대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 3, 651 ~ 665. Sep 2013

문제해결에서 비형식적 증명 활동의 기능과 교사의 역할에 대한 사례연구

성 창 근*

본 연구는 의사소통을 강조한 문제 해결 수업에서, 비형식적 증명 활동이 문제 해결에 어떻게 기여하며, 이 때 교사의 역할은 무엇인지를 확인하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 비형식적 증명활동에 따른 의사소통 활동이 활발히 일어날 수 있는 과제를 개발하고 초등학교 6학년 학생 4명을 대상으로 사례 연구 실시하였다. 연구 결과 비형식적 증명활동은 문제 이해 과정에서 구성한 잘못된 추측과 시각적 표상을 점진적으로 정교화 하고, 이를 통해 해를 구하고 구한 해의 적절성을 입증하는데 기여하였다. 이러한 효과를 거두기 위해 교사는 활발한 의사소통을 유발시킬 수 있는 과제를 개발하고, 학생들의 추측을 고무함과 더불어 추측을 심화할 수 있는 발문을 사용해야 된다는 점을 확인하였다.

I. 서 론

일반적으로 수학에서 증명이란 공리나 정의에 따라 어떤 명제가 참임을 입증하는 형식적이고 연역적인 논증을 의미한다. 그러나 초등학교 학생들에게 이와 같은 개념에 입각한 증명을 지도하는 것은 교육적으로 적절하지 못하다. 따라서 초등학교 수준이나 형식적 지도에 대한 준비가 되어있지 않은 중등학교 학생들에게 증명의 형식성, 엄밀성을 강조하기 보다는 형식화 이전의 단계에서 할 수 있는 '증명하는 활동' 그 자체를 중요시 하여 다룰 필요가 있다(류성림, 1998). 증명의 의미는 수리철학의 관점에 따라 다양하게 정의되지만, 일반적으로 '가정으로부터 명제를 연역적으로 추론하고 형식적 언어로 이를 나타내는 활동'이라고 할 수 있다(권성룡, 2003). 구체적 조작기의 아동은 가설적 추론이나 기호를 이용한 연역적 증명을 할 수 없기 때문에 이러한 정의를 따른다면 증명활동은 특정시기 이후에나 도입이 가능하다. 그러나 학교 수학은 어떤 지식이 참이고 어떤 공식이 효과적인지를 알아내는 활동만큼이나 왜 그 지식이 참이며 왜 그 공식이 효과적인지를 다른 사람에게 설명하고 납득시키는 활동을 강조할 필요가 있다. 따라서 초등학교 저학년부터 자신의 주장을 조리 있게 설명하고 자신의 생각과 활동 결과를 다른 사람에게 납득시키는 비형식적인 증명활동이 이루어질 필요가 있다. 비형식적 증명은 일반적으로 구체적인 활동을 바탕으로 하고, 일반적인 근거를 직관적으로 인식하며, 그 근거를 형식화한다면 형식적 증명이 생성될 수 있는 증명, 또는 형식적 증명을 구체적인 예에 의한 해석으로 확신시킬 수 있는 증명이다(류성림, 1998). 이 연구에서

* 큰별초등학교 (doway7668@hanmail.net)

비형식적 증명이란 형식적 증명 이전의 증명으로써 문제해결 상황에서 문제를 이해하고, 전략을 생성하며, 해를 구하는 과정에서 추측이나 주장을 생성하고, 정당화를 통해 타인의 동의를 이끌어내고 납득시키는 의사소통 활동을 의미한다.

그동안 수학교육 연구에서 비형식적 증명에 관한 연구는 지속적으로 주목받아온 영역이다. 형식적이고 연역적인 증명관을 학교수학 관점에서 재해석하고 비형식적 증명 지도의 필요성을 강조한 연구(강문봉, 2004; 권성룡, 2003; 라병소, 2001; 류성림, 1998; 조완영, 2000; 홍진곤・권석일, 2004), 일반 학생들의 정당화 유형과 수준을 분석한 연구(류희찬・조완영, 1999; 서지수・류성림, 2012; 최수미・정영옥, 2010), 수학 영재 학생의 증명과 정당화의 특성을 분석한 연구(김지영・박만구, 2011; 나귀수, 2011; 송상헌・장혜원・정영옥, 2006) 등이 이루어져 왔다. 이들 선행연구들은 비형식적 증명을 학교 수학에 적극적으로 도입하고, 일반 학생과 영재 학생들의 비형식적 증명에 대한 인지적 특징을 이해하는데 공헌한 바가 매우 크다. 하지만 비형식적 증명활동이 문제해결 상황에서 어떻게 나타나며 더 나아가 문제를 성공적으로 해결하는데 어떻게 기여하는지, 그리고 비형식적 증명활동을 자극하고 지원하기 위해 교사는 어떤 역할을 해야 하는지에 대한 연구는 미흡한 실정이다. 본 연구의 목적은 이러한 선행연구의 한계를 보완하는 것이다.

이에 따라 본 연구에서는 학생들에게 비형식적 증명활동에 따른 의사소통이 활발히 일어나도록 과제를 개발・투입하고, 그 과정을 고찰하였다. 이 과정에서 비형식적 증명활동이 문제를 해결하는데 어떻게 기여하는지, 그리고 그러한 활동을 진작시키기 위해 교사는 어떤 역할을 해야 하는지를 알아보았다.

II. 이론적 배경

1. 비형식적 증명의 의미와 교수학적 의의

초등학교 수학에서 증명 지도에 관한 필요성이 제기되면서, 증명이 갖추어야할 형식을 갖추고 있으면서 연역적인 증명과 수준이 다른 새로운 의미의 증명이 대두되었다. 대표적으로 정당화와 전형식적 증명이 여기에 해당된다. 예를 들어 ‘삼각형의 내각의 합은 180도이다.’라는 명제를 증명하기 위해 중등 수학에서는 평행선의 성질을 이용하여 연역적으로 증명하는 반면 초등 수학에서는 삼각형의 세 꼭짓점을 가위로 오려 평각을 만드는 활동을 반복함으로써 이를 증명한다.

정당화와 전형식적 증명의 의미는 혼용되어 사용되기도 하지만 양자를 구별하려는 시도 또한 이루어지고 있다. 예를 들어 홍진곤과 권석일(2004)은 정당화와 전형식적 증명은 서로 다른 것이라고 보고하였다. 즉 정당화는 실험적이고 귀납적인 방식으로 이루어지는 증명을 의미하는 반면 전형식적 증명은 이러한 정당화와 수학적으로 완전히 형식화된 수준의 증명 사이에 존재하는 중간 수준의 증명활동을 의미한다고 할 수 있다. 다시 말해 정당화와 전형식적 증명은 모두 구체적인 경험과 실험에 의존하지만, 전자는 특수한 사실을 입증하는 반면 후자는 일반적이고 보편적인 사실을 입증한다는 점에서 차이를 보인다.

하지만 학생들이 독자적으로 증명활동을 수행하는 경우에 정당화와 전형식적 증명을 구별하는 것은 의미가 있지만 학생들이 특정한 수학적 사실에 대해 의사소통하는 상황에서 이러한 구별은 의미가 흐려진다. 또한 정당화, 전형식적 증명, 형식적 증명의 관계에서 정당화와 전형식

적 증명은 결코 형식적 증명이 될 수 없다는 점에서 양자의 차이보다는 공통점에 더 주목할 필요가 있다. 이러한 점에서 이 연구에서는 의사소통 상황에서 정당화와 전형식적 증명을 구별하는 것은 큰 의미가 없다고 판단하고, 양자를 결합하여 비형식적 증명이라 통칭하였다.

전술했듯이 비형식적 증명은 절대적인 참을 확립할 수 없지만, 타인과의 의사소통 과정에서 동의를 이끌어내고 납득시키는데 더 중요한 가치를 두고 있다. 구체적인 예나 활동을 통해 스스로나 상대에게 확신을 얻고자 하는 것으로서 구체적, 신체적 활동을 바탕으로 하고, 타당한 근거를 직관적으로 인식하며, 또한 그 근거를 형식화한다면 형식적 증명으로 발전될 수 있는 증명을 의미한다.

한편, 류성림(1998)은 비형식적 증명의 교수학적 의의를 다음과 같이 제시하였다. 첫째, 증명의 형식성이나 엄밀성을 지나치게 강조하여 증명이 의미 없는 단순한 기호의 계열이라고 보는 형식주의적인 견해로부터 벗어날 수 있다. 결국 증명을 형식적 증명과 같은 의미로 보지 않는다. 둘째, 기호적 수준에서만 증명을 이해하지 않고 행동적, 영상적 수준에서도 증명을 이해할 수 있다. 셋째, 형식적 증명을 생성하거나 확신시키는 역할을 갖는다. 즉 형식적 증명을 직관적으로 뒷받침하는 역할을 한다. 넷째, 수학적인 경험이 부족한 학습자들이 이해하기 쉽기 때문에 정리나 증명의 이해를 돕기 위해 활용할만한 가치가 높다. 마지막으로 증명을 발견하고 이해할 때, 형식적 증명보다는 항상 쉽다고는 말할 수 없지만, 대부분의 경우 증명의 본질을 이해하는데 유익하고, 증명에 대한 통찰을 갖게 한다. NCTM(2000)에서도 이와 같은 맥락에서 K-12학년의 전 수준에서 모든 학생들이 비형식적 증명 활동에 참여시킬 것을 권장하고 있다.

2. 비형식적 증명의 유형

비형식적 증명활동이 문제를 해결하는데 어떻게 기여하는지를 분석하기 위해선행 되어야할 작업은 비형식적 증명은 구체적으로 어떠한 모습을 띠는지를 명확하게 인식하는 것이다. 이를 위해 비형식적 증명을 수준별로 범주화한 선행 연구를 살펴볼 필요가 있다. 비형식적 증명은 연구자에 따라서 다양하게 분류되고 있다. [그림 Ⅱ-1]은 여러 연구자들이 분류한 증명의 유형을 엄밀성과 형식성의 정도에 따라 정리한 것이다.

연구자들이 구분한 증명의 유형은 형식성의

<table>
<tr><th></th><th>Tall(1995)</th><th colspan="2">Harel & Sowder(1998)</th><th colspan="2">Balacheff(1987)</th></tr>
<tr><td rowspan="7">비형식성
↕
형식성</td><td></td><td colspan="2">외적 증명</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">활동적 증명</td><td rowspan="4">경험적 증명</td><td rowspan="2">예를 기반으로 한 증명</td><td rowspan="2">활동적 증명</td><td>순수한 경험주의</td></tr>
<tr><td>결정적 실험</td></tr>
<tr><td rowspan="2">시각적 증명</td><td rowspan="2">지각적 증명</td><td rowspan="2">지적 증명</td><td>포괄적인 예</td></tr>
<tr><td>사고실험</td></tr>
<tr><td>조작적 증명</td><td rowspan="2">분석적 증명</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">논증</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>형식적 증명</td></tr>
</table>

[그림 Ⅱ-1] 형식성의 수준에 따른 증명의 유형 분류

연속체상에 있으므로, 학생들의 반응을 통해서 그들의 수준을 파악하는데 도움이 될 뿐 아니라 상위의 증명 유형을 활용함으로서 학생들의 증명 능력의 발달을 도모하는 데 도움이 될 수 있을 것이다.

[그림 Ⅱ-1]에서 Tall(1995)의 분류는 Bruner의 EIS이론에 근거하여 일련의 증명의 발달단계에 따른 것이며, Harel & Sowder(1998)의 분류는 수학적 생각이나 주장이 참임을 정당화하기 위한 근거가 어디에 있는가에 따른 것이다. 마지막으로 Balacheff(1987)는 활동적 증명, 지적 증명, 논증으로 구별하였다.

본 연구에서는 [그림 Ⅱ-1]에 제시된 여러 가지 비형식적 증명 중 외적증명, 활동적 증명, 시각적 증명, 조작적 증명을 중심으로 살펴보고자 한다. 또한 이 4가지의 증명활동을 중심으로 학생들의 비형식적 증명활동을 분석하였다. 각 활동에 대한 자세한 설명은 다음과 같다.

가. 외적 증명

자신을 납득시키고 다른 사람을 설득하는 원천이 자신이 아닌 외부의 권위에 있는 것으로 생각하여 행하는 정당화를 의미한다. 이러한 정당화 활동을 보이는 학생들은 자신의 생각을 바탕으로 옳고 그름을 판단하기 보다는 지식의 외적 근원이라 할 수 있는 교과서나 부모 또는 교사로부터 들은 것을 참으로 받아들인다. 일반적인 진술이나 구체적인 사례 모두에 적용될 수 있는 정당화 활동이다.

나. 활동적 증명

어떤 대상이 참임을 보이기 위해서 물리적인 활동을 실행하거나 실험이나 실측을 통해서 주장이 참이며 왜 참인지를 보이는 증명 방법이다. 이 과정에서 시각적이고 언어적인 요소도 포함되지만 관계를 보여주기 위해서 물리적인 움직임이 필요하다는 것이 가장 중요하다.

예) 이등변 삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 보이기 위해서 이등변 삼각형을 대칭축으로 하여 접어 포개어 봄으로써 확인하는 것

예) 두 정사각형이 합동임을 보이기 위해서 실제로 본을 떠서 정당화 하는 경우

다. 시각적 증명

한 가지 이상의 예나 시각적인 그림 및 구체물을 이용하여 어떤 명제나 주장이 참이며 왜 참인지를 설명하는 정당화이다. 활동적 증명과 마찬가지로 활동적인 요소와 언어적인 요소가 수반되지만 활동 과정 보다 결과가 중시되는 방법이며 주로 구체적인 사례에 적용될 수 있는 증명 유형이다.

예) 3 + 4 = 4 + 3을 보이기 위해서 바둑알을 배열해 보는 것

예) 시각적 단서를 이용-네 개의 작은 정사각형이 모이면 하나의 큰 정사각형이 된다고 설명하는 경우

예) 시각적인 예를 제시하여 증명하는 경우 - 4×5 = 5×4임을 보이기 위해서 산가지, 바둑돌등의 구체물이나 도형영역의 그림을 이용해 정당화 하는 경우

라. 조작적 증명

구체물을 이용하지 않고 대수식과 같은 기호를 조작함으로써 증명하는 방법이다. 일반적인 진술이나 구체적인 사례 모두에 적용할 수 있는 증명 유형이다.

예) $(2+7)\times5=2\times5+7\times5$와 같이 식의 조작을 통해 등식이 성립함을 보이는 것

III. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 수학적 문제해결에서 비형식적 증명의 기능을 이해하기 위해 가장 많은 정보를 얻을 수 있는 의도적 표본선정방법(Merriam, 1998)에 의해 연구 대상을 선정하였다.

연구 대상을 선정한 기준은 첫째, 6학년 학생들 중 학업 성적이 상·중에 해당하고 둘째, 표현력이 비교적 뛰어나 자신의 생각을 잘 표현할 수 있고 셋째, 자발적으로 참여해야 하며 넷째, 보다 친숙한 실험 환경을 조성하기 위해 같은 학급에 있는 학생을 대상으로 선정하였다.

이상의 선정 기준을 만족하는 학생 8명을 담임으로부터 추천 받았다. 이 중 본인과 학부모 모두가 참여를 희망하는 6명을 1차로 선발하였다. 최종 선발을 위하여 문제해결 과정이 잘 드러날 수 있는 교과서 수준의 문장제를 제시하여 수학 풀이 과정과 특정한 연산을 선택한 이유를 말로 잘 나타내는지 등의 적합도를 고려해 최종 4명을 선발하였다.

	특 징
일호	인터뷰에서, 교과서 수준의 문장제를 매우 잘 해결하였고 풀이과정과 특정한 연산을 선택한 이유에 대해서 자신의 생각을 잘 표현하였다.
유빈	인터뷰에서, 교과서 문장제 해결에 있어서 우수하였고, 풀이과정과 특정한 연산을 선택한 이유에 대해서 자신의 생각을 잘 표현하였다.
준성	인터뷰에서, 교과서 문장제는 큰 어려움 없이 해결하였고 풀이과정 또한 비교적 잘 표현하였다. 하지만 특정한 연산을 선택한 이유를 묻는 질문에 대해서는 답변하지 못하는 경우도 있었다.
강산	인터뷰에서, 교과서 문장제는 큰 어려움 없이 해결하였으나, 풀이과정과 특정한 연산을 선택한 이유를 설명하지 못하였다.

[그림 III] 참여 학생의 특징

2. 과제 개발

본 연구는 수학적 문제를 해결하는 과정 중에 나타나는 비형식적 증명활동이 문제해결에 어떻게 기여하는지를 알아보는 것을 목적으로 한다. 이러한 목적을 달성하기 위해 무엇보다 중요한 것은 학생들이 비형식적 증명을 자연스럽게 사용할 수 있는 문제 상황을 구성하는 것이므로 다음과 같은 사항에 주안점을 두어 과제를 개발하였다.

첫째, 교육과정과 일관성 있는 문항을 개발한다. 연구 대상이 6학년 학생임을 고려하여 6학년 교육 과정의 수준과 범위 안에서 과제를 개발한다. 둘째, 학생들이 받고 있는 사교육의 영향을 최소화하기 위해 접해본 적이 없는 과제를 선정한다. 셋째, 학생들의 상호작용이 보다 능동적으로 이루어질 수 있는 과제를 개발한다. 이를 위해 학생들이 현재 가지고 있는 지식을 적용해 문제를 해결하려 할 때 난관에 봉착하여 인지적 갈등이 유발되고, 기존의 지식을 변화시킬 때 비로소 갈등이 해소될 수 있는 문제를 개발한다. 이러한 준거에 의해 개발된 과제는 다음과 같다.

"한 변의 길이가 1cm인 정사각형의 바깥쪽을 개미 한 마리가 1cm의 간격을 두고 기어가고 있다. 개미가 정사각형 주위를 한 바퀴 다 돌았을 때, 개미가 기어간 길로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라."

3. 자료 수집

질적 연구의 신뢰도를 높이기 위해서는 여러 가지 자료 출처가 중요한데, 본 연구는 자료 수집 방법으로 인터뷰, 기록일지, 비디오 녹화, 학생들의 학습 결과물 등을 사용하였다.

연구자는 참여 관찰자로서 관찰 노트를 작성하고, 인터뷰 자료, 수업 중에 학생들이 해결한

결과물, 비디오 녹화 자료를 전사한 내용을 수집하여 데이터베이스를 구성하였다.

사례 수업은 학교 정규 수업이 끝난 후 교실에서 총 120분 동안 이루어졌다. 교실에는 네 명의 학생과 연구자, 수업 진행 교사만 있었다. 연구자는 활동을 관찰하고 느낀 점, 학생들과의 대화 내용과 분위기를 관찰일지에 기록하였다. 비디오 촬영 자료는 다시 전사하여 분석하였다.

4. 자료 분석

전사된 자료를 토대로 문제해결 과정을 크게 문제 이해, 해결 계획 수립 및 실행, 해결 및 반성 단계로 분류하고, 각 단계에서 학생들의 비형식적 증명 활동이 나타난 부분을 중심으로 에피소드로 묶어 재분류 하였다. 또한 에피소드에서 다음과 같이 분석의 수준을 달리하여 학생들의 비형식적 증명 활동을 분석하였다. 첫 번째 수준은 문제 해결 관점에서 학생들의 문제 해결 활동을 있는 그대로 기술하는 것이다. 두 번째 수준에서는 학생들의 활동을 비형식적 증명의 관점에서 조망하여 비형식적 증명 활동을 유형에 따라 분석한 후, 각각의 활동이 문제 해결 과정의 각 단계에서 어떻게 기여하는지 살펴보았다. 또한 이 과정에서 교사의 발문을 분석함으로써 비형식적 증명을 자극하고 지속시키기 위해 어떤 역할을 해야 하는지 알아보았다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 비형식적 증명활동의 기능

문제해결과정을 문제 이해, 해결 계획 및 실행, 해결 및 반성 단계로 구분하고, 각 과정에서 발현되는 수학적 증명활동과 그것이 문제해결에 어떻게 기여하는지를 분석하였다.

가. 문제 이해과정에서 비형식적 증명활동의 기능

1) 문맥의 의미 파악하기

아래의 [에피소드-1]은 학생들이 과제에 진술된 문맥의 의미를 개인적으로 해석한 것을 설명하고 정당화하는 과정을 나타낸다.

[에피소드-1] 문맥의 의미 파악하기

6. 교사 : 정사각형의 바깥쪽을 1cm의 간격을 둔다는 것은 무엇을 뜻하는 것인지에 대해 이야기해보자.
7. 유빈 : 한 바퀴를 돌 때 정사각형으로부터 꼭 1cm만큼만 떨어져서 기어가야 한다는 뜻입니다.
8. 강산 : 1cm만큼 떨어져서 간다는 …….비틀게 가면 안 되고 곧바로 가야 되요. 비틀게 걸으면 1cm가 더 될 수도 덜 될 수도 있으니까요
9. 준성 : 선생님 개미가 얼마나 커요
10. 강산 : 그걸 왜 물어..
11. 준성 : 1cm 정사각형을 기어가려면 개미가 아주 작아야할 것 같아서..
12. 강산 : 그게 지금 이 문제하고 무슨 상관이야..
13. 준성 : 왜.. 개미가 1cm 보다 크면 기어가면 안 되잖아..
14. 강산 : 1cm 보다 큰 개미가 어딨냐.
15. 준성 : TV에서 봤는데.. 여왕개미
16. 강산 : 선생님 개미 크기는 중요하지 않죠..

교사의 ‘정사각형의 바깥쪽을 1cm 간격을 둔다는 의미’가 무엇인지에 대한 물음(#6)에 대해 학생들은 문맥의 의미를 개인적으로 해석하고(#7,#8), 자신의 해석을 설명하고 정당화 하였으며(#8), 문제 해결과 관련이 없어 보이는 개미의 크기에 대해 상호작용 하였다(#14,#15). 이러한 비본질적 요소에 대한 학생들의 관심은 자신의 입장을 설명하고 활발한 논의가 이루어질 수 있

는 계기가 되었다. 특히, 준성은 개미가 1cm 보다 커서는 안 된다는 점을 TV라는 외적 권위에 의존하여 증명하였으며 또한 개미의 크기와 1cm 정사각형의 둘레의 개념에 기초하여 자신의 주장을 증명하였다(#15). 이러한 준성의 주장에 대해 강산은 교사의 권위에 의존하여 반박을 시도하였다(#16).

위의 에피소드를 문제 해결 관점에서 본다면, 학생들의 대화는 문제를 잘 이해하지 못하는 즉, 문제에서 주어진 진술에 대해 명확한 이해가 부족한 것으로 간주할 수 있다. 하지만 비형식적 증명의 관점에서 조망한다면 다양한 비형식적 증명 활동의 보기로 간주할 수 있다. 학생들은 문제에 진술된 문맥의 의미를 나름대로 추측하고, 그 추측을 입증하려는 시도에서 외적 권위에 의존한 증명을 사용하였다. 결국 개미가 1cm의 간격을 두고 기어간다는 합당한 이유를 증명하는 과정에서 비형식적 증명이 사용되었다.

2) 표상을 통한 문제 이해

아래의 [에피소드-2]에서, 학생들은 주어진 문제를 보다 명확하게 이해하기 위해 개인적인 표상을 구성한 후, 그 표상에 대한 적절성을 입증하기 위해 비형식적인 증명을 시도하였다.

[에피소드-2] 표상의 구성

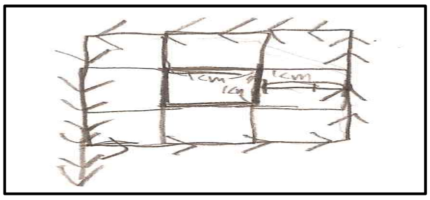
#22. 교사 : 개미가 기어간 길을 실제로 어떻게 알 수 있을지에 대해 생각해보자.

#23. 유빈 : 개미가 정사각형에서 1cm 떨어진 곳을 기어간다고 했으니까 그림으로 그려 보아요.

[각자 그림을 그린다]

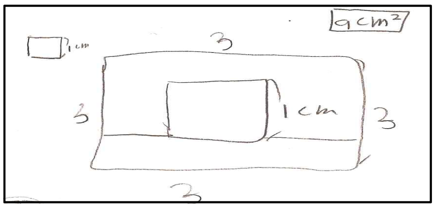
#24. 교사 : 준성아 너는 어떻게 해서 그렇게 그렸는지 설명해 줄 수 있겠니?

#25. 준성 : 1cm 떨어진 곳을 기어간다고 했으니까 사각형이 되어야 할 것 같아서 이렇게 그렸어요



[그림Ⅳ-1] 준성의 그림

#26. 강산 : 나하고 비슷하네.. 정사각형 길이가 1cm 이니, 아니 이 사이가 1cm 이니까 1cm만큼 떨어져서 기어갈 것 같아요.



[그림 Ⅳ-2] 일호의 그림

#27. 일호 : 아아 알겠다(개미가 정사각형의 변을 따라 걷는 거라고 문제를 이해하고 있었다고 추측됨) 정사각형 바깥쪽으로 기어가고 있구나.(1cm의 간격으로 개미가 기어간 길을 위의 그림과 같이 그린다) 한 변이 2cm가 길어지는 구나

개미가 기어간 길을 정확하게 알 수수 있는 방법이 무엇인지에 대한 교사의 물음(#22)에 대해 학생들은 그림으로 그려볼 것을 제안한 유빈의 의견(#23)을 수용하였다. 그림을 그린 후 각자의 그림에 대해 설명하고, 그렇게 그린 이유를 설명하였다(#25,#26,#27).

위의 [에피소드-2]를 문제 해결 관점으로 바라본다면 문제를 충분히 이해하지 못하고 성급하게 표상을 구성한 것이며 문제와 관련 없는 그림을 그리고도 바르게 그린 것이라 여기고 있다고 분석할 수 있을 것이다.

하지만 비형식적 증명의 관점에서 본다면, 학생들은 문제를 보다 명확하게 이해하기 위해 그

리기를 선택하고 자신들이 그린 그림에 대한 타당성을 입증하기 위해 비형식적 증명 방법을 사용하였다. 네 학생은 모두 잘못된 표상을 구성하였지만, 각자가 구성한 표상에 대해 문제에서 진술된 문맥과 관련지어 이유를 설명하려는 시도에서 비형식적 증명을 사용하였다. 비록 잘못된 추론에 의한 표상이었지만, 후에 문제를 해결하기 위한 중요한 단서로서 역할을 하였다.

지금까지의 분석 결과를 토대로 학생들이 문제를 이해하는 과정에서 비형식적 활동이 어떻게 기여하는지를 분석하면 다음과 같다. 첫째, 비형식적 증명활동은 문제 진술에 포함된 용어의 의미를 파악하는데 중요한 기여를 하였다. 서로 질문하고 답을 하고, 또한 자신들의 추론을 모니터링함으로서 문제 진술에 포함된 용어와 문맥의 의미를 이해할 수 있었다. 둘째, 표상을 구성하고 경험적, 분석적 증명에 의해 표상의 타당성을 검증하는 활동 또한 비형식적 증명활동의 중요한 기능이라 할 수 있겠다. 또한 표상에 대한 논의가 진행되는 동안 자신의 추측을 정당화 하고, 다른 사람의 주장을 경험적, 분석적 증명에 의해 반박하는 활동을 통해 자신들이 이 문제를 어떻게 해결해야 하며, 어떤 역할을 수행해야 하는지에 대한 목적의식을 갖게 되었다. 이 또한 비형식적 증명활동의 기능이라 하겠다.

나. 해결계획 수립 및 실행 과정에서 비형식적 증명 활동의 기능

1) 세 점 연결하기 전략의 계획과 실행

[에피소드-3]은 전략을 계획하고, 실행하는 과정에서 이루어지는 상호작용 을 나타낸다. 학생들은 자신들이 직접 개미가 되어 정사각형 주위를 돌아보기로 결정하고, 교실 바닥에 정사각형 한 변을 50cm로 확대해 그린 후 전략을 실행하였다. 학생들은 모서리 부분의 모양을 결정하기 위해서 내부 정사각형의 한 꼭짓점에서 외부 정사각형에 직선을 그어 수직으로 만나는 점과 점 사이에 세 개의 점을 찾고 연결하였다.

[에피소드-3] 세 점 연결하기 전략

#75. 일호 : 그래..어떻게 할까.. 그럼 모서리의 다음부터 50cm를 몇 번 재어서 점을 이어보는 것은 어떨까? 그러면 개미가 걸어간 길을 알 수 있을 거 같아

#76. 유빈 : 이번에는 내가 해 볼래.. (수직이 안 되는 곳부터 자로 재어 50cm가 되는 점을 세 곳을 재어 점을 찍고 직선으로 연결한다.

[그림 Ⅳ-3] 세 점 잇기 전략

#77. 일호 : 세 점은 50cm가 되는데 (직선의 한 부분을 가리키며) 이쪽은 50cm가 안될 것 같아.

#78. 준성 : 한 번 재어보자.. 으윽 47cm네.. 좀 더 멀어야 되는데..

#79. 강산 : 세 곳만 재지 말고 다른 곳을 많이 재어 보는 건 어때..그러면 더 정확하게 알 수 있잖아

#80. 강산 : 그래 내가 재어 볼께.. (이전의 세 곳에 5곳을 더 재어 선을 연결한다...)

#81. 일호 : 봐라.. 저 점들을 더 찍고 연결하면 모서리가 동그랗게 된다. 원이 나올 것 같아.

학생들은 개미가 기어간 길의 자취를 알아보기 위해 교실 한쪽에 한 변을 50cm로 확대해서 그려 보았지만 성과가 없었다. 얼마 후 내부 사각형의 꼭짓점으로부터 50cm가 되는 세 점(점 A, B, C)을 연결하였으나 50cm가 안 되는 부분이 있음을 발견한 후, 좀 더 많은 점들(5개의 점)을 구하고 연결해 보는 활동을 수행하였다.

이러한 일련의 시행착오를 통해 학생들은 개미가 기어간 정확한 모양을 작도하고 그 넓이를 구할 수 있는 결정적 단서를 발견하게 된다. 즉, 3개의 점과 5개의 점을 연결한 모양 속에서 패턴을 발견함으로써 모서리 모양이 동그랗게 되어야 함을 발견하였다.

[에피소드-3]에서 학생들은 개미가 기어간 길에 의해 만들어진 도형의 모서리는 4분원이 된다는 점을 발견하기 위해 여러 가지 방법을 시도하였다. 처음에는 모서리를 직접 연결하고 점차적으로 3개의 점, 5개의 점을 연결해보는 과정에서 점차적으로 원의 형태로 근접해 가는 패턴을 발견하게 되었다. 이는 여러 가지 사례를 구성해 보고, 그 사례에서 나타나는 패턴을 발견하는 비형식적 증명의 예라고 할 수 있다. 하지만 이러한 결과는 단 한 번의 계획과 실행으로 이루어지지는 않았다. 몇 번의 시행착오를 거치고 그 과정에서 오류를 반성하고 수정함으로써 성공적인 문제 해결에 점차적으로 접근할 수 있었다.

2) 무한개의 점 연결하기 전략과 실행

[에피소드-4]는 [에피소드-3]에서 실행한 세 개의 점 연결하기 전략을 확장하여 무한개일 때를 추측하고 끈과 압정을 이용해 끝의 한쪽을 고정시키고 다른 한쪽을 돌려보는 전략을 계획하고 실행하는 과정을 보여준다.

[에피소드-4] 끈을 이용해 호 그리기

#84. 준성 : 점을 다섯 개 말고 더 많이 찍어보자.. 한 20개 정도.. 아니 30개..

#85. 강산 : 야! 언제 그걸 다하냐!

#86. 유빈 : 야 그렇게 많이 찍어서 선을 연결하면 원이 되겠다.

#87. 일호 : 야 그렇게 점을 많이 찍어서 자로 선을 그을려면 불편하니까 모서리에 끈을 고정 시켜놓고 50cm 만큼 돌려보는 건 어떨까?

#88. 유빈 : 왜 그렇게 해

#89. 일호 : 점을 여러 개 찍어서 선을 연결하면 어차피 원이 되니까 그냥 50cm 끈으로 돌려보는 거야....수직이 되는 데 까지는 50cm가 되고 그 다음부터 50cm 끈으로 돌리면 모서리 부분도 50cm가 그대로 되지 않을까..

#90. 유빈 : 맞다.. 그렇게 해보자

[그림 Ⅳ-4] 호 그리기 전략

학생들의 사고를 더욱 확장하기 위해 교사는 개미가 기어간 길을 더 정확하게 그릴 수 있는 방법을 발견하도록 유도하였다. 학생들은 앞에서 수행한 '세 점 연결하기' 전략을 확장하여 준성은 5개의 점을 찍어 선으로 연결하지 말고 20, 30개의 점을 찍고 연결하자고 제안하였고(#85), 유빈은 그렇게 끝없이 점을 찍으면 원이 될 것이라고 추측하였다(#86). 이러한 유빈의 추측에 대해 학생들은 모두 동의하였다(#90). 이러한 추측을 토대로 여러 개의 점을 연결하는 불편함을 해소하기 위해 '끈으로 돌려 보기' 전략을 제안하고, 실행 하였다(#89, #90). 이를 통해 학생들은 1cm 간격을 두고 개미가 기어간 길로 둘러싸인 도형의 모양은 모서리 부분이 호가 되어야 함을 이해하게 되었다.

이 부분에서 준성은 자신의 추측을 정교화하기 위해, 더욱 많은 사례를 모으려는 시도는 비형식적 증명의 예로 볼 수 있다. 또한 이러한 활동을 통해 보다 정교화된 패턴을 발견하여 최종적인 모양이 호가 됨을 추측하였다. 일호는 여러 개의 점을 찍는 번거로움을 피하기 위한 방편으로 끈을 사용해 호를 그리자고 주장하고 그 이

유를 설명하고 실행하였다(#89). 결과적으로 학생들은 여러 개의 점을 그리는 전략보다 더 효율적인 전략을 개발하고, 그것의 적절성을 입증하는 과정에서 비형식적 증명은 중요한 역할을 하였다.

계획 및 실행 단계에서 학생들의 비형식적 증명활동은 다양한 양상으로 나타났으며, 이는 전략을 창안하고, 점진적으로 정교화함으로써 문제를 효과적으로 해결하는 데 기여하였다. 학생들은 귀납적인 과정을 통해 일련의 시행착오를 거치면서 여러 가지 사례를 구성해 봄으로써 모서리의 모양을 발견하였고 이를 더욱 정교화 하였다. 또한 비형식적 증명 활동을 통해 해결 방법에 대한 추측을 구성하고 추측을 점진적으로 정교화 하였다. 또한 다양한 실험, 실측, 시행착오를 통해 모서리부분의 모양이 호가 된다는 점을 발견하였다. 결과적으로 모서리의 모양을 발견하고, 그것을 정교화하는 시도에서 비형식적 증명이 중요한 기여를 하였다.

다. 해결 및 반성과정에서 비형식적 증명활동의 기능

[에피소드-5]는 개미가 한 변의 길이가 1cm 정사각형 둘레를 1cm 간격을 두고 기어갈 때 나타나는 모양을 정확히 작도하고 넓이를 구하는 대화이다.

[에피소드-5] 해 구하기

#96 유빈 : 그런데 넓이는 어떻게 구할 거야..

#97 준성 : 맞아. 모서리에 동그란 모양이 있으니까 넓이를 구할 수 없잖아.

[학생들 묵묵히 각자 고민한다]

[그림 Ⅳ-5] 개미가 기어간 길 그림

#98 일호 : 모서리에 있는 거 원 구하는 거 뭐냐 그것의 4분의 1아니니..

#99 강산 : 무슨 말이데.

#100 유빈 : 진짜로.. 맞다.. 동그란 원 중의 한쪽인 것 같아..

#101 일호 : 야 여기(모서리를 가리키며) 이것 네 개를 모두 모으면 원 한 개가 될 것 같아. 그러니까 4분의 1을 구하지 말고 원 하나만 구하면 되잖아..(모서리의 사분원을 가리키며) 야. 여기 봐라. 여기 하고 여기하고 합치면 원의 반이 되고 여기하고 여기하고 합하면 원의 반이 되니까 그것들을 합치면 원 하나가 되잖아..

학생들은 개미가 기어간 길을 정확하게 작도할 수 있었지만 넓이를 구해야 하는 벽에 부딪히게 되었다. 먼저 준성은 모서리에 동그란 모양이 있어서 넓이를 구할 수 없다고 주장하였다(#97). 일호는 원의 모서리 부분을 유심히 관찰한 후 모서리의 모양은 한 원의 4분의 1이 될 수 있다고 추측하고, 시각적 증명 방법을 활용해 그것을 입증하였다(#101).

결과적으로 위의 [에피소드-5]에서 개미가 걸어간 길로 둘러싸인 넓이를 구하기 위해 4분원을 합하면 한 개의 완전한 원이 됨을 추측하였으며 자신의 추측을 정당화하는 맥락에서 시각적 단서를 이용해 비형식적으로 증명하였다.

2. 교사의 역할

이번 절에서는 학생들이 비형식적 증명활동을 통해 자신의 추측과 전략을 입증하는 과정에서

필요한 교사의 역할을 과제와 발문을 중심으로 살펴보고자 한다. 이는 궁극적으로 학생들이 비형식적 증명활동을 통해 문제를 성공적으로 해결하는데 교사가 어떤 역할을 해야 하는지에 대한 하나의 길잡이가 될 것이다.

가. 적절한 과제 선정하기

수업에서 좋은 수학적 과제를 선택하는 것은 교사의 중요한 책무 중 하나이며 바람직한 수학적 과제는 학생들의 이해와 관심을 반영하고 문제해결력, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등을 신장시킬 수 있다(NCTM, 2000). 또한 수학적 토론과 증명활동이 활발한 수업이 이루어지려면 학생들이 자유롭게 의사소통 할 수 있는 문제 상황이 마련되어야 한다. 학생들이 자발적으로 자신의 생각을 발표하고, 소통할 수 있는 기회를 제공할 수 있는 과제가 갖추어야 할 요건은 다양한 해석이 가능하고, 해결방법이 다양하며, 여러 가지 표상을 사용할 수 있어야 한다.

본 연구에서 사용한 과제는 학생들이 지닌 기존의 지식과 문제에 용해되어 있는 아이디어 사이의 괴리는 활발한 논의를 유발하기 위한 비옥한 토양이 되었다. 학생들은 그러한 논의에 참여할 때 추측을 형성하고 자신의 생각을 정당화하거나 동료의 주장을 반박하기 위하여 비형식적 증명활동에 의지하여야만 했다.

나. 학생들이 사용하는 자연적인 언어를 수학적인 용어로 정교화 하도록 발문하기

학생들은 수업시간에 사각형의 모서리, 꼭짓점, 원, 원의 중심, 원의 둘레 등의 수학적 용어를 학습했지만, 본 연구에서 자신의 추측이나 주장을 입증하려고 의사소통할 때 이러한 용어를 사용하지 않고 대신 동그라미, 뾰족한 부분, 원의 가운데 등의 자연 언어를 사용하는 경향이 있었다. 이것은 학생들이 보다 엄밀한 증명으로 발전하는데 저해 요소가 될 수 있다. 다음은 "이와 같은 상황에 직면했을 때 교사는 어떻게 해야 하는가?"에 대한 하나의 예시가 될 것이다.

[에피소드-6]에서 학생들이 사용한 자연 언어를 수학적인 용어로 수정하는 교사의 역할에 주목할 필요가 있다.

[에피소드-6] 수학적 용어 사용

#32 일호 : 근데 저기 뾰족하게 튀어난 부분은 1cm가 아니에요. 조금 더 될 것 같은데요.
#33 교사 : 그게 무슨 말이야?
#34 일호 : 저기 뾰족한 부분에서 뾰족한 부분까지는 1cm가 더 되요. 직접 재어봤어요.
#35 교사 : 뾰족한 부분? 그게 어딘데.
#36 일호 : (직접 가리키며), 여기요 여기
#37 교사 : 직사각형에서 이 부분을 뭐라 부르지?
#38 준성 : 꼭짓점이요
#39 교사 : 그래 일호야. 이제부턴 꼭짓점이라는 용어를 사용하렴.

그 밖에도 교사는 학생들이 일상적으로 상용하는 용어 예를 들어, 동그라미, 원의 가운데라는 용어들을 사용하지 않고 학습한 원, 원의 중심과 같은 수학적 용어를 사용하도록 권장하였다.

다. 비형식적 증명을 시도하도록 발문하기

문제를 이해하기 위해 표상을 구성하는 단계에서 모든 학생들은 잘못된 표상을 구성하였다. 이 때, 교사는 "그림에서 안쪽 정사각형과 바깥쪽 정사각형 사이의 거리가 모두 같다는 것을 어떻게 증명할 수 있니?"라고 발문하였다. 교사의 이러한 발문에 학생들은 의아해 했지만 자를 이용해 여러 곳의 길이를 재어본 후 자신들의 표상이 잘못되었음을 인식하게 되었다. 이 외에도 교사는 학생들의 추측이나 주장을 지속적으

로 정당화하도록 발문하였다. 예를 들어 “직사각형의 모서리 부분이 원이 된다는 것을 어떻게 증명할 수 있니?”, “그림을 사용해서 너의 설명이 옳다는 것을 보여줄래?” 등이 있다.

사례 수업에서 교사는 모든 학생들에게 자신의 증명이 타당한지를 지속적으로 질문하면서 전체 학생이 정당화에 대해 생각해볼 기회를 제공하였다. 그렇게 함으로써 모든 추측은 근거를 사용해 증명되어야 한다는 학습 분위기를 형성하게 하였다. 또한 교사는 학생들이 정당화를 시도하도록 다음과 같이 발문하였다. “네 생각은 참 훌륭하구나. 이제 그 생각이 항상 옳은 이유를 알아봐야 하지 않겠니?” 학생들은 자신의 추측이 정당한 이유를 설명하면서 한편으로 자신의 아이디어를 더욱 발전시키는 계기가 되었다.

라. 추측을 심화하도록 발문하기

학생들은 자신이 만든 추측이나 전략이 문제와 관련하여 무엇을 나타내는지 정확하게 설명하지 않는 경향이 있다. 본 연구에서는 어떠한 근거도 없이 “개미가 기어간 길은 직사형이다” 라고 단정 짓는 경우가 이에 해당한다. 하지만 이러한 행동은 문제 상황을 이해하는데 어떤 통찰도 제공하지 못한다. 교사는 “왜 그렇게 그렸니?”, “정사각형으로 정확히 1cm라는 것을 증명할 수 있니?”와 같은 발문을 빈번하게 활용함으로써, 학생들로 하여금 추측과 상황을 연결 짓고 자신의 추측에 대한 심층적인 이해를 구성하도록 도와주었다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구에서는 학생들의 의사소통을 강조한 문제 해결 수업에서, 비형식적 증명 활동이 문제해결에 어떻게 기여하며, 이를 위해 교사의 역할은 무엇인지를 확인하고자 하였다. 학생들의 비형식적 증명활동을 활성화하기 위해 학생들이 둘레라는 개념을 직사각형이나 정사각형에 고착되어 있어 쉽게 해결할 수 없는 과제를 개발·적용하였다. 연구 결과 비형식적 증명 활동은 학생들이 문제를 이해하고, 해결 계획을 수립하고, 해를 구하는 등의 문제해결 활동에서 효과적으로 기여하였으며, 이를 위해 교사의 역할 또한 매우 중요하다는 점을 확인할 수 있었다. 이 연구의 결과로부터 다음과 같은 교육적 시사점을 찾을 수 있었다.

첫째, 오류 있는 추측의 가치를 인식해야 한다는 점이다. 추측은 항상 정답을 양산하는 것은 아니다. 대부분의 추측은 오류가 있을 수 있으며 훌륭한 분석과 통찰에 의한 사려 깊은 추론도 흠이 있을 수 있다. 사실상 교실에서 추론과 증명이 중심이 되기 위해서는 오류있는 추측이 발현되어야 하며, 그것을 연구해야 한다. 이러한 오류 있는 추측의 가치는 본 연구에서 입증되었다. 학생들의 의사소통은 오류가 있는 추측으로부터 촉발되었다. 그러한 추측을 입증하고, 반박하는 과정에서 문제를 이해하고, 적절한 해결 전략을 고안하고, 해를 구할 수 있었다.

둘째, 비형식적 증명활동은 학생이 기존에 지닌 수학적 개념(예, 둘레)을 전환하는데 중요한 교수학적 장치가 될 수 있음을 확인하였다. 과제해결에서 학생들이 극복해야할 어려움은 개미가 기어간 길이 반드시 직선이 아니라 원(호)이 될 수 있다는 점이다. 학생들은 직사각형과 정사각형의 둘레의 길이를 구하는 학습 경험으로 인해 둘레는 반드시 직선이어야 한다는 생각에서 좀처럼 벗어나지 못하였지만 비형식적 증명 활동을 거치면서 점차적으로 원 또는 호가 될 수 있다는 점을 깨달았다. 이렇듯 학생이 지닌 둘레에 대한 고착으로부터 벗어날 수 있었던 동안은 학

생 스스로 표상을 구성하고, 그것의 적절성에 대해 비형식적으로 증명하는 활동을 통해서 가능하였다. 이러한 현상은 독자적인 문제해결 상황에서는 결코 나타날 수 없으며, 학생들 상호간의 활발한 의사소통과 증명활동을 통해서 가능한 것이다.

셋째, 문제 해결 과정에서의 소집단 활동은 학생들에게 자발적으로 말을 하고, 다른 동료에게 질문을 하고 자세하게 설명해 줄 것을 요청하기도 하면서 서로에게 피드백을 줄 수 있는 환경이 되었다. 이러한 소집단 활동은 학생들에게 자신의 수학적 아이디어와 사고 과정에 대한 이해를 높일 수 있는 장이 되었으며, 동료와의 의사소통을 통해 자신의 추측에 대한 타당성을 검증하게 되어 사고하는 능력을 개발시키고 더욱 활성화시키는 자연스런 상황을 조성해 주었다.

넷째, 학생들의 비형식적 증명활동은 적절한 갈등을 일으킬 수 있는 과제에 의해 활발하게 일어날 수 있다는 점을 확인하였다. 적절한 인지적 갈등은 학생들을 탐구상황으로 자연스럽게 빠져들게 하였다. 따라서 교사들은 학생들이 반성적으로 사고하고, 자신의 추측과 경험을 이야기 할 수 있는 과제를 개발하고 선택하는데 보다 많은 노력을 기울일 필요가 있다. 그러나 현실적으로 본 연구에서 제시한 과제는 일반적인 수학 수업에서 사용되지 않은 것이다. 본 연구에 참여한 학생들이 처음에 이 과제를 접했을 때 불편함을 느끼거나 그 유용성을 깨닫지 못하는 경우가 종종 있었다. 따라서 교사의 지속적인 지원과 격려가 매우 필요하다고 판단된다.

다섯째, 단계적인 추론 지도가 필요하다. Holyes(1996)는 학생들의 추론에 의한 정당화는 모종의 계층에 따라 조직되며, 최하위 수준을 이루는 것은 행동에 의한 경험적 정당화나 절차적 정당화이며, 최상위 수준을 이루는 것은 전제와 여러 성질에 근거한 엄밀한 연역적 논증이나 관계적 정당화임을 밝히고 있다. 이렇듯 점진적인 과정을 통하여 학생들에게 연역적 추론을 도입하자는 생각은 상당한 설득력이 있어 보이며, 시작단계라 할 수 있는 비형식적 증명은 교수학적으로 큰 의미가 있다. 따라서 점진적인 증명지도를 위하여 이러한 초보 단계의 방법을 활용하고, 그것이 지니는 한계를 명시적으로 보여 줌으로써 연역추론의 필요성을 인식하게 해주는 과정은 상당한 도움이 될 것으로 보인다.

다섯째, 교사들은 적절한 발문을 사용해 학생들이 비형식적 증명활동에 자발적으로 참여할 수 있도록 자극할 필요가 있다. 이를 위해 교사들은 문제를 해결하는데 필요한 직접적인 힌트보다는 전반적인 문제해결 과정에서 학생들의 생각을 증명하도록 요구하거나, 그러한 증명이 타당한지를 지속적으로 질문함으로써 자신의 추측과 정당화를 더욱 심화할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다.

참고 문헌

강문봉(2004). Lakatos 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 연구. **수학교육학연구, 14**(2), 143-156.

권성룡(2003). 초등학생의 수학적 정당화에 대한 연구. **초등수학교육, 7**(2), 85-99.

김지영 · 박만구(2011). 수학 영재 교육 대상 학생의 기하 인지 수준과 정당화 특성 분석. **초등수학교육, 14**(1), 13-26.

나귀수(2011). 수학 영재 학생들의 발견과 증명에 대한 연구. **수학교육학연구, 21**(2). 105-120.

라병소(2001). 초등수학에서 증명지도에 관하여. **학교수학교육학회 논문집, 1**, 33-41.

류성림(1998). 수학 교육에서 증명의 의의에 관한 연구. **수학교육, 37**(1), 73-85.

류희찬 · 조완영(1999). 학생들의 정당화 유형과

탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. **수학교육학연구, 9**(1), 245-261.

서지수 · 류성림(2012). 수완 연산 · 도형 영역에서 초등 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형에 관한 연구. **수학교육 논문집, 26**(1), 85-108.

송상헌 · 장혜원 · 정영옥(2006). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례 분석. **수학교육학연구, 16**(4), 327-344.

조완영(2000). 초등학교에서 증명지도. **초등수학교육, 4**(1), 63-73.

최수미 · 정영옥(2010). 패턴의 일반화 과정에서 나타나는 수학적 정당화 수준 분석. **과학교육논총, 23**, 23-40.

홍진곤 · 권석일(2004). 전형식적 증명의 교수학적 의미에 대한 고찰. **수학교육, 43**(4), 381-390.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situation of validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(3). 147-176.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Type of student's justification. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Hoyles, C. (1996). The curricular shaping of student's approach to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study application in education.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

NCTM(2000). *Principle and standard for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Tall, D. (1995). *Cognitive developments, representaions and proof.* Paper presented at the conference, Justifying and Proving in School Mathematics, Institute of Education, London, 27-38.

The Contribution of Unformal Proof Activities and the Role of a Teacher on Problem Solving

Sung Chang-geun (Kwangju Keunbyul Elementary School)

The aim of this study is to find how unformal proof activities contribute to solving problems successfully and to confirm the role of teachers in the progress. For this, we developed a task that can help students communicate actively with the concept of unformal proof activities and conducted a case lesson with 6 graders in Elementary school.

The study shows that unformal proof activities contribute to constructing representations which are needed to solve math problems, setting up plans for problem-solving and finding right answers accordingly as well as verifying the appropriation of the answers.

However, to get more out of it, teachers need to develop a variety of tasks that can stimulate students and also help them talk as actively as they can manage to find right answers. Furthermore, encouraging their guessing and deepening their thought with appropriate remarks and utterances are also very important part of what teachers need to have in order to get more positive effect from these activities

* Key Words : unformal proof(비형식적 증명), problem solving(문제해결)

논문접수 : 2013. 8. 9
논문수정 : 2013. 9. 4
심사완료 : 2013. 9. 16