 대해 1차 면담의 참가자는 제외하고 상·중·하 수준에서 남, 여 각 1명의 학생과 선행학습을 받지 않은 유일한 1명의 학생까지 총 7명의 학생을 같은 학급에서 선발하여 2차 면담을 실시하였다.

3. 과제의 구성

1차 면담에서 학생들에게 제시한 과제에서는 단위

3) 이러한 풀이에는 학생들이 6학년 1학기 7단원에서 비례식을 배운 영향이 있을 가능성이 있다. 별도의 연구를 통해 그 영향을 확인할 필요가 있다고 보인다.

비율 결정 맥락에서 제수의 역수의 의미인 '줄이고 늘이는 연산자'의 개념에 초점을 두었다. 이 과제를 통해 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\div 2\times 5=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$라는, 줄이고 늘이는 방법을 학생들이 얼마나 자연스럽게 받아들이는지, 그리고 어떤 점에서 어려워하는지를 알고자 하였다. 한편으로 학생들이 이 면담을 통해 분수 나눗셈의 방법을 발견하고 분수 나눗셈의 의미를 이해할 수 있도록 돕기 위해, 본 연구자들은 면담에서 제시하는 과제를 '나머지가 없는 자연수의 나눗셈', '(자연수)÷(분수)', '(분수)÷(분수)'의 순으로, 대상이 되는 수의 확장 과정을 따라 단계적으로 구성하였다.

1차 면담에서의 첫 번째 과제인 예비지식과제는 단위비율 결정 맥락에서 분수 나눗셈의 방법을 설명하고 이해하는데 필수적으로 등장하는 $\square\div(\text{자연수})=\square\times\frac{1}{(\text{자연수})}$을 학생들이 어떻게 이해하고 있는지 알기 위한 것이다. 두 번째 과제인 기본과제 3개에서는 길이와 무게의 관계에 대한 문항을 통해 분수 나눗셈의 의미와 방법을 다루었다. 추가과제 3개는 시간과 넓이와의 관계에 대한 문항인데, 이는 학생들이 분수의 나눗셈을 이해하는데 있어 길이와 무게의 관계와 시간과 넓이의 관계 중 어느 쪽을 더 쉽게 받아들이는가를 추가적으로 알아보고자 준비한 것이다. 전체 과제의 목록은 다음과 같다.

예비지식과제1. 수조에 담긴 2L의 물을 모양과 크기가 같은 그릇 3개에 나누어 담았습니다. 그릇 한 개에 담긴 물의 양은 얼마입니까?

기본과제1. 10kg의 일정한 굵기의 철근이 있습니다. 이 철근의 길이가 2m 일 때, 철근 1m의 무게는 얼마일까요?

기본과제2. 10kg의 일정한 굵기의 철근이 있습니다. 이 철근의 길이가 $\frac{2}{3}$m 일 때, 철근 1m의 무게는 얼마일까요?

기본과제3. $\frac{3}{4}$kg의 일정한 굵기의 철근이 있습니다. 이 철근의 길이가 $\frac{2}{5}$m 일 때, 철근 1m의 무게는 얼마일까요?

추가과제1. 인영이가 2시간 동안 60㎡의 벽에 페인트 칠을 했습니다. 인영이가 1시간 동안에는 몇 ㎡의 벽에 페인트를 칠할까요?

추가과제2. 인영이가 $\frac{2}{5}$시간 동안 40㎡의 벽에 페인트 칠을 했습니다. 인영이가 1시간 동안에는 몇 ㎡의 벽에 페인트를 칠할까요?

추가과제3. 인영이가 $\frac{3}{5}$시간 동안 $\frac{2}{3}$㎡의 벽에 페인트 칠을 했습니다. 인영이가 1시간 동안에는 몇 ㎡의 벽에 페인트를 칠할까요?

2차 면담에서는 1차 면담의 기본과제2에서 제수를 $\frac{2}{5}$로 바꾸어 제시하였다. 두 차례의 면담에서 학생들이 과제들을 자신의 수준에서 해결하고 난 다음, 연구자는 '이것이 왜 나눗셈의 문제가 되는지', '알고리즘이 왜 그렇게 되는지' 질문하였다. 이에 대한 학생들의 반응을 바탕으로 그들의 인지상태를 파악하여 분수 나눗셈 지도를 위한 방안을 모색하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 1차 면담 결과

1차 면담에 참여한 3명의 학생은 각각 A, B, C라 표기하기로 한다. 상 수준인 A학생은 여학생이고 차분하고 조용한 편이다. 중 수준인 B학생은 남학생으로 활동적이다. 하 수준인 C학생은 여학생으로 수학 성적은 낮지만 자신의 생각을 조리 있게 잘 말하는 편이다. 3명의 학생 모두 분수의 나눗셈을 선행학습한 상태이지만 분수 나눗셈의 계산을 단지 제수의 역수를 곱한다는 알고리즘으로만 알고 있었다.

아래에 학생들과의 대화 내용을 직접 인용하고, 필요시에는 학생의 반응과 연구자의 개입 내용도 함께 표기하였다. 각 학생의 면담 결과에 이어, 그에 대한 연구자의 의견을 서술하였다.

<A학생>

[예비지식과제]

T: 그릇 한 개에 담긴 물의 양은 얼마라고 생각하니?

A: 0.666…이라 나누어떨어지지 않아요. 그래서 나누어 담을 수 없어요.

T: 그렇게 생각하니? 그러면 그림으로 한번 나타내 볼래.

A: 네.(직사각형을 그려서 3등분 함.)

T: 분수로 나타내면 1칸은 얼마라고 생각하니?

A: $\frac{2}{3}$예요. 2÷3이니까 $2\times\frac{1}{3}$이고 그래서 $\frac{2}{3}$가 되요.

처음에 A학생은 몫을 소수로 나타내려 하였다. 여기서 A학생은 몫이 무한 소수로 표현되므로 나누어 담는 행위가 종료될 수 없다고 생각하는 것으로 보인다. 그러나 교사가 분수로 구하기를 요구하자 올바른 답을 구하였다. 이는 흥미로운 반응이었으나 본 면담의 주제를 고려하여 A학생에게 이 상황에 대한 더 이상의 설명을 요구하지는 않았다.

[기본과제1]

T: 철근이 2m에 10kg일 때, 철근 1m의 무게는 얼마라고 생각하니?

A: 5kg이요. 10÷2라서 그렇게 나와요.

T: 두 수를 왜 나누었니?

A: 1m의 값을 구하기 위해서 그렇게 했어요.

[기본과제2]

T: 철근이 $\frac{2}{3}$m에 10kg일 때, 철근 1m의 무게는 얼마라고 생각하니?

A: $10\div\frac{2}{3}=10\times\frac{3}{2}$ 이렇게 될 것 같아요.

T: 두 수를 왜 나누었니?

A: 나누어야 답이 나오니까요.

T: 곱셈으로 계산한 이유를 설명해 줄 수 있어?

A: 분수의 나눗셈을 하려면 나눗셈을 곱셈으로 고치고 분수의 역수를 해주면 되요.

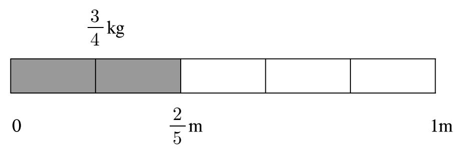
T: 네가 말한 분수의 역수가 뭐지?

A: 분모와 분자를 바꾸는 거예요.

기본과제3에 대해서 A학생은 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$라고 올바르게 계산하였고, 이렇게 계산한 이유에 대해서는 '분수의 나눗셈을 하려면 나눗셈을 곱셈으로 고치고 분수의 역수를 해주면 된다'고 답했다. 그러나 그렇게 하면 되는 이유를 묻자 더 이상 설명을 하지 못하였다. A학생은 제수가 정수인 문제에 대해서는 나눗셈으로 식이 표현되는 이유에 대해 곧바로 설명했지만, 제수가 분수인 문제에 대해서는 그러한 설명을 하지 못하였으며, 단지 알고리즘에 근거해서 그렇게 된다고 답을 한 것이다.

연구자가 같은 문제를 다른 방법으로 풀어 보라고 제안을 하니 아래와 같이 풀었다.

A:



$\frac{3}{4}\times 2=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$

$\frac{2}{5}\div 2=\frac{1}{5}$ 이므로 $\frac{3}{4}\div 2=\frac{3}{8}$

$1\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$

여기서 A학생은 $\frac{3}{4}$을 두 배 하여 $\frac{4}{5}$m 에 해당하는 값을 구하고, $\frac{3}{4}\div 2$를 하여 $\frac{1}{5}$m에 해당하는 값을 구한 다음, 두 값을 더한 것이다. A학생이 $\frac{1}{5}$m 즉, 단위분수에 대한 값을 구하는 과정에 주목하여 연구자는 다음과 같이 질문을 던졌다.

T: 네가 적은 풀이 중에서 $\frac{3}{4}\div 2=\frac{3}{8}$은 무엇을 의미하니?

A: 그림에서 1칸의 무게예요.

T: 이 한 칸의 무게를 몇 배하면 1m가 되니?

A: 5배를 하면 되죠.

T: 그러면 이것을 수식으로 합쳐서 적어볼래?

A: $\frac{3}{4}\div 2\times 5$

T: 앞에 우리가 풀었던 문제에서 '÷2'는 곱하기로 고치면 얼마가 될까?

A: $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times 5$

T: 곱셈이니까 $\frac{1}{2}\times5$를 먼저 계산하면?

A: $\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$

T: 처음에 네가 적었던 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$과 같다는 것을 알겠니?

A: 와! 신기해요.

추가과제의 문제는 기본과제 문제보다 빠르게 해결을 하였고, 유사한 문제의 반복이라 그런지 연구자가 파악하고자 했던, 길이나 넓이 관련 문제 중 어떤 유형에 더욱 익숙해 하는지는 알 수 없었다.

<B학생>

[예비지식과제]

T: 그릇 한 개에 담긴 물의 양은 얼마라고 생각하니?

B: 계산은 2÷3이예요.

T: 계산하면 얼마지?

B: 모르겠어요...

T: (5학년 2학기 교과서를 보여주며) 여기 한번 같이 보자. 배웠던 기억이 나니?

B: 네, 그러면 $2\times\frac{1}{3}$이니까, $\frac{2}{3}$가 될 것 같아요.

분수의 나눗셈에 대한 기계적인 학습이 이루어졌음을 단적으로 보여주는 예였다. 왜냐하면 B학생의 경우 더 어려운, 분수끼리의 나눗셈은 선행학습으로 실수 없이 계산했지만, 이와 같이 과정을 묻는 질문에는 제대로 답하지 못했기 때문이다.

[기본과제1]

T: 철근이 2m에 10kg일 때, 철근 1m의 무게는 얼마라고 생각하니?

B: 5kg 이요.

T: 어떻게 계산하는지 설명해 줄래?

B: 10÷2하니까 5예요.

[기본과제2]

T: 철근이 $\frac{2}{3}$m에 10kg일 때, 철근 1m의 무게는 얼마라고 생각하니?

B: (한 동안 고민을 하다) $10\times\frac{2}{3}$ 일 것 같아요.

T: 왜 그렇게 되는지 말해볼까?

B: 철근 무게가 10kg이니까 두 수를 곱해야 할 것 같아요.

T: 앞의 네가 푼 문제와 비교해 보자. 두 문제의 같은 점과 다른 점이 무엇인지 알겠니?

B: 앞의 문제를 보니, 곱하면 안 되고 나눠야 겠어요. $10\div\frac{2}{3}=10\times\frac{3}{2}$이니까, 15kg 될 것 같아요.

T: 식이 왜 $10\div\frac{2}{3}$가 되는지 설명해 줄 수 있어?

B: …….

B학생이 처음에 $10\times\frac{2}{3}$라고 식을 세운 이유는, 5학년 때 배운 분수의 곱셈에서 유사한 문제들을 보았고, 이 때 나온 숫자들을 곱하면 된다는 계산 방법을 상기한 것이라고 추측되었다. 그런데, B학생은 처음에 $\frac{2}{3}$로 나누는 것과 $\frac{2}{3}$를 곱하는 것 사이에서 한참을 망설였으며, 이것으로 볼 때 단지 곱셈과 헛갈렸던 이유만은 아니라는 생각이 들었다. 실제로, 면담이 이루어진 다음 날 B학생에게 그 이유를 다시 물어보았는데, 학생의 대답은 '$10\div\frac{2}{3}$인지 $10\times\frac{2}{3}$인지 헛갈렸는데, $10\div\frac{2}{3}$는 왠지 10과 3을 보았을 때 계산이 안 될 것 같았다'는 것이었다. 분모 3이 실제로는 피제수 10을 나누는 수가 아니지만, 이 학생에게는 마치 10을 나누어야 하는 수처럼 인식되어, 10의 약수가 아니라는 것에 대한 심리적인 부담을 주는 것으로 보였다. B학생의 이러한 반응과 함께, 앞서 A학생의 경우에도 2를 3으로 나눈 값을 소수로 표현하려고 시도할 때 어려움을 가졌다는 사실을 고려하여, 2차 면담에서는 기본과제2에서 제수를 $\frac{2}{5}$로 바꾼 문제를 대신 제시하였다.

한편, 왜 $10\div\frac{2}{3}$가 되는지의 이유에 대해 1m의 값을 구하기 위한 것이라는 대답을 못하는 것으로 보아, B학생은 분수로 나누는 의미를 정확하게 알지 못하는

것으로 보였다. 하지만 이 학생이 기본과제2를 기본과제1과 비교한 결과를 바탕으로, 10에 $\frac{2}{3}$을 곱하는 것이 아니라, 10을 $\frac{2}{3}$로 나누어야 하겠다고 생각을 고친 것은 고무적인 일이다. 처음부터 원리를 이해하지는 못하더라도 자신이 아는 간단한 문제에서 힌트를 얻어 더 어려운 문제를 유추적으로 해결하는 능력 또한 수학 학습자에게 중요하기 때문이다. 수학 교과에서 이해 수준이 낮은 학생들이 자신들에게 익숙한 자연수의 문제에서 분수의 문제로 이해를 확장하는 것을 보여주는 위의 면담은 수업을 계획하고 교과서를 재구성하는 교사에게 시사하는 바가 있다.

기본과제3에 대해서는, B학생이 앞의 기본과제 두 문제에서 규칙을 익혔기 때문인지 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$으로 식을 세우고 계산을 했다. 추가과제에서도 계산과정과 계산은 정확하게 했으나, 기본과제2에서처럼 그 의미를 묻는 질문에는 제대로 대답을 하지 못하였다.

<C학생>

[예비지식과제]

T: 그릇 한 개에 담긴 물의 양은 얼마라고 생각하니?

C: $\frac{2}{3}$요.

T: 왜 그렇게 생각하는지 네가 푼 과정을 설명해 줄래?

C: 식은 2÷3이요, 그런데 왜 그런지는 모르겠어요.

T: (5학년 2학기 교과서를 보여주며) 여기 한번 같이 보자. 배웠던 기억이 나니?
교과서에서처럼 똑같이 풀이해 볼 수 있겠니?

C: $2\div3=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

[기본과제1]

T: 철근이 2m에 10kg일 때, 철근 1m의 무게는 얼마라고 생각하니?

C: 5kg 이요.

T: 어떻게 계산한 거야?

C: 10÷2=5

T: 나눗셈을 한 이유가 뭐니?

C: 반으로 나누려고 그렇게 했어요.

[기본과제2]

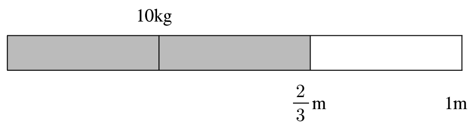
T: 철근이 $\frac{2}{3}$m에 10kg일 때, 철근 1m의 무게는 얼마라고 생각하니?

C: (인상을 찌푸리며) 생각해도 모르겠어요.

T: 그림을 한번 그려서 생각해 볼래.

C: …….

T: 이렇게 그리면 되겠니?



T: 색칠한 부분은 1m의 얼마지?

C: …….

T: 색칠한 부분은 작은 한 칸의 몇 배지?

C: …….

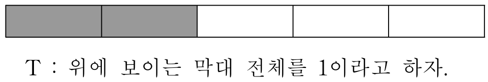
T: 그러면 앞에 네가 푼 문제와 비교해 보자. 두 문제의 같은 점과 다른 점이 무엇인지 알겠니?

C: 숫자 빼고 거의 비슷한 것 같아요.

T: 그러면 어떻게 푸는지 알겠니?

C: $10\div\frac{2}{3}=10\times\frac{3}{2}=15$

C학생은 자신이 잘 알지 못하는 부분이 나오면 대답하기를 꺼려했다. 면담 과정에서 이 학생은 줄이고 늘이는 과정에 대한 이해를 잘 못 하는 것으로 생각되어, 전체와 부분의 관계를 분수로 말하는 것, 그리고 줄이고 늘이는 과정에서 수가 작아지고 커지는 부분에 대해 아래와 같이 질의응답 시간을 추가로 가졌다.



T : 위에 보이는 막대 전체를 1이라고 하자.

C : 네.

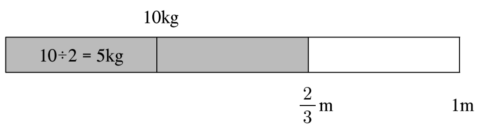
T: 막대가 모두 몇 개로 나눠져 있니?

C: 5개요.

T: 1칸을 분수로 말할 수 있겠니?

C: $\frac{1}{5}$

T: 그럼, 색칠은 몇 칸이 되어있니?
C: 2개요.
T: 색칠한 부분을 분수로 말할 수 있겠니?
C: $\frac{2}{5}$
T: 색칠된 2칸 중 1칸은 분수로 말할 수 있겠니?
C: $\frac{1}{2}$
T: 색칠한 부분은 1칸의 몇 배지?
C: 2배요.
T: 전체는 1칸의 몇 배지?
C: 5배요.
T: 그러면 다시 문제를 풀어보자. 그림에서 작은 한 칸은 몇 kg 이겠니?



C: 반이니까 5kg이요.
T: 식으로 하면 될까?
C: 10÷2요.
T: 작은 한 칸을 몇 배해야 1m가 될까?
C: 3배요.
T: 그러니 10÷2×3을 하면 되겠네?
C: 예.
T: 앞에서 배운 걸 활용해보면, $10 \div 2 \times 3 = 10 \times \frac{1}{2} \times 3$ $= 10 \times \frac{3}{2}$이 되는 걸 알겠지.
C: 예.

C학생은 기본문제2를 풀면서 풀이의 규칙을 알아냈고, 단위 비율결정 맥락의 풀이과정을 설명 듣고 나서는 기본과제3과 추가과제의 수식과 계산을 스스로 해결했다. 하지만 이것이 분수 나눗셈의 문제가 되는 이유, 그리고 알고리즘이 왜 그렇게 되는지는 설명하지 못했다.

2. 2차 면담 결과

7명의 학생에게, 앞서 밝힌 바와 같은 이유로 기본과제 2번 문제의 제수를 변형하여, '10kg의 일정한 굵기의 철근이 있습니다. 이 철근의 길이가 $\frac{2}{5}$m일 때, 철근 1m의 무게는 얼마일까요?'라는 문제를 제시했다. 상・중・하 수준의 남녀학생 6명은 이미 선행학습으로 분수의 나눗셈 계산법을 알고 있었으며, 나머지 한명은 선행학습을 하지 않은 상수준의 남학생이었다. 아래에서 상수준의 남, 녀 학생을 각각 D1, D2, 중수준의 남, 녀 학생을 E1, E2, 하수준의 남, 녀 학생을 F1, F2 그리고 선행학습을 하지 않은 상수준의 남학생을 G라고 표기하기로 한다. 제수를 $\frac{2}{3}$에서 $\frac{2}{5}$로 바꾼 이유는 앞에서 밝힌 바와 같이 학습자의 심리적 반응에서 수에 대한 거부감으로 문제 풀이에 방해를 주지 않기 위해서였다.

<D1학생>

$\frac{2}{5}:10 = \frac{1}{5}:5 \rightarrow \frac{1}{5}:5 = 1:\square \rightarrow \square = 25$ 의 과정으로 비례식을 활용하여 풀이를 하였으며, $10 \div \frac{2}{5}$를 해야 하는 이유를 $\frac{2}{5}$에서 1이 되려면 '$\div \frac{2}{5}$'를 해야 한다고 설명했다. 그리고 $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$이기 때문에 $\frac{2}{5}$를 $\frac{5}{2}$배하면 1m의 무게를 알 수 있다고 답하였다. 이 학생은 여기서 나누는 의미가 단위길이를 구하기 위한 것이라고 올바르게 알고 계산을 하고 있다. 또한 분수 나눗셈에서 왜 제수의 역수 값이 곱해지는지에 대해 단위 길이에 대한 값을 구하는 맥락에서 정확하게 설명하였다.

<D2학생>

$10 \div \frac{2}{5} = 10 \times \frac{5}{2} = 25$ 라고 계산하였다. 나눗셈을 하는 이유는 문제에서 원하는 무게는 1m의 무게이고, 1m의 무게를 구하려면 나눗셈을 해야 한다고 답하였다. 이 학생의 경우는 나눗셈의 의미는 알고 있으나 왜 나눗셈을 곱셈으로 계산하는지는 답하지 못 했다.

<E1학생>

$\frac{2}{5} \div 2 \times 5$를 하면 1이 되기 때문에 10kg÷2×5를 하면 된다고 답하였다. 이 학생의 경우 본 연구에서 분수의

나눗셈의 의미로 도입하고자 하는 단위 비율 결정 맥락의 의미를 잘 이해하고 받아들이는 학생이었다.

<E2 학생>

$10 \div \frac{2}{5} = 10 \times \frac{5}{2} = 25$ 라고 답을 하고, 나눗셈인 이유에 대해 곱하거나 더하거나 빼면 계산 결과의 값이 10과 비슷하거나 작아져서 틀린 답이기 때문이라고 말하는 것으로 보아 나누는 의미를 정확하게 이해하고 있진 않아 보인다. 하지만 계산 결과에 대한 수 감각은 있으며, 계산을 정확하게 수행할 수 있었다(계산 방법은 선행학습으로 배웠다고 답하였다.) 하지만 왜 그렇게 계산해야 하는지는 답하지 못하였다.

<F1학생>

$\frac{2}{5}$m:10kg → $\frac{1}{5}$m:5kg → $\frac{5}{5}$(1)m:25kg이 된다고 비례식으로 답을 하였다. 이 학생의 경우에도 줄이고 늘이는 방식으로 올바르게 생각하였다. 하지만 그 결과를 $10 \div \frac{2}{5}$와 같이 수식으로 표현하는 데에는 어려움이 있었다.

<F2학생>

$\frac{2}{5} \div 10 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$ 라고 계산하였으나, 답의 분모와 분자를 바꿔 $\frac{25}{1} = 25$라고 답하였다. 왜 이렇게 했느냐고 물으니, 주어진 문제의 답이 $\frac{1}{25}$보다는 25에 더 가까울 것 같아서 그렇게 했다고 답하였다.

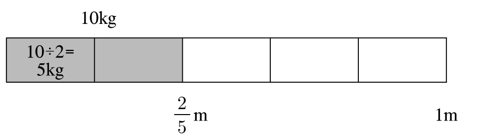
이 학생은 문제에서 피제수와 제수를 잘 찾아내지 못하고 있다. 또한, 분수의 나눗셈을 도구적으로 배웠으나 나중에 그 정확한 절차에 대한 기억이 헛갈리고 있는 모습을 보여 준다고 할 수 있다. 하지만 이 학생도 문제의 답이 10 보다 클 것이라고 예측하는 수 감각은 지니고 있는 것으로 보였다.

<G학생>

G학생은 1차 면담에서 A학생의 기본과제3에 대한 두 번째 풀이와 비슷하게 답하였다. 즉, $\frac{2}{5}$m가 10kg이므로 $\frac{2}{5}$m가 두 번 있는 $\frac{4}{5}$m의 값은 20kg이다. 이제 1m에서 남은 $\frac{1}{5}$m의 값을 구하면 되는데, $\frac{1}{5}$은 $\frac{2}{5} \div 2$이므로 그 값은 10kg÷2 = 5kg이다. 따라서 1m에 대응하는 무게는 20kg+5kg 즉, 25kg이라는 것이다.

G학생은 분수의 나눗셈을 선행학습하지 않은 유일한 학생이라 그 결과가 궁금했다. 흥미롭게도, 이 학생은 비록 한 번에 제수의 분자와 분모만큼 피제수를 줄이고 늘여 1m에 대응하는 값을 찾지는 않았지만, 1m를 쪼갠 각 부분에 대응하는 값을 찾기 위해 줄이고 늘이는 방법을 올바르게 사용하였다. G학생에게 이 문제에 대한 식을 세워 푼다면 어떻게 하면 되는지 물으니, 처음에는 $10 \div \frac{2}{5}$라는 식을 세워 계산하려고 하였으나 이것을 어떻게 계산할지 몰라 자신이 알고 있는 방법으로 풀이했다고 답하였다.

7명의 학생 각각에 대한 면담이 끝난 후, 분수의 나눗셈 알고리즘을 단위 비율 결정 맥락으로 유도하는 과정을 정리하여 설명할 때 학생들이 어떻게 반응할지 궁금하여, 7명의 학생 전체를 대상으로 아래와 같이 설명을 진행하였다. 아래의 대화에서 학생들은 구별하지 않고 S로 표기하였다.



T : 방금 풀었던 문제의 식을 다시 한 번 말해줄래?

S : $10 \div \frac{2}{5}$ 에요.

T : 그림으로 나타내어 봅시다.
그림에서 2칸이 길이로는 얼마지?

S : $\frac{2}{5}$m 지요.

T : 그럼 1칸은 길이로 얼마지?

S : $\frac{1}{5}$m 예요.

T : 한 칸이 의미하는 것은 무엇일까?

S : $\frac{1}{5}$m의 무게예요.

T : 식으로 나타내면?

S : 10 ÷ 2 예요.

T : 1m는 $\frac{1}{5}$m가 몇 배해야 되니?

S : 5배 해야 되요?

T : 그러면 $\frac{1}{5}$m의 무게의 값에 몇 배를 하면 1m의 무게를 알 수 있을까?

S : 5배를 하면 되죠!

T : 그것을 식으로 나타내면 어떻게 되지?

S : 조금 전에 구한 (10÷2)에다가 5배를 하면 되요, 그러니까 10÷2×5예요.

T : 그럼, ÷2를 곱하기를 이용해서 적어보면 어떤 값이랑 같을까?

(아래 식을 판서하여 네모 안에 적어보도록 함.)

$10\div2\times5 = 10\times\square\times5$

S : $\frac{1}{2}$입니다.

T : 전체 식을 정리해보자,

$10\div\frac{2}{5} = 1\div2\times5 = 10\times\frac{1}{2}\times5$

$= 10\times\frac{5}{2}$

이렇게 되는 것을 알겠니?

S : 예, 신기해요.

학생들은 전반적으로 이 과정을 잘 받아들였으며, 자신들이 설명하지 못했던 $10\div\frac{2}{5} = 10\times\frac{5}{2}$가 되는 과정이 자연스럽게 증명이 되자 신기해하며 좋아했다. 그러고는 자신들이 이해가 될 뿐 아니라 설명도 할 수 있을 것 같다고 했다.

Ⅴ. 결론 및 제안

본 연구의 예비 조사의 결과로부터, 단위비율 결정 맥락과 같은, 문제 상황 속의 실질적인 맥락을 통해 분수 나눗셈 알고리즘이 체득되도록 지도하는 것이 식의 형식적 전개를 통해 지도하는 것보다 학생들에게 적합한 지도방법이라고 판단할 수 있었고, 실제로 단위비율 결정 맥락이 대부분의 학생들에게 유용하다는 것을 두 차례의 면담을 통해 확인할 수 있었다.

단위비율 결정 맥락으로 분수 나눗셈을 도입할 때, '왜 이 상황이 분수 나눗셈의 문제가 되는지'에 대한 적절한 설명을 제시할 필요가 있다. 이것은 분수 나눗셈 알고리즘을 유도하는 것과 별개의 문제이며, 설명의 완결성을 위해 필수적인 것이라 할 수 있다. 면담 결과, 이 문제에 대해 제수가 자연수인 나눗셈의 문제를 학생들에게 먼저 제시한 다음, 제수가 분수인 경우도 구조적으로 앞과 동등한 상황임을 인식하게 하여 그것 역시 나눗셈의 문제임을 인식시키는 전략은 대체로 성공적이었다. 학생들은 이러한 설명을 쉽게 수긍하고 곧바로 문제의 풀이에 적용할 수 있었다. 구조적으로 동등한 상황에서 식 역시 동등하게 표현된다는 것은 자연스러운 유추라고 할 수 있다.

예시 문항의 $10\div\frac{2}{3}$에서 '10'과 '3'에 배수-약수 관계가 존재하지 않아 계산을 계속해 나가는데 심리적 부담을 가졌던 학생의 예를 통해, 분수나눗셈 알고리즘을 유도할 때 그 논리 전개 과정 뿐 아니라 학생들의 심리에 대해서도 세심한 배려가 필요함을 알 수 있었다. $10\div\frac{2}{5}$와 같이 제수의 분모와 분자 모두 피제수의 약수가 되도록 문제를 구성되는 것이 분수의 나눗셈을 배우는 초기 단계에서는 학생의 심리적 부담을 줄이는데 도움이 될 것이라고 판단된다. 그러나 이러한 배수-약수 관계는 수학적으로 알고리즘의 유도와 실질적인 계산에 아무런 영향을 미치지 않는 것이며, 학생들도 일단 알고리즘을 유도한 이후에는 곧바로 이 사실을 인식할 수 있도록 지도하여야 할 것이다.

학생들이 분수 나눗셈의 단위비율 결정 맥락에 대한 모델이 되는 상황을 한 가지 기억해 둔다면 이후에 분수 나눗셈의 의미와 계산 방법을 다시 상기해 내는데 큰 도움이 될 것으로 보인다. 2차 면담에서 사용된 '10kg의 일정한 굵기의 철근이 있습니다. 이 철근의 길이가 $\frac{2}{5}$m 일 때, 철근 1m의 무게는 얼마일까요?'와 같은 문제는 분수 나눗셈의 알고리즘이 왜 그렇게 되는지 자연스럽게 설명해 줄 뿐 아니라, 길이와 무게의 관계를 시각적으로 명료하게 표현할 수 있다는 장점도 있었다.

단위비율 결정 맥락에는 '줄이고 늘이는 연산자'로서의 제수의 역할에 대한 이해가 필수적이다. 1차 면담

에서 C 학생에게 설명한 것과 같이, '줄이고 늘이는' 과정에 대한 단계적 설명을 수업에서 잘 제공할 필요가 있을 것이다. 특히, 줄이고 늘이는 사고의 연습을 위한 수업 도입부의 활동으로서 다음과 같은 자연수 범위에서의 연습을 제안할 수 있다.

2개에 100원인 사탕이 있습니다. 1개의 가격은 얼마입니까? (줄이고) 3개의 가격은 얼마입니까? (늘이고)

이상의 논의를 종합해 보면, 현행 6-1 교과서(교육과학기술부, 2011b)의 '분수의 나눗셈' 단원에 단위비율 결정 맥락의 관점을 반영하여 단원을 재구성할 때 다음 [표1]과 같은 방안을 생각할 수 있다.[4)]

[표1] 분수 나눗셈 단원 수학 교과서 재구성안

[Table1] Reorganizing the contents of fractional division in the elementary mathematics curriculum

<table>
<tr><th>차시</th><th>현행</th><th colspan="2">제안</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">(자연수)÷(단위분수)</td><td>단원 도입</td><td>(자연수)÷(자연수)
(분수)÷(자연수)
의 복습</td></tr>
<tr><td colspan="2">자연수 범위에서의 '줄이고 늘이는' 활동</td></tr>
<tr><td>2</td><td>분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈</td><td colspan="2">단위비율 결정 맥락을 통한 (자연수)÷(진분수)의 설명</td></tr>
<tr><td>3</td><td>분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈</td><td colspan="2">(진분수)÷(진분수)의 경우로의 확장</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(자연수)÷(진분수)</td><td colspan="2">대분수의 나눗셈</td></tr>
<tr><td>5</td><td>대분수의 나눗셈</td><td colspan="2">(다양한 상황에의 적용)</td></tr>
</table>

1차시에서는 5학년 2학기에 배운 (자연수)÷(자연수), (분수)÷(자연수)를 단원 도입에서 다시 학습할 필요가 있다. 이것은 단위비율 결정 맥락에서의 '줄이는' 과정에 해당하며, 또한 자연수로 나누는 것이 그 역수를 곱하는 것으로 표현된다는 사실은 단위비율 결정 맥락의 설명에도 필요하기 때문이다. 이어서, 위에서 제시한 바와 같은 활동을 제공하여, 줄이고 늘이는 과정을 통해 값을 구하는 사고에 익숙해지도록 학생들을 준비시킬 수 있다. 2차시에서 단위비율 결정 맥락으로 (자연수)÷(진분수)의 분수의 나눗셈 알고리즘을 설명하고, 3차시에는 이 방법이 피제수가 자연수가 아니라 분수인 경우에도 똑같이 적용됨을 예시적으로 확인하고 연습문제를 푼다. 4차시에는 대분수가 포함된 경우 진분수로 고쳐서 계산할 수 있음을 설명한다.

이때, 분수 나눗셈을 해결하는 다양한 방법을 학생들에게 접하게 한다는 측면에서는 현행 교과서의 방법과 같이 식의 형식적 조작을 통해서 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 바꾸어 계산하는 방법, 혹은 선행연구들에서 논의되었던 분수 나눗셈의 다른 도입 맥락도 추가적으로 설명할 필요가 있겠으나, 차시가 늘어나서 학생들이 힘들게 되고, 오히려 한 가지 맥락의 원리에 대한 집중이 흐려질 수 있다는 측면에서는, 여러 맥락의 도입을 피하고 오히려 기존에 포함제 맥락에서 설명되던 문제 등의 다양한 상황 역시 분수 나눗셈의 상황임을 이해시키고 이에 단위비율 결정 맥락을 통해 얻은 알고리즘을 적용시키는 연습에 시간을 쓰는 편이 합당할 것으로 보인다. 이에 대해서는 어떤 방법이 교육적으로 더욱 타당한지에 대한 실증적 연구가 이루어져야 할 것이다.

4) 여기서의 재구성은 6학년 1학기 교과서의 내용으로 한정하였다. 6학년 1학기에서 단위비율 결정 맥락으로 알고리즘을 설명할 때, 제수가 자연수인 경우에 한정하여 다루는 5학년 2학기의 내용은 '줄이는' 과정의 연습으로 볼 수 있을 것으로 보인다.

참고문헌

교육과학기술부 (2011a). 수학 5-2. 서울: 두산동아.

Ministry of Education(2011a). *Mathematics 5-2*. Seoul: Seoul: Dusan.

교육과학기술부 (2011b). 수학 6-1. 서울: 두산동아.

Ministry of Education (2011b). *Mathematics 6-1*. Seoul: Dusan Donga.

박교식・송상헌・임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. 학교수학, 6(3), 135-249.

Park, K. S., Song, S. H., & Yim, J. H.(2004). Understanding of the elementary teachers in pre-service with respect to fractional division, *School mathematics*, 6(3), 135-249.

방정숙・이지영 (2009). 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한

초등학교 수학과 교과용 도서 분석. 학교수학, 11(4), 723-743.

Pang, J. S., & Lee, J. Y. (2009). An analysis of the multiplication and division of fractions in elementary mathematics instructional materials. *School mathematics*, 11(4), 723-743.

서동엽 (2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. 수학교육학연구, 13(2), 159-178.

Seo, D. Y. (2003). Analyses on the reasoning in primary mathematics textbooks. *The journal of educational research in mathematics*, 13(2), 159-178.

임재훈・김수미・박교식 (2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구:남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. 학교수학, 7(2), 235-249.

Yim, J. H., Kim, S. M., & Park, K. S. (2005). Different Approaches of Introducing the Division Algorithm of Fractions: Comparison of Mathematics Textbooks of North Korea, South Korea, China, and Japan. *School Mathematics*, 7(2), 235-249.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics Education as a 'Design Science'. *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), 355-374.

Liping Ma (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. 신현용・승영조(역). 서울: 승산.

Liping Ma (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. New York: Routledge.

Van de Walle, J. A. (2004). Elementary and middle school mathmatics: *Teaching developmentally*(5th Ed.). Boston: Pearson Education, Inc.

Teaching Fractional Division : A Basic Research for practical Application Context of Determination of a unit rate

Cho, Yong Jin
Kaehwa Elementary School, Busan 614-113, Korea
E-mail : uniquecyj@daum.net

Hong, Gap Ju†
Dept. of Mathematics Education, Busan National University of Education, Busan 611-736, Korea
E-mail : gapdol@empas.com

A large part of students' difficulties with fractional division algorithms in the current algorithm textbooks, seem to be due to self-induction methods. Through concrete analysis of surveys and interviews, we confirmed the educational value of fractional algorithms used to elicit alternative ways of context of determination of a unit rate. In addition, we suggested alternative methods based on the results of the teaching methods and curriculum configuration.

* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : fractional division, determination of a unit rate,
† Corresponding Author