East Asian Mathematical Journal
Vol. 29 (2013), No. 4, pp. 425-447
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2013.029

중학교 삼각형의 무게중심 단원에 대한 효과적인 지도 방안

An Effective Teaching Method for the Centroid of Triangle in Middle School Mathematics

금 정 연 · 김 동 화[1)]

ABSTRACT. Since the center of mass of mathematics curriculum in middle school is dealt with only on triangle and it is defined as just an intersection point of median lines without any physical experiments, students sometimes have misconception of the centroid as well as it is difficult to promote divergent thinking that enables students to think the centroids of various figures. To overcome these problems and to instruct effectively the centroid unit in middle school mathematics classroom, this study suggests a teaching and learning method for the unit which uses physical experiments, drawing, and calculation methods sequentially based on the investigation of students' understanding on the centroid of triangle and the analysis of the mathematics textbooks.

Ⅰ. 서 론

중학교 수학에서 다루는 삼각형의 무게중심은 수학의 기하와 증명 영역과 과학을 통합할 수 있는 주제로서 흥미로울 뿐만 아니라 중요한 주제 가운데 하나이다.

1) 교신저자
2013년 8월 2일 투고, 2013년 8월 31일 심사완료.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key Words: 무게중심, 삼각형, 교수 · 학습 방법

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 학습량의 감축을 위하여 중점연결정리를 이해하고 활용하는 내용을 별도의 성취기준으로 두지 않게 됨에 따라 이와 연결되어 가르쳐 왔던 무게중심의 교수ㆍ학습의 변화도 고려의 대상이 되었다. 교과서 내에서 무게중심 내용을 어느 위치에서 다루고, 또한 이를 가르치는 목적을 어디에 두어야 하는지를 재고할 필요성이 제기 되었다.(하영화 외, 2011)

황선욱 외(2012)는 기하학적인 지식을 습득함에 있어서 학생들의 활동이 증명보다 중시되며 학생수준에 합당한 활동을 지향하고 다양한 학생의 경험과 기하지식을 토대로 한 추론 학습을 강화할 필요가 있다고 주장하였다.

현행 중학교 수학교과서의 무게중심은 삼각형에만 한정되어 있고, 삼각형의 무게중심이 물리적 실험이 없이 단지 세 중선의 교점으로 정의된다. 따라서 다각형, 다각형 이외의 평면도형, 또는 밀도가 일정하지 않은 여러 가지 모양의 물체에 대한 무게중심으로 확장을 생각하는 확산적 사고의 조장을 어렵게 한다.

무게중심은 실제로 여러 가지 응용이 가능한 물리적인 성질이면서 수학적으로 해석할 수 있는 주제이기 때문에 실험과 구체적인 조작 활동을 통하여 아이디어를 생성하고, 그 아이디어의 타당성을 검증할 수 있는 통합적인 내용이다. 무게중심은 현실과 결부된 내용임에도 불구하고 수학화하는 경험이 학생들에게 주어지지 않고, 단순히 지식만을 전달하고 확인하는 수준으로 지도되고 있는 것이 현실이다.

무게중심 교육과 관련된 이러한 문제점을 해결하기 위해서 본 연구에서는 중학생들이 무게중심에 관하여 이해하기 어려워하는 부분과 가질 수 있는 오개념은 무엇인지 조사해 보고, 이를 바탕으로 수학교실에서 삼각형의 무게중심에 대한 어떠한 교수ㆍ학습방법이 가장 효과적인지에 대한 연구를 수행하였다.

Ⅱ. 삼각형의 무게중심에 대한 교과서 분석

삼각형의 무게중심에 관하여 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학2 교과서 13종은 어떤 지도 방법을 사용하는지를 분석하였다.

<표 1> 교과서별로 나타난 무게중심의 지도방법

교 과 서	지 도 방 법
(가), (나), (다), (라), (마), (바)	삼각형의 세 중선이 만나는 점을 찾고 실험을 통하여 무게중심이 됨을 확인한다.
(사), (아)	실험을 통하여 물체의 무게중심을 찾고 무게중심과 중선과의 관계를 발견한다.
(자), (차), (카), (타)	삼각형의 세 중선이 만나는 점을 무게중심이라고 정의하지만 물리적인 실험을 하지 않았다.
(파)	삼각형의 꼭짓점에 구멍을 내서 걸은 후 추를 매단 실험을 이용하여 중선의 의미를 발견하고 중선의 교점이 무게중심이 됨을 실험한다.

또한 13종의 교과서 중에서 3종의 교과서((가), (다), (마))는 무게중심을 다룸에 있어서 삼각형의 성질 단원에서 삼각형의 다른 중심과 같은 또 다른 중심임을 강조하기 위해서 삼각형의 외심, 내심 이후에 무게중심을 다루고 있고, 이외의 교과서 10종은 이전의 교육과정과 같이 닮음의 성질을 학습한 후 이를 활용하여 증명하도록 하는 현 교육과정을 따르고 있다. 이러한 삼각형의 무게중심의 위치변화는 '평형을 이루는 선분의 교점'으로 접근을 가능하게 하며 중선의 교점으로만 정의하고 물리적인 성질과 원리가 규명되지 않은 상태로 학생들을 지도하는 것에서 탈피하여 삼각형에서 확장된 도형에서 무게중심을 찾는 활동을 가능하게 할 것이다. 이러한 변화는 무게중심 본질에 관한 학생들의 이해를 돕고 다각형의 무게중심을 구하는 데 도움을 줄 것이다.

<표 2> 교과서별 무게중심의 지도단원

교 과 서	지도단원의 위치
(가), (다),(마)	삼각형의 성질단원에서 내심, 외심을 학습한 후 무게중심을 학습
(나), (라), (바), (사), (아), (자), (차), (카), (타), (파)	도형의 닮음 단원에서 닮음의 성질을 학습한 후 무게중심에 대한 증명 학습

Ⅲ. 학생들의 실태조사

본 설문은 삼각형의 무게중심 학습을 마친 울산의 A중학교 3학년 2개 학급, B중학교 3학년 2개 학급의 학생 총 131명을 대상으로 실시하였다. 설문지는 ‘다각형의 무게중심’에 대한 학생들의 이해정도를 알아보기 위한 것으로 다음과 같이 총 7문항으로 구성되었으며, 학생들이 삼각형의 무게중심에 대하여 어떻게 이해하고 있는지와 사각형의 무게중심을 구할 수 있는지를 파악하고자 하였다.

① 삼각형의 무게중심을 직접 작도해 보거나 작도하는 것을 본적이 있는가?
② 삼각형의 무게중심의 정의는 무엇인가?
③ 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 몇 개라고 생각하는가?
④ 삼각형 또는 다각형의 무게중심을 구하는 실험을 해 본적이 있는가?
⑤ 중학교 2학년에서 배운 삼각형의 무게중심은 다음 중 어느 것이라 생각하는가? (점으로서의 삼각형의 무게중심, 선으로서의 삼각형의 무게중심, 면으로서의 삼각형의 무게중심 중에서)
⑥ 사각형의 무게중심에 대하여 배운 적이 있는가?
⑦ 사각형이 주어졌을 때, 무게중심은 찾을 수 있는가?.

‘삼각형의 무게중심을 직접 작도해 보거나 작도하는 것을 본적이 있는가?’라는 질문에 「있다」96명(74%), 「없다」34명(26%)의 응답이 나왔다. 그러나 「있다」고 대답한 학생 96명 중 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하거나 컴퓨터의 작도 프로그램으로 작도를 경험한 경우는 드물었다.

<표 3> 삼각형의 무게중심 작도 경험

질문: 삼각형의 무게중심을 직접 작도해 보거나 작도하는 것을 본적이 있는가?	
응 답	학생수(단위:명)
있다	96
없다	34

‘삼각형의 무게 중심의 정의는 무엇인가?’ 라는 질문에 대한 응답을 살펴보면, 전체 131명 중 「세 중선의 교점」52명(40%), 「삼각형의 넓이를 이등분하는 선분들의 교점」35명(27%), 「받침점 위에 올려놓았을 때 평형을 이루는 점」40명

(31%), 「기타」4명(3%)의 응답이 나왔다. 현행 모든 교과서가 삼각형의 무게중심을 세 중선의 교점으로 정의하고 있으며, 몇몇 교과서에서는 삼각형이 평형을 이루는 점을 무게중심이라 한다는 내용을 언급하고 있다. 전체 131명 중 92명(71%)의 학생들이 수업시간에 배운 대로 충실히 응답하였다.

<표 4> 삼각형의 무게중심의 정의

질문: 삼각형의 무게중심의 정의는 무엇인가?	
응 답	학생수(단위: 명)
세 중선의 교점	52
삼각형의 넓이를 이등분하는 선들의 교점	35
하나의 받침점 위에 올려놓았을 때 평형을 이루는 점	40
기타	4

‘삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 몇 개라고 생각하는가?’라는 질문에 대한 응답을 살펴보면 「3개」64명(49%), 「무수히 많다」48명(37%), 「1개」 7명(5%), 「2개」8명(6%), 「4개」4명(3%)의 응답이 나왔다. 전체 131명 중 「3개」라고 응답한 학생이 64명(49%)으로 가장 많았으며, 이는 삼각형의 중선이 삼각형의 넓이를 이등분한다는 성질에 의한 것으로 판단된다. 학생들이 넓이를 이등분하는 직선이 무게중심을 지난다는 오개념을 가지고 있음을 확인할 수 있다.

<표 5> 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선의 개수

질문: 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 몇 개라고 생각하는가?	
응 답	학생수(단위: 명)
1개	7
2개	8
3개	64
4개	4
무수히 많다	48

「무수히 많다」라고 응답한 학생 48명 중 ‘그 이유를 설명하세요’라는 질문에 대한 대답을 살펴보면, ‘삼각형에서 중선이 넓이를 이등분하는 직선이라서 그리고 그 중선이 3개라서 미세하게 그리면 넓이를 이등분하는 선은 무수히 많이 나온다’ , ‘이등분한 직선은 무수히 많다’, ‘밑변하고 평행하게도 이등분할 수 있을거라 생각함’, ‘무게중심만 지나면 무조건 이등분 된다’, ‘가로, 세로, 양 대각선을

포함하여 4개가 있기 때문에 이등분하는 직선은 무수히 많아서 이등분하는 선은 무수히 많다', '삼각형과 삼각형으로는 나눌 수 없지만 삼각형과 사각형 등으로 나눌 수 있다'등의 반응이 나왔다. 「무수히 많다」라고 응답한 학생들조차도 정확한 이유를 알고 있지 않다는 사실을 알 수 있다.

'삼각형 또는 사각형의 무게중심을 구하는 실험을 해 본 적이 있는가?'라는 질문에는 「있다」21명(16%), 「없다」110명(84%)의 응답이 나왔으며, 무게중심을 가르칠 때 구체적인 실험을 하기보다는 설명을 통해 이해시키는 수업이 훨씬 많았음을 알 수 있다.

<표 6> 삼각형 또는 다각형의 무게중심 구하는 실험 여부

질문: 삼각형 또는 다각형의 무게중심을 구하는 실험을 해 본 적이 있는가?	
응 답	학생수(단위:명)
있다	21
없다	110

'삼각형 또는 사각형의 무게중심을 구하는 실험을 해 본적이 있다면 어떤 실험을 해 보았는가?' 라는 질문에 대해 '오각형 팽이의 무게중심을 찾기', '정삼각형의 높이를 구해 그 길이를 2:1로 만들어 무게중심을 찾는 실험을 해 보았다', '공책의 무게중심에 손가락 하나를 대서 손가락 하나로 들었다'는 응답이 나왔다.

'중학교 2학년에서 배운 삼각형의 무게중심은 어느 것이라 생각하는가?' 라는 질문에 대한 응답으로는 「점으로서의 삼각형의 무게중심(예: 무게가 다른 추 세 개의 무게중심)」 38명(29%), 「선으로서의 삼각형의 무게중심(예: 세 변이 철사로 이루어진 삼각형의 무게중심)」 60명(46%), 「면으로서의 삼각형의 무게중심(예: 두께가 고르고 아주 얇은 삼각형 판의 무게중심)」33명(25%)으로 나왔다. 학생들은 무게중심에서 다루는 삼각형을 초등학교 때 도입되는 삼각형의 정의인 '세변으로 이루어진 도형' 으로 인식하고 있으며, 이에 따라 「선으로서의 삼각형의 무게중심(예: 세 변이 철사로 이루어진 삼각형의 무게중심)」에 응답한 학생이 60명(46%)으로 가장 많이 나왔다. 그러나 중학교에서 다루는 삼각형의 무게중심은 면으로서의 삼각형의 무게중심이므로 이러한 혼란이 생기지 않도록 지도할 필요가 있으며, 교과서에 면으로서의 삼각형에 대한 언급이 요구된다.

<표 7> 중학교 2학년에서 배운 삼각형의 무게중심에 대한 인식조사

질문: 중학교 2학년에서 배운 삼각형의 무게중심은 다음 중 어느 것이라

생각하는가?	
응　답	학생수(단위:명)
점으로서의 삼각형의 무게중심 (예: 무게가 다른 추 세 개의 무게중심)	38
선으로서의 삼각형의 무게중심 (세 변이 철사로 이루어진 삼각형의 무게중심)	60
면으로서의 삼각형의 무게중심 (두께가 고르고 아주 얇은 삼각형 모양의 판의 무게중심)	33

‘사각형의 무게중심에 대하여 배운 적이 있는가?’라는 질문에 대한 응답을 살펴보면 「있다」37명(28%), 「없다」94명(72%)으로 나왔으며, 현행 중학교 2학년 교육과정에서 사각형의 무게중심에 대하여 다루고 있지 않으므로 배우지 않은 경우가 많았다.

<표 8> 사각형의 무게중심에 대한 학습 여부

질문: 사각형의 무게중심에 대하여 배운 적이 있는가?	
응　답	학생수(단위:명)
있다	37
없다	94

‘사각형이 주어져 있을 때, 무게중심은 어디에 있는지 작도해 보세요’라는 질문에 제대로 찾은 학생은 전체 131명 중 단지 2명(1.5%)이었으며 나머지 129명은 사각형의 무게중심을 찾지 못했다. 학생들에게 삼각형의 무게중심을 가르칠 때 삼각형의 세 중선의 교점으로만 지도한다면 사각형 이상의 다각형에서 무게중심을 구하도록 사고를 확장하는 것이 매우 어렵다는 사실을 알 수 있다.

Ⅳ. 삼각형의 무게중심 단원에 대한 교수·학습 방법

수학과 과학의 통합적인 주제로서 지레의 원리와 무게중심의 탐구가 학생들에게 매우 흥미 있는 주제이다. 무게중심은 과학시간에 다루는 지레의 원리에 대해

그것이 성립하는 이유를 짧게 설명해 줌으로써 과학과 수학의 관련성에 대한 깊은 이해를 제공할 수 있다.

교과서의 분석을 바탕으로 학생들의 무게중심에 대한 인식조사 결과를 참고하여 중학교 2학년의 무게중심 단원을 가장 효과적으로 지도하기 위한 교수 · 학습방법을 개발한다. 개발된 교수 · 학습방법은 물리적 실험에 의한 방법, 작도에 의한 방법, 계산에 의한 방법의 3가지 방식을 순차적으로 지도하는 방식이다.

1. 물리적 실험에 의한 방법

물리적 실험에 의한 방법은 지레의 원리에 의한 생활주변의 무게중심에 관련된 것을 발견하는 활동을 통해서 무게중심이라는 물리적 개념을 실험을 통해서 이해하게 하고 삼각형의 중선이 삼각형의 무게중심선(즉 '평형을 이루는 선분')이라는 것을 실험을 통하여 확인한다. 그리고 무게중심선위에 무게중심이 있다는 사실을 통하여 중선의 교점이 삼각형의 무게중심이 된다는 사실을 학생들 스스로 발견하도록 한다면 사각형에서의 무게중심도 쉽게 찾을 수 있다.

삼각형의 중선의 정의에서 유추하여 임의의 n각형의 중선을 정의할 수 있다. 삼각형에서는 임의의 한 꼭짓점과 나머지 두 점의 무게중심을 이은 선을 중선으로 정의한다. 사각형에서는 임의의 한 꼭짓점과 나머지 세 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심을 이은 선을 중선이라고 정의한다.(한인기, 2001)

삼각형에서는 꼭짓점으로부터 2:1로 중선을 내분하는 점이 무게중심이 되므로, 사각형에서는 3:1로 내분하는 점이 무게중심이 됨을 유추할 수 있다. 이러한 추론에 의하면, n각형의 중선이란 한 꼭짓점과 이를 제외한 $n-1$개의 꼭짓점으로 이루어진 다각형의 무게중심을 연결한 선분이다. 이러한 정의를 바탕으로 전통적인 유클리드적 증명을 통해 $n-1:1$로 내분한다는 성질을 도출해 낸다.(김병덕, 2006)

이러한 방법으로 삼각형의 무게중심의 내용을 이해한 학생들은 사각형의 무게중심뿐만 아니라 다각형의 무게중심도 유추를 통하여 구할 수 있을 것이다.

물리적 실험1. 직접실험을 통하여 무게 중심에 대한 개념을 스스로 찾기

지도초점
실생활 문제를 통하여 무게중심이라는 물리적 개념을 실험을 통하여 학생스스로 알게 한다.

<활동1-1> 아래 그림과 같이 길이가 $10cm$이고 두께가 일정한 막대가 있다. 이 막대를 손가락 위에 올려놓아 좌우 균형을 맞추고자 한다. 막대의 어느 위치

에 손가락을 올려놓아야 할까요?

<그림1> 막대의 무게중심

<활동1-2> 아래 그림과 같이 추들이 놓여 있다. 이 추들이 균형을 이루도록 하려면 받침점을 어디에 두어야 할까요?

(1) 무게가 $1g$인 두 개의 추가 있을 때

<그림 2> 무게가 $1g$인 두 개의 추의 무게중심

(2) 무게가 $2g, 1g$인 추가 아래 거리만큼 떨어졌을 때

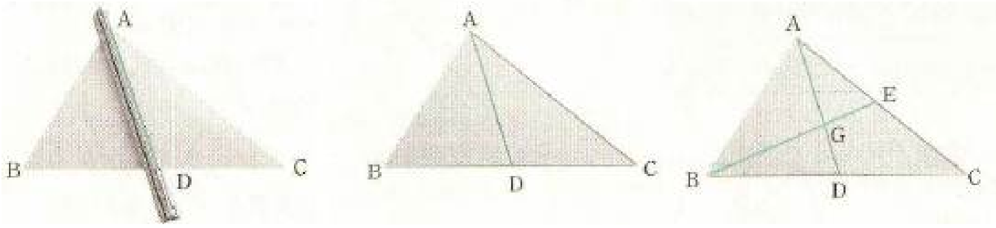
<그림 3> 무게가 $2g, 1g$인 추의 무게중심

물리적 실험2. 삼각형에서 중선이 무게중심선이라는 것을 실험을 통하여 찾기

지도초점 삼각형에서 중선이 삼각형의 무게중심선이라는 것을 실험을 통하여 확인한다.

<활동3[2]>

2) <활동3>은 실험을 이용한 교육과정 조직에 관한 연구(김병덕 2006) P93을 참고함.



<그림 4-(a), (b), (c)> 삼각형에서 무게중심선 찾기 실험

(1) <그림 4-a>와 같이 삼각형을 자의 모서리 위에 올려놓고 D의 위치를 조절하면서 균형을 잡아본 뒤,<그림4-b>와 같이 이위치를 선분으로 표시해 보자. 점 D의 위치는 선분 $\overline{BC}$의 어디쯤에 위치하는가?

(2) <그림4-c>와 같이 꼭짓점 B에 대해서도 마찬가지로 해보자. 점E의 위치는 선분 $\overline{AC}$의 어디쯤에 위치하는가?

(3) <그림4-c>에서 두 선분의 교점을 G라 하자. 이때, 선분 $\overline{CG}$의 연장선과 C의 대변이 만나는 점은 선분 $\overline{AB}$의 어디쯤에 위치하는가?

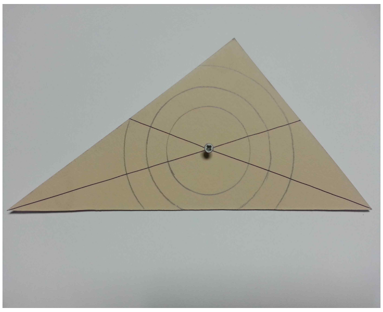
(4) 점 G를 연필의 끝에 올려놓아 보자.

삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 중선이라고 한다. 위의 실험에서 보듯이 삼각형에는 세 개의 중선이 있는데 이들은 모두 한 점에서 만난다. 이 점을 삼각형의 무게중심이라 한다.

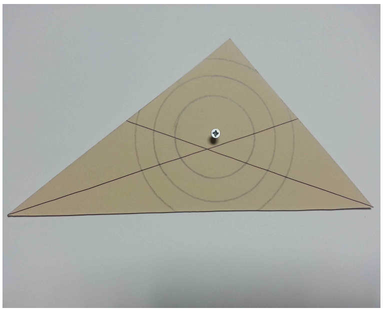
물리적 실험3. 팽이 만들기 실험을 통한 다각형의 무게중심 찾기

지도초점
팽이 만들기를 통하여 교과서의 내용을 실험을 통하여 흥미롭게 접근하여 중선의 교점을 이해한다.

(1) 하드보드지로 삼각형을 만들고 나사못을 회전축으로 하여 팽이를 만들어보자.
그런 다음 <그림 5-(a)>에서 처럼 무게중심에 회전축을 꽂고 팽이를 돌려보자.
(2) 또 다음 <그림 5-(b)>에서 처럼 무게중심이 아닌 점에 나사못을 회전축으로 하여 팽이를 돌려보자. 어떤 현상이 일어나는지 알아보자



<그림 5-a>



<그림 5-b>

이 실험을 통하여 삼각형의 팽이가 회전할 때는 무게중심을 중심으로 회전한다는 사실을 알 수 있다. 따라서 무게중심에 회전축을 꽂아서 돌리면 삼각형 팽이는 회전축을 중심으로 잘 돌아가지만 무게중심이 아닌 곳에 회전축을 꽂아서 돌리면 삼각형 팽이는 흔들림이 심하여 잘 돌지 않는다.

2. 작도에 의한 방법

삼각형에 대해서 그 무게중심은 세 중선의 작도를 통해 찾을 수 있다. 삼각형에 대해서 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하여 작도를 하는 방법과 삼각형, 사각형의 무게중심을 GSP를 이용하여 작도하는 방법을 함께 사용하여 지도한다. 동적 기하소프트웨어인 GSP를 활용하여 무게중심의 원리를 터득하고 이를 이용하여 삼각형과 사각형의 무게중심을 찾아보고 더 나아가 볼록다각형의 무게중심을 유추해 보는 능력을 효과적으로 기를 수 있다.

작도1. 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하여 삼각형의 무게 중심 작도하기

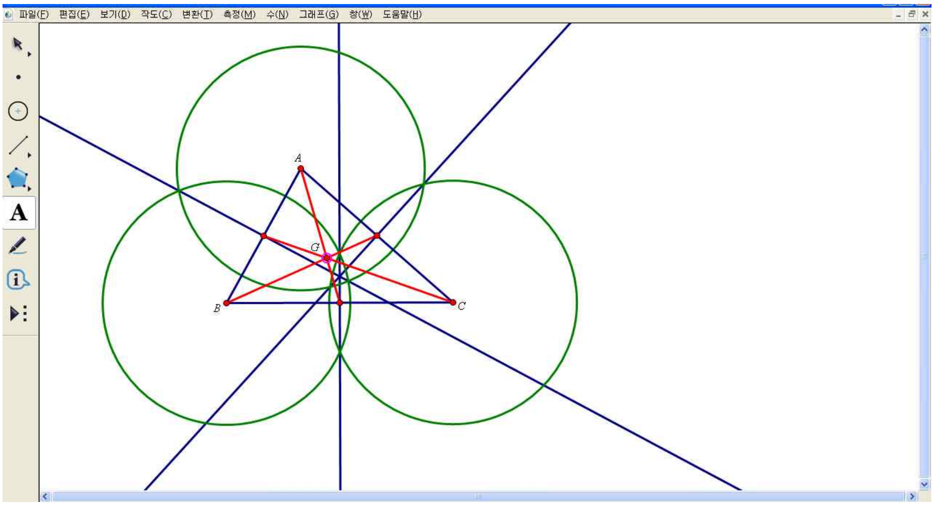
(1) 삼각형에는 몇 개의 중선이 있을까? 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하여 직접 작도해 보고 특징을 말해 보자.

지도초점
작도를 통하여 삼각형의 무게중심을 찾는 활동으로 학생들이 변의 길이를 자로 측정하여 중점을 찾지 않도록 지도 한다

<작도 순서>

① 삼각형의 세 꼭짓점에서 원을 그린다. 이때 원의 크기가 같아야 한다.
원의 반지름은 가장 긴 변의 반보다 크게 그려야 한다.

② 세원의 교점이 되는 부분을 자를 이용하여 각 변의 수직이등분선을 그린다.
③ 각 변의 중점과 삼각형의 각 꼭짓점을 자를 이용하여 선분을 긋는다.
이때 그려지는 선분을 중선이라 한다. 그리고 세 중선의 교점을 삼각형의 무게중심이라 한다.



<그림 6> 자와 컴퍼스를 이용한 삼각형의 무게중심 작도

위의 작도 과정의 결과 삼각형에는 세 개의 중선이 있고, 그 세 개의 중선은 한 점에서 만난다는 사실을 학생 스스로 발견해 본다.

작도2. GSP를 활용하여 삼각형의 무게중심 작도하기

GSP를 이용하여 삼각형의 세 중선을 그려 삼각형의 무게중심을 작도하고, 각각의 꼭짓점을 움직이더라도 무게중심은 꼭짓점으로부터 2 : 1의 비가 유지됨을 학생들 스스로의 확인을 통하여 수학적 다양성의 원리를 구현할 수 있다.

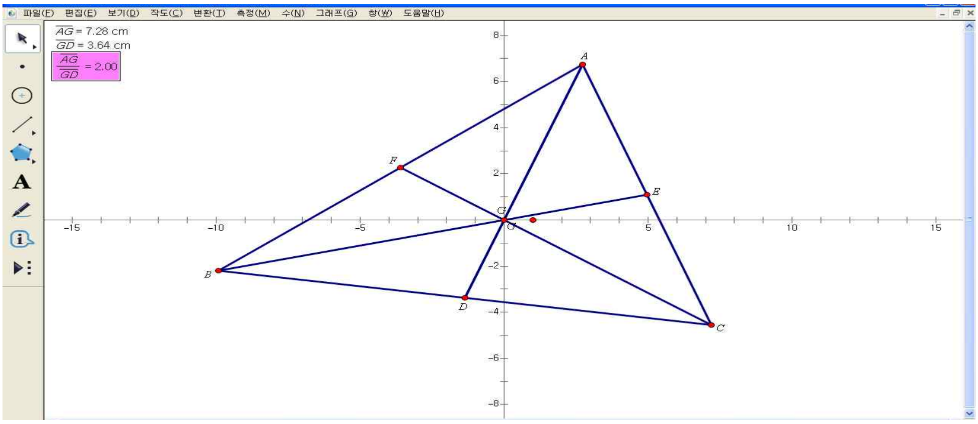
(1) GSP를 이용해 무게중심이 중선의 어디에 있는지 관찰해 보자.

지도초점
GSP를 이용하여 삼각형의 세 중선을 그려 무게 중심을 찾고 삼각형의 무게중심이 중선의 꼭짓점으로부터 $\frac{2}{3}$ 지점에 있다는 사실을 확인하도록 한다. 또한 꼭짓점을 옮기더라도 무게중심은 꼭짓점으로부터 2 : 1의 비가 유지됨을 알게 한다.

<작도순서>

① 각 변의 중점을 작도하여 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 연결하여 중선을 작도한다.

② 각 중선의 교점을 작도한다.



<그림 7> GSP를 이용한 삼각형의 무게중심 작도

이상에서 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 2: 1로 나눈다.

작도3. GSP를 활용하여 사각형의 무게중심 작도하기

(1) GSP를 이용해 사각형의 무게중심이 어디에 있는지 관찰해 보자.

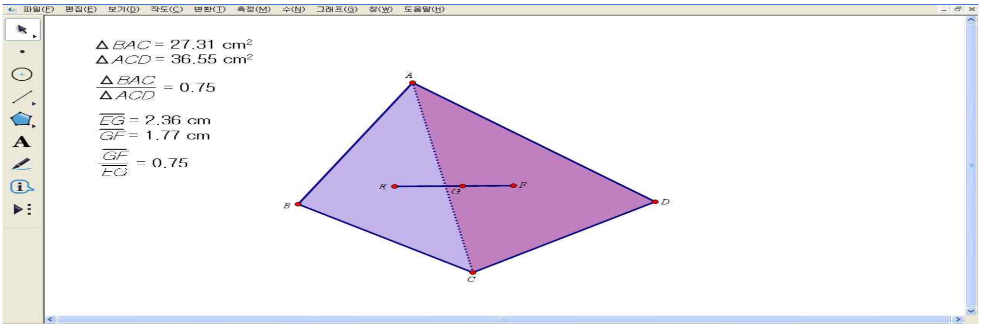
지도초점(2) GSP를 이용하여 사각형을 두 삼각형으로 나누어 각각의 무게중심을 구하여 삼각형의 질량이 무게중심에 모두 모여 있는 것으로 생각하여 지렛대의 원리를 이용하여 무게중심을 구한다.

일반적으로 볼록 사각형은 대각선에 의해 두 개의 삼각형으로 나누어지고, 이때 두 삼각형의 무게중심을 잇는 선분에 대하여 지렛대의 원리에 의하여 두 삼각형의 넓이의 비가 $S_1 : S_2$이면 삼각형의 무게중심을 잇는 선분을 $S_2 : S_1$으로 내분하는 점이 사각형의 무게중심이 된다. 아래 <그림 8>의 사각형의 무게중심 작도의 그림에서 대각선에 의하여 나누어지는 $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 넓이가 각각 S_1, S_2이면 점 G는 $\overline{EF}$를 $S_2 : S_1$으로 내분하는 점이 되고, 이 점 G가 사각형 $ABCD$의 무게중심이 된다.(한인기(2005), 삼각형판과 사각형판의 무게중심에 관

한 연구에서 제시된 방법을 기초로 작도과정을 나타낸 것임)

<작도순서>

① 사각형 $ABCD$의 대각선 AC를 긋는다.
② $\triangle ABC$의 무게중심 E를 작도한다.
③ $\triangle ACD$의 무게중심 F를 작도한다.
④ $\triangle ABC$의 넓이(S_1=27.31)를 계산한다.
⑤ $\triangle ACD$의 넓이(S_2=36.55)를 계산한다.
⑥ $\overline{EF}$를 $S_2 : S_1$로 내분하는 점 G를 작도한다.



<그림 8> GSP를 이용한 사각형의 무게중심 작도

3. 계산에 의한 방법

학생들의 설문조사에서 ‘삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 몇 개라고 생각하는가?’라는 질문에 전체 131명의 중 「3개」라고 응답한 학생이 64명(49%)로 가장 많이 나왔으며, 이는 상당수의 학생들이 삼각형의 중선만이 넓이를 이등분하는 직선이며 무게중심을 지난다고 하는 오개념을 가지고 있음을 보여주었다.

홍갑주(2008)는 삼각형이 세 중선의 교점 위에서 평형을 이루는 이유에 대하여 다음과 같이 주장했다. 교실수업에서는 흔히 중선 양쪽 영역 넓이에 착안한 설명이 이루어진다. 즉, 삼각형의 중선은 그 삼각형의 넓이를 이등분하므로, 중선 양쪽의 무게는 같고 삼각형은 그 위에서 평형을 이룬다. 그런데 세 중선 각각에 대하여 이러한 사실이 성립하므로, 삼각형은 세 중선의 교점 위에서 평형을 이룬다.

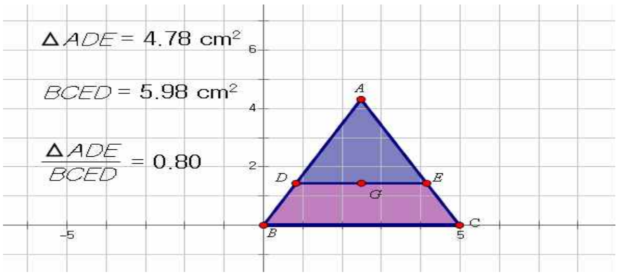
삼각형의 넓이를 이등분한다는 것은 중선이 가진 중요한 기하학적 성질이며, 무게가 넓이에 비례한다는 것도 옳다. 무게를 ‘아래로 누르는 힘’으로 받아들일

때 이 설명은 매우 그럴듯해 보인다. 그러나 중선이 삼각형의 넓이를 이등분하는 것이 중선 위에서 삼각형이 평형을 이루는 원인은 아니다. 무게중심은 넓이를 이등분하는 직선의 교점이라는 것은 일종의 오개념이다. 계산에 의한 방법을 통하여 학생들 스스로 이러한 오개념을 바로 잡을 수 있다.

계산1. GSP를 활용하여 삼각형과 사각형의 넓이 계산하기

지도초점
직선이 삼각형의 무게중심을 지난다고 해서 삼각형의 넓이를 이등분하는 것이 아니며, 삼각형의 넓이를 이등분한다고해서 반드시 그 직선이 무게중심을 지나는 것이 아님을 알게 한다.

<문제> 한 변의 길이가 $5cm$인 정삼각형ABC에서 무게중심 G를 지나고 변 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 정삼각형ABC에서 변AB와 l의 교점을 D, 변 CA와 l의 교점을 E라 할 때, $\triangle ADE$와 사다리꼴 $BCED$의 넓이를 구하시오.



<그림 11> GSP를 활용한 삼각형과 사각형의 넓이 계산

① $\triangle ADE$의 넓이를 구하시오.

② 사다리꼴 $BCED$의 넓이를 구하시오.

③ $\triangle ADE$의 넓이: 사다리꼴 $BCED$의 넓이의 비를 구하시오.

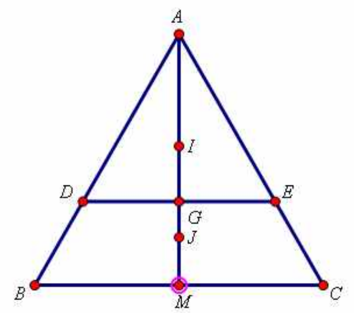
④ 무게중심을 지나는 직선이 삼각형의 넓이를 이등분하는가?

⑤ $\overline{BC}$와 평행하면서 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{DE}$의 아래쪽에 있는가? 아니면 위쪽에 있는가?

계산2. 한 변의 길이가 a인 정삼각형에서 넓이 계산을 통한 무게중심의 일치성 탐구<심화과정>

지도초점
정삼각형ABC에서 무게중심 G와 $\triangle ADE$의 무게중심 I 와 사다리꼴 $BCED$의 무게중심 J의 넓이 계산을 통하여, ($\triangle ADE$의 넓이)×($\overline{IG}$의 길이)=(사다리꼴 $BCED$의 넓이)×($\overline{GJ}$의 길이)이 성립하는지를 확인하도록 하고, 아르키메데스의 지레의 원리에 의해서 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심임을 알게 한다.

<문제> 한 변의 길이가 acm인 정삼각형ABC에서 무게중심 G를 지나고 변BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 정삼각형ABC에서 변AB와 l의 교점을 D, 변 CA와 l의 교점을 E라 할 때, 정삼각형ABC의 무게중심을 G, $\triangle ADE$의 무게중심을 I, 사다리꼴 $BCED$의 무게중심을 J라 할 때, 다음을 구하시오.



<그림 12> 넓이 계산을 통한 무게중심의 일치성 탐구

① $\overline{AM}$의 길이는?

<풀이> 정삼각형의 높이 구하는 공식에 의해서$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이다.

② $\overline{AG}$의 길이는?

<풀이> $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$이다.

③ $\overline{IG}$의 길이는?

<풀이> $IG=\frac{1}{3}\overline{AG}=\frac{\sqrt{3}}{9}a$ 이다.

④ $\triangle ADE$의 넓이는?

<풀이> $\triangle ADE$의 넓이는 정삼각형의 넓이 구하는 공식에 의하여

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2}{3}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$ 이다.

⑤ 윗변의 길이가 m ,아랫변 길이가 n인 사다리꼴의 무게중심은 윗변과 아랫변의 중점을 연결한 선분상의 윗변의 중점으로부터 $2n+m:2m+n$으로 내분한다는 공식…※을 이용하여 $\overline{GJ}$의 길이를 구하면?

<풀이> 사다리꼴의 무게중심을 구하는 공식에 의하여

$GJ:JM=(\frac{2}{3}a+2a):2\times\frac{2}{3}a+a=\frac{8}{3}a:\frac{7}{3}a=8:7$이므로

$\overline{GJ}=\frac{8}{15}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{45}a$ 이다.

⑥ 사다리꼴 $BCED$의 넓이를 구하면?

<풀이> 사다리꼴 $BCED$의 넓이는$=\triangle ABC-\triangle ADE=\frac{5\sqrt{3}}{36}a^2$ 이다.

⑦ $\triangle ADE$의 넓이: 사다리꼴 $BCED$의 넓이의 비를 구하면?

<풀이> $\triangle ADE$의 넓이:사다리꼴 $BCED$의 넓이의 비$=\frac{\sqrt{3}}{9}a^2:\frac{5\sqrt{3}}{36}a^2=4:5$ 이다.

⑧ $\overline{IG}$의 길이:$\overline{GJ}$의 길이의 비를 구하시오.

<풀이> $\overline{IG}$의 길이:$\overline{GJ}$의 길이$=\frac{\sqrt{3}}{9}a:\frac{4\sqrt{3}}{45}a=5:4$이다.

⑨ 지레의 원리에 의해서 ($\triangle ADE$의 넓이)×($\overline{IG}$의 길이)=(사다리꼴 $BCED$의 넓이)×($\overline{GJ}$의 길이)이 성립하는지 확인하시오.

<풀이> ($\triangle ADE$의 넓이)×($\overline{IG}$의 길이)= $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{9}a = \frac{1}{81}a^3$

(사다리꼴 $BCED$의 넓이)×($\overline{GJ}$의 길이)= $\frac{5\sqrt{3}}{36}a^2 \times \frac{4\sqrt{3}}{45}a = \frac{1}{81}a^3$이다.

따라서, 아르키메데스의 지레의 원리에 의해서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

학교에서의 기하교육은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적인 성질을 이해함으로써 기하 지식을 습득하고 추론능력을 향상시킴을 목적으로 한다. 기하학적인 지식을 습득함에 있어서 학생들의 활동이 증명보다 중시되며 학생수준에 합당한 활동을 지향하고 다양한 학생의 경험과 기하지식을 토대로 한 추론학습이 필요하다. 현행 교과서의 삼각형의 무게중심은 대부분 물리적 실험을 거치지 않고 중선으로부터 정의된다. 그러나 이것은 이러한 정의를 사용할 수 없는 다각형, 다각형 이외의 평면도형, 밀도가 일정하지 않은 여러 가지 물체에 대한 무게중심을 생각해 보게 하는 사고의 확장 또는 창의적 사고를 어렵게 한다.

본 연구에서는 무게중심에 대한 이러한 문제점 인식을 바탕으로 중학생들이 무게중심에 관하여 이해하기 어려워하는 부분 및 오개념은 무엇인지 조사하고, 삼각형의 무게중심에 대한 어떠한 교수·학습방법이 가장 효과적인지에 대한 연구를 수행하였다. 이를 위하여 먼저 무게중심에 관한 선행 연구와 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 2학년 교과서 13종을 분석하여 무게중심의 교수·학습과 관련한 다음과 같은 분석 결과를 얻었다.

첫째, 형식적 증명을 약화시키고 다양한 정당화 학습을 강조하고 있는 2009 개정교육과정에 따른 무게중심의 교수·학습은 실험적 정당성을 포함한 다양한 정당화 과정을 포함해야 한다.

둘째, 2009개정 교육과정에 따른 중학교 수학2 교과서 13종을 살펴본 결과 3종의 교과서는 무게중심을 다룸에 있어서 삼각형의 성질 단원에서 삼각형의 다른 중심과 같은 또 다른 중심임을 강조하기 위해서 삼각형의 외심, 내심, 무게중심

순으로 다루고 있고, 이외의 교과서 10종은 이전의 교육과정과 같이 닮음의 성질을 학습한 후 이를 활용하여 증명하도록 하는 현 교육과정을 따르고 있다. 3종의 교과서에서 보인 삼각형의 무게중심의 위치변화는 ‘평형을 이루는 선분의 교점’으로 접근을 가능하게 하며 중선의 교점으로만 정의하고 물리적인 성질과 원리가 규명되지 않은 상태로 학생들을 지도하는 것에서 탈피하여 삼각형에서 확장된 도형에서 무게중심을 찾는 활동을 가능하게 할 것이다.

이러한 분석결과를 바탕으로 삼각형의 무게중심 학습을 마친 중학교 3학년 학생 131명을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 설문지는 ‘다각형의 무게중심’에 대한 학생들의 이해정도를 알아보기 위한 것으로 총 7문항으로 구성되었으며, 학생들이 삼각형의 무게중심에 대하여 어떻게 이해하고 있는지와 사각형의 무게중심을 구할 수 있는지를 알아보았다. 특히 상당수의 학생들이 삼각형의 중선만이 넓이를 이등분하는 직선이며 무게중심을 지난다고 하는 오개념을 가지고 있음을 확인할 수 있었다.

그리고 무게중심에 대한 이론적 배경과 학생들의 무게중심에 대한 인식조사결과를 바탕으로 하여 중학교 2학년 과정의 무게중심 단원을 제한된 시간(두 시간 기준) 내에 수학교실에서 가장 효과적으로 지도하기 위한 교수ㆍ학습 방법을 개발하였다. 교수ㆍ학습방법은 다음과 같은 물리적 실험에 의한 방법, 작도에 의한 방법, 그리고 계산에 의한 방법의 3가지 방식을 순차적으로 지도하는 방식으로서 대부분의 선행연구는 영재 학생들을 대상으로 하였지만 본 연구는 일반적인 중학교 2학년 학생들을 대상으로 한 교수ㆍ학습 방법이다.

첫째, 물리적 실험에 의한 방법은 지레의 원리에 의한 생활주변의 무게중심에 관련된 것을 발견하는 활동을 통해서 무게중심이라는 물리적 개념을 실험을 통해서 이해하게 하고 삼각형의 중선이 삼각형의 무게중심선(즉, ‘평형을 이루는 선분’)이라는 것을 실험을 통하여 확인한다. 그리고 무게중심선 위에 무게중심이 있다는 사실을 통하여 중선의 교점이 삼각형의 무게중심이 된다는 사실을 학생들 스스로 발견하도록 한다면 사각형에서의 무게중심도 쉽게 찾을 수 있다. 또한 삼각형의 중선의 정의에서 유추하여 임의의 n각형의 중선을 정의할 수 있다. 삼각형에서는 임의의 한 꼭짓점과 나머지 두 점의 무게중심을 이은 선을 중선으로 정의한다. 사각형에서는 임의의 한 꼭짓점과 나머지 세 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심을 이은 선을 중선이라고 정의한다. 삼각형에서는 꼭짓점으로부터 2:1로 중선을 내분하는 점이 무게중심이 되므로, 사각형에서는 3:1로 내분하는 점이 무게중심이 됨을 유추할 수 있다.

둘째, 작도에 의한 방법에서는 삼각형에 대해서 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하여 작도를 하는 방법과 삼각형, 사각형의 무게중심을 동적기하소프트웨어인 GSP를 이용하여 작도하는 방법을 사용한 지도방법을 도입하였다. GSP를 활용함

으로써 효과적으로 학생들이 무게중심의 원리를 터득하고, 이를 이용하여 삼각형과 사각형의 무게중심을 찾아보고, 더 나아가 볼록다각형의 무게중심도 유추하는 능력을 기를 수 있다.

셋째, 학생들의 설문조사 결과 상당수의 학생들이 삼각형이 그 무게중심위에서 실제로 평형을 이루는 이유를 무게중심이 넓이를 이등분하는 직선의 교점이라는 오개념을 가지고 있었다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 학생들이 직접 단계별로 넓이 계산을 수행하는 지도방법을 제시하였다.

수학교실에서 무게중심을 지도하는 데 있어서 그 본질적 특성에 초점을 맞추어 학생들로 하여금 스스로 성질을 탐구하고 이해하는 활동을 할 수 있도록 장려하는 것이 매우 중요하다고 판단된다. 이러한 관점에서 본 연구에서 제안한 물리적 실험에 의한 방법, 작도에 의한 방법, 계산에 의한 방법의 세 가지 방식을 순차적으로 지도하는 것이 매우 효과적인 교수 · 학습방법이라고 사료된다. 추후 연구 과제로서 본 연구에서 제안한 교수 · 학습방법을 수업 현장에 적용하고 그 결과를 분석해 보고자 한다.

참 고 문 헌

[1] 강옥기 외 8인(2012). 중학교 수학 2, 두산동아(주).

[2] 강옥기(2003). 수학과 학습지도와 평가론, 경문사.

[3] 고호경 외 12인(2012). 중학교 수학 2, (주)교학사.

[4] 김병덕(2005). 실험을 이용한 교육과정 조직에 관한 연구, 서울대학교 석사학위 논문.

[5] 김서령 외 10인(2012). 중학교 수학 2, (주)천재교육.

[6] 김선희 · 김기연(2005). 수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구, 수학교육학연구, 15(3), 335-352.

[7] 김원경 외 8인(2012). 중학교 수학 2, (주)비상교육.

[8] 류희찬 외 9인(2012). 중학교 수학 2, (주)천재교과서.

[10] 박달원(2006). 영재학생들을 위한 삼각형의 무게중심 지도 방법. 한국학교수학회논문집. 9(1), 93-104.

[11] 셔먼스타인, 이우영 역(2006). 아르키메데스, 경문사

[12] 신준국 외 12인(2012). 중학교 수학 2, 두배의 느낌.

[13] 신항균 외 6인(2012). 중학교 수학 2, (주)지학사.

[14] 우정호 외 16인(2012). 중학교 수학 2, 두산동아(주).

[15] 우정호(2004). 수학학습지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.
[16] 윤정민(2010). 수학 영재프로그램 개발을 위한 볼록 다각형의 무게중심 연구. 서울교육대학교 석사학위 논문.
[17] 이강섭 외 10인(2012). 중학교 수학 2, (주)미래엔.
[18] 이준열 외 7인(2012). 중학교 수학 2, (주)천재교육.
[19] 정상권 외 6인(2012). 중학교 수학 2, (주)금성출판사.
[20] 하영화 · 고호경(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 무게중심 교수 · 학습제안, 한국수학교육학회지 시리즈 E, 25(4), 681-691.
[21] 한인기(2001), 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구, 중등교육연구, 13, 206-215.
[22] 한인기(2005), 삼각형판과 사각형판의 무게중심에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E<학교교육논문집>, 19(3), 471-484.
[23] 허민 외 8인(2012). 중학교 수학 2, (주)대교.
[24] 홍갑주(2005). 도형의 무게중심에 관련된 오개념 및 논리적 문제. 학교수학.7(4),391-401.
[25] 홍갑주(2008), 아르키메데스 수학의 교육적 연구, 서울대학교 박사학위 논문.
[26] 홍갑주(2008), 아르키메데스가 들려주는 무게중심과 회전체 이야기, (주)자음과 모음.
[27] 황선욱 외 8인(2012). 중학교 수학 2, (주)좋은책신사고.

Kim, Dong Hwa
Department of Mathematics Education
Pusan National University
Pusan, 609-736 Korea
E-mail : dhgim@pusan.ac.kr

Keum, Joung Yon
SinEon Middle School
UlJu, UlSan, 689-806 Korea
E-mail : 0525kjy@hanmail.net

부록

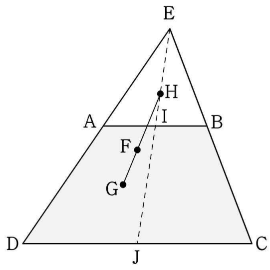
※ 사다리꼴의 위치 공식에 대한 Archimedes의 증명[3)]

명제. 변AB와 CD가 평행한 사다리꼴 $ABCD$에서 변 AB의 길이가 a, CD의 길이가 b이고 $a<b$라 하자. 이 사다리꼴의 무게중심은 변 AB와 CD의 중점을 연결한 선분상의, 변 AB의 중점으로부터 정확히 $2b+a:2a+b$로 내분하는 위치에 있다.

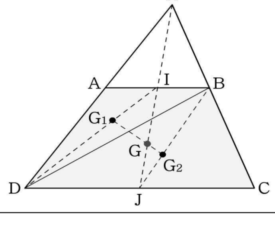
(증명) 우선, AB의 중점을 I, CD의 중점을 J라 할 때, 사다리꼴 $ABCD$의 무게중심은 선분 IJ 위에 있어야 함을 보이자. 변 AD를 A 쪽으로, BC를 B쪽으로 연장하여 그 교점을 E라고 하자. 이 때 만들어지는 삼각형 ECD는 삼각형 EBA와 사다리꼴 $ABCD$로 분해된다. 또, 삼각형 ECD의 중선 EJ는 점 I를 지난다.

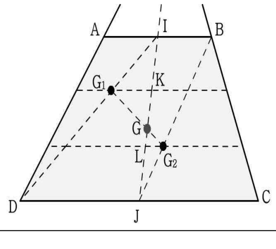
이제, 사다리꼴 $ABCD$의 무게중심을 G, 삼각형 EBA의 무게중심을 H, 삼각형 ECD전체의 무게중심을 F라 하자. H는 삼각형 EBA의 중선 EI위에 있으며, F는 선분 GH위에 있다. 이때 G가 선분 IJ위에 있지 않다고 가정하자.

그러면 F는 선분 EJ위에 있을 수 없고, 이것은 삼각형의 무게중심은 그 중선 위에 있어야 한다는 사실에 모순이다. 그러므로 G는 선분 IJ위에 있어야 한다.



이제 G의 정확한 위치를 구하자. 사다리꼴 $ABCD$를 삼각형 ABD와 BCD로 나누고 그 무게중심을 각각 G_1, G_2라 하자. 이 때 사다리꼴 $ABCD$전체의 무게중심 G는 선분 G_1G_2위에 있다. 결국 G는 선분 IJ와 G_1G_2의 교점이다.





여기서 변 AB의 길이를 a, CD의 길이를 b라 두면, $\triangle ABD : \triangle BCD = AB : CD$ $=a : b$이고, 따라서 지레의 원리에서 $GG_1 : GG_2 = b : a$이다. 이제, G_1, G_2를 지나고 AB에 평행한 두 직선을 그려서 그 교점을 각각 K, L이라 하자. 그러면 $IK = KL = LJ$ 이다. 또한 $GG_1 : GG_2 = b : a$이므로 $KG : GL = b : a$이다. 그러므로 $IG : GJ = b + (a+b) : a + (a+b) = 2b + a : 2a + b$이다. □

3) 홍갑주(2008), 아르키메데스 수학의 교육적 연구(p168)