韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2013. 8. 제 16권, 제 2호, 183-192

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Aug. 2013, Vol. 16, No. 2, 183-192

초등학교 수학에서 삼각형 내각의 합과 평행선의 성질의 연계성

홍 갑 주 (부산교육대학교)
송 명 선 (부산 모덕초등학교)

이 연구에서는 초등학교 수학 교과서에서 삼각형의 내각의 합과 평행선의 성질이 관련 없이 제시되고 있다는 사실을 지적하고, 이를 유클리드 원론의 체계와 현행 교과서의 관련 내용에 대한 고찰을 바탕으로 그 타당성에 대해 논의하였다. 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질은 초등학교 수학의 여러 주제 속에 내재해 있으며, 유클리드 원론의 체계 속에서 삼각형의 내각과 떼어놓고 생각할 수 없는 의미를 가지고 있었다. 이러한 고찰을 통해 두 주제는 관계를 맺어 지도하는 것이 바람직하다는 결론을 얻었다.

I. 서 론

초등학교와 중학교의 수학 교과서에서, 삼각형의 내각의 합은 도형의 측정에 대한 성질로서 중요하게 다루어진다. 초등학교에서는 삼각형 내각의 합이 수학 <4-1>에서 각도의 개념과 각도의 측정에 이어 지도되고 있다(2007 개정 교육과정 기준). 여기서 학생들은 그 값이 180도라는 사실을 두 가지 실험적 방법 즉, 세 내각의 크기를 각각 재어 합하는 방법, 그리고 세 모서리를 이어 붙이는 방법으로 확인한다.

실험적 방법은 언제나 오차를 고려해야 하며, 몇 개의 삼각형에 대한 관찰이 일반적인 수학적 논증을 대체할 수는 없다. 물론, 초등학교에서 이러한 실험적 방법으로 삼각형 세 내각의 합을 다루는 것은 초등 수학의 수준과 목표를 고려한 선택이라고 볼 수 있다. 그러나 삼각형의 내각과 관련하여 이것이 초등학교 수학에서 최선의 제시방법인지에 대해서는 논의의 여지가 있다.

* 접수일(2013년 8월 5일), 게재확정일(2013년 8월 27일)
* ZDM분류 : G12
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 삼각형의 내각의 합, 유클리드 기하, 평행선의 성질
* 이 논문은 2011년도 부산교육대학교 교육연구원의 지원을 받아 연구되었음.

초등학교와 중학교의 많은 기하학적 주제와 마찬가지로, 삼각형 내각의 합 역시 유클리드 원론에서 직접적으로 다루어지는 주제이다. 실제로 그 합이 180도로서 일정하다는 사실에 대해 중학교 수학에서 일반적으로 제시하고 있는 증명 방법 즉, 평행선에 대해 엇각이 같다는 성질을 이용한 증명방법은 유클리드 원론 Ⅰ권의 32번 명제의 증명에서 그 원류를 찾아볼 수 있다. 원론의 내용 전개를 염두에 두고, 초등학교 교육과정상의 평행선의 성질, 평행의 개념을 바탕으로 하는 몇 가지 주제들, 그리고 삼각형의 내각의 합에 대한 설명을 함께 고찰해 보면 현행 교과서의 지도 순서와 구성에 대한 재검토의 필요성을 발견하게 된다.

본 연구에서는 수학 <4-1>에 제시되는 삼각형의 내각의 합과 <4-2>에 제시되는 평행선의 성질과의 관련성을 고찰하여 그 제시 순서, 그리고 2007 개정교육과정에서 평행선의 엇각과 동위각이 삭제된 것의 타당성에 대해 논의하려고 한다. 그리고 이에 대한 전반적인 개선 방안과 함께 현행 교육과정의 틀 속에서의 부분적인 개선방안을 모색할 것이다. 이러한 논의는 삼각형 내각의 합 및 평행선의 성질과 관련된 교과서의 개선과 수업방법의 연구에 참고가 될 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 유클리드 원론에서 삼각형 내각의 합과 평행선의 성질의 관련성

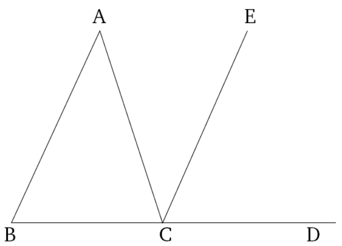
Heath(1956)에 의하면 유클리드 원론의 Ⅰ권은 삼각형에 대해 다루는 첫 번째 부분(명제 1부터 26까지), 평행선에 대해 다루는 두 번째 부분(명제 27부터 34까지), 도형의 넓이를 다루는 세 번째 부분(명제 35부터

48까지)으로 나뉜다.

“두 개의 직선이 하나의 직선을 가로지를 때, 어느 한 쪽의 내각을 더한 것이 2직각보다 작으면, 두 직선을 연장할 때 내각을 더한 것이 2직각보다 작은 쪽에서 만난다.”라고 서술되는 원론 Ⅰ권의 제5공준 즉, 평행선 공준은 수학적으로 그리고 수학사적으로 중요한 의의를 가진다(Greenberg, 2007). 평행선 공준을 가정하지 않는 기하 즉, ‘중립기하’에서도 많은 기하학적 명제들이 증명될 수 있다. 평행선 공준을 필요로 하는 명제와 그렇지 않은 명제를 구별하는 것은 유클리드기하의 체계를 이해하는데 핵심적인 부분이다(최영기·홍갑주, 2006).

원론 Ⅰ권의 첫 번째 부분은 평행선 공준을 이용하지 않고 전개된다. 삼각형의 성질 중 정삼각형의 존재성, 삼각형의 세 가지 합동조건, 이등변삼각형의 성질, 어떤 두 내각의 합도 2직각보다 작다는 것, 삼각형 각과 변의 크기순서의 대응관계 등은 모두 첫 번째 부분에서 다루어진다. 반면, 삼각형 세 내각의 합이 2직각과 같다는 사실은 평행선에 대해 다루는 두 번째 부분에서 32번 명제로서 다루어진다. 그 증명은 다음과 같다.

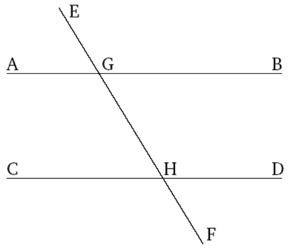
명제 32. $\triangle ABC$의 한 꼭지점에서의 외각은 다른 두 꼭지점에서의 내각의 합과 같다. (따라서 삼각형 내각의 합은 2직각이다.)



증명. 명제 31에 의해 AB에 평행하게 CE를 그을 수 있다. 그러면 명제 29에 의해 $\angle ABC = \angle ECD$, $\angle BAC = \angle ACE$. 따라서 $\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$. 양변에 $\angle ACB$를 더하면 세 내각의 합이 2직각임을 알 수 있다(명제 13).

이 증명은 평행선에 대해서 엇각과 동위각이 같다는, 아래의 명제 29를 바탕으로 하고 있다.

명제 29. 평행한 두 직선 AB와 CD에 직선 EF가 각각 G와 H에서 만날 때 $\angle AGH = \angle DHG$이고, $\angle EGB = \angle DHG$이다. 그리고 $\angle BGH + \angle DHG$는 2직각이다.



증명. $\angle DHG$가 $\angle AGH$보다 더 작다고 하자. 그러면 $\angle BGH + \angle DHG < \angle BGH + \angle AGH = 2$직각 이다. 이러면, <u>공준 5에 의해</u> 두 직선 AB와 CD는 B와 D 쪽에서 만나야 하고, 이것은 두 직선이 평행하다는 가정에 모순이다. $\angle DHG$가 $\angle AGH$보다 더 큰 경우도 모순이 발생함을 비슷하게 증명할 수 있다. 따라서 $\angle DHG$와 $\angle AGH$는 같다. 또 $\angle EGB$는 $\angle AGH$와 서로 맞꼭지각이므로 같고(명제 15), 따라서 $\angle DHG$와도 같다. 이때 $\angle BGH + \angle DHG = \angle BGH + \angle AGH = 2$직각이 된다.

유클리드는 원론Ⅰ권에서 가능한 평행선 공준을 이용하지 않고 명제를 증명해 나갔다(Greenberg, 2007). 명제 29는 그 증명에 평행선 공준이 사용된 최초의 명제이다. 엇각이 같으면, 혹은 동위각이 같으면 두 직선이 평행이라는 명제(각각 명제 27, 명제 28)는 평행선 공준을 이용하지 않고 증명되는 반면, 그 역에 해당하는 명제 29는 평행선 공준을 필수적으로 이용한다. 그리고 명제 29가 최초로 쓰이게 되는 증명은 바로 앞서 살펴본 바, 삼각형의 내각의 합이 2직각과 같음을 보이는 명제 32이다. 결국, 원론의 체계 하에서 평행선의 성질이 어떤 도형과 관련하여 실질적인 의미를 가지게 되는 최초의 명제가 바로 삼각형 내각의 합이라 할 수 있다.

최영기(1999)는 중학교 수학에서 기하영역 내용전개의 근간을 이루고 있는 다음의 네 가지 명제들이 평행선공준과 동치임을 지적하면서 이에 대한 이해가 학교

수학에서 가지는 중요성을 강조한 바 있다.

명제1. 직사각형이 존재한다.
명제2. 임의의 직각삼각형에서 피타고라스의 정리가 성립한다.
명제3. 임의의 삼각형의 내각의 합은 180°이다.
명제4. 임의의 삼각형 ABC와 임의의 주어진 선분 DE에 대하여 대응각의 크기가 서로 같은 닮은 삼각형 DEF가 존재한다.

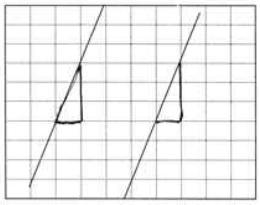
이를 통해 평행선의 성질은 삼각형 내각의 합, 피타고라스의 정리, 직사각형, 닮은 삼각형 등을 통해 초등학교, 중학교 기하의 여러 주제에 내재해 있는 성질임을 알 수 있다.

2. 초등학교 수학에서 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질에 관련된 학습주제

초등학교 수학 내에서 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질에 관련된 학습주제를 구체적으로 살펴보자.

사다리꼴, 평행사변형은 그 정의 자체가 마주 보는 변의 평행성을 기준으로 두고 있다. 직사각형, 정사각형, 마름모는 그 정의에 평행성이 포함되어 있지는 않지만, 모두 평행사변형이 되므로 결국 평행의 성질이 관찰되는 도형이다. 이종영(2005)은 초등학교 수학에서 평행선에 대한 동위각과 엇각의 성질은 두 직선의 평행성을 판단하는 방법 중 하나이며, 이후에 학생들이 학습하는 기본 도형이 사다리꼴인지, 평행사변형인지를 판단하는데 쓰이는 성질임을 지적한 바 있다.

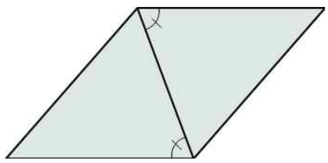
초등수학에서 유용하게 활용되는 모눈종이 위에 두 선분이 그려질 때, 학생들은 모눈의 가로와 세로 칸 수를 세어 두 선분의 평행성을 판단할 수 있다. 이종영(2005)에 의하면, 이것이 단지 시각적인 감각에 의해서가 아니라 도형을 이루는 구성요소의 성질에 의해 의한 것이라는 점은 모눈종이 활동이 초등학교 수학에서 가지는 유용성을 보여준다([그림1]).



[그림1] 두 직선의 평행성 판단을 위해 그려진 직각삼각형(이종영, 2005)
[Fig. 1] Right-angled triangles to determine whether the lines are parallel or not(Lee, 2005).

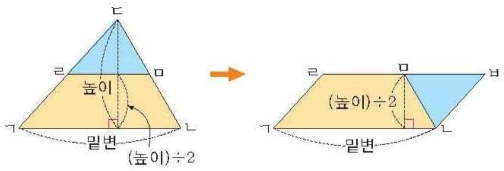
그런데, [그림1]에서 평행한 두 직선에 대해 그려지는 합동인 직각 삼각형은 자연스럽게 평행선에 대한 동위각의 성질을 관찰하게 한다. 또한, 초등수학에서 흥미 있는 소재로 활용되는 쪽매맞춤에서도, 기본도형으로 평행사변형이 사용될 때 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질은 자연스럽게 관찰될 수 있다.

초등학교에서 단위정사각형, 직사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴로 이어지는, 등적변형을 통한 다각형의 넓이 전개과정에서도 평행선의 엇각과 동위각에 대한 성질은 여러 차례에 걸쳐 암묵적으로 활용된다. 예를 들어, 삼각형의 넓이를 구하기 위해 합동인 삼각형 2개를 돌려 붙여 평행사변형을 만들 때 두 삼각형이 맞붙어 만드는 선분은 평행선에 대한 크기가 같은 엇각을 만든다([그림 2]). 사다리꼴의 넓이를 구하기 위해 합동인 사다리꼴 두 개를 붙여 평행사변형을 만들 때에도 마찬가지 상황이 발생한다.



[그림 2] 평행사변형의 절반으로서 삼각형의 넓이 구하기
[Fig. 2] The area of a triangle as half of a parallelogram

<5-1>교과서 탐구활동에 제시되는 삼각형의 넓이를 구하는 다른 방법([그림 3])에서도 평행선에 대한 동위각(왼쪽 그림의 각 ㄷㅁㄹ, 각 ㅁㄴㄱ)과 평행선에 대한 엇각(오른쪽 그림의 각 ㅁㄴㄱ, 각 ㄴㅁㅂ)의 성질을 암묵적으로 활용하고 있다.



[그림 3] 삼각형을 잘라 붙여 평행사변형으로 등적변형하기(교육과학기술부, 2011, p.112)
[Fig. 3] To transform a triangle into a parallelogram(Ministry of Education, 2011, p.112)

Ⅲ. 교과서 내용의 고찰

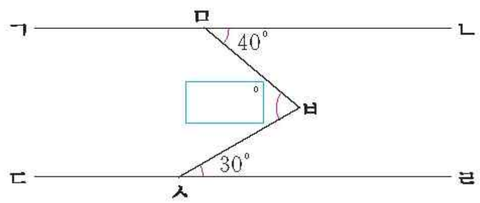
이제 유클리드원론의 전개과정을 바탕으로 현행 교과서의 삼각형의 내각의 합과 평행선의 성질과의 관련성에 대해 고찰하려 한다.

유클리드 원론에서 평행선에 대해 엇각과 동위각이 같다는 성질은 삼각형 내각의 합 증명에서 최초로 쓰이고 있었다. 현행 교육과정을 보면, 삼각형의 내각의 합은 <4-1> '각도' 단원에서, 평행선의 성질은 <4-2> '수직과 평행' 단원 안에서 다루어지고 있다. 즉, 그 지도 순서가 원론의 전개 과정과는 거꾸로 되어있다.

물론 전문적 수학의 내용 전개 순서를 초등학교 수학에서 반드시 지켜야 할 필요는 없을 것이고, 초등학교에서는 삼각형 내각의 합에 대한 증명을 하지 않으므로 이것이 문제가 안 된다고 볼 수도 있다. 그러나 삼각형 내각의 합과 평행선의 성질 모두 초등학교 수학의 전통적 주제였음을 고려하면, 기존의 교과서 구성에 약간의 배려만 더함으로써 초등학교 학생들에게 제공할 수 있는 풍부한 수학적 관계성을 이러한 전개 순서가 놓치게끔 하는 것이 아닐지 고민이 필요하다고 보인다.

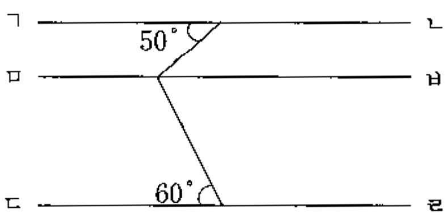
특히, 2007 개정 교과서에서는 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질이 아예 삭제되었다. 이것은 수준을 조절하기 위한 맥락에서 이루어진 것으로 보이지만, 그 성질의 삭제를 통해 실제로 어떠한 효과가 있었는지, 삭제로 인한 부정적 효과는 없는지에 대해서는 실증적 검토가 필요해 보인다. 앞서 살펴보았듯 그 성질은 학생들이 교과서 내에서도 여러 기회에 걸쳐 관찰하고 암묵적으로 활용하는 것이다. 두 쌍의 대변이 평행한 평행사변형의 형태는 학생들에게 동위각에 대한 자연스러운 관찰을, 그리고 평행사변형의 대각선은 엇각에 대한 자연스러운 관찰을 유도한다. 다각형의 넓이를 구하기 위한 등적변형 과정에서도 평행선의 엇각과 동위각은 여러 차례 활용된다.

더욱이, 각도와 관계된 문제 해결에 있어서 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질이 빠지게 되는 것은 오히려 문제 풀이를 더욱 어렵고 직관적이지 못하게 만들기도 한다. 예로서, [그림 4]는 2007 개정교육과정 <4-1> 익힘책에 제시된 문제로서, 직선 ㄱㄴ과 직선 ㄷㄹ이 서로 평행할 때 □ 안에 알맞은 각도가 얼마인지 알아보라는 것이다.



[그림 4] 평행선에서의 각도 문제
(교육과학기술부, 2010b, p.52)
[Fig. 4] An angle located between two parallel lines(Ministry of Education, 2010b, p.52)

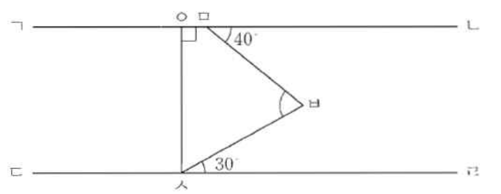
해당 문제에 대한 지도서의 풀이를 보기에 앞서, 비슷한 문제에 대한 지난 7차 교육과정 지도서의 풀이를 살펴보자([그림 5]). 이 풀이에서는 꺾인 직선의 꼭짓점을 지나고 주어진 평행한 두 직선에 평행한 보조선(직선 ㅁㅂ)을 긋고, 평행선에 대해 엇각이 같다는 성질을 이용하여 답이 50°+60° 즉 110°라고 설명하고 있다.



[그림. 5] 비슷한 문제에 대한 7차 교육과정에서의 풀이(교육과학기술부, 2003, p.156)

[Fig. 5] The solution for the similar problem on the 7th national curriculum textbook(Ministry of Education, 2003, p.156)

반면, 2007 개정 교육과정의 지도서에서는 [그림 6]과 같이 두 평행선 사이에 ㅅ을 지나는 수선 ㅅㅇ을 그려서 만들어지는 사각형의 내각의 합을 바탕으로 하는 풀이를 제시하고 있다.



(1) 구하려고 하는 것: 각 ㅁㅂㅅ의 크기
(2) 각 ㄱㅁㅂ의 크기: 180°에서 40°를 뺀 140°가 된다.
(3) 각 ㅂㅅㅇ의 크기: 90°에서 30°를 뺀 60°가 된다.
(4) 사각형 ㅁㅂㅅㅇ에서 사각형의 네 각의 합은 360°이므로 각 ㅁㅂㅅ의 크기는 360°에서 140°, 90°, 60°를 뺀 70°가 된다.

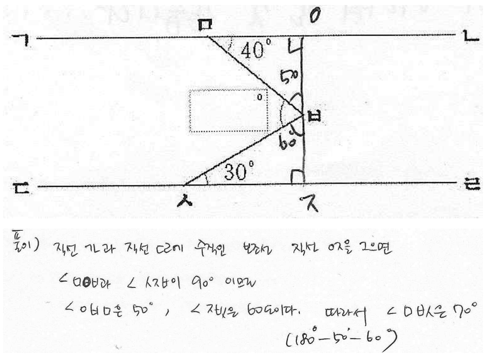
[그림 6] 2007 개정교육과정에서의 풀이(교육과학기술부, 2010c, p.164)

[Fig. 6] The solution on 2007 revised national curriculum textbook(Ministry of Education, 2010c, p.164)

이 풀이에 대해 즉각적으로 지적할 수 있는 문제점은 이와 같이 각 ㅅㅇㅁ이 직각인 형태로 사각형 ㅇㅁㅂㅅ을 그릴 수 있다는 것은 문제에 제시된 40°, 30°의 조건만으로는 보장되지 않는다는 것이다. 두 각도를 지키는 한에서도 ㅁㅂ과 ㅅㅂ의 길이에 따라 ㅁ과 ㅅ의 상대적인 좌우 위치는 달라질 수 있기 때문이다.

그러나 엇각과 동위각에 대한 평행선의 성질을 이용할 수 있었던 7차 교과서에서의 풀이방법과 비교할 때 이 풀이에는 더욱 본질적인 문제점이 발견된다. 즉, 2007 개정 교과서의 풀이에서는 사각형을 만들기 위해 보조선(선분 ㅅㅇ)을 그려서 사각형의 내각의 합을 이용한다. 그런데 사각형의 합은 삼각형의 내각의 합을 통해 구해지며, 삼각형의 내각의 합은 앞서 보았듯 평행선의 성질에 의존한다. 따라서 수학적 논리 전개의 측면에서, 2007 개정 교과서의 풀이 방법은 단순한 사실을 이용해서 풀 수 있는 문제를, 그 사실을 바탕으로 몇 단계의 논리 전개를 거쳐서야 유도되는 사실을 뒤에서 끌어다가 풀이에 이용하는 셈이 되어버린다. 이 풀이방법이 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질을 이용하는 7차 교과서의 풀이보다 자연스럽다거나 학생들에게 쉽다고 보기는 힘들 것이다.

실제로 2013년 6월 모 교육대학교 대학원에 다니고 있는 현직 초등학교 교사 10명을 대상으로, 4학년 수업에서 이 문제를 어떻게 풀이할 것인지 설문지를 통해 조사하였다. 교사들의 현재 담당 학년은 1학년 3명, 3학년 1명, 4학년 1명, 5학년 3명, 6학년 2명이었고 교직 경력은 4년부터 19년까지 다양했다. 교사들 중 2007 개정교육과정 지도서와 같은 풀이를 제시한 경우는 2007 개정교육과정의 4학년을 맡은 경험이 있는 1명뿐이었다. 5명은 아래의 [그림 7]과 같이 두 평행선 사이에 ㅂ을 지나는 수선을 그려서 삼각형 내각의 합을 이용하는 방법을 이용했으며, 나머지 4명은 7차 교과서와 같은 방법으로 두 평행선에 평행한 보조선을 ㅂ을 지나도록 그리고 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질을 이용하여 답하였다.



[그림 7] 삼각형 내각의 합을 이용한 풀이
[Fig. 7] A solution that uses the sum of the interior angles of triangles

소규모의 설문이었지만 그 결과는 현행 지도서의 풀이방법은 초등교사에게도 자연스럽지 않음을 암시한다.

또한, 같은 교사들에게 위의 설문에 이어서 2007 개정 지도서의 풀이를 복사물로 나누어주고 검토하게 한 다음, 그에 대한 견해를 적어달라고 요청하였다. 이에, 2007 개정 지도서의 풀이대로 대답했던 1명(지난해에 4학년을 지도함)은 이 문제를 가르쳐 본 경험으로서, “지도서의 풀이를 4학년 아이들이 잘 이해하지 못합니다. 저렇게 푸는 아이가 거의 없었습니다. (평행선에 대한 동위각, 엇각의 개념을 말해주지 않았지만) 평행선을 그려서 푸는 아이가 몇 있었고, 그래서 평행선을 추가하여 설명할 때 이해를 더 잘했습니다.”라고 답하였다. 다른 한 교사는 “평행선 단원이니 평행선의 성질을 이용하여 풀이하는 것도 좋을 것 같다. 수선을 긋는 것이 있지만, ‘평행선과 수직’이라는 단원보다는 ‘사각형’ 단원에서 더 어울리는 풀이일 듯...”이라고 하며, 이것이 정말 평행선에 관련된 문제인지에 대해 의문을 던졌다. 평행선 사이에 공통 수선을 긋고 있기는 하지만, 학생들이 이것을 평행선과 관련하여 생각하기보다는 시각적 직관에 의존한다면 실제로 이것은 평행선의 문제라고 볼 수 없을 것이다.

한편 절반의 교사들이 제시했던 [그림 7]의 풀이는 점 ㅁ, ㅅ의 상대적 좌우 위치에 상관없이 성립되며, 사각형 대신 삼각형의 내각의 합을 이용한다는 점에서 지도서의 풀이보다는 부분적으로라도 쉽고 자연스러운 풀이라고 판단된다.

Ⅳ. 논의

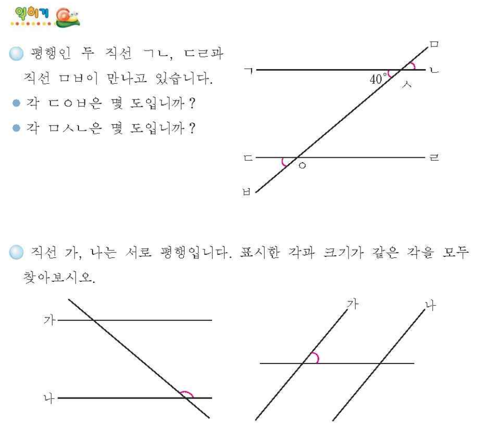
1. 초등학교 수학에서 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질의 삭제

앞서 살펴본 바와 같이 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질은 초등학교 수학에서 학생들이 여러 차례 자연스럽게 관찰하고 은연중에 이용하게 된다. 그렇다면 삼각형의 내각의 합과 평행선의 성질의 제시 순서를 바꾸어, 삼각형의 내각의 합을 평행선의 성질을 통해 구하는 증명을 제시하면 어떠할까?

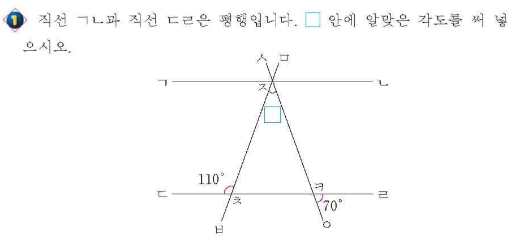
물론 초등학교 수학에서 증명을 다루는 것은 피해야 한다는 견해도 있을 수 있다. 그러나 평행선의 성질을 바탕으로 한 삼각형의 내각의 합 증명을 초등 교과서 내의 다음 내용과 비교해 보자.

<4-1>에서는 삼각형의 내각의 합에 곧바로 이어 사각형 내각의 합을 배운다. 이때 삼각형에서와 마찬가지로 네 각의 크기를 각도기로 재어 합하는 방법, 그리고 네 모서리를 이어붙이는 방법을 이용한다. 그러나 이에 이어 사각형을 대각선에 따라 삼각형 2개로 분할하여 그 각각의 내각의 합이 180도임을 이용하여 그 합이 360도임을 알아보게 하고 있다. 이는 연역추론을 적용한 것이라 할 수 있으며(서동엽, 2003), 결국 사각형의 내각의 합을 삼각형의 내각의 합을 바탕으로 증명한 것이라 할 수 있다. 또한 앞서 [그림 6]에서 살펴본 각도 문제의 풀이를 상기해 보자. 이 풀이에서 학생들에게 요구하는 추론 수준은 사각형을 만들어주는 보조선의 발견, 주어진 각의 180도에 대한 여각의 계산, 사각형 내각의 합에서 차를 계산하기가 조합되어 상당히 높았다. 평행선의 성질을 이용한 삼각형의 내각의 합에 대한 증명이 이상의 내용들보다 더 높은 수준의 추론 수준을 요구한다고 볼 근거는 찾기 힘들어 보인다. 초등학교 수학에서의 추론 수준에 대한 일률적인 잣대를 적용할 것이 아니라, 삼각형, 그리고 평행선의 엇각과 동위각이라는 특정한 대상에 대한 학생들의 이해능력을 실증적으로 검토할 필요가 있다고 생각된다.

여기서 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질이 2007 개정 교과서에서 빠지게 되기 전인 7차 교과서에서 어떻게 쓰였는지를 살펴보자. 아래의 [그림 8]과 [그림 9]에서 보듯, 그 성질은 동위각이나 엇각으로 연결되는 각들을 찾아 각도를 구하거나, 180도에 대한 여각, 삼각형의 내각의 합과 조합된 각도 응용문제를 해결하는데 주로 쓰이고 있다.



[그림 8] 7차 교과서의 평행선에 대한 동위각 엇각의 성질 활용 문제(교육과학기술부, 2003, p.60)
[Fig. 8] Problems related to the alternate angles and the corresponding angles of parallel lines(Ministry of Education, 2003, p.60)



[그림 9] 7차 교과서의 평행선에 대한 동위각 엇각의 성질 활용 문제(교육과학기술부, 2003, p.62)
[Fig. 9] Problems related to the alternate angles and the corresponding angles of parallel lines(Ministry of Education, 2003, p.62)

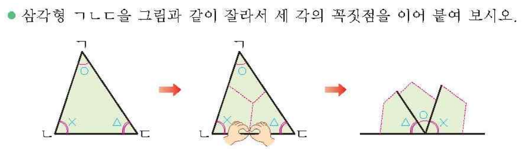
사실은 삼각형의 내각의 합, 평행사변형의 형태, 도형의 넓이를 구하기 위한 등적변형 등에 걸쳐 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질이 내재해 있었으나, 이전 교육과정에서 학생들이 이 성질을 명시적으로 접하게 되는 것은 주로 각도 계산 문제를 통해서였다. 결국 이 성질은 문제 해결을 위한 도구로만 쓰이게 되어 그 본래의 가치와 의미를 드러내지 못했고, 그것이 2007 개정 교육과정에 이르러 내용이 빠지게 된 한 가지 이유일 것이라고 생각된다.

2. 부분적 대안

이 문제에 대한 전면적인 개선을 위해서는 본 연구에서 언급한 평행과 관련된 내용들의 재배치가 필요할 것이다. 2007 개정 교과서를 기준으로 보면, 엇각과 동위각을 비롯한 평행선의 성질을 '각도' 단원에 이어 <4-1>로 옮겨 다루고, 현재 '각도' 단원에서 다루어지고 있는 삼각형의 내각의 합은 삼각형의 고유한 성질이라는 입장을 강조하여 '각도' 단원에 이어지는 '삼각형' 단원으로 옮기는 방안을 생각할 수 있을 것이다. 물론 평행선의 성질을 이용한 증명을 제시하는 방향으로 개정할 경우 학생들의 수학적 성숙 수준을 고려하여 보다 고학년의 내용으로 옮기는 방안도 고려해야 할 것이다.

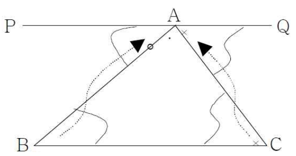
그러나 전면적 개편이 당장의 2009 개정 교육과정에서는 여의치 않을 경우, 관련 단원의 재배치 없이 삼각형 내각의 합 설명을 중심으로 개선하는 부분적인 수정방안도 생각할 수 있다. 즉, 최소한의 변화를 위해, 본격적인 증명의 도입은 피하되 평행선의 엇각과 동위각의 성질을 삼각형의 내각과 연계시키는 방법을 생각해 보는 것이다.

2007 교과서의 세 모서리를 이어붙이는 방식의 설명에서는 [그림 10]와 같이 삼각형의 밑변 쪽의 두 모서리를 서로 엇갈리게 평행하게 옮겨서 맞붙이고, 이때 생기는 틈에 위쪽 모서리를 180도 돌려서 끼워 넣는 방법을 쓰고 있다. 그러나 이 방법은 평행의 성질을 이용하지 않으며, 여기서 세 각의 합이 평각이 되는 것은 아무런 이유 없이 우연적이다.



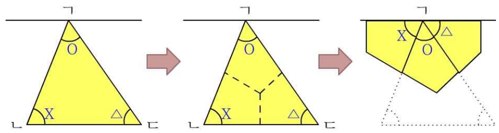
[그림 10] 세 모서리를 이어붙이는 방법(교육과학기술부, 2010a, p.52)
[Fig. 10] To rearrange the three corners of a triangle to form a straight line(Ministry of Education, 2010a, p.52)

임재훈(2009)은 삼각형의 내각의 합에 대한 다양한 설명방법을 그 합이 의미하는 바(180도, 2직각, 평각)에 따라 분류한 바 있다. 이 중 한 방법([그림 11])은 교과서의 설명 방법을 약간 변형한 것으로서, 평행선에 대한 엇각의 성질을 관찰하는 자연스러운 기회를 학생들에게 제공하면서 삼각형의 내각의 합을 설명할 수 있을 것으로 보인다.



[그림 11] 밑변의 평행선 위에 세 모서리 이어붙이기(임재훈, 2009)
[Fig. 11] To rearrange the three corners of a triangle on the parallel line for the base a triangle(Yim, J, H. 2009)

이 방법을 교과서에 제시된 그림의 순서와 형태에 맞추어 다시 표현해 보면 다음과 같다([그림 12]). 즉, 삼각형 위쪽 꼭짓점을 지나도록 밑변에 대한 평행선을 위치시키고, 위쪽 모서리가 아니라 삼각형 밑변 쪽의 두 모서리를 각각 그에 대한 엇각의 위치에 오려 붙이는 과정을 나타내었으며, 원래의 각의 위치를 상기시키기 위해 마지막 그림에서 처음의 삼각형을 점선으로 나타내었다.



[그림 12] 교과서 그림의 변형
[Fig. 12] The modification of the drawing on the textbook

이 방법은 세 모서리를 이어붙이는 현행 교과서의 실험적 방법과 단원의 배치를 그대로 유지하면서도, 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질을 자연스럽게 관찰하는 경험을 제공한다는 점에서 즉각적인 대안적 방법으로 고려할 가치가 있을 것이다. 물론, 이 방법이 의미를 갖기 위해서는 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질은 본 연구의 논의와 같이 새 교육과정에서 다시 포함하여야 할 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 초등학교 교과서에서 삼각형의 내각의 합과 평행선의 성질이 서로 관련 없이 제시되고 있다는 사실을 지적하고, 이를 유클리드 원론의 체계와 현행 교과서의 관련 내용에 대한 고찰을 바탕으로 그 타당성에 대해 논의하였다.

어떤 내용을 삭제하면 교과서가 반드시 쉬워지고, 어떤 내용을 추가하면 반드시 어려워지는 것은 아닐 것이다. 2007 개정 교육과정에서 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질이 삭제되었지만, 사실 이 성질은 초등학교 수학의 중요 주제 중 하나인 평행사변형 속에, 등적변형을 통해 여러 다각형의 넓이를 구하는 과정 속에 녹아들어가 있어 학생들이 자연스럽게 접할 수밖에 없는 성질이었다. 이러한 상황에서 그에 대한 지도를 피하는 것은 관련 내용의 개념적 이해와 교사의 명료한 설명을 오히려 더욱 어렵게 하는 것이 아닐지 검토가 필요하다고 보인다.

특히, 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질은 삼각형의 내각과 떼어놓고 생각할 수 없는 의미를 가지고 있음을 유클리드 원론의 체계 속에서 확인할 수 있었

다. 두 주제 모두 초등학교 수학의 전통적 주제였음을 고려하면, 이 두 주제는 관계를 맺어 지도되는 것이 바람직하다고 생각된다. 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질은 초등학교 수학에서 학생들이 거의 유일하게 접할 수 있는 불변량인 삼각형의 내각의 합과 관련을 맺을 때 훨씬 풍부한 수학적 의미를 가지게 될 것이다.

결국 평행선에 대한 엇각과 동위각의 성질은 초등학교 수학에서 주로 각도 관련 문제 해결의 도구로 이용되어왔을 뿐, 본 논문에서 살펴보았던 도형의 성질과 관계된 더욱 본질적인 측면들은 잘 드러나지 않았던 것으로 보인다. 그 성질이 교육과정에서 빠지게 된 것은 결국 기존 교과서 속에서 교사와 학생들이 그 성질의 의미를 분명히 찾기 힘들었던 것이 큰 이유가 아니었을까 하고 생각한다.

본 연구에서의 논의가 제작중인 2009 개정교육과정 교과서에서 평행선의 성질을 다른 도형들과의 관계 속에서 보다 의미 있게 다루는데 도움이 되기를 바란다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2003). 수학 4-나. 서울: 두산.

Ministry of Education(2003). *Elementary mathematics* 4-Na. Seoul: Dusan

교육과학기술부 (2010a). 수학 4-1. 서울: 두산동아.

Ministry of Education(2010a). *Elementary mathematics* 4-1. Seoul: Dusan Donga.

교육과학기술부 (2010b). 수학 4-2 익힘책. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2010b). *Elementary mathematics studying book 4-2*. Seoul: Dusan Donga.

교육과학기술부 (2010c). 수학 4-2 초등학교 교사용 지도서. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2010c). *Elementary mathematics Teacher's Guide* 4-2. Seoul: Dusan Donga.

교육과학기술부 (2011). 수학 5-1. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011). *Elementary mathematics 5-1*. Seoul: Dusan Donga.

서동엽 (2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. 수학교육학연구, 13(2), 159-178.

Seo, D. Y.(2003). Analyses on the reasoning in primary mathematics textbooks. *The Journal of Education Research in Mathematics*, 13(2), 159-178.

이종영 (2005). 초등학교 수학에서 평행과 평행선 지도에 관한 고찰. 수학교육학연구, 15(3), 273-286.

Lee, C. Y.(2005). A study of Teaching Concept of Parallel Line in Elementary School Mathematics. *The Journal of Educational Research in Mathmatics*, 15(3), 273-286

임재훈 (2009). 삼각형의 내각의 합: 180°, 2직각, 평각, 불변성. 과학교육논총, 22(1), 23-35.

Yim, J. H.(2009). An analysis of activities to explore the sum of the interior angles of a triangle. 과학교육논총, 22(1), 23-35

최영기 (1999). 중학교 수학에서 평행공리의 의미, 학교수학, 1(1), 7-17.

Choi, Y. G.(1999). The Meaning of the Parallel Postulate in the Middle School Mathematics. *The Journal of Educational Research in Mathematics,* 1(1), 7-17

최영기・홍갑주 (2006). 유클리드 기하의 고유한 성질로서의 삼각형 넓이 공식에 대한 재음미. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 45(3), 369-375.

Choi, Y. G. & Hong, G, J.(2006). A Re-Examination of the Area formula of triangles as an invariant of Euclidean geometry. *The Mathematical education,* 45(3), 369-375.

Greenberg, M. J.(2007). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*(4th ed.). New York: W. H. Freeman.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of the elements(Vol 1).* New York: Dover Publications.

The relation of the angle sum of a triangle and the property of parallel lines in Elementary school mathematics

Hong, Gap ju
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University Graduate School, Seoul 151-748, Korea
E-mail: gapdol@empal.com

Song, Myeong seon
Modeok Elementary school, Busan 617-818, Korea
E-mail: sms-santa@hanmail.net

This study points out that the angle sum of a triangle and the property of parallel lines are taught without showing any relations between them on elementary school mathematics textbooks. This study looks into the structure of Euclid Elements so that it discusses about the contents of current Korean textbooks. The property of the alternate angles and the corresponding angles of parallel lines are inherent in many subjects in Elementary school mathematics, and have meaning that must be thought with the angle sum of triangles in the structure of Euclid Elements. With this consideration, this study makes a conclusion that these two subjects should be taught by presenting relations between them.

* ZDM Classification : G12
* 2000 Mathematics Subject Classification :97U20
* Key Words : angle sum of a triangle, Euclidean geometry, properties of parallel lines