East Asian Mathematical Journal
Vol. 29 (2013), No. 4, pp. 449-466
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2013.030

특정 정보의 정신적 표상에 대한 연구

A Study on the Mental Representation of a Specific Data

강 정 기 · 노 은 환*

ABSTRACT. This paper started from a question: Can it help a student solve the problem to give supports in point of view of a teacher knowing the solution. We performed a case study to get an answer for the question. We analysed a case which students do not make full use of data in the mathematical problem from this point of view of the mental representation. We examined closely the cause for not making full use of data. We got that the wrong mental representation which the students get from data in the problem lead to not making full use of data. We knew that it is insufficient to present the data not making use of. To help a student truly, it is necessary to give a aid based on a student's mental representation. From the conclusion of study, We got that figuring out student's mental representation is important and hope that many investigation about student's mental representation for various problem occur with frequency.

Ⅰ. 서 론

문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 한다는 An agenda for action(NCTM, 1980)의 권고 이후 문제 해결은 모든 수학 학습의 통합적인 부분으로서 수학 교육의 기본적인 목표 중의 하나로 지속적으로 강조되고 있다(NCTM, 2000). 우리나라에서도 제 4차 수학과 교육과정에서 수학교육의 목표를 "수학의 초보적인 지식과 기능을 익혀, 일상생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다"로 정한 이래로 2007 개정 교육과정에 이르기까지 문제 해결은 지속적으로 강조되고 있다(교육과학기술부, 2007).

수학 교과에서 문제 해결의 중요성이 강조되면서 그 동안 문제 해결과 관련된

2013년 1월 21일 투고, 2013년 8월 26일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key Word: 문제에 주어진 정보, 정신적 표상
* 교신저자

많은 연구들이 있었다(권오남・백한미, 1997; 김동근・윤대원, 2012; 김선유, 1995; 김철환・박배훈・정창현, 1988; 문성길・전평국, 2001; 성인서, 1987; 신수진・강정기・노은환, 2012; 유윤재, 2009; 윤대원・김은주・유익승, 2006; 전영주・정완수, 2002; 한인기, 2003, Engel, 1997; Schoenfeld, 1985; Zeitz, 1999). 특히 Polya(1956)는 문제 해결을 자료와 미지인 것 사이의 빈 공간, 즉, 다리를 놓아야 할 공백을 메워 가는 것으로 보고 '자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까?', '자료는 모두 사용하였는가?', '조건은 모두 사용하였는가?', '가정을 모두 사용하였는가?' 등의 발문으로 문제에 대한 이해의 약점과 빠뜨린 요소를 발견하는 데 도움을 주어야 한다고 하였다. 그리고 이러한 발문은 활용하지 못하였거나 빠뜨린 정보를 활용하려는 시도를 하게 함으로써 궁극적으로 문제 해결의 실마리를 발견하고, 추구해 나아가야 할 정확한 탐구 방향을 알게 되며 결정적인 아이디어에 도달할 좋은 기회를 제공할 수 있다고 하였다.

이처럼 수학 문제에서 주어진 정보는 문제 해결의 실마리가 될 수 있으며, 이들을 얼마나 잘 활용하는가는 문제 해결과 직결되는 부분이다. 따라서 수학에서 문제 해결은 주어진 정보로부터 미지의 정보를 찾아가는 과정으로서 볼 수 있으며, 이러한 관점을 유익승(2010)은 '정보의 관점에서 문제 해결'이라고 정의하기도 하였다. 이외에도 한인기(1998), Nilssen(1971) 등도 같은 맥락으로 문제 해결을 설명하기도 하였다. 결국 주어진 정보를 잘 활용하는 것은 문제 해결의 성공으로 이어질 수 있으며, 활용하지 못하는 것은 문제 해결의 실패로 이어진다는 것을 알 수 있다.

그런데 문제 해결자는 문제에서 주어진 정보를 그대로 받아들이지 않는다. 그들은 문제를 읽은 후 어떠한 방식으로든 나름대로 머릿속에서 정신적 표상(mental representation)[2]을 하게 된다(박경미, 1993). 즉, 문제에서 주어진 정보는 문제 해결자에 의해 번역되어 해석되는 것이며, 이는 곧 그들이 주어진 정보를 이해하고 받아들인 형태로 볼 수 있다. 그런데 주어진 정보에 대한 이해가 다를 경우, 정보의 활용은 달라지게 된다. 따라서 문제 해결자가 문제에 대해 갖는 정신적 표상은 문제에서 주어진 정보의 활용과 직결된다고 볼 수 있다. 이와 같은 맥락에서 박경미(1993)는 '문제를 얼마나 효과적으로 표상할 수 있는가 하는 수준은 문제 해결 능력과 직결된다'고 하였다. 그러므로 주어진 정보를 이용하지 못하는 사례는 문제 해결자의 정신적 표상으로부터 해석할 필요가 있다. 즉, 수학문제에서 주어진 정보를 활용하지 못하여 어려움을 겪는 문제 해결자에 대한 이해는 그들이 문제에서 갖게 된 정신적 표상의 탐색을 통해 가능할 수 있으며, 이것은 문제 해결자를 돕는 방안을 제시할 수 있는 밑바탕이 될 수 있다고 생각된다.

2) 과거에는 representation은 표상으로 presentation은 표현으로 구분하여 사용하였다. 그러나 국내에서는 혼용하여 사용하는 경우가 많고 학자들마다 구분하는 기준이 다르며, 주로 둘을 구분하지 않고 표현으로 사용하는 경우가 많다. 박경미의 경우에도 representation을 표현으로 번역하였다. 그러나 본 연구에서는 representation을 모두 표상으로 통일하여 사용할 것이다.

문제 해결은 이해, 계획, 실행, 반성의 단계를 거치는 일련의 과정이며(Polya, 1956), 문제 해결에 대한 표상의 관점에서의 접근은 이 중 이해 단계에 초점을 둔 접근으로 볼 수 있을 것이다. 문제 해결에서 이해는 수학교육에서 관심의 대상으로 많은 연구가 이루어지고 있으며(김경미・황우형, 2012; 박선호・표성수, 2012; 조경희・권오남, 2010; 최지영・방정숙, 2012; 하수현・이광호, 2011), 이들 대다수의 연구는 개념 이해에 초점을 맞추고 있다. 이것은 개념의 이해가 곧 문제 해결과 직결될 것이라는 생각에서 비롯된 것이다. 그런데 대부분의 선행 연구는 문제에 주어진 개개의 정보를 세세히 다루기보다, 개념 이해에 대한 조사에 그치고 있는 경향이 많다.

그러나 문제 해결에서 이해는 문제에서 주어진 각 정보에 대한 이해로부터 시작되는 복잡한 사고 과정이기에, 개념 이해에 그친 접근으로는 이 복잡한 과정을 탐구하기에 부족함이 있을 것으로 생각된다. 따라서 단순히 개념적 시각에서 문제 해결의 이해에 대해 접근하기보다, 문제 그 자체에 주어진 각 정보에 대한 이해 부분에 초점을 둔 연구가 추가로 진행된다면 문제 해결에서 이해를 보다 잘 해석하고 다룰 수 있는 계기가 될 것이라고 생각된다.

본 연구는 '연립방정식 문제'에서 특정 정보를 이용하지 못하여 문제 해결에 어려움을 겪는 학생을 만나면서 시작되었다. 학생의 문제 해결에 결정적 역할을 할 것이라고 확신하는 연구자가 제공한 몇 가지 도움[3]이 학생에게는 전혀 와 닿지 않았다.

연구자는 이러한 현상에 대한 근본적인 이해를 위해 학생의 사고에 대한 분석을 모색해야할 필요성을 느꼈다. 이에 본 연구에서는 문제 해결에 실패한 원인을 정신적 표상의 관점에서 살펴보고자 하였다. 이를 위해 "주어진 문제에서 특정 정보가 문제 해결에 어떻게 작용하는지를 몰라 어려움을 겪는 연구 대상자의 정신적 표상은 무엇인가?"를 규명하는 것을 연구 문제로 설정하였다.

Ⅱ. 표상과 문제 해결

문제에서 주어진 정보로부터 문제 해결자가 갖는 표상에 대한 여러 학자의 견해를 알아보고, 문제 해결자가 갖는 정신적 표상의 측면에서 문제 해결에 대해 살펴보고자 한다.

---

3) 정답을 이미 알고 있는 누군가가 적합하다고 생각하는 도움을 뜻하며, 본 연구에서는 주어진 문제의 특정 정보가 문제 해결에 어떻게 작용할 수 있는지에 대해 파악하지 못하여 어려움을 겪는 학생에게 제공한 두 가지 맥락의 도움을 의미한다. 그 중 하나는 문제에서 '자료나 조건을 모두 사용하였는가?'라고 물어주는 것이다. 또 다른 하나는 자료나 조건을 모두 사용하는지를 묻는 발문에도 불구하고 어려움을 겪는 경우 이용하지 못한 정보를 직접 언급하여 확인하게 하는 것을 말한다. 사실 정답을 알고 있는 사람의 입장에서 전자도 상당한 도움이며, 후자도 문제 해결에 직결되는 직접적인 도움임에도 여전히 학생은 문제를 해결하지 못하였다.

1. 표상의 의미

객관적인 문제와 문제 해결자가 이해하는 바의 내용은 반드시 같은 것은 아니기 때문에 '문제의 표상'이란 문제가 등장하게 된다. 문제의 표상이란 어떤 문제해결자가 보고 이해하는 바의 문제이며 이를 문제 공간(problem space)이라 부르기도 한다. 문제에 대한 이해가 다르면 해결의 접근은 달라지기 때문에 문제를 어떻게 표상하여 문제 공간을 만드느냐는 중요하다. 사람들은 여러 가지 이유로 문제 해결 방법이 다를 수 있는데, 문제 해결자가 문제를 해결할 수 있느냐 또는 얼마나 쉽게 해결할 수 있느냐를 결정하는 가장 중요한 사실은 문제 해결자가 어떤 문제에 대한 정신적 표상을 어떤 방식으로 구성하느냐 하는 것이다. 다시 말하면, 같은 문제 장면이라도 그것을 사람에 따라 다르게 이해하고 지각할 수 있다는 것이다(김영채, 1995).

일반적으로 표상은 수학을 수행하는 학생들의 마음속에서 '내적으로' 발생하는 과정 및 결과 뿐 아니라 '외적으로' 관찰 가능한 과정 및 결과를 모두 일컫는다(NCTM, 2000). 이러한 표상에 대해 전자는 내적 표상, 후자는 외적 표상을 구분하여 생각한다(Goldin & Shteingold, 2001; Miura, 2001). 내적 표상과 외적 표상의 구분은 연구자의 관점에 따라 조금씩 차이가 난다. 장혜원(1997)은 그의 연구에서 내적 표상은 '표상', 외적 표상은 '표현'으로 용어를 달리하여 설명하면서 이 둘을 포괄하는 의미로 '표상'이라는 용어를 사용하였다. 즉, 표상은 표, 그림, 그래프 등과 같은 외적으로 관찰 가능한 표현을 포함할 뿐 아니라 학생들의 인지 속에서 발생하는 것을 포괄하는 의미인 것이다.

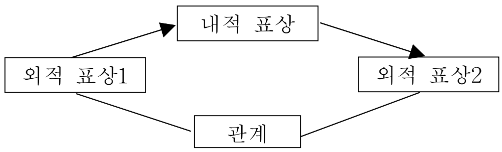
이에 반해 Miura(2001)는 의미 공유의 측면에서 표상을 구분하여 설명하고 있다. Miura(2001)는 외적 표상을 '교육에서의 표상'이라 명명하면서 이는 교수자와 학습자 사이의 커뮤니케이션을 통한 의미공유로 형성되며, 정의, 예, 모델을 외적 표상의 예로 들었다. 내적 표상은 수학적 개념이나 문제 해결법의 발견에 대해 스스로 구축하는 과정으로서 다른 사람과 공유하지 않고 학생 안에서 일어나는 작용으로 보고, 이를 인지적 표상이라고 불렀다.

Goldin(2008)은 외적 표상은 '행동주의'의 관점에서 본 것이고, 내적 표상은 '구조주의'의 관점에서 강조되는 표상이라고 말한다. 내적 표상의 발달을 강조한 Goldin(2008)은 학생들이 표상을 사용하여 이야기할 때 그 표상은 내적 표상 안에 있는 넓은 체계에 속해 있다고 이야기 하였다. 특히 Goldin은 내적 표상이란 학생의 개인적인 상징 구조와 수학적 기호의 의미를 이해하는 것 뿐 만 아니라 그들의 모국어와 시각적 이미지, 공간적 표상, 문제 해결 전략과 발견법, 그리고 수학적 관계에 대한 사고 작용까지도 포함하는 것으로 설명하였다.

한편, Goldin(2008)은 내적 표상과 외적 표상은 순환적으로 상호작용한다고 하였다. 개인이 말이나 글 또는 외적인 구체적 요소의 조작을 통해서 내적 표상을 물리적인 형태로 외현화하며, 외적인 기호체계와의 상호작용이나 단어나 문장,

식이나 그래프 등을 읽고 해석함으로써 내면화하기도 하는 것이다.

또한 권성룡(2003)은 표상은 외적으로 표현된 것으로부터 수학적 개념이나 관계를 감지해내는 과정도 포함하며, 표상은 과정과 결과를 모두 지칭한다고 하였다. 이런 측면에서 표상은 표현되어 있는 것과 새로이 표현하는 것 사이의 관계를 설정하는 사상(map)이라고 하였다. 이러한 견해를 그는 다음 [그림 Ⅱ-1]과 같이 제시하였다.



[그림 Ⅱ-1] 표상의 과정적 측면(권성룡, 2003)

즉, 문제 해결자는 문제에서 주어진 외적 표상을 해석하고 내면화하여 내적 표상을 형성하게 된다. 또 이러한 내적 표상은 또 다른 외적 표상으로 외현화함으로서 이미 형성된 외적 표상과 새롭게 형성된 외적 표상 사이의 관계를 설정하게 되는 것이다. 이를테면, '동생의 15년 후의 나이는 현재 나이의 4배보다 3살 적을 때, 동생의 현재 나이는?'라는 문장제 문제가 제시되었을 때, 문제 해결자는 자신의 생각대로 번역하여 이해하게 된다. 즉, 외적 표상에 대한 내적 표상을 갖게 되며, 이러한 내적 표상은 수학적 언어로 표현된 방정식 $x+15=4x-3$와 같은 새로운 외적 표상으로 외현화된다. 또 다시 이 외적 표상은 내적 표상의 대상이 되며, 내적 표상은 또 다른 외적 표상을 형성하게 한다. 이 처럼 문제 해결의 과정은 표상의 관점에서 주어진 외적 표상이 내적 표상으로 이해되며, 이러한 내적 표상은 새로운 외적 표상을 형성하게 하는 일련의 순환 과정이 문제의 해답에 이를 때까지 반복되는 과정이라 볼 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 표상은 연구자에 따라 그 관점이 조금씩 다르지만 외적 표상과 내적 표상으로 구분함을 알 수 있다. 대체적으로 외적 표상은 외적으로 관찰 가능한 것이며, 내적 표상은 마음속에서 일어나는 내면적인 것이었다. 그런데 문제 해결자가 문제를 스스로 이해하고 지각하는 내적 표상은 그의 사고 속에서 일어나는 현상이기에 이것 자체를 직접적으로 관찰하는 것은 불가능하다. 이러한 한계 때문에 내적 표상을 확인하려는 연구자의 발문에 대해 학생들이 보이는 외적 표상에 의해 그가 갖는 정신적 표상을 추측[4]할 수밖에 없다.

본 연구에서 외적 표상은 관찰 가능한 형태로 나타나는 일체의 것으로 정의한

4) 여기서 외적 표상으로 내적 표상을 추측한다는 말은 외적 표상을 내적 표상의 부분집합으로 보는 것이 아니라, 내적 표상을 바탕으로 외적 표상이 형성되었기 때문에 외현화된 외적 표상을 기반으로 그것의 근간이 된 내적 표상을 추측한다는 의미이다. 또한 본 논문에서 '정신적 표상을 탐색한다', '정신적 표상을 살펴본다'와 같은 말은 외적 표상에 기반하여 정신적 표상을 추측한다는 의미로 사용된다.

다. 외적으로 관찰되는 행동이나 언어 및 기록이 곧 외적 표상이다. 그리고 내적 표상(정신적 표상)[5]은 학생들이 문제를 스스로 이해하고 지각하는 것 뿐 만아니라 외적 표상으로부터 미루어 짐작할 수밖에 없는 학생들이 이해하고 지각하는 일체의 것으로 정의한다. 내적표상은 인지 내의 작용이기 때문에 외적 표상에 의해 추측할 수밖에 없는 것이다.

앞에서 언급한 바와 같이 외적 표상은 문제 해결자가 갖게 되는 정신적 표상 형성의 대상이 되고, 이러한 정신적 표상은 또 다른 외적 표상 형성을 매개하게 된다. 문제 해결 과정은 이렇게 외적 표상과 정신적 표상이 반복되는 현상으로 생각할 수 있으며, 표상의 변화 과정은 문제에서 주어진 정보의 변형 과정으로 이해할 수 있다. 이 처럼 정신적 표상은 주어진 외적 표상을 새로운 외적 표상의 형성으로 이끄는 매개 역할을 하는 것이기에, 특정 정보를 이용하지 못하는 사례에 대해 그것의 주체인 문제 해결자가 갖는 정신적 표상의 관점에서 접근하는 것은 사례에 대한 근본적 이해를 도울 수 있게 되는 것이다.

근래에 들어 표상에 관한 연구는 점점 시각화로 옮겨가고 있다(김종백 · 김성원, 2011; 양성현 · 강옥기, 2011; Acarvi, 2003). 이것은 수학 학습에서 시각화가 더 이상 묘사 및 설명의 목적만을 띄는 것이 아니라, 추론의 주요 구성 요소로서 작용한다는 인식에서 기반한 것이다. 여기서 시각화는 외적 표상에 관한 것이지만, 그것이 추론의 주요 구성 요소라는 것은 외적 표상이 새로운 정신적 표상의 형성에 기여한다는 점을 반영한 것이다. 따라서 표상에 관한 연구는 드러나지 않는 정신적 표상의 존재를 인정하고, 그것과 밀접한 관련성을 갖는 외적 표상을 통해 탐구하게 되는 것이다.

2. 문제 해결과 정신적 표상

러시아의 수학교육학자인 Kolyagin은 수학문제에서 정보의 종류를 출발점 정보, 도착점 정보, 문제 풀이의 근거에 대한 정보, 문제 풀이에 대한 정보로 나누었다. 출발점 정보는 일반적으로 문제의 조건을 말하며, 문제의 주어진 요소들과 요소들 사이의 관계가 여기에 포함되며, 도착점 정보는 문제의 결론, 목표 등을 말하며, 미지의 요소와 그들 사이의 관계가 여기에 포함된다. 문제 풀이의 근거에 대한 정보는 문제 풀이의 바탕이 되는 요소들의 모임, 즉 문제 풀이를 위한 이론적 · 실제적인 근거들(정의, 정리 등)이 포함되며, 문제 풀이에 대한 정보는 출발점에서 최종점까지 도달하는데 필요한 가능한 변형들을 의미한다(한인기, 1998).

이러한 분류에 의하면 수학문제는 정보로 이루어진 구성물로 볼 수 있으며, 같은 맥락에서 유익승(2010)은 문제란, 문제 정보들을 제공하고 이로부터 즉각적으로 얻을 수 없는 특정한 형태의 문제 정보들을 요구하는 형식들의 집합체라 설

5) 본 연구에서는 내적 표상과 정신적 표상을 동일한 의미의 용어로 사용하며, 이 후의 논의에서는 정신적 표상이라는 용어를 사용함.

명하였다. 또한 그는 문제 해결이란, 특정한 문제 상황에서 문제로부터 주어진 문제 정보를 정확히 수집·가공하여 문제가 요구하는 문제 정보들로 변형하는 과정으로 정의하여 문제와 문제 해결 과정을 정보의 관점으로 설명하였다. 같은 관점에서 Nilssen(1971)은 정보공간을 문제 풀이에 동원된 정보들과 한 정보에서 다른 정보로 가는 가능한 이동들로 구성된 집합이라 정의하고, 문제 해결의 출발점을 초기 정보, 최종 목표를 최종 정보라고 하며, 수학문제의 해결 과정을 초기 정보를 최종 정보로 변형하는 과정으로 설명하였다.

이상에서 살펴본 바에 따르면, Kolyagin의 출발점 정보와 도착점 정보, Nilssen의 초기 정보와 최종 정보를 각각 문제에서 주어진 정보와 요구하는 정보로 볼 수 있으며, 결국 문제 해결이란, 문제에 주어진 정보를 요구하는 정보로 변형시켜가는 과정으로 생각할 수 있다.

한편, 인지심리학에서는 문제 해결을 문제의 초기상태를 목표상태로 변모시키기 위하여 장기저장장치의 정보들을 회수하고 활용함으로써 문제에 대한 표상을 개선시켜가는 과정이라 정의하고 있다. 따라서 문제 해결의 성패를 가름하는 중요한 요건은 문제를 효과적으로 표상할 수 있는 능력과 효율적인 정보의 회수를 위해 기억장치의 정보들을 체계적으로 구조화시킬 수 있는 능력이다. 문제 해결자는 문제를 읽은 후 어떠한 방식으로든 나름대로 머릿속에서 정신적 표상을 하므로 이는 문제에 대한 문제 해결자의 내면화된 번역(internalized version)이라 할 수 있다. 이렇게 얻어진 여러 표현은 기억장치에 있는 여러 정보와의 상호작용에 의해 그 표현방식을 세련화시켜 마침내 적절한 표상방식이 얻어졌을 때 문제는 해결될 수 있다. 따라서 문제를 얼마나 효과적으로 표상할 수 있는가 하는 수준은 문제 해결 능력과 직결된다(박경미, 1993).

문제에 대한 표상을 개선시켜 문제를 효과적으로 표상한다는 것은 문제에서 주어진 정보를 변형하는 과정이며, 결국 문제의 해결과정은 문제에서 주어진 정보를 효과적으로 변형하는 과정으로 볼 수 있다. 특히 이 과정에서 문제 해결자가 문제의 정보로부터 갖게 되는 정신적 표상, 즉 내면화된 번역은 문제 해결자가 이해하고 받아들인 정보의 형태이므로 문제에서 주어진 정보의 변형과 밀접한 관련을 가질 수밖에 없으며, 결국 문제 해결과 직결된다고 볼 수 있다. 이러한 맥락에서 박윤배(1988)는 학생들이 문제 상황과 마주쳤을 때, 그들은 그들 자신의 인지구조를 사용하여 정신적 표상을 형성하며, 그들의 문제 해결 전략을 적용하여 정신적 표상으로부터 해결책을 찾으려고 시도한다고 하였다. 이러한 그의 주장은 문제 해결에서 정신적 표상이 갖는 역할을 강조하고자 한 것이다.

한편, 형태주의 심리학의 입장에서 보는 문제 해결은 문제를 이해하는 문제 표상에 초점을 맞추고 있다. 이 때 문제 표상이란 문제 해결자가 주어진 문제를 어떤 방식으로 이해하는가를 의미한다고 하며, 형태주의 심리학의 관점에서 문제 해결이란 어떤 문제에 대해 처음 가지고 있던 표상에서 시작하여 문제를 해결하기에 적합한 표상으로 전환해 가는 과정을 의미하며, 이런 과정을 표상의 재구조

화라고 하였다(한광희 외, 2000). 즉, 형태주의 심리학의 관점에서 문제 표상이란 곧 문제에 대한 정신적 표상을 의미하며, 이러한 정신적 표상을 문제에서 요구하는 것에 적합한 형태로 전환해가는 과정이 문제 해결의 과정인 것이다.

문제 해결과 표상과의 밀접한 관련성으로 인해 수학교육자들은 문제 해결에서 표상의 관점에서 접근하는 많은 노력을 시도하고 있다. 근래에 들어 국내에서 GeoGebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 지도 방안을 제시한 연구(양성현 · 강옥기, 2011), 시각적 스키마 프로그램이 문장제 표상과 문제 해결력에 미치는 효과에 대한 연구(김종백 · 이성원, 2011), 표상의 활용 능력과 학업 성취도 간의 관련성에 대한 연구(김민경 · 권혁진, 2010)등은 이러한 노력의 결과들이다. 이들 연구는 문제 해결과 표상간의 밀접한 관련성을 보여주는 결과이며, 본 연구 역시 이러한 관련성에 입각하여 학생들의 문제 해결 과정을 살펴보고자 하는 것이다.

주어진 정보를 빠짐없이 이해했다고 해서 문제 해결에 성공할 수 있는 것은 아닐 것이다. 문제 해결은 주어진 정보들로부터 보이지 않는 새로운 정보들을 구성해내고, 또 이들 사이의 관계를 형성해야하는 복잡한 사고 과정일 것이다. 그러나 전술한바와 같이 문제 해결과 관련된 다수의 연구는 이러한 복잡한 과정을 반영하지 못하고, 개념 이해에 초점을 두고 연구를 진행해 왔던 것으로 생각된다.

또한 문제에서 주어진 정보를 모두 활용하지 못하여 발생하는 문제에 대해 기존 연구는 이를 수학적 오류로 보고, 이 오류를 자세히 분석하기보다 유형 분류에 그치고 있다(김부미, 2005; 김정희 · 조완영, 2004). 이에 본 연구에서는 정보를 모두 활용하지 못하는 문제에 대해 표상의 관점에서 살펴봄으로서 문제 해결에 대한 이해를 돕고자 하는 것이다.

이상에서 살펴본 바를 요약하면, 문제 해결이란 주어진 정보를 변형하여 최종 목표인 미지의 정보로 다가가는 과정이며, 이 과정은 문제의 정보로부터 갖게 되는 문제 해결자의 정신적 표상과 직결되는 부분임을 알 수 있었다. 즉, 문제 해결자가 문제에서 주어진 정보로부터 갖게 되는 정신적 표상은 그들이 문제에서 주어진 정보를 이해하는 형태이므로 그러한 정보 변형에 직접적인 관련을 가지게 되는 것이다. 따라서 문제 해결자의 문제 해결 과정은 그들이 문제에서 주어진 정보에 대해 갖게 된 정신적 표상으로 문제 상황을 이해하고, 이렇게 형성된 정신적 표상으로 주어진 정보의 변형을 모색해 가는 과정으로 볼 수 있다. 한편, 정신적 표상 역시 주어진 정보의 변형으로부터 변형된 정보에 적합한 형태로 전환해가며, 결국 문제의 도착점 정보에 도달할 때까지 정보의 변형과 정신적 표상의 전환은 끊임없는 반복을 필요로 한다.

이와 같은 점을 고려할 때, 학생들의 풀이 그 자체에만 초점을 두고 학생들의 문제 해결 과정을 이해해 가는 과정은 표면적 이해로 그치기 쉬우며, 학생들의 문제 해결 과정을 보다 자세히 이해하기 위해서는 학생들이 문제의 정보로부터 갖게 되는 정신적 표상을 살피는 것이 필요하다. 이에 본 연구에서는 학생이 갖는 정신적 표상을 탐색함으로서, 특정 정보가 문제 해결에 어떻게 작용하는지를

몰라 어려움을 겪는 사례에 대한 자세한 이해를 모색해 보고자 하는 것이다.

그러나 정신적 표상을 살피는 것은 쉽지 않은 일이다. 외적 표상으로 표출된 것을 통해 내적 표상을 추측할 수는 있지만 이것은 한계를 갖는다. 그럼에도 불구하고 수학교육에서 정신적 표상을 살피는 연구는 지속되어야 할 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상자

연구자에게 도움을 요청한 연구 대상자는 경남 창원 소재 N 중학교 3학년 학생으로, 수학 교과의 학업 성취도가 중위권인 학생이었다. 연구 대상자는 이전에는 수학학원을 다녔으나, 현재는 다니지 않고 스스로 수학 문제집을 풀면서 수학 공부를 하고 있었다. 그는 모르는 부분에 대해서는 EBS의 질문 코너를 이용하거나 주변 친구들에게 물어 보는 수학 학습에 적극적인 학생이었다. 한편, 연립방정식은 중학교 2학년에 다루어지는 내용이므로 중학교 3학년인 연구 대상자는 이미 이 부분에 대해 학습이 이루어진 상태였다. 따라서 문제를 해결하는데 필요한 사전지식을 모두 충분히 갖춘 것으로 생각된다. 이상에서 언급한 연구 대상자의 특성은 다음 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상자의 특성

대상자	성별	학년	학업성취도
학생	남	중학교 3학년	중

2. 자료 수집 및 분석

학생과 면담을 가진 날짜는 7월 중순이었다. 학생과의 면담에서 연구자가 사용한 면담은 '융통성있는 임상면담'이다. 즉, 연구자는 학생의 상태에 따라 적합한 발문이나 조언을 제공해가면서 면담을 진행하였다.

학생이 문제에 대한 도움을 요청하여 점심시간을 이용하여 면담을 가졌다. 그는 정보를 활용하지 못하는 문제점을 보이고 있어, 그러한 사실을 확인할 수 있도록 도움을 주었다. 이 후 학생의 문제 해결을 지켜보았으며, 이용하지 못한 특정 정보의 제시가 문제 해결을 도울 것이라 예상하였으나 기대와는 달리 학생은 여전히 제시받은 정보를 활용하지 못하는 모습을 보였다. 이러한 일련의 과정은 30분 정도 이루어졌으며, 이를 현장 노트(Field Note)에 기록하였다.

연구자의 예상과는 다른 반응으로 인해 연구자는 이 사례를 더 자세하게 분석해 보고자 학생과 면담을 가진 당일 날 방과 후에 2차 면담을 가졌다. 2차 면담에서 학생이 문제의 정보에 대해 어떤 식으로 이해하는가를 알아보았으며, 이 과

정을 통해 학생의 정신적 표상을 살펴보았다. 방과 후에 이루어진 이 면담은 1시간 정도 이루어졌으며, 면담 내용은 오디오 녹음기와 현장 노트에 기록하였다.

연구자는 학생에게 표출되는 외적 표상은 정신적 표상에서 기인한다고 생각하였다. 그러나 정신적 표상은 드러나지 않는 내면화된 것이기에 표출된 외적 표상으로부터 미루어 짐작할 수밖에 없었다. 이에 본 연구에서는 기록한 면담 내용과 학생의 필드노트를 바탕으로, 학생이 보인 반응과 어려움 사이의 관계를 통해 정신적 표상을 그려보고자 하였다. 특히, 문제에 제시된 조건을 어떻게 해석하고 있는지를 살펴보고자 하였다. 문제의 조건은 서로 관련된 것이므로 이들 사이의 관계 해석 역시도 관찰의 주요 초점이 되었다. 이렇게 문제의 조건과 조건 사이의 관계에 대해 학생의 해석을 외적인 반응을 통해 관찰함으로써 문제에 대한 학생의 정신적 표상을 읽어내고자 하였다.

위와 같은 일련의 과정을 통한 연구가 정신적 표상의 탐구에는 어느 정도 한계가 있을 수 있으나, 정신적 표상에 대한 연구가 갖는 어려움을 고려한다면 의미가 없지는 않다.

3. 면담 문항

학생이 도움을 요청한 문제 A는 다음과 같다. 이것은 특별한 지식이 요구되는 어려운 문제는 아님에도 불구하고, 학생은 문제 A를 해결하지 못하고 있었다.

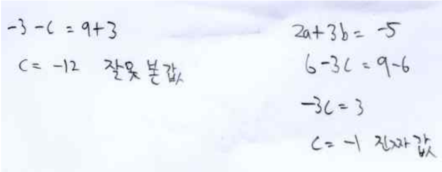
문제 A $\begin{cases} ax+by=-5 \\ 3x-cy=9 \end{cases}$ 의 해를 구하는데, c를 잘못보고 풀었더니 $x=-1, y=1$이 되었다. 바르게 구한 해가 $x=2, y=3$이라고 할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

Ⅳ. 연구 결과[6)]

1. 학생의 풀이

문제 A에 대해 학생이 풀어온 풀이는 다음 [그림 Ⅳ-1]과 같다. 먼저 c를 잘못 보고 구한 해 $x=-1, y=1$을 통해 잘못 본 c의 값을 구하였다. 그리고 바르게 구한 해 $x=2, y=3$을 주어진 연립방정식에 대입하여 c의 참값 및 a, b의 관계식을 구해내었다. 이 후 a, b의 참값을 어떻게 구해낼지 고민하였지만, 해결 방법을 생각해내는데 실패하였다고 토로하였다.

6) 본 절에서는 자주 등장하는 용어인 학생과 연구자에 대해 학생은 S로, 연구자는 T로 코드화하여 사용하기로 한다. 또한 대화에서 등장하는 학생과 연구자의 말은 각각 (번호)S, (번호)T로 코드화하여 사용한다.



[그림 Ⅳ-1] 문제 A에 대한 학생의 풀이

이에 연구자는 여기에서 더 생각해본 것은 없는지 물어보자 학생은 $2a+3b=-5$에서 $a=2, b=-3$라는 수를 대입해 $a+b+c=-2$라는 답을 구하였지만, 이 값은 $2a+3b=-5$에서 적당한 수 $a=2, b=-3$을 대입하여 구한 값이므로 확신을 할 수 없었다고 하였다.

연구자는 이와 같은 풀이로부터 학생은 c를 잘못보고 구한 해 $x=-1, y=1$라는 정보를 사용하지만, 그것을 문제 해결에 적절하게 활용하지 못하는 것을 확인할 수 있었다. 이에 연구자는 학생이 c를 잘못보고 푼 해 $x=-1, y=1$을 적절히 활용할 수 있도록 돕고자 하였다. 이를 위해 학생이 적절히 활용하지 못한 정보를 발견할 수 있도록 문제 A에 주어진 조건에 집중할 수 있는 발문(01T, 03T, 07T, 09T)을 제공하였다. 그러나 그것이 별다른 도움이 되지 못하자, 연구자는 이 정보를 직접적으로 안내(11T, 13T)하기에 이르렀다. 그리고 이러한 직접적인 안내는 학생의 어려움을 해소하기에 충분할 것이라고 보았다. 연구자와 학생과의 대화는 다음과 같다.

01T: 문제의 주어진 조건을 말해보겠니?
02S: 연립방정식에서 c를 잘못보고 풀어서 구한 해 $x=-1, y=1$, 그리고 바르게 구한 해 $x=2, y=3$요. 아! 그리고 a, b, c는 상수라는 것도 있네요.
03T: 이 조건들 중 네가 문제를 풀 때 충분히 이용하지 못한 조건은 무엇일까?
04S: 음…, a, b, c는 상수라는 것. 그런데 a, b, c는 상수로 나오는 거잖아요.
05T: a, b, c가 상수라는 것은 $2, 3$과 같은 변하지 않는 숫자가 된다는 것을 나타내지.
06S: 예. 그렇지요.
07T: 자! 다시 한 번 생각해 보자. 네가 문제에서 주어진 모든 조건을 충분히 이용했다고 생각하니?
08S: 아니요. 이용하지 못했으니까 못 푼거죠.
09T: 구체적으로 이용하지 못한 것은 어떤 것들이 있는지 말해 보겠니?
10S: ….
11T: 네가 처음에 말한 조건 c를 잘못보고 풀어서 구한 해 '$x=-1, y=1$'을 ①, 바르게 구한 해 '$x=2, y=3$'을 ②라고 해 보자. 여기에서 충분히 이용하지 못한 것은 무엇일까?
12S: …(한참 동안 대답을 하지 못함).
13T: 자! 네 풀이를 보자. ②를 이용하여 $2a+3b=-5$, $c=-1$을 구해냈어. 그러나 ①을 이용하여 구한 것은 잘못 본 c의 값인 $c=-12$ 뿐이지.
14S: 아! ①이 충분히 이용되지 못했네요.
15T: 다시 문제를 해결해 보겠니?

학생은 문제 A에서 주어진 정보를 나열하고, 이들 중 이용하지 못한 특정 정보를 발견하는데 어려움을 겪었다. 이 어려움에 대하여 연구자는 13T에서 직접적인 제시로 학생이 이 정보를 파악할 수 있게 해주었다. 이 후 연구자는 학생에게 c를 잘못보고 구한 해 $x=-1, y=1$라는 정보를 잘 활용하여 문제 A를 해결할 것을 권고하였는데, 학생은 연구자의 기대와는 다르게 한 동안(10분 정도) 아무런 반응을 보이지 않다가 다음과 같이 어려움을 토로하였다.

16S: 잘 모르겠는데요.

이는 학생에게 이용하지 못한 정보를 단순히 알려주는 것은 별 도움이 되지 못하며, 그의 정신적 표상이 무엇인지를 들여다 보아야함을 시사한다. 즉, 정답을 이미 알고 있는 교사의 입장에서의 도움보다 학생의 입장에서 도움을 제공할 필요가 있으며, 이를 위해서는 학생이 정보에 대해 갖는 생각을 읽어야 하는 것이다.

2. 문제 A에 대한 학생의 정신적 표상

학생은 연구자의 도움으로 이용하지 못한 특정 정보를 파악하였음에도 여전히 이를 이용하지 못하고 있음을 알 수 있다. 이는 연구자의 예상과는 다른 반응이기에 연구자는 '이용하지 못한 특정 정보를 파악하였음에도 왜 활용하지 못하는가?'라는 의문을 가졌다. 그리고 이 의문에 대해 보다 근본적인 원인을 모색해야 할 필요성을 느꼈으며, 이를 위해 학생이 주어진 문제 A의 정보를 어떤 식으로 이해하고 있는가를 살펴보기로 하였다. 학생이 문제 A의 정보에 대해 이해하는 바를 읽어내야 했고, 그래서 그가 문제 A의 정보에 대해 갖는 정신적 표상을 그려야 했다. 이를 위해 학생의 풀이와 이용하지 못한 특정 정보가 무엇인지를 파악하는 과정에 대한 분석을 통해 학생이 가진 정신적 표상을 그려보고자 하였으며, 이것만으로 어려운 경우 다음과 같은 추후 면담을 실시하였다.

17T: 연립방정식의 해의 의미를 말해보겠니?
18S: x, y를 소거해서 나온 값요.
19T: 그것은 연립방정식을 해결하는 방법이지 해의 의미는 아니지.
20S: 첫 번째 식과 두 번째 식의 x, y에 같이 들어가는 동일한 숫자요.
21T: 왜 ①을 이용하는데 어려움을 겪고 있니? ①에 대해 다른 말로 설명해 보겠니?
22S: c를 잘못 봤으니까 a, b의 값도 원래 a, b의 값과는 달라졌을 거잖아요.

22S에 의하면, 학생이 이용하지 못한 특정 정보를 파악하고 이 정보의 활용에 집중하였음에도 불구하고, 왜 그가 문제 해결에 실패하였는지를 알 수 있다. 학생은 연립방정식의 해의 의미를 다소 거칠게 표현하였지만 연립방정식의 해의 의미에 대해 잘 알고 있었다(18S). 연립방정식의 해의 의미를 잘

알고 있는 학생은 c를 잘못보고 구한 해 ①은 비록 c의 값을 잘못보고 구한 해이지만 a, b의 값도 달라지게 만든다고 생각하고 있기 때문에(22S), 식 $-a+b=-5$와 식 $2a+3b=-5$의 a, b는 서로 다른 a, b라고 생각하여 문제 해결에 실패한 것이다. 그가 $-a+b=-5$라는 식을 이끌어내지 못하여 문제 해결에 어려움을 겪었을 개연성은 매우 적어 보인다. [그림 Ⅳ-1]에서 보여지듯 잘못 본 c의 값을 구하기 위해 $x=-1, y=1$를 대입한 식 $-3-c=9+3$을 구한 것과 해 $x=2, y=3$을 주어진 연립방정식에 대입하여 $2a+3b=-5$을 구한 것으로부터, 학생은 주어진 식의 x, y에 해를 대입해야 하는 것은 잘 알고 있었던 것으로 보인다.

연립방정식의 해의 의미도 잘 알고 있으며 또한 해를 활용하여 식을 구할 수 있음에도, 22S에 의하면 학생은 일부의 잘못으로 구한 해가 전체의 잘못으로 구한 해라고 인식하고 있는 것을 알 수 있다. 따라서 그는 이용하지 못한 정보를 파악하였음에도(14A), 이 정보가 문제 속에서 갖는 관계를 왜곡되게 해석(22S)함으로서 이 정보를 활용하지 못하여 여전히 문제 해결에 어려움을 겪고 있었던 것이다. 그는 c를 잘못보고 구한 해 ①과 주어진 연립방정식의 첫 번째 식인 $ax+by=-5$ 사이의 관계를 왜곡되게 해석하고 있었던 것이다. 따라서 [그림 Ⅳ-1]에서 보여지 듯 c를 잘못보고 구한 해 $x=-1$, $y=1$라는 정보는 잘못 본 c의 값을 구하는 데는 적절히 이용되었지만, a, b 구하는 데는 적절히 이용되지 못한 것이다. 이상에서 문제 A에 대해 학생이 갖는 정신적 표상과 그로 인해 나타나는 결과를 도식화하면 다음 [그림 Ⅳ-2]와 같음을 알 수 있다. 여기에서 화살표는 학생의 사고 흐름을 의미한다.

외적 표상

$\begin{cases} ax+by=-5 \\ 3x-cy=9 \end{cases}$ 의 해를 구하는데, c를 잘못보고 풀었더니 $x=-1, y=1$이 되었다. 바르게 구한 해가 $x=2, y=3$이라고 할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

↓

정신적 표상

$x=-1, y=1$은 c를 잘못보고 구한 해이므로 a, b의 값이 달라지고, 결국 a, b의 참값을 구하는데 필요 없는 정보임.

↓

학생의 문제 A 해석

$\begin{cases} ax+by=-5 \\ 3x-cy=9 \end{cases}$ 의 해를 구하는데, 바르게 구한 해가 $x=2, y=3$이라고 할 때, $a+b+c$의 값은?

↓

외적 표상

c를 잘못보고 구한 해 $x=-1, y=1$을 활용하지 못하여, c의 값을 구하였으나 a, b의 값을 구하지 못함.

[그림 Ⅳ-2] 문제 A에 대한 학생의 정신적 표상

V. 결론 및 제언

수학 문제에서 주어진 정보는 목표를 찾아가는데 필요한 단서이며, 문제 해결 과정에서 이들을 활용하되 필요한 경우 정보를 변형해 나가야 목표에 도달하는 것이 가능하다. 이런 점에 비추어 볼 때, 수학 문제에서 주어진 정보의 활용은 문제 해결의 성공과 밀접한 관련을 가짐을 알 수 있다. 이에 Polya(1956)도 수학 문제에서 문제 해결자에게 주어진 정보의 활용을 돕는 발문이나 권고를 제공할 것을 주장하였다.

본 연구는 '연립방정식 문제'에서 특정 정보를 이용하지 못하여 문제 해결에 어려움을 겪는 학생을 만나면서 시작되었다. 연구자는 '이 특정 정보를 연구자가 제시해주면 문제 해결을 도울 수 있지 않을까?'라고 생각했으며, '문제에서 자료를 모두 사용하였는가?', '조건을 모두 사용하였는가?'와 같은 발문으로 문제 해결을 돕고자 하였다. 위 발문에도 불구하고 학생은 이용하지 못한 정보를 스스로 발견하지 못하였다. 이에 연구자는 그가 적절하게 활용하지 못한 정보를 파악할 수 있도록 직접적인 안내를 제공하였다. 그러나 직접적인 안내를 통해 이용하지 못한 특정 정보가 무엇인지를 파악하였음에도 불구하고, 연구자의 예상과는 달리 학생은 특정 정보가 문제 해결에 어떻게 작용할 수 있는지에 대해 알지 못하였다. 연구자는 이 현상에 대한 원인을 알아보고자 학생이 문제 A의 정보에 대해 갖는 정신적 표상을 살펴보았으며, 이를 통해 다음의 사실을 알 수 있었다.

문제 A에 대한 학생의 정신적 표상은 다음과 같다. 학생은 '$x=-1$, $y=1$'은 c를 잘못보고 구한 해이므로 a, b의 값도 달라지고, 결국 a, b의 참값을 구하는데 필요 없는 정보'라는 정신적 표상을 가지고 있었다. 그는 c를 잘못보고 구한 해와 주어진 연립방정식의 첫 번째 식 $ax+by=-5$ 사이의 관계를 왜곡되게 해석하고 있었다. 즉, 그는 하나를 잘못보아 달라진 해가 나머지 요소도 덩달아 달라지게 만든다는 왜곡된 정신적 표상을 구축하고 있었다. 이는 한 가지의 잘못을 전체의 잘못으로 생각하면서 빚어진 '확대 해석에 의한 개념적 오류'로 볼 수 있을 것이다.

학생의 이러한 정신적 표상을 보면 이용하지 못한 정보가 무엇인지 파악하게 하는 직접적 안내가 왜 실질적으로 도움이 되지 못한 것인지를 이해할 수 있다. 직접적인 안내를 통해 이 정보를 파악하였다고는 하지만 이것이 '문제 해결에 도움이 되지 않는 정보'라는 정신적 표상은 변하지 않았기에 이것을 활용하지 못한 것이다. 결국 이 정보는 활용할 수 없는 것이라고 판단함으로써 문제 해결에 실패한 것이다.

따라서 특정 정보를 이용하지 못하는 사례에 대해 학생이 갖는 정신적 표상을 파악하면, 이 사례에 대한 근본적 원인을 파악할 수 있음을 확인하였으며, 결국 특정 정보를 이용하지 못하는 것은 정보들이 갖는 관계에 대한 왜곡된 정신적 표상의 형성 때문인 것을 알 수 있었다.

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있을 것이다. 첫째, 문제해결에 어려움을 겪는 사례에 대한 근본적 이해를 위해서는 문제에 주어진 정보에 대해 학생이 갖는 정신적 표상을 들여다보는 것이 필요하다는 것이다. 이것은 왜 수학교육에서 표상의 개념이 공고히 자리 잡고 연구되고 있는지를 알 수 있게 한다.

둘째, 교사 관점에서의 도움보다, 학생의 정신적 표상에 기반한 도움이 진정으로 학생의 어려움을 해소하는데 일조하는 일이 될 것이다. 단순히 이용하지 못한 정보를 제시하는 것만으로 불충분하며, 정신적 표상의 변화를 유도할 수 있는 근본적인 도움이 필요한 것이다.

수학을 지도하는 현장에서 정보 활용에 어려움을 겪는 학생들을 돕기 위해, 정보들이 문제 속에서 갖는 관계에 대하여 학생들은 어떠한 정신적 표상을 구축하고 있는지 많은 조사가 이루어질 필요가 있을 것으로 사료된다. 이러한 조사는 학생들의 어려움을 보다 잘 이해하게 할 뿐 아니라, 어려움의 해소를 가능하게 하는 근본적 처방의 밑거름이 될 것이라 생각된다.

본 연구를 통해 특정 정보를 활용하지 못하는 것으로 문제 해결에 어려움을 겪는 학생들에 대한 보다 깊은 이해의 토대가 제공되어 그러한 학생 지도에 도움이 되길 바란다.

참 고 문 헌

[1] 교육과학기술부 (2007). **중학교 교육과정 해설(Ⅲ): 수학, 과학, 기술・가정**. 서울: 교육과학기술부.

[2] 권성룡 (2003). 초등학생의 분수표상에 관한 연구. **대한수학교육학회: 학술대회논문집**. 225-244.

[3] 권오남·백한미 (1997). 수학 문제 해결 전략 선택에 있어서의 성별 차이에 대한 연구. **대한수학교육학회 논문집. 7**(2), 255-267.

[4] 김경미・황우형 (2012). 자연수와 분수 연산에 대한 학생들의 이해 분석. **한국수학교육학회지 시리즈A: <수학교육>, 51**(1), 21-45.

[5] 김동근・윤대원 (2012). 피타고라스 세 수를 구하는 다양한 문제해결 방법 탐구. **East Asian Mathematical Journal, 28**(4), 419-433.

[6] 김민경・권혁진 (2010). 수학 문제 해결에서 학업성취도에 따른 표상 활용 능력과 특징 분석. **한국수학교육학회지 시리즈E: <수학교육논문집>, 24**(2), 475-502.

[7] 김부미 (2005). 경험적 구조주의에 의한 수학적 오류의 분류가능성 탐색. **대한수학교육학회지: 수학교육학연구, 15**(4), 461-488.

[8] 김선유 (1995). 문제 해결의 전략과 평가 방안. **대한수학교육학회 논문집, 5**(2), 79-89.

[9] 김영채 (1995). **사고와 문제 해결 심리학**. 서울: 박영사.

[10] 김정희・조완영 (2004). 고등학교 학생들의 미분개념의 이해 및 오류유형 분석. **대한수학교육학회: 학술대회논문집, 26**, 489-508.

[11] 김종백・이성원 (2011). 시각적 스키마 프로그램이 문장제 표상과 문제 해결력에 미치는 효과. **대한수학교육학회지: 학교수학, 13**(1), 155-173.

[12] 김철환·박배훈·정창현 (1988). 문제 해결력과 수학문제의 분류의 관점에 관한 연구. **한국수학교육학회 시리즈A <수학교육>, 26**(2), 9-13.

[13] 문성길·전평국 (2001). 개방형 교수법에 의한 수학지도가 문제 해결력과 신념 형성에 미치는 효과. **한국수학교육학회 시리즈E: 수학교육논문집, 11**, 159-165.

[14] 박경미 (1993). 인지심리학적 정보처리이론의 관점에서 본 수학교육. **대학수학교육학회 논문집, 3**(1), 117-126.

[15] 박선호・표성수 (2012). 교과서에 표현된 복소수와 이에 대한 학생들의 이해 실태 분석. **한국수학교육학회지 시리즈A: <수학교육>, 51**(1), 1-19.

[16] 박윤배 (1988). Expert-novice differences of mental representation and problem solving strategy in machanics problems. **한국과학교육학회지, 8**(2), 43-52.

[17] 성인서 (1987). 교사·학생이 수학 문제 해결에서 사용하는 전략에 관한 연구. **한국수학교육학회 시리즈A <수학교육>, 26**(1), 11-19.

[18] 신수진 · 강정기 · 노은환 (2012). 문제 해결 과정에서 규칙을 찾는 초등학생들의 사고 과정 분석. **East Asian Mathematical Journal, 28**(2), 173-195.

[19] 양성현 · 강옥기 (2011). GeoGebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 이차곡선 지도 방안. **대한수학교육학회지: 학교수학, 13**(3), 447-468.

[20] 유윤재 (2009). 문제 해결에서 분석의 역할. **한국수학교육학회 시리즈A <수학교육>, 48**(2), 141-148.

[21] 유익승 (2010). **수학적 문제 해결 과정에서 문제 정보의 분석과 활용에 관한 연구**. 경상대학교 박사학위논문.

[22] 윤대원·김은주·유익승 (2006). 조합적 논증을 이용한 문제 해결에 대한 연구. **한국수학교육학회 시리즈E <수학교육논문집> 20**(3), 373-389.

[23] 장혜원 (1997). **수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

[24] 전영주·정완수 (2002). 수준별 협동학습이 문제 해결 능력 신장에 미치는 영향. **한국수학교육학회 시리즈E <수학교육논문집>, 13**(1), 275-286.

[25] 조경희 · 권오남 (2010). 소수(素數) 개념에 대한 중학생의 이해. **대한수학교육학회지: 학교수학, 12**(3), 371-388.

[26] 최지영 · 방정숙 (2012). 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. **대한수학교육학회지: 학교수학, 14**(3), 275-296.

[27] 한광희 · 임중우 · 김민식 · 이일병 · 변혜란 (2000). **인지과학**, 서울: 학지사.

[28] 하수현 · 이광호 (2011). 초등학교 6학년 학생들의 변수 개념 이해에 관한 사례 연구. **한국수학교육학회지 시리즈A: <수학교육>, 50**(3), 263-284.

[29] 한인기 (1998). 꼴랴긴의 수학문제 분류, **대한수학회 뉴스레터 62**, 20-25.

[30] 한인기 (2003). 수학 문제 해결에서 아르키메데스의 공학적 방법에 관한 연구. **한국수학교육학회 시리즈E <수학교육논문집> 17**, 115-126.

[31] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics. 52*, 215-241.

[32] Engel, A. (1997). *Problem-Solving Strategies*. New York: Springe-Verlag Inc.

[33] Goldin G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving, In L. D. English, (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd Edition. New York, NY: Routledge.

[34] NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[35] NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[36] Nilssen, N. J. (1971). *Problem solving methods in artificial intelligence*. New York: McGraw-Hill.

[37] Polya, G. (1956). *How to solve it - A New Aspect of Mathematical Method.* 우정호(역) (2002). 어떻게 문제를 풀 것인가? 서울: 교우사.
[38] Schoenfeld, A. (1985) *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
[39] Zeitz. P. (1999). *The Art and Craft of Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Kang, JeongGi
Namsan Middle School
Chang-Won 642-110, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com

Roh, EunHwan
Department of Mathematics Education
Chinju National University of Education
Jinju 660-756, Korea
E-mail: idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr