대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 3, 633 ~ 650. Sep 2013

중등 수학 예비교사의 수학을 다루는 방식과 무한에 관한 언어적 표현 양상에 대한 질적 사례 연구

전 영 국* · 신 향 근**

본 연구의 목적은 예비 수학 교사가 수학을 대하는 방식과 무한과 관련된 수학적 개념을 일상적인 언어로 표현하는 방식을 탐색함으로써 언어적 표현이 수학적 표현으로 연계되는 과정을 통합적으로 살펴보고자 한다. 이를 위하여 S 사범대학을 선정하여 수학 예비교사들을 대상으로 무한에 관련된 개념, 둘레 길이가 무한인데 넓이가 유한한 도형에 대한 아이디어, 무한합에 관련된 개념과 수학적 지식을 다루는 언어적 표현 양상을 탐구하였다. 2009년 11월부터 2010년 2월 사이에 수학교육과 2학년 학생 2명을 대상으로 면담을 실시하였으며 연구참여자가 고안한 무한에 관련된 문제상황을 풀어나가는 과정에서 자연스럽게 후속질문을 구사하였다. 본 연구는 수학을 다루는 연구참여자 개인적 특성과 고유한 방식에 따라 무한과 관련된 개념을 일상적 언어와 수학적 언어로 표현하는 방식에 차이가 있음을 보여주었다. 마지막에 연구참여자에 대한 사례간의 논의를 통하여 교수학적 지식 형성과 관련하여 후속 연구에 대한 방향을 제시하였다.

Ⅰ. 서 론

중·고등학교 시절에 수학에 관심을 갖고 공부를 한 학생들이 수학에 대한 깊은 맛을 느끼고 진지하게 수학을 즐기는 사례가 적다. 학생들이 형식적이고 규칙에 따라 계산을 해 가는 방식으로 수학을 공부하다보면 수학이 매우 중요한 과목이라는 인식을 함에도 근본 개념을 이해하거나 실생활에서 엄청난 응용을 할 수 있는 수학적 힘을 느끼기는 쉽지 않다(전영국, 2013; 전영국, 강윤수, 2005). 통상 학생들은 수학 개념의 일반적 성질을 보지 못한 채 수학의 단편적 지식을 습득하는 데 몰두했음을 나중에 깨닫게 된다. 이런 측면에서 수학이 무엇에 대한 학문인지, 자연현상을 탐구하는데 왜 수학이 필연적으로 엄밀한 사고의 도구로 사용되는지에 관하여 수학의 추상성과 변수, 일반화의 관점에서 예비교사의 수학적 태도와 지식 형성과정을 탐구하는 것은 중요한 과제이다(오채환, 2009).

수학적 지식형성 과정에는 언어적 표현이 중요한 역할을 하게 되는데 특히 수학적 개념을 다룰 때 일상적 언어로 표현하는 것과 수학적 언어로 표현하는 것의 관련성을 살펴보는 것은 그 학생의 수학적 지식 형성을 이해하는데 매우 중요하다. 중·고등학교 시절 이후에 대학에 진학하여 논리와 증명 위주의 수학공부에 적응하게 되는 수학예비교사들은 전공 수학을 공부하면서 수학적 개념을 수학적 언어로 정형화 하기 이전에 어떻게 일상적 언어로 받아들이고 표현하는

* 순천대학교 컴퓨터교육과 교수(ycjun@sunchon.ac.kr)
** 순천대학교 수학교육과 교수(hkshin@sunchon.ac.kr), 교신저자

지에 관하여 살펴보는 것은 흥미로운 주제이다. 최승현(1999)은 극한을 다룰 때 개념정의를 제대로 습득하지 못하는 요인을 살펴보고 이와 관련되는 언어적 표현과 오개념과의 관련성을 개념정의와 개념 이미지의 관점에서 다루었다. 특히 언어적 양상과 관련하여 '무한히 크거나 무한히 작은 것'에 대한 개념과 '극한에 도달할 수 있는가 없는가'에 대한 오개념 등을 소개하고 오개념 해소 방안을 제시하였다.

본 연구에서 다룰 무한에 관련된 개념은 수학내용학에서 지속적으로 나타나며 수열, 연속, 근사치, 극한의 개념, 무한급수, 미분 등의 내용 영역에서 핵심적인 역할을 한다. 이렇듯 무한에 관련된 개념이 중등 수학 및 대학 수학에서 여러 단원에 걸쳐 나타나고 있으나 학생들은 유한한 세계에서 무한의 개념을 다루는데 개념뿐만 아니라 무한을 다루는 기법에서 상당한 어려움을 겪고 있다. 기존 연구를 살펴보면 무한에 관한 언어적 양상을 다룬 연구는 그리 많지 않다. Kim과 그의 동료들은 담화 분석 방법으로 초등 및 중학생을 대상으로 "무한한, 무한대에 관련된 문장을 만들어 보세요"라고 물어보면서 학생들이 수학적 표현과는 다른 일상적인 언어로 생각한 바를 다루었는데 연구참여자별로 개별적인 언어적 표현 양상이 매우 다양하게 나타남을 보여주고 있다(Kim, Sfard & Ferrini-Mundy, 2005; Kim, Ferrini-Mundy & Sfard, 2012).

이러한 언어적 표현 양상은 수학문제를 다룰 때 엄밀한 수학적 표현을 구사해야만 하는 부담감으로 나타날 수 있다. 학생들뿐만 아니라 교사들도 속도의 변화, 수열 및 함수에서 나타나는 극한에 관련된 단원에서 무한의 개념을 다룰 때 엄밀한 수학적 표현을 다룰 때 어려움을 느끼곤 한다. 무한을 다루는 학생들과 수학예비교사들이 수학적으로 엄밀성을 갖추어서 수학문제를 다루기까지 수학적 테크닉의 습득에 상당한 어려움을 겪으며 때로는 오개념의 형성으로 나타나게 된다. 이러한 측면에서 현직 수학교사와 예비교사를 상대로 수열의 극한과 무한급수에 대한 전반적 이해(내용적 지식)를 조사하였던 박수정(2002)는 극한과 무한급수에 대한 교수방식(교수학적 지식)에 관한 차이점을 확인하였다. 현직 교사들은 극한의 개념지도 보다는 극한의 문제풀이에 많은 시간을 소비하고 있었으며 예비교사들은 무한급수와 무한합에 대한 이해도가 부족한 것으로 드러났다. 또한 무한과 수열의 극한에 관한 교수학적 지식을 규정하기가 어렵고 예비교사들이 수열의 극한에 관한 교수학적 지식을 어떻게 형성하는지 찾기 어려운 점이 나타난다(박수정, 2002).

본 논문은 이와 같은 연구배경을 가지고 고등학교 수학과 대학 수학과의 차이점을 뚜렷하게 느낄 수 있는 수학예비교사 2학년생들을 대상으로 연구가 진행되었다. 본 연구의 목적은 연구참여자의 수학을 대하는 방식을 살펴보고, 이러한 개인적 성향을 바탕으로 무한과 관련된 언어적 표현과 문제상황을 다룰 때 나타나는 수학적 표현과의 관련성을 탐구하는 것이다. 이를 위하여 무한 개념에 대한 언어적 표현은 무한집합, 무한급수 및 무한합에 대한 문제상황을 말로 표현하기 및 유한한 넓이를 가지면서 무한한 둘레를 가지는 도형에 관련된 아이디어를 언어로 어떻게 표현하는지 살펴보고자 한다. 연구방법은 질적 연구 사례의 형태로 연구참여자 자신의 개인적 경험을 보다 통합적으로 접근하였으며 연구참여자가 무한을 다루는 언어적 양상으로부터 고유하게 나타나는 부분을 탐색하는데 중점을 두었다.

II. 이론적 배경

무한과 극한에 관련된 연구주제를 다룬 연구

중에서 언어적 표현을 다룬 연구는 그리 많지 않다. 무한과 극한의 개념과 관련하여 언어적 표현을 인터뷰 형태로 진행한 Kim과 그의 동료들은 두 그룹으로 나뉜 초중고 대상 한국과 미국 학생들을 문화적으로 비교하는 연구결과를 도출하였다(Kim, Sfard & Ferrini-Mundy, 2005). 극한의 개념을 가르치는 과정에서 학습자의 개념 정의가 제대로 형성되지 못하여 오개념을 형성하는데 관련되는 요인을 분석한 최승현(1999)의 연구는 언어적 표현의 영향을 일부 다루고 있다. 예를 들어 극한의 개념에서 n이 무한대로 간다와 같은 일상적 표현이 올바른 개념을 형성하는데 방해가 됨을 지적하고 있다. 그는 극한을 다룰 때 개념정의를 제대로 습득하지 못하는 요인을 살펴보고 이와 관련되는 언어적 표현과 오개념과의 관련성을 다룸으로써 극한에 관한 오개념 형성 요인을 다루었다. 특히 언어적 양상과 관련하여 '무한히 크거나 무한히 작은 것'에 대한 개념과 '극한에 도달할 수 있는가 없는가'에 대한 오개념 등을 소개하고 오개념 해소 방안을 제시하였다.

예비교사를 대상으로 무한에 대한 연구는 함수 단원에서 교수학적 상황과 관련하여 다룬 사례가 있다. Even(1993)의 연구는 대규모 설문을 실시하고 그중에서 10여명을 선별한 후에 면담을 실시하는 혼합방식을 도입하여 함수 개념을 가르치는 교수학적 상황에서 내용적 지식간의 관계를 다루었다. 이와 다르게 Wilson(1994)은 수학적 내용과 교수학적 연결성을 토대로 함수개념의 응용을 강조하는 수학교육 과정을 수강하는 예비교사 한 명을 대상으로, 예비교사의 지식과 신념을 발전시키는 연구를 수행하였다. 여기서 연구자는 예비교사가 함수를 이해해 나가는 지적 성장의 과정에 대한 부분과 함수의 교수법에 대한 성장이 어떻게 나타나는지에 관한 질문을 구사하였다. 예비교사와 현직교사를 대상으로 설문지로 데이터를 수집하여 연구를 진행한 박수정(2002)은 수열의 극한과 무한급수에 대한 전반적 이해(내용적 지식)를 조사하였고 극한과 무한급수에 대한 교수방식(교수학적 지식)에 관한 차이점을 확인할 수 있었다. 한편, 독일의 교수학적 해석학의 연구와 유사하게 프랑스에서 진행된 교수학적 변환론에 터하여 수열의 극한에 관한 교수 방법을 제시한 논문을 보면 유한성으로 무한성을 극복하는 교수학적 방법의 전개가 무한을 학습해야 하는 동기와 결부되어 있음을 보여준다(김부윤, 정경미, 2009).

앞에서 언급한 연구와 다르게 수학을 하는 경험에 관하여 깊은 이해를 하기 위하여 Witz와 그의 동료들은 연구참여자에 대한 본질적이고 통합적인 측면을 탐구하는 연구방법론을 학계에 소개하였다(Witz, Goodwin, Hart & Thomas, 2001; Witz, Lee & Huang, 2010). Witz는 전통적인 수학자의 길을 택한 사람들과 수학교사의 길로 택한 학생들을 대상으로 심층면담을 진행하였고 수학을 하게 된 심층동기, 수학을 하면서 갖게 된 심미적인 느낌, 만족감, 충족감과 내적 비전 등에 관한 주관적 경험 등에 관한 정신활동이 학생 자신과 어떻게 유기적으로 통합되어 있는지를 초상화 형태로 연구하였다(Witz, 2007). 그는 수학을 공부하는 대학생들이 삶의 궤적에서 수학교과와 자신이 어떤 면에서 통합적으로 연결되는지에 대한 개개인의 고유한 측면(정체성)과 주관적 경험에 대한 이해를 마치 초상화를 보듯이 안내하고 있다.

그의 연구에 등장하는 로버트는 자신이 시각적으로 수학을 배우는 스타일이 아님에도 컴퓨터로 하는 수학에 영향을 받아서 점차 고급수학 과목을 수강하다가 결국에는 테크놀로지에 관련된 방향으로 선회하는 사례를 준다. 중고등학교 시절에 수학을 배우면서 알게 되었던 CAS 소프트웨어[1])를 이용하여 수학을 하는 것에 한층 더

흥미가 생겨 대학에서 수학을 전공하게 되었다. 그는 CAS를 활용한 미적분 과목을 수강하였을 뿐만 아니라 실력을 인정받아서 2학기에 CA-Lab에 조교가 되었고 CAS를 활용한 강좌에 사용될 교수 자료를 제작하는데 경험을 쌓게 되었다. 이 과정에서 그가 수학을 공부할 때 진정한 이해에 도달하게 된 경험은 서서히 나타났다. 그는 대학 2학년에 정수론 과목을 수강한 후에 실변수 수업을 들으면서 유명한 수학교수가 강의함에도 이해하기 어려웠던 부분을 지속적으로 대하자 혼자 "야, 내가 혼자서 앉아서 교재를 차근차근 읽으며 정말 이해할 때까지 해봐야지" 하면서 그대로 실행해 보았고 결국 해 내었다. 이렇게 해봄으로써 그는 "정말 수학을 힘들게 열심히 공부하면 깊은 이해에 도달하게 되구나" 하는 것을 느끼게 된 첫 번째 경험을 하게 되었다. 수학에 대한 이해를 점진적으로 해 나가던 그는 결국 전통적인 수학자의 길로 가기보다 소프트웨어를 사용한 교수방법과 교육혁신에 관련된 이슈에 더 관심을 가지게 되었다. 로버트의 이야기에서 제일 두드러지게 나타나는 것은 그가 다방면으로 테크놀로지에 대하여 관심을 가지고 직접 수학과 연계하여 다루어보는 개인적 특성에 관한 측면이다. CAS를 활용한 원격교육에도 참여하는 등 남달리 인간과 교육에 관한 부분에 많은 관심을 가졌던 그는 테크놀로지 사용에 관한 영향을 많이 받았으며 자신이 수학을 하는데 그것을 통합했을 뿐만 아니라 다름 사람들에게 도움이 되도록 리더십을 발휘하는 고유하고 통합적인 측면을 보여주었다.

또 다른 연구 사례를 보면 미국 중학교 교실에서 수학교사가 이끄는 수업이 학생들과 일일이 교감하면서 집중력있게 수학 수업을 이끌어 나가는 현상을 관찰과 심층면담으로 접근할 수 있다(Goodwin, 2013). 수업에서 등장하는 수학교사(가명 Susan)는 대학에서 수학과 컴퓨터를 전공하였으나 충분히 자신감을 가질 만큼 잘 하지 못하였지만 교사가 되고 난 후에 그 자신 수학에 대하여 가졌던 사랑과 창의적인 교사가 되고자 했던 열망을 나누어 주는데 중학교를 최적의 장소로 꼽게 되었다. Susan은 중학교 1학년 학생들을 대상으로 그가 만든 학습지(worksheet)를 사용하여 학생들이 다면체의 넓이를 구하는 방식을 익히도록 강화시키는 수업을 하였다. 이런 전통적인 수업 방식에서 학생들 자신이 넓이를 계산하는 방식을 스스로 구성해 나가도록 그들의 역량을 존중해주고 헌신적으로 수업에 임하는 교사의 동기와 의식 상태를 교사의 고유한 측면에서 고찰하였다.

로버트의 사례에서 보듯이 그가 수학을 다루는 방식은 남다르게 CAS 소프트웨어를 사용하는 것이 마치 수학책과 공책을 사용하는 것과 별반 다르지 않다. 더 나아가 CAS가 가지는 수학 개념과 절차를 시각적으로 기능과 문제해결 및 심지어 증명하는 절차까지 다루어 볼 수 있는 강력한 장점을 충분히 자기 것으로 만들어가는 양상을 보여주었다. Susan은 중학교 1학년 학생들과 수학교실에서 지속적으로 교감하고 소통하면서 그들이 다면체의 넓이를 구하는 절차를 스스로 구성할 수 있는 능력을 배양하는 일련의 고유한 측면을 포착하였다. 위츠와 그의 동료들이 개발한 이런 유형의 질적 연구방법론(Witz, Goodwin, Hart & Thomas, 2001; Witz, Lee & Huang, 2010)을 도입하면 수학 예비교사가 어떤

---

1) CAS(컴퓨터 대수 시스템, 예 Mathematica)는 (1) 수식을 작성하고 실행하여 결과를 대수적-수치적-그래프로 볼 수 있으며 (2) 이전에 작성했던 수식을 수정하여 프로그램으로 작성하여 실행할 수 있으며 (3) 수식 처리 결과를 그래프뿐만 아니라 애니메이션 또는 3D 등 보다 상호작용적인 시각적 매체로 표현해 낼 수 있다. 이런 CAS의 기능을 토대로 미적분 등 대학수학의 교수학습 방법을 새로이 제창하는 연구가 일리노이 대학교에서 진행되었다.

동기로 수학교육과에 진학하게 되었으며 수학공부와의 관계 형성이 언어적 표현과 발현되는 부분을 탐구할 수 있다. 예를 들어 예비교사들이 연속, 근사치, 극한의 개념, 무한급수, 미분 등에서 지속적으로 등장하는 무한에 관련된 개념 및 문제를 어떻게 다루며 어떤 언어적 표현을 통하여 수학공부와의 관계 형성을 해 나가는지에 대한 통합적 측면을 조망하는 사례 연구를 가능케 한다(강윤수, 고상숙, 권오남 외, 2005; 전영국, 강윤수, Witz, 2006; Teppo, 1997).

Ⅲ. 연구 설계

학생들은 무한과 극한에 관련된 개념 및 문제해결을 할 때 어려움을 겪는다. 이러한 내용을 학생들이 어떻게 이해하며 일상적인 언어로 어떻게 표현하는지 알아보고자 먼저 수학예비교사가 수학을 다루는 방식을 살펴보았다. 구체적으로 무한과 극한에 관한 수학적 엄밀한 정의를 어떻게 이해하며 그것을 일상적인 언어로 어떻게 표현하는지 탐색함으로써 무한과 관련된 언어적 표현과 문제상황을 다룰 때 나타나는 수학적 표현과의 관련성을 탐구하고자 하였다.

고등학교를 졸업한 후에 대학 수학을 대하면서 수학을 다루는 방식 및 무한에 관련된 언어적 표현과 수학적 사고와의 관련성을 살펴보기 위하여 우리는 수학교육과에 재학 중인 2학년 학생들을 대상으로 연구 설계를 하였다. 연구의 주제가 수학의 개념을 언어로 표현하는 방식 및 수학적 사고를 전개해 나가는 패턴 등과 관련이 있고 특히 무한과 같이 일상적 언어로 상식을 뛰어넘는 개념을 표현하는 방식에 관한 것이므로 해석학 담당 교수를 통하여 언어적 표현 구사력이 있는 예비교사 6명을 추천받았다.

첫 면담은 2009년 11월에 그룹 면담으로 이루어졌으며 그 중 4명을 대상으로 2주후에 남녀별로 2명씩 무한 개념에 관련된 구조화된 질문 위주로 이차면담을 실시하였다. 둘레가 무한이면서 넓이가 유한한 도형과 무한의 개념 등에 관하여 질문을 던졌으며 2차 면담에서 등장했던 내용에 무한급수에 관련된 문제를 제시하고 답변에 따라서 깊이 있는 후속 면담 질문을 구사하였다. 2주 후에 다시 3차 면담이 진행되었으며 예비교사의 고등학교 수학에서 무한에 관련된 공부와 미적분 및 이산수학 등에서 다루는 내용을 살펴보았다. 매회 연구자 2명이 대화의 주제가 전개됨에 따라 후속 질문을 공동으로 또는 개별로 구사하였으며 면담 시간은 평균 1시간 정도 소요되었다. 무한에 관련된 언어적 표현이 풍부하게 드러나는 남학생 1명과 여학생 1명을 각각 선정하여 면담자료를 해석하였으며 주제별로 개인의 언어적 표현을 자세하게 기술하는 담화분석 방법과 사례연구 방식을 혼용하여 사용하였다.

질문 내용은 예비교사가 과외 경험을 통하여 자기만의 방법을 사용하여 학생에게 수학적 개념을 이해시키려고 하는 주관적 경험을 포착하고, 수열의 극한과 같이 무한 개념에 관한 언어적 표현에 관련된 질문을 준비하였다. 즉, 예비교사 자신이 수학을 다루는 경험을 먼저 알아보고, 학생을 가르칠 때 대하는 태도와 수학문제와 관련된 언어적 표현을 구사하는 방식 등을 탐구하였으며 수학을 가르치는 과정에서 수학적 개념을 쉽게 이해시키기 위하여 어떤 노력 (예, 교수학적 테크닉)을 하는지 에 관하여 후속 질문을 구사하였다. 또한 무한과 극한에 관련된 무한소 및 무한합에 관하여 예비교사가 일상적으로 사용하는 언어와 수학적 표현 사이의 관련성을 후속 질문으로 깊이 있게 다루고자 하였다.

연구자는 심층 면담에서 나타나는 연구자와 연구참여자의 대화 및 연구참여자간의 그룹별 대화를 담화분석 방식과 인물 사례 연구방법을

혼합하여 무한에 관련된 개념과 이해 정도를 포착하려고 노력하였다(주미경, 2009; 전영국, 배성아, 이현주, 2013). 면담 후에 오디오 자료를 거듭 반복해서 다시 들으면서 면담 대상자가 사용한 언어적 표현과 수학적 개념에 대한 관련성을 세세하게 포착하여 면담 대상자 개인의 수학적 선호, 감정 상태, 과거 중고등학교 수학 경험에 대한 느낌 등을 온전하게 공감하기를 시도하였다. 연구자는 [그림 1]에서 보듯이 개인의 수학 공부에 대한 경험과 주요 줄기(strands)를 시간 축 위에 펼친 시간 흐름표를 작성한다. 이것을 토대로 대학에서 배우는 수학에 대한 느낌과 무한에 대한 수학적 개념 및 자신의 수학적 사고에 대한 인식의 폭을 해석한 결과를 주제별로 통합하여 글쓰기 작업을 완성한다(Lightfoot & Davis, 1997; Witz, 2006).

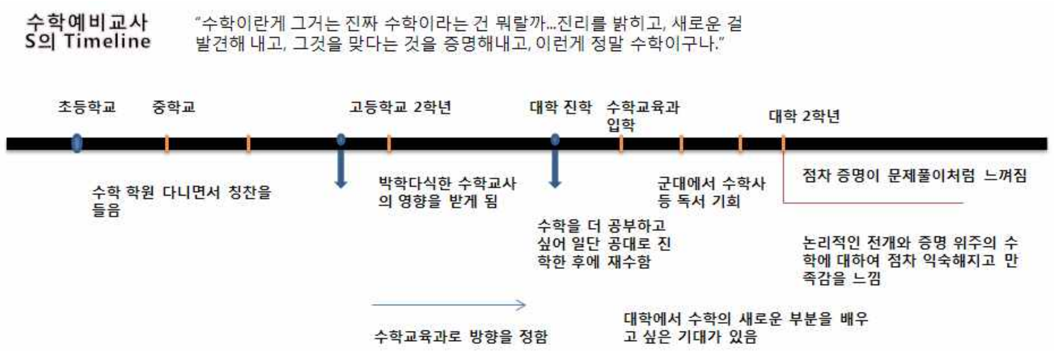
Ⅳ. 사례별 소개

1. S(2학년 남)

약간 과묵하면서도 면담을 할 때 숙고하는듯이 대답하는 S는 수학을 하는 사람들에게서 나타나는 그런 이미지가 풍겼다. 그는 초등 및 중학교에서 학원을 다니면서 수학을 잘 한다고 칭찬해 주는 수학 선생님의 영향을 받아서 수학을 좋아하게 되었다. 고등학교 2학년 때 만났던 수학선생님은 수업 중에 여러 가지 이야기를 해 주시면서 간간이 한문을 쓰시기도 하는 등 박학다식한 분이었는데 그 영향을 받아서 ‘아는게 많은 사람’ 그런 수학교사가 되고 싶다는 생각을 갖게 되었다. 공대에 진학하여 잠간동안 대학 생활을 하다가 다시 수학을 좀 더 공부해 보고 싶어서 재수 끝에 수학교육과에 들어오게 되었다.

가. 대학 수학을 다루는 방식

그는 고등학교 시절에 미적분에 관련된 문제를 계산 위주로 풀어나가는 것이 수학을 제대로 하는 것으로 알고 있었는데 대학에 들어온 이후에 하게 된 수학은 질적으로 상당히 다른 것임을 느끼게 되었다. “[대학에서] 수학을 전공하면 미분 적분을 넘어서서 다른 개념. 처음에 미분적분을 [하는] 새로운 공식 이런 걸 배울 줄 알았어요. 사실 고등학교때 정석 같은데 보면 어떤걸 증명하시오 이런 문제 있어요. 이런 문제는 한번 읽고 넘어가요, 안 풀어요. 이런 공식이 있구나. 그 정도만 하고 넘어갔는데, 수학과로 오니까 다 증명만 하고 있어요. 처음에 학교 다닐 때 내가 생각한 수학이 아니구나 이런 생각을 많이 했어요.“



[그림 1] 시간 축 위에 수학을 대하는 S의 경험과 주요 느낌을 표시한 시간 흐름표 예시

대학에 진학하면서 뭔가 수학에 관련된 새로운 것을 배우겠거니 하는 그만의 기대감은 크게 충족되지 않았지만 논리에 기반을 두고 증명 위주로 전개되는 대학수학을 하면서 조금씩 만족감을 느끼게 되었다. “처음에는 기대한 거랑 달랐는데, 요즘은 계속 하다보니까 증명하는 테크닉이라 할까요 이런 것도 좀 생기고, 하다보니까 요즘 들어서는 전에 생각했던 거 같은 걸 배우는 약간 처음 접했을 때보다는 만족감이 있는 거 같아요.”

그동안 그는 수학교육과에서 집합론, 실해석학 등의 과목을 수강하였고 증명하는 테크닉과 같은 기법을 조금씩 익히게 되면서 증명도 문제풀이처럼 느끼면서 수학에 대한 느낌이 달라지기 시작하였다. 과목마다 등장하는 연습문제가 대다수 증명에 관한 것이어서 논리적인 전개를 하거나 반례를 찾아내는 수학활동을 꾸준히 함으로써 마치 문제를 해결하는 듯한 느낌이 들 정도로 친숙하게 하게 되었다. “수학이란게 그거는 진짜 수학이라는 건 뭐랄까... 진리를 밝히고, 새로운 걸 발견해 내고, 그것을 맞다는 것을 증명해내고, 이런게 정말 수학이구나.”라고 느낄 만큼 그는 수학에 대한 새로운 면모를 느끼게 되었다.

나. 무한집합 개념에 관한 언어적 표현

연구자는 먼저 학생들이 무한집합에 대하여 어떤 언어적 형상을 갖고 있는지 알아보기 위하여 “ 무한집합을 어떻게 바라보는지 어떤 이미지라든지 어떻게 정의 할 수 있는지 자유롭게 얘기해 볼까요?”라고 면담질문을 던졌다. S는 무한의 개념에 대하여 자연스럽게 수를 셀 수 있는 자연수의 집합을 상기시키고 끝없이 나열되는 수가 뒤이어 나타나므로 그런 집합을 떠올린다. 어떤 이미지로 무한을 떠올리기보다 끝이 없는 어떤 원소의 나열로 이루어진 집합 개념으로 설명하고 있다.

S : 딱히 떠오르는게 수를 배우잖아요. 초등학교때부터 수를 배우잖아요. 처음 배우는게 자연수잖아요. 자연수를 세어보라고 하면 계속 셀 거 아니에요. 1,2,3,4... 세다 보면 끝이 없이 셀 수 있잖아요. 이름도 알지 못하는 더 이상 어떻게 세야 되는지 A라는 B라는 이름을 붙이면 셀 수가 없잖아요. 그런 자연수가 결국에는 무한집합이기 때문에 무한집합이라는 거 자체는 어려움을 느끼지 않았던 것 같아요. 무한집합은 계속 있는 거다. 학교 와서 배운거 카운터블이냐 그런거 할때 헷갈렸는데요.

연구자1 : 무한집합이라게 이미지로 떠오르나요?

S : 이미지라기보다는 끝없이 있다, 끝이 없다. (1:8)[2)]

다. 둘레 길이가 무한인데 넓이가 유한한 도형

연구자는 ‘삼각형 중에 둘레 길이가 무한인데 넓이가 유한한 그런 삼각형이’ 있는지에 대하여 질문하였으며 S는 나름대로 무한에 관련된 개념을 적용하여 둘레 길이가 무한이 되면서 넓이가 일정하게 되는 삼각형을 한참 생각한 후에 자신만의 새로운 아이디어를 고안해 내었다.

S : 이런게 있지 않을까요? 한변이 길이가 n이고 다른변은 길이가 1/n이면 극한을 취해준다고 하면 넓이는 1/2에다 n을 곱하고 1/n을 곱하니까 넓이는 1/2이 되지만 더하면은 여기가 이제 이렇게 되기 때문에... (2:3)

삼각형 한변의 길이를 계속 늘려나가고 다른 한변의 길이는 그 비율만큼 줄이는 과정을 반복하면 넓이는 1/2이 되지만 변의 길이가 계속 끝

2) (1:8) 표기는 1차 면담의 전사자료 중에서 8페이지에 등장하는 내용의 일부임을 알려준다.

없이 변화하게 되어가는 이미지를 그릴 수 있다. 이 과정에서 자연스럽게 극한에 대한 개념이 등장하여 줄어드는 변의 길이는 0으로 가까이 다가가게 되고 나머지 대응하는 변의 길이는 계속 커져가서 결국에 직선에 가까울 것으로 보았다. “극한을 취하면 길이 하나는 무한이 되어 가지만 하나는 0이 되니까 직선이 될거 같은데, 넓이는 1/2이 되기 때문에...”

S가 제기한 도형에 대하여 좀 더 알아보기 위하여 3차면담에서 후속질문을 던져서 무한과 극한에 대한 언어적 표현을 탐색하였다.

연구자1 : 삼각형의 둘레하고 면적을 구해야 되는데, 어떻게 접근해서 풀어야 될까요?

S : 접근한다기 보다는 갑자기 떠오르는게 그거는 아무튼 면적 자체는 계속 유지가 되는 거잖아요. 근데..넓이가 유지되는데 극한자체는 직선이 되잖아요. 극한 자체는 직선이 되는데, 떠올랐는데 어떤 무리수가 있으면 그 무리수로 접근하는 유리수가 존재하잖아요. 그러면은 그 자체는 유리수이지만 극한은 무리수잖아요. 그런거랑 비슷한게 아닐까요? 그 전까지는 일종의 삼각형인데 극한의 직선이 되고 비슷한거 같아서...

연구자1 : 도형으로 보면은 도형이 계속 쭉 극한으로 가면 직선처럼 변하는 것처럼 보이는데요. 만약에 직선이 되면은 넓이가 없을 거 같고,

S : 그니까 그래도 그 자체는 계속 밑변과 밑변 아무리 짧게 하더라도 그걸 다시 현미경으로 볼 수 있는 거고 그런 식으로 확대해서 본다면 결국은 넓이가 존재하는 거고 그런 식으로 삼각형을 생각할 수 있지만 극한은 직선이죠, 극한값은 직선이죠. (3:9)

앞에서 소개한 둘레가 무한이고 넓이가 일정한 어떤 삼각형을 고안해 낸 S는 자신이 생각해 낸 삼각형의 한변이 계속 커지는 비율만큼 다른 한변은 그에 반비례하는 크기로 줄어드는 구체적인 상황을 제시하였다. 이런 방식으로 어떤 삼각형의 변형을 계속해 나가면 밑변은 한없이 커지는 직선이 된다. 결국 둘레와 면적에 대한 개념을 극한의 관점에서 다시 생각하는 계기를 갖게 되었다. “직선이란게 둘레를 생각 할 수 없지 않을까요? 일종의 그걸 계속 극한을 하면은 끝없이 가잖아요. 일종의 수직선이라고 생각할 수 있는데, 수직선은 아무래도 직선은 수학정의에서 넓이가 없다고 하기 때문에 둘레를 갖는다는 것은 회로처럼 이렇게 처음과 끝이 다 있어야지 그 안에 면적을 포함하고 삼각형처럼 그런거를 둘레라고 말하는데, 수직선을 그 길이를 둘레라고 생각한다면 가능하겠지만 (연구자) 말씀대로 둘레의 정의가 명확하게 몰라서 찾기 힘든거 같아요. 둘레의 정의가 정확하게 있다면 좀 더 생각할만한거 같아요”

이렇듯 S가 제시한 무한에 관련된 아이디어는 시어핀스키 삼각형과 같이 둘레 길이가 무한이고 넓이가 0이 되는 통상적인 예보다 자신이 생각하여 구성해 낸 아이디어로서 주어진 질문에 부합되는지 논리적으로 설명해 주는 그만의 수학적 사고의 패턴을 보여주고 있다. 대학교 2학년 수준에서 수학공부를 해보면서 “...새로운 걸 발견해 내고, 그것을 맞다는 것을 증명해내고, 이런게 정말 수학이구나.”라고 느꼈던 부분과 상통하는 S만의 수학적 방식을 읽을 수 있다.

라. 작은 수에 관련된 무한번 더하기

앞에서 제시된 둘레에 대한 탐구활동을 연계하면서 연구자2는 면적에 대하여 무한의 개념과 연결된 질문을 던져보기로 하였다. “0에 아주 가까운 수 있어. 굉장히 작은 수야. 그걸 무한번 더하면 어떻게 되냐?”라고 묻자 S는 알 수 없다고 답했다. 이어서 “0이 아닌 아주 작은 수들이 무한개가 있어 그것들을 다 더하면?”이라고 묻

자 “그렇게 작은 정도의 따라서 다르다고 생각할 수 있을거 같아요.”라고 답변하였다. 이에 연구자2는 S가 질문의 의미를 제대로 이해하지 못했다고 느끼고 다시 부연 설명을 해 주었다.

연구자2 : 일반적으로 자연스럽게 논의 했을때 다시 질문을 던질게 1번문제의 질문은 0의 가까운 아주 작은 수를 무한번 더하면 어떻게 되느냐 그거였고 이번 건 아주 작은 수들이 같을 수도 있고 다를 수도 있고 작은 수들이 무한개 있고, 그것들을 무한번 더하면 어떻게 되느냐 두 개의 차이는 있지요?. (S: 네...) 머릿속에 그림이 그려지지? 아주 작은 수를 무한번 더하면 어떻게 되느냐? 거기에 대해서...

S : (바로 끼어들며) 그 아주 작은 수도 어떤 수잖아요. 아주 작은 어떤 수 일종의 상수라고 생각할 수 있기 때문에 무한번을 보내면은 무한대가 될 거 같아요.

연구자2 : 그 다음에 아주 작은 수들이 있어, 수들이야, 같은 것이 아니고 그것들이 무한개가 있어 그걸 더하면? 아까 가부 무한 비가부 무한 얘기했어. 그 수들이 가부 무한개 있다 그래..

S : 그 수들 자체만 더하는 건가요? 각각들 다 같이...

연구자2 : 작은 것들이야

S : 두 번 사용하지 않고요? 두 번 사용할 수 없구요?

(한동안 침묵...생각하는 중)

S : 제 생각에는 그것들이 다 있지만 그 중에 최소값이 존재하는 건가요? 그중에 최소값이 있다고 하면은 그 최소값도 일종의 상수가 되기 때문에 그 상수 어떤 상수의 무한을 한거나 마찬가지기 때문에 무한대가 될거 같아요. 그거보다 큰 수니까 최소값보다 더 크기 때문에... (3:11)

S는 작은 수에 관련된 무한번 더하기에 대하여 두 가지 질문에 대하여 더하는 연산을 무한번 하는 생각의 패턴을 보여주었다. 면담에서 자연스럽게 대화를 하면서 등장하는 무한번 더하기에 대한 언어적 표현을 일상적 표현으로 받아들여서 더하기에 대한 극한을 연결시키고 있으나 부분합의 급수에 관한 극한 개념을 사용하여 추론하지 못하고 무한합의 의미로써 무한대가 될 것이라고 표현하였다.

2. Y(2학년 여)

Y는 다른 여학생들과 달리 약간 명랑한 목소리로 활발하게 말하면서도 대화의 분위기를 이끌어가는 적극성을 보여주었다. 비교적 과거의 시점에 벌어졌던 상황에 대하여 상세히 기억을 하면서 때로는 그 당시에 느꼈던 감정 상태를 생생히 느낄 수 있도록 말해 주었다. 중학교 3학년때 수학시간에 채점되었던 답에 대하여 다른 답을 제시하여 인정받게 된 것을 계기로 수학공부에 더 호감을 가지고 대하게 되었다. “(중략) 선생님이 딱 거기서 저한테 그래 너가 풀었으면 그것도 맞겠지 이것도 맞았다 해줄게. 하고 그걸 답을 처리를 해주셨는데 그때 너무 좋았던거 같아요, 가장. 그래서 그 후로부터 수학을 되게 많이 했었어요. 그니까 이런 수학에서 인정 받는게 너무 좋아서 그때 엄청난 전력을 다해서 많이 했던거 같아요. 전력을 다해서 정말..” 고등학교 시절에 점차 수학에 친해졌던 그가 정말 수학을 하고 싶은 상태에 도달하지 않았지만 그래도 재수 끝에 차선책으로 수학교육과에 진학하였다.

가. 대학 수학을 다루는 방식

Y가 대학에서 수학을 대하는 방식은 여느 학생과 매우 다르게 수학은 완성된 인간을 만드는 가장 중요한 관계라고 생각하고 있다. 수학을 배워서 사고하는 사람하고 수학을 배우지 않고 사고하는 사람하고 비교할 때 논리적으로 생각하고 사고를 전개한다는 것은 차이가 크다고 보고

있었다. 인간 사이의 관계를 형성할 때 논리적으로 깔끔하게 대해 주는 사람을 형성시켜 준다는 측면에서 수학공부가 매우 중요하며 이것은 중3 때 만났던 선생님을 통해서 자신을 인정해주었던 부분이 Y에게 매우 크게 다가오고 있음을 알아차릴 수 있다.

특히 중고등학생 시절에 자신이 수학을 하면서 느꼈던 경험과 현재 중학생을 대상으로 과외를 하는 경험을 토대로 대학에서 수학을 하는 것이 고등학교와 확연히 차이가 남을 인지하고 있었다. 이런 부분은 Y가 대학에서 수강하는 대수, 해석학 등의 과목을 통해 중고등학생들의 수준에서 이해할 수 있도록 어떻게 표현해야 하는가를 지속적으로 탐구하는 양상과 관련되어 있다(전영국, 2013).

> (중략) 대수를 보면은 우리가 일반적으로 중학교 처음 들어가면은 식이라는 걸 배우고 방정식이라는 걸 배워요 1학년 딱 들어갔을 때 x+2 는 그냥 식이에요. x+2=0이에요. 그러면은 " =, 0이 있고 없고 차이구나" 라고 생각할 수 있는데, 이거를 대수적으로 풀이하면 x+2에서 나타나는 x는 어떤 이 숫자를 포함하는 원소를 나타내는 포지션 x이고, x+2=0이라는 x는 어떤 x+1=0으로 만들어 주는 x라는 숫자를 모르니까 변수로써 쓰고 있는 거든요. 이런 식으로 똑같은 문자여서 분명 학생들은 똑같다고 생각을 할건데, 그게 다르는 걸 아는 것도 재미있어요. 다항식에서라든가 이산수학 같은 경우에는 보이는 거죠. 다른 것들에 비해서 딱히 신기한 거는 규칙성 발견했을 때, 방금 이 [시어핀스키] 삼각형 같은 경우에도 "어 줄어들고 있네 줄어든가 보다"라고 생각할수 있는데, 전 이걸 가지고 점화식을 만들고 있잖아요. 어떤 일반화를 도출해내서 그 전하고, 어떤 관계가 있는지 살펴보고 이런거 규칙성 발견도 재미있죠 (2:6).

나. 무한집합 개념에 관한 언어적 표현

Y가 무한에 대한 개념을 대하는 방식은 매우 독특하다. 무한 자체에 대하여 생각하기 어려우므로 말로 표현하는 것 자체가 비정상이며 끝이 없는 집합에 대하여 일상적으로 알기 쉽게 인간의 자자손손 이어져가는 관계를 들어서 표현하고 있다. 수학이란 Y에게 인간관계 형성과 밀접하게 관련되어 있다는 암시를 엿볼 수 있는 대목이다.

> "무한이란거 자체가 딱히 뭐라 말을 할 수 없는게 이해가 안 가야 정상이에요 우선 이게 뭐지? 라고 생각이 들어야 올바른 생각을 하는 거에요. 무한은 추상적인 거기 때문에 구체적으로 이렇다 저렇다 말할 수 없다는게 받아들일 수 있는게 무한집합이니까 말로 정의하면 끝이 없는 집합이라고 하잖아요. 어떻게 그 끝이 없냐라는 걸 받아들인다는 걸 인간에 비유하면은 인간이 모인 집합을 무한집합이라고 하면 우리 위의 조상의 조상이 올라가다 보면 사람이 셀 수 없다는 걸 알게 되잖아요. 그 위에 누가 있다는 걸 알 수 없다는 거 자식이 또 자식을 또 낳고 그 끝이 어디가 되는지 모르잖아요. 그렇게 이해를 하면 무한 집합이란게 정확히 전달이 될 거 같아요. (1:8)"

후속면담에서 무한집합의 정의를 물었을 때 Y는 비교적 수학적 정의에 가깝게 설명하였다. "무한집합에도 여러 가지가 나눠지지 않나요? 셀 수 있는 무한집합도 있고 셀 수 없는 무한집합도 있고 셀 수 있는 집합 같은 경우에는 자연수와 1:1 대응이 되는 경우이고 셀 수 없는 경우는 그 0과 1 그 개구간 0과 1과 그 1:1 대응이 되는 집합"이라고 기억을 더듬어 표현하였다. 이와 같이 Y는 교재에 나오는 수학적 정의에 따라 생각하고 이해해야 하는 표현의 중요성을 여기면서 동시에 인간의 입장에서 무한을 다루어야 하는 언어적 한계성을 알아차리고 있었다.

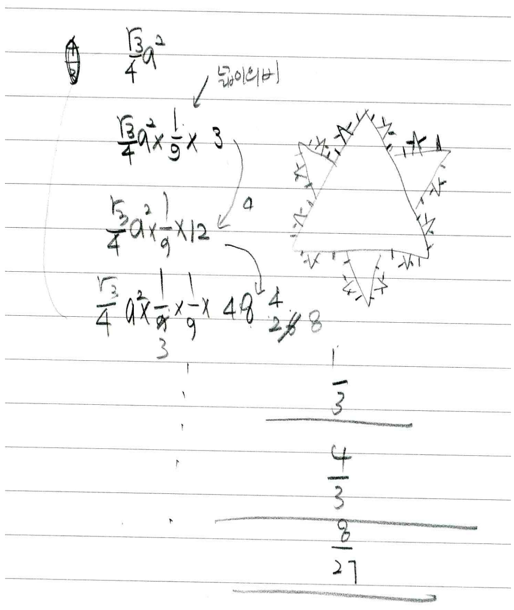
다. 둘레 길이가 무한인데 넓이가 유한한 도형

“삼각형 중에 둘레 길이가 무한인데 넓이가 유한한 그런 삼각형이 있을까 생각해 볼래요?” 라는 질문에 Y는 바로 시어핀스키 삼각형에 대하여 기억을 하고 전시회에서 만들었던 사면체를 어떻게 제작했는지 설명을 해 나갔다. 앞에서 무한에 대하여 설명한 방식대로 전시에 보여주기 위한 유한한 형태의 사면체를 처음부터 제작하기 위하여 거꾸로 제작하는 방식을 보여주고 있다.

“(수학 교구 학습용) 전시를 했는데, 원래는 이렇게 큰 사면체부터 쪼개고, 똑같은 부피와 길이와 비율로 줄여서 계속 쪼개고 쪼개서 계속 쪼개 내는 방법으로 제작을 해야 되는데, 만드는 거니까 조그만 것부터 올라갔거든요. 입체적으로 생각하면 그렇게 되고, 평면상으로 보면 이런 삼각형들, 똑같이 정삼각형안에 다시 중점들을 이어서 다시 정삼각형을 만들고, 만들고 만들고 하면은 계속 무한으로 이어지니까 길이는 무한이지만 넓이는 큰 삼각형 안에 있다라고 말할 수 있어요(2:2)”

Y는 시어핀스키 삼각형을 만드는 과정을 정확하게 말로 표현하면서 길이는 무한이지만 삼각형 안에 있으므로 유한한 도형으로 인식하고 있었다. 비슷한 맥락에서 코흐 곡선에 관하여 물어보았을 때 둘레의 길이가 무한등비수열로 전개되고 있음을 인식하고 있었다. 그는 먼저 공비를 찾고 나서 1과 비교하여 등비수열이 발산하는 것으로 추론하였다.

연구자1 : (코흐 곡선의) 둘레는?
Y : 무한등비수열로 다 나올 거 같은데요.
연구자1 : 둘레는 계속 조금씩 증가
Y : 비율제로 증가하고 있잖아요. 1/3씩..
(생략)



Y : 길이가 무한이 되요.
연구자1 : 설명한번 해볼래요...
Y : 우선 **(옆에 앉은 친구)가 생각을 한건데 일반항을 찾아보면 4/3 공비가 맞나? 이렇게 될거 아니에요 알고 있는 판정법 B판정법 그러면 약분해서 없어진다... B판정법을 이용하면 되는데, 앞에 있는 항분에 이항이 1보다 작으면 수렴을 하고 1보다 크면 발산을 한다는 거니까 나눠주면 이게 4/3라 치면 이거 자체는 1보다 크니까 무한이 돼서 발산하는...
연구자1 : 면적은 어떻게 해볼 수 있을까?
Y : 정삼각형이면 이걸로 해서 4/3 ...이렇게 해서 이렇게 일반항을 찾아내서 공비에 따라서 늘어날 수 있고, 줄어들 수도 있는데 여기는 공비가 1보다 작은 값이 나올거 같아요.
연구자1 : 공비가?
Y : 네
Y : 1/3이 공비가 되요. 갯수가 늘어나네....구해야 되나...... 1이니까....이렇게... 1/3 나올 거 같은데... 갯수가... 그림이 이게 맞죠? 12개니까.... 갯수가 안 나온다...공비가 특이해... 갯수가 왜 이렇게 늘어나지...
(문제 풀이 중)

Y : 늘어가는게 개수가 4의 배수씩 늘어나요. 4개 곱한거 만큼 늘어가고, 4개 곱한거 만큼 늘어가고, 여기 늘어나는 삼각형 개수도, 그리고 길이의 비의 제곱의 넓이의 비니까 계속 1/9니까 곱해 가면 되요. (2:3-2:4)

Y는 코흐 곡선에 대한 면적을 구하는 과정에서 자신의 생각의 흐름을 말로 생생하게 표현하는 것을 볼 수 있다. 넓이가 늘어나는 패턴을 살펴보고 나서 넓이에 대한 공비를 찾으면서 공비의 특성에 주목하고 있다. 한참 후에 공비가 두 가지 경우로 나누어서 따져보아야 하겠지만 1보다 작다는 것을 확인하였고 정확한 계산을 하지 않은 상태에서 코흐 곡선도 시어핀스키 삼각형과 마찬가지로 넓이가 유한할 것으로 추정하였다.

라. 아주 작은 수에 관련된 무한번 더하기

연구자2가 “아주 작은 수 하나를 그걸 무한번 더하면 어떻게 되냐?”라고 묻자 Y는 일정한 수에 수렴한다고 답했다. 무한급수에 대한 개념을 기억해 내고는 아주 작은 수 하나를 1/10의 n승으로 가정하고 무한번 더하는 연산방식으로 생각하여 어떤 일정한 수에 수렴할 것으로 추산하였다. 반면에 “작은 수들이 무한개 있어요, 그걸 모두 다 더하면”이라고 물어보자 Y는 바로 0일 것 같다고 대답하였다.

연구자2 : 일정한 수에 수렴하고, 0 근처에 있고 그럼 설명을 해 보라고 얘기 할 수 있겠네, 여기서 왜 그런지...

Y : (아~ 한숨을 쉬면서 잠시 생각했다가 작은 소리로) 무한급수 그냥 떠오른 건 0이 가장 작은 수니까 리미트 n이 무한대로 갈 때 1/10의 n승, 일반적으로 생각을 하면은 얘를 무한번으로 더한다는 거잖아요. 그럼 시그마로 묶어서 1-1/10 1/10에서 일정한 수 어떤 값인지 모르겠지만...

연구자2 : 그게 일정한 수이고

Y : 예 일정한 수

연구자2 : 0 이 아닌 아주 작은 수들이 무한개 있어 얘들을 다 더하면

Y : (한숨)

연구자2 : 아까 문제하고 차이점이 있지요. 아까는 작은 수 하나가 있는 거고 (이번에는) 작은 수들이 무한개 있어요.

Y : 0, 이번에는 0일거 같아요.

연구자2 : 이유는? 설명을 해봐야 되지요.

Y : 일정한 수가 아니기 때문에 우선 규칙은 찾아 볼 수가 없을 거 같에요. 규칙은 찾아 볼 수가 없고 0에 가까운 0이 아닌 작은 수라 했잖아요. (3:20)

Y는 여러 가지 작은 수들이 무한개 있는데 이들 사이의 규칙을 파악하기 어려우므로 무한번 더한다는 것에 상당히 부담감을 느꼈다. 무한급수를 부분합에 대한 수열의 극한으로 받아들이고 있으나 막상 일상적인 언어로 표현하자니 무한번 더하기에 대한 논리적 추론을 하지 못하고 주춤거렸다.

V. 결론 및 논의

본 논문에서 우리는 수학 예비교사들이 수학을 다루는 방식과 관련하여 무한에 대한 일상언어적 표현과 수학적 표현 방식의 전개에 관한 양상을 질적 사례 연구로 살펴보았다. 연구참여자 2명은 무한(infinite)에 대한 개념을 자연스럽게 일상적 언어로 ‘끝없이 이어지는’ 것으로 표현하였으며 무한대와 분명히 구분하였다(Kim, Sfard & Ferrini-Mundy, 2005; Kim, Ferrini-Mundy & Sfard, 2012). 넓이가 유한이고 둘레의 길이가 무한인 도형에 대한 부분에서 극한 개념을 자연스럽게 연결시켰으며 해당되는 사례를 생각해 내는데 2명 모두 비교적 정확하게 묘사를 하였다. 길이가 무한인 도형에 관하여 컴퓨터 프로그

램 하듯이 코흐곡선과 시어핀스키 삼각형을 구성하는데 무한번 반복하는 언어적 설명을 구사하였다.

그러나 아주 작은 수 및 무한급수에 관련된 질문에 자신의 생각을 논리적 표현으로 전개하는데 미치지 못하였고 일상적 언어로 자신의 생각을 표현하면서도 수학적인 근거를 뒷받침하지 못함으로써 자의적으로 무한에 관한 오개념이 발생되는 양상을 보여주었다(최승현, 1999). 즉, 무한에 관한 이미지와 관련된 일상적 표현이 수학적 개념 정의를 형성하는데 걸림돌이 되거나 오개념을 형성하는 양상이 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 두 사례를 통하여 공통적으로 나타나는 것은 연구참여자가 수학을 다루는 방식과 언어적 표현 양식이 아주 다르게 나타나고 있으며 이러한 개인적 차이는 엄밀한 수학적 개념 정의를 형성하도록 하는 교수학적 변환의 중요성을 더욱 높이고 있음을 시사한다.

1. 수학적 사고 패턴과 무한 개념에 대한 언어적 표현 방식

S는 대학 2학년에 들어서면서 “새로운 걸 발견해 내고, 그것을 맞다는 것을 증명해내고, 이런게 정말 수학이구나.”라고 느낄 만큼 논리적 추론에 따라 증명 또는 반례를 찾는 활동이 마치 문제풀이처럼 느껴질 정도로 대학수학의 고급스러움에 적응해나가면서 어느 정도 만족감을 느끼고 있었다. 무한에 관한 그의 표현은 간단명료하였으며 초등학교 때 배웠던 자연수에서 수가 끝없이 전개되는 양상을 친근하게 떠올리면서 ‘끝없이’ 나열되는 그 어떤 집합과 같은 것으로 표현하였다.

반면에 Y는 엄격한 논리적 근거에 따라 전개되는 수학이 “올바른 인간을 형성하는데” 도움이 된다는 것을 알아차리고 자신과 다른 사람과의 관계 형성에 수학이 중요한 역할을 한다는 점에 약간의 매력을 느끼고 있었다. 수학적으로 생각한다는 것이 일상적 언어로 표현이 되어야 한다는 점에서 볼 때 무한에 관하여 추상적이기 때문에 말을 할 수 없고 “이게 뭐지?”라고 반문할 때 이해가 되지 않아야 정상이라고 느끼고 있었다. 추상성을 누구나 일상적 언어로 표현할 수 있어야 함을 느꼈던 그는 인간 관계의 예를 들어서 자자손손 대를 이어나갈 경우에 끝없이 진행되어 가는 생생함을 표현하는 방식에서 그의 독특함을 엿볼 수 있다. 이런 그의 언어적 표현 방식은 과외를 할 때 함수와 확률 등의 수학적 개념을 생생한 일상적 언어로 학생의 눈높이에 맞추어 표현하는 테크닉에서 수학에 대한 흥미를 유발하는 힘을 발휘한다 (3:6-8).

2. 넓이가 유한이고 둘레가 무한이 되는 도형에 관한 표현

자신의 생각을 토대로 수학적 탐구를 해 나가는 S와 일상적 언어로 생생하게 이해할 수 있도록 쓰기를 중시하는 Y는 넓이가 유한이고 둘레가 무한이 되는 도형에 관한 표현에서 차이가 두드러지게 나타난다. S는 기존의 시어핀스키 삼각형 또는 코흐 곡선과 같은 상투적인 개념에 머물기보다 자신의 아이디어를 바탕으로 개념에 부합되는 새로운 예를 제시하였다. 한 변의 길이가 n으로 점점 커질 때 다른 변의 길이가 1/n로 반비례하여 계속 변화되는 삼각형의 무리를 생각해 내고 그 과정을 계속 해 나가는 극한에 이르렀을 때 삼각형 같은 직선이 되는 것이 마치 유리수의 극한이 무리수가 되는 것과 같은 프로세스를 제시하였다.

한편 Y는 수학 전시회에서 보여주었던 사면체 형태의 시어핀스키 형태를 바로 기억해 내었으며 개념적으로 만들어가는 과정과 반대로 실제

전시용 작품을 만들기 위하여 반대로 작업해 나갔음을 상세하게 말해주었다. 코흐 곡선에 관하여 둘레의 변화를 무한등비수열로 인식하였으며 종이에 그림을 그린 후에 실제 둘레의 길이를 구하기 위하여 공비를 찾아서 계산해 방식을 탐색하는 과정을 마치 "think aloud" 하듯이 생각의 흐름을 포착할 수 있도록 표현해 나갔다. 그는 컴퓨팅 계산의 형태로 무한번 반복되는 패턴을 일상적 언어로 설명을 하면서 둘레와 면적을 구하는 수학적 표현을 하는데 마치 백지에 자신의 생각을 차곡차곡 채워나가듯이 집중하는 모습을 보여주었다(전영국, 2013).

3. 아주 작은 수에 관련된 무한합에 관한 언어적 표현

아주 작은 수에 관련된 무한합에 관한 언어적 표현에 관하여 S와 Y는 모두 정확하게 추론하는 방식을 알고 있지 못하였다. 0에 아주 가까운 수를 무한번 더한다는 질문에 S는 알 수 없지만 0에 가까울 수 있다고 했으며 Y는 어떤 수인지 모르지만 일정한 수에 수렴한다고 생각하였다. 0에 가까운 수가 여러 개가 무한개 있을 때의 합에 대한 질문에 S는 무한대라고 답하였고, Y는 규칙을 찾아볼 수 없지만 0이 될 것이라고 추측하였다. 그들은 무한급수의 개념에 대한 형식적 정의를 알고 있었으나 일상적 언어로 표현하고 추론하는데 어려움을 갖고 있었으며 생각의 근거를 명확하게 제시하지 못함으로써 오개념을 형성하는 전단계의 양상을 보여주었다.

0에 가까운 작은 수들이 무한 개 존재하는데 이를 모두 더하게 되면 작은 것들이 무한번 쌓이게 되므로 무한대가 될 것이라는 S의 생각은 자연스럽다. 하지만 0에 아주 가까운 수 하나를 무한번 더하면 0에 가깝겠지만 알 수 없다는 것은 확실한 논리적 추론에 바탕을 둔 방식을 자신의 일상적 언어로 표현하지 못하는 면을 보여주고 있다. 이에 반하여 Y는 주어진 질문에 충분히 생각을 하지 못하는 듯이 보였으며 0에 가까운 어떤 수가 무한개 존재한다는 비현실적인 추상적 설정에 그리 흥미를 느끼지 못하는 듯이 보였다. 이것은 아마도 무한에 대하여 알지 못하는 것이 정상이라고 보는 그의 개인적 견해와 연결되어 있었다. 그는 0에 가까운 아주 작은 수와 같은 것이 존재하는지 그렇지 못하는지에 대하여 정체가 불분명한 대상으로 인지하였고 그것에 대하여 적극적으로 생각하려고 하지 않는 태도를 보여주었다.

4. 논의

본 연구는 수학 예비교사들의 무한과 관련된 언어적 표현이 논리적 표현으로 연계되는 부분에서 어떤 특징이 나타나고 있는지 보여준다. 두 사례를 통하여 고등학교 수학과 달리 대학 2학년에 이르러 무한과 같이 추상적인 개념을 일상적인 언어로 표현하는 방식이 논리적인 표현방식으로 전개되는 과정에서 어려움이 발생되고 있음을 볼 수 있다. 두명의 사례에서 무한에 관한 수학적 표현의 깊이와 전개 방식에 대한 패턴이 확연히 차이가 드러나고 있다. 이와 같이 두 사례를 통하여 공통적으로 나타나는 것은 수학을 대하는 방식과 일상적 표현을 통하여 개념을 대하려는 개인적 성향이 정확한 수학적 표현을 하는 것과 깊은 관련성이 있으며 이것은 수학적 개념 정의를 습득하는데 관련되는 애로점을 제거시키고자 하는 교수학적 변환에 관한 연구에서 중요하게 다루어야 할 요인 중의 하나임을 확인할 수 있었다(최승현, 1999).

무한과 극한에 대한 개념은 수열, 연속과 근사치, 급수 및 미분 등의 영역에서 자연스럽게 연관되어 나타나는 중요한 영역을 차지하지만 학

생들이 언어적 표현으로 다루기에 상당히 어려움이 있고 자칫 언어의 함정에 빠질 수가 있다. 또한 박수정(2002)의 연구에서 지적하였듯이 무한과 수열의 극한에 관한 교수학적 지식을 규정하기가 어렵고 수학 예비교사들이 수열의 극한에 관한 교수학적 지식을 어떻게 형성하는지 찾기 어려운 점을 감안 할 때 다음과 같은 부분을 탐색할 필요가 있다.

수학을 다루는 방식이 개인별로 차이를 보이는 수학예비교사들이 향후에 교사가 되었을 때 수학교실에서 무한에 관한 개념을 다룰 때 언어적 표현 방식의 차이가 크게 나타날 수 있음을 시사하고 있다. 이것은 연구참여자별로 무한과 관련된 문제를 해결하는 방법을 가르치는 방식에서도 확연히 차이가 날 수 있다. 따라서 무한에 관한 수학적 표현의 엄밀성에 따라 논리적 전개를 하는 방식을 교수학적 지식 변환의 차원에서 구체화 하는 후속 연구가 필요하다. 예를 들어 수학을 다루는 개인적 성향과 방식을 고려하면서 무한에 대한 개념을 다양한 일상적 표현으로 정확하게 전환시키는 교수법을 개발할 필요가 있다.

이러한 측면에서 통합적 교수학적 방법을 제공하는 독일 도야 이론에 근거한 교수학적 방법론을 연구한 Klafki의 5개 질문을 교사 지도안 작성에 도입하여 수업을 진행할 수 있다 (Westbury, Hopmann, & Riquarts, 2000). 먼저, Roth의 lesson plan(교사 지도안) 작성과 관련하여 무한과 수열을 가르치려고 하는 예비교사의 동기 및 계획에 대하여 물어본다. 1) 무한 개념에 관련된 내용을 현재 왜 배워야 하는가? 2) 무한 개념에 관련된 내용은 학생의 미래에 어떤 영향을 미치는가? 3) 무한 개념과 관련된 내용에서 학생의 도야를 도와주는 도야문화재는 무엇인가? 4) 앞의 요소 1, 2 & 3의 내용을 어떻게 구조화 할 것인가? 5) 무한 및 무한합 내용에 들어있는 아이디어를 어떻게 표현할 것이며 어떤 반성적 사고를 할 것인가? 이런 교수학적 방식은 미래의 수학교사가 될 예비교사들에게 도야적 관점에서 무한과 관련된 개념과 교수학적 지식을 형성하는데 많은 도움이 될 것이다.

한편 인류학적 교수학적 방법에서 제시하는 ATD 기법을 도입하여 수열의 극한 교수 방법에 따라 유한성으로 무한성을 극복하기 위하여 수렴의 필요성을 질적 사례 연구로 탐색할 수 있다(김부윤, 정경미, 2009). 수학예비교사가 무한의 정의 및 개념과 수학적 지식을 조직화하는 과정에 관련된 학습 동기 및 언어적 표현을 통하여 소통하는 방식을 연구하는 것은 매우 흥미로운 주제이다. 로버트가 수학을 하면서 CAS를 깊이있게 다루면서 테크놀로지를 수학하기에 통합한 측면을 초상화법으로 연구한 것처럼 수학예비교사가 유한을 어떤 방식으로 사용하여 무한성에 관한 수학적 개념 정의를 습득하는지에 대한 교수학적 지식 습득 과정을 심층면담으로 살펴보는 것은 향후 과제로 남긴다(Tall & Vinner, 1981; Witz, 2007). 수학예비교사의 삶 속에서 무한 개념과 관련된 수학적 표현을 배우고 학생들에게 언어로 표현하는 과정에서 발생하는 어려움과 개인의 개념 정의를 습득하는 연구는 무한에 관련된 오개념을 바로 잡을 수 있는 다양한 언어적 표현을 사례 기반 학습으로 제시함을 필요로 한다.

참고문헌

강윤수, 고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형 역(2005). **정성연구방법론과 사례연구**. 교우사.

김부윤, 정경미(2009). 인류학적 방법에 입각한 수열의 극한 교수에 대하여. **학교수학, 11**(4):

707-722.

박수정(2002), **예비교사와 현직교사의 극한개념에 관한 교과내용적 지식과 교수학적 지식**. 석사학위 논문, 이화여자대학교 일반대학원.

오채환 역(2009). **화이트헤드의 수학이란 무엇인가**. 궁리.

전영국, 강윤수(2005). 중등 수학과 예비교사의 학업 문제에 관한 탐구. **한국학교수학회 논문집, 8**(4), 509-523.

전영국, 강윤수, Witz(2006). 중등 수학 예비교사의 심층 동기, 교과교육학 지식 및 내적 비전에 관한 질적 사례 연구. **한국학교수학회 논문집, 9**(2): 179-193.

전영국(2013). 중등 수학 예비교사의 진학동기, 수학 전공공부 및 과외 경험에 관한 질적 사례 연구, 대한수학교육학회지 **수학교육학연구, 23**(2), 269-284.

전영국, 배성아, 이현주(2013). 초상화법에서 사용되는 심층면담에 관한 탐구: 동반자적 관계 형성과 주관적 요소 탐색을 중심으로. **교육인류학 연구, 16**(3), 1-29.

주미경(2009). 수학 교사의 설명 담화 분석: 교실 설명 속의 다양한 수학적 목소리. **교육과정평가연구, 12**(3), 247-274.

최승현(1999). 수학적 오개념 발생에 관한 고찰-극한 개념을 중심으로. **교육과정평가연구, 2**(1), 59-73.

Goodwin, D. (2013). Blending Direct and Constructivist Teaching: How One Teacher Goes About It In the Middle School Mathematics Classroom. In C. Craig, P. Meijer, & J. Broeckmans (Eds.), From teacher thinking to teachers and teaching: The evolution of a research community. Bingley, UK: Emerald Publishing.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept, Journal for Research in Mathematics Education, 24(2), 94-116.

Kim, D-J, Sfard A. & Ferrini-Mundy, J. (2005). Students' colloquial and mathematical discourses on infinity and limit. Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 201-208. Melbourne: PME.

Kim, D., Ferrini-Mundy, J., & Sfard, A. (2012). How does language impact the learning of mathematics? Comparison of English and Korean speaking university students' discourses on infinity. International Journal of Educational Research, 51-51, 86-108.

Lawrence-Lightfoot, S., & Davis, J. H. (1997). The art and science of portraiture. San Francisco: Jossey-Bass.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Teppo, A. R. (Ed.). (1997). Qualitative research methods in mathematics education. National Council of Teachers of Mathematics.

Westbury, I., Hopmann, S., & Riquarts, K. (Eds.) (2000). Teaching as a reflective practice: The German Didaktik tradition. Lawrence Erlbaum Associates.

Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. Journal for Research in Mathematics Education, 25(4), 346-370.

Witz, K. (2006). The participant as ally and essentialist portraiture. Qualitative Inquiry, 12, 246-268.

Witz, K. (2007). Spiritual aspirations connected with mathematics: the experience of American University Students. The Edwin Mellen Press.

Witz, K., Goodwin, D., Hart, R. S., & Thomas, S. (2001). An essentialist methodology in education-related research using in-depth interviews. Journal of Curriculum Studies, 33(2), 195-227.

Witz, K. G., Lee, H., & Huang, W. (2010). Consciousness in the study of human life and experience: "Higher aspects" and their nature. Qualitative Inquiry, 16(5), 397-409.

A Qualitative Case Study about Mathematics Pre-Service Teachers' Ways of Dealing with Math and Linguistic Expressions on Infinity

Jun, Youngcook (Sunchon National University)
Shin, Hyangkeun (Sunchon National University)

The aim of this paper is to explore and understand, using in-depth interviews, the participant's interests and discourse analytic expressions in studying the notion of infinity and limit. In addition we tried to understand how the participant's ways of dealing with math and thinking patterns on the polygons whose boundary is infinite but area is finite as they brought up such examples. Further follow-up questions are posed on the infinite sum of a smallest number close to 0 and the sum of infinite sets of different smallest numbers close to 0. Larger aspects of two pre-service teachers' subjective thinking patterns and colloquial discourses were sketched by contrasting the three posed tasks. Cross case discussions are provided with several suggestions for the future research directions.

* Key Words : infinity, mathematical thinking, discourse analysis, qualitative case study ways of dealing with math, 무한, 수학적 사고 패턴, 담화분석, 질적 사례 연구, 수학을 대하는 방식

논문접수 : 2013. 8. 8
논문수정 : 2013. 8. 13
심사완료 : 2013. 9. 14