http://dx.doi.org/10.7236/JIIBC.2013.13.5.173
JIIBC 2013-5-21

복합상품 운송 문제의 간단한 해법

Simple Solution for Multi-commodity Transportation Problem

이상운*, 최명복**

Sang-Un Lee, Myeong-Bok Choi

요 약 본 논문은 복합상품 운송 문제의 최적해를 구하는 단순한 발견적 방법을 제안한다. 제안 알고리즘은 첫 번째로, 복합상품 중개운송 문제인 경우 일반적인 운송 문제로 변환시킨다. 이 과정에서 중개지를 공급지로, 중개지의 수용량 제약조건을 공급량으로 치환한다. 다음으로 단일 상품으로 분해한다. 두 번째로, 복합상품 운송문제인 경우 상품별로, 복합상품 중개운송 문제인 경우는 직접 열 (수요지) 기준으로 최소 비용을 선택한다. 행 (공급지) 기준으로 선택된 비용 오름차순으로 공급량, 수용량과 요구량 제약조건을 만족하도록 수송량을 배정한다. 주어진 요구량을 모두 만족할 때까지 이 과정을 반복한다. 이렇게 얻은 초기해에 대해 세 번째로, 수송비용을 감소시킬 수 있는 조건을 만족하면 배정량을 조정한다. 이와 같이 단순한 알고리즘을 2개의 복합상품 운송 문제와 3개의 복합상품 중개운송 문제에 적용한 결과, 선형계획법으로 최적해를 제시한 3개 문제 중 2개 문제에서 최적해를 개선하는 효과를 얻었다. 결국, 제안된 알고리즘은 선형계획법을 적용하는 방법보다 좋은 알고리즘으로 판명되었다.

Abstract This paper proposes a heuristic optimal solution of multicommodity transportation problem. The proposed algorithm has 3 steps. First the proposed algorithm transforms multicommodity transshipment problem to a general transportation problem, but if the problem is a multicommodity transportation problem, it is not transformed. And the multicommodity is disassembled to a single commodity. Second if it is a multicommodity transportation problem, the algorithm selects the minimum cost according to commodity, on the other hand if it is a multicommodity transshipment problem, the algorithm directly selects the minimum cost based on demand area. And the algorithm assigns carloadings to be satisfied the supply and demand quantity. The algorithm repeats these processes until a given demand quantity is satisfied. Last if it has a condition that is able to reduce the transportation expense, the proposed algorithm controls the assignment quantity of the initial value that got from the step 2. The proposed algorithm was applied to two multicommodity transportation problem and three multicommodity transshipment problem and it got more good result than an existing linear programming method.

Key Words : Transportation Problem, Multicommodity Transportation Problem, Linear Programming, Heuristic Method

Ⅰ. 서 론

운송 문제 (Transportation Problem, TP)는 단일 상품 (Single- commodity)에 대해 다수의 공급지 ($S_i, i=1,2,\cdots,m$)와 수요지 ($D_j, j=1,2,\cdots,n$)가 존재하며, 공급량 (s_i)과 요구량 (d_j), 공급지에서 수요지로의

*정회원, 강릉원주대학교 멀티미디어공학과
**종신회원, 강릉원주대학교, 멀티미디어공학과
접수일자 2013년 2월 20일, 수정완료 2013년 9월 5일
게재확정일자 2013년 10월 11일

Received: 20 February, 2013 / Revised: 5 September, 2013 / Accepted: 11 October, 2013
**Corresponding Author: cmb5859@gmail.com
Dept. of Multimedia Engineering, Gangnung-Wonju National University, Korea

운송 단위당 소요 비용 (c_{ij})이 다른 경우, 공급량과 요구량을 모두 만족하도록 운송량 (x_{ij})을 할당하였을 때 최소의 운송비용 합인 최적해 (Optimal Solution) $z=_{\min}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$을 찾는다.[1-3] 중개운송 문제 (Transshipment Problem)는 단일상품 운송 문제에 대해 공급지에서 중개지 (물류창고)를 거쳐 수요지로 공급하는 경우이다.[4] 그러나 실제적으로는 한 공장에서 다수의 상품을 생산하는 경우가 대부분으로 복합상품 운송 문제 (Multi-commodity Problem or Multi-commodity Minimum Cost Network Flow, MMCF)를 해결하는 것이 보다 현실적이다. 따라서 MMCF는 복합상품 운송문제 (Multi-commodity Transportation Problem)와 복합상품 중개운송 문제 (Multi-commodity Transshipment Problem)으로 구분할 수 있다. 복합상품 운송 문제는 운송과 물류분야, 집적회로 설계분야, 일정, 제조와 계획분야와 통신망 설계와 관리 분야에 적용되고 있다.[5,6]

운송 문제를 해결하는 일반적인 방법으로 선형계획법 (Linear Programming) 또는 운송심플렉스법 (Transportation Simplex Method, TSM)을 적용한다.[4] MMCF는 일반적으로 자원지향분해법 (Resource-Directive Decomposition Method), 비용지향분해법 (Price-Directive Decomposition Method)과 분할법 (Partitioning Method) 등으로 분해하여 문제를 해결하며, 대부분은 선형계획법을 적용한다.[6,7]

본 논문은 복합상품 운송 문제의 최적해를 구하는 간단한 방법을 제시한다. 제시된 방법은 복합 중개운송 문제인 경우 일반적인 운송문제로 변환시키고, 중개지의 수용량을 공급량으로 치환하여 단일 상품별로 분해시켜 최적해를 구한다.

2장에서는 복합상품 운송 문제의 최적 해를 찾는 방법을 고찰해 본다. 3장에서는 복합상품 운송 문제를 해결하는 간단한 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘의 성능을 검증해본다.

II. 운송문제, 중개운송문제와 복합상품 운송 문제

일반적으로, 운송 문제는 최소 비용 흐름 문제 (Minimum Cost Flow Problem)의 특별한 경우로 단일 상품에 대해 다수의 공급지 (공장)와 수요지 (고객)가 존재하고, 공급량, 요구량, 운송 단위당 비용이 다른 값을 가진다. 즉, m개의 공장에서 서로 다른 공급량 s_i를, n개의 물류창고에서 서로 다른 요구량 d_j를 갖고 있다. 또한, 공급지에서 수요지로 운송에 소요되는 단위당 운송비용 c_{ij}가 존재한다. 이 경우, 주어진 공급량과 요구량 모두를 만족시키도록 운송에 필요한 최소 비용의 합을 찾는 문제로, 각 공급지로부터 물류창고에 운송될 양을 x_{ij}라 하면, 식 (1)의 최적 해를 찾는다. 여기서 한 가지 제약사항은 모든 x_{ij}는 양의 정수 값만을 취한다.[3,4]

$$
\begin{aligned}
z = {}_{\min}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad\qquad (1)\\
s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n}x_{ij} \le s_i \ \text{ for } i=1,2,\cdots,m\\
\sum_{i=1}^{m}x_{ij} \ge d_j \ \text{ for } j=1,2,\cdots,n\\
c_{ij} > 0 \ \text{ for all } i,j\\
x_{ij} \ge 0 \ \text{ for all } i,j
\end{aligned}
$$

식 (1)의 조건 "$c_{ij}>0$ for all i,j"는 임의의 공급지 S_i에서 모든 수요지 D_j로 도달 가능한 경로가 존재하며, 단위 운송량당 운송비용 c_{ij}이 존재함을 의미한다.

운송 문제의 최적 해를 찾는 TSM은 그림 1과 같이 3단계의 과정을 거쳐 수행된다.[4]

1단계 :	**균형운송문제인지를 확인하고 운송표를 만든다.** 불균형운송문제이면 가공급지나 가수요지를 도입하여 균형운송문제로 만든다.
2단계 :	초기해**를 구한다. 초기해**를 구하는 기본적인 방법으로 NCM, 발견적 기법으로 LCM과 VAM이 있다.
3단계 :	최적 해**인지 검토하여 아니면 해를 개선한다.** 해의 검토와 개선 방법은 디딤돌법 (SSM) 또는 수정배분법 (MODI)이 있다.

그림 1. 운송심플렉스법
Fig. 1. Transportation Simplex Method

중개운송 문제는 단일 상품에 대해 공급지와 수요지 사이에 중간 경유지 (중개지)가 존재하는 경우로, 문제 해결 방법으로는 직접 푸는 방법과 일반적인 운송문제로 변환하여 푸는 방법이 있다. 직접 푸는 방법으로는 선형계획법으로 수식화하는 방법과 운송 심플렉스법을 적용하는 방법이 있으며, 보통의 운송문제로 변환하여 운송심플렉스법을 적용한다.[4]

복합상품 운송문제는 간선 $(u,v)\in E$가 수용량 $c(u,v)$를 가진 망 (Flow Network) $G(V,E)$에서 k개의

상품 $K_1, K_2, \cdots, K_k$은 $K_i = (s_i, t_i, d_i)$로 정의된다. 여기서 상품 i에 대해 s_i를 원천 (Source), t_i를 목적지 (Sink 또는 Destination), d_i를 요구량 (Demand)이라 한다. 상품 i가 간선 (u,v)를 따라 운송되는 양을 $x_i(u,v)$라 할 때, 복합상품이 간선 (u,v)로 운송되는 비용은 $c(u,v) \cdot x(u,v)$가 된다. 따라서 식 (2)를 최소화시키는 값을 찾는다.[5,8] 여기서 모든 x_{ij}는 양의 정수 값만을 갖지 않을 수도 있다.[9,10]

$$z =_{\min} \sum_{(u,v) \in E} \left(c(u,v) \sum_{i=1}^{k} x_i(u,v) \right) \qquad (2)$$

$$s.t.\ \text{수용량 제약조건} : \sum_{i=1}^{k} x_i(u,v) \le c(u,v)$$

$$\text{운송량 보존법칙} : \sum_{w \in V} x_i(u,v) = 0, when\, u \ne s_i, t_i$$

$$\forall v, u x_i(u,v) = -x_i(v,u)$$

$$\text{요구량 제약조건} : \sum_{w \in V} x_i(s_i, w) = \sum_{w \in V} x_i(w, t_i) = d_i$$

식 (2)를 만족시키는 최적해를 찾는 방법으로 분해기법을 적용한다. 가장 일반적인 분해 기법으로는 비용지향분해법, 자원지향분해법과 분할법이 있다. 비용지향분해법은 복잡한 제약조건을 제거하고 제거된 자리에 비용을 도입하여 해결하며, Lagrangian Relaxation을 적용한다. 자원지향 분해법은 각 간선 수용량을 각 상품에 특정량만큼 할당하고 단일-상품 문제로 반복적으로 해결하는 방법이다. 분할법은 선형계획법과 운송심플렉스법을 사용한다.[6]

Ⅲ. 복합상품 운송문제의 단순한 알고리즘

본 장에서는 복합상품 운송 문제 (복합상품 운송문제, 복합상품 중개운송 문제)의 최적해를 구하는 방법을 다음과 같이 제안한다.

Step 1. 주어진 문제가 복합상품 중개운송 문제이면 일반적인 운송문제로 변환시켜 문제를 단순화시킨다. 여기서, 중개지의 수용량을 공급량으로 치환한다. 복합상품 운송문제는 변환시키지 않는다.

Step 2. 복합상품 중개운송 문제는 단일상품으로 분해한다.

Step 3. 초기해를 구한다. 상품별로 각 열 (수요지)을 기준으로 최소 비용을 선택한다. 각 행 (공급지)을 기준으로 최소 비용부터 비용 오름차순으로 공급량 (s_i), 수용량과 요구량 (d_j)을 만족하도록 운송량 x_{ij}를 배정한다. 만약, $\Sigma x_{ij} - d_j < 0$인 열과 $s_i - \Sigma x_{ij} > 0$인 행이 존재하면, 이들 비용만을 대상으로 열 기준 최소 비용을 선택하고 행 기준 최소비용부터 x_{ij}를 배정한다. 이 과정은 모든 $\Sigma x_{ij} - d_j = 0$이 될 때까지 수행한다. 단, 이때 Σx_{ij}는 공급지의 총 공급량 Σs_i를 초과할 수 없다.

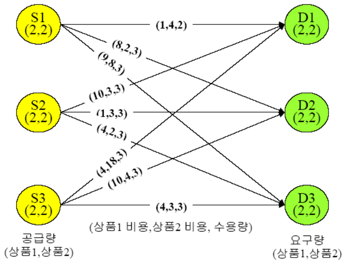
Step 4. 초기해에 대해 열 기준 최소가 아닌 비용에 배정된 운송량 x_{ij}가 존재할 경우, 운송비용을 감소시키는 조건을 만족하면 배정량을 조정한다.

Ⅳ. 알고리즘 적용 및 분석

1. 실험 데이터

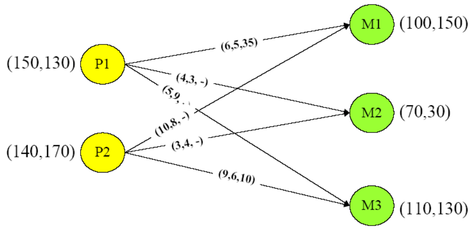
실험에 적용되는 데이터는 5개로 복합상품 운송 문제는 그림 2에, 복합상품 중개운송 문제는 그림 3에 제시되어 있다.

그림 2의 (a)는 Monsere[10]에서 인용되었으며, 각각 2개의 동일 상품을 생산하는 3개의 공급지에서 3개의 수요지로 최소비용으로 운송할 수 있는 비용을 구하는 문제이다. 각 간선은 상품1, 상품2의 운송비용, 간선의 수용량을 의미한다. Monsere[10]는 (a)의 문제에 대해 $z = 33$을 얻었지만 정수배정원칙을 준수하지 못하였다. (b)는 Barnhart와 Wilson[9]에서 인용되었으며, 2개의 공급지에서 3개의 수요지로 각각 2개의 상품을 운송하는 문제로, P1-M1과 P2-M3 간선의 수용량은 각각 35와 10의 제약조건을 가진다. 그림 3의 (a)는 Sugoo.com[11]에서 인용되었으며, 2개의 공장, 4개의 물류창고와 5개의 수요지가 존재한다. 또한, 각 물류창고는 수용 용량의 한계가 존재한다. 각 공장에서 2개의 상품을 생산하며, 제품별 생산단가는 모두 동일하고, 각 상품에 대한 공급량, 물류창고 수용량과 수요지의 요구량이 모두 다른 경우이다. (b)는 (a)에 대해 각 공장의 제품 생산단가가 다른 경우이다. (c)는 Woodruff[12]에선 인용되었으며, 3개의 농장에서 4개의 제품을 생산하며 중개지 2곳을 거쳐 수요지 1곳으로 운송하는 복합 중개운송 문제[13-14]이다. 또한, 각 중개지는 수용용량 한계가 존재하며, 공급지와 중개지는 고정비용이 소요된다.



수요지 \ 공급지		D1 c_{ij}/x_{ij}	D1 수용량	D2 c_{ij}/x_{ij}	D2 수용량	D3 c_{ij}/x_{ij}	D3 수용량	공급량
S1	상품 1	**1/1.5**	2	8/0.0	3	**9/0.5**	3	2
	상품 2	**4/0.5**		**2/1.5**		8/0.0		2
S2	상품 1	10/0.0	3	**1/2.0**	3	4/0.0	3	2
	상품 2	**3/1.5**		3/0.0		**2/0.5**		2
S3	상품 1	**4/0.5**	3	10/0.0	3	**4/1.5**	3	2
	상품 2	18/0.0		**4/0.5**		**3/1.5**		2
요구량	상품 1	2		2		2		$z=33$
	상품 2	2		2		2		

(a) MMCF-1

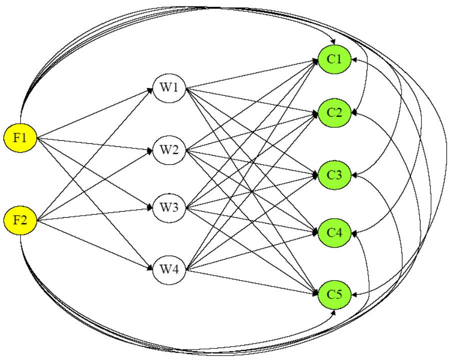


수요지 \ 공급지		M1 c_{ij}	M1 수용량	M2 c_{ij}	M2 수용량	M3 c_{ij}	M3 수용량	공급량
P1	상품 A	6	35	4	–	5	–	150
	상품 B	10		3		9		130
P2	상품 A	5	–	3	–	6	10	140
	상품 B	8		4		6		170
요구량	상품 A	100		70		110		$z=3740.00$
	상품 B	150		30		130		

(b) MMCF-2

그림 2. 복합상품 운송 문제

Fig. 2. Multi-commodity Transportation Problem

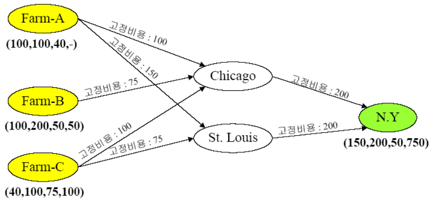


수요지 \ 공급지		물류창고 W1	W2	W3	W4	수요지 D1	D2	D3	D4	D5	공급량
공장 (F1)	P1	0.50	0.50	1.00	0.20	2.75	3.50	2.50	3.00	2.50	90,000
	P2	1.00	0.75	1.25	1.25	2.50	3.00	2.00	2.75	2.60	100,000
	P3	0.75	1.25	1.00	0.80	2.90	3.00	2.25	2.80	2.35	80,000
공장 (F2)	P1	1.50	0.30	0.50	0.20	3.00	3.50	3.50	2.50	2.00	75,000
	P2	1.25	0.80	1.00	0.75	2.25	2.95	2.20	2.50	2.10	65,000
	P3	1.40	0.90	0.95	1.10	2.45	2.75	2.35	2.85	2.45	90,000
물류창고 (W1)	P1	–	–	–	–	1.50	0.80	0.50	1.50	3.00	–
	P2	–	–	–	–	1.00	0.90	1.20	1.30	2.10	–
	P3	–	–	–	–	1.25	0.70	1.10	0.80	1.60	–
물류창고 (W2)	P1	–	–	–	–	1.00	0.50	0.50	1.00	0.50	–
	P2	–	–	–	–	1.25	1.00	1.00	0.90	1.50	–
	P3	–	–	–	–	1.10	1.10	0.90	1.40	1.75	–
물류창고 (W3)	P1	–	–	–	–	1.00	1.50	2.00	2.00	0.50	–
	P2	–	–	–	–	0.90	1.35	1.45	1.80	1.00	–
	P3	–	–	–	–	1.25	1.20	1.75	1.70	0.85	–
물류창고 (W4)	P1	–	–	–	–	2.50	1.50	0.60	1.50	0.50	–
	P2	–	–	–	–	1.75	1.30	0.70	1.25	1.10	–
	P3	–	–	–	–	1.50	1.10	1.50	1.10	0.90	–
수용량 or 요구량	P1	35,000	20,000	30,000	15,000	30,000	23,000	15,000	32,000	16,000	
	P2	30,000	25,000	15,000	24,000	20,000	15,000	22,000	12,000	18,000	
	P3	20,000	20,000	25,000	20,000	25,000	22,000	16,000	20,000	25,000	

(a) MMCF-3

수요지 \ 공급지		물류창고 W1	W2	W3	W4	수요지 D1	D2	D3	D4	D5	공급량	생산 단가
공장 (F1)	P1	0.50	0.50	1.00	0.20	2.75	3.50	2.50	3.00	2.50	90,000	$4
	P2	1.00	0.75	1.25	1.25	2.50	3.00	2.00	2.75	2.60	100,000	$5
	P3	0.75	1.25	1.00	0.80	2.90	3.00	2.25	2.80	2.35	80,000	$3
공장 (F2)	P1	1.50	0.30	0.50	0.20	3.00	3.50	3.50	2.50	2.00	75,000	$2
	P2	1.25	0.80	1.00	0.75	2.25	2.95	2.20	2.50	2.10	65,000	$8
	P3	1.40	0.90	0.95	1.10	2.45	2.75	2.35	2.85	2.45	90,000	$6
물류 창고 (W1)	P1	–	–	–	–	1.50	0.80	0.50	1.50	3.00	–	
	P2	–	–	–	–	1.00	0.90	1.20	1.30	2.10	–	
	P3	–	–	–	–	1.25	0.70	1.10	0.80	1.60	–	
물류 창고 (W2)	P1	–	–	–	–	1.00	0.50	0.50	1.00	0.50	–	
	P2	–	–	–	–	1.25	1.00	1.00	0.90	1.50	–	
	P3	–	–	–	–	1.10	1.10	0.90	1.40	1.75	–	
물류 창고 (W3)	P1	–	–	–	–	1.00	1.50	2.00	2.00	0.50	–	
	P2	–	–	–	–	0.90	1.35	1.45	1.80	1.00	–	
	P3	–	–	–	–	1.25	1.20	1.75	1.70	0.85	–	
물류 창고 (W4)	P1	–	–	–	–	2.50	1.50	0.60	1.50	0.50	–	
	P2	–	–	–	–	1.75	1.30	0.70	1.25	1.10	–	
	P3	–	–	–	–	1.50	1.10	1.50	1.10	0.90	–	
수용량 요구량	P1	35,000	20,000	30,000	15,000	30,000	23,000	15,000	32,000	16,000		
	P2	30,000	25,000	15,000	24,000	20,000	15,000	22,000	12,000	18,000		
	P3	20,000	20,000	25,000	20,000	25,000	22,000	16,000	20,000	25,000		

(b) MMCF-4



수요지 \ 공급지	Product	Chicago 운송비용	Chicago 고정비용	St. Louis 운송비용	St. Louis 고정비용	N.Y 운송비용	N.Y 고정비용	공급량
Farm A	1	**20/ 10**	100	30/ 0	150	–		100
	2	**15/100**		25/ 0		–		100
	3	17/ 0		27/ 0		–		40
	4	22/ 0		22/ 0		–		–
Farm B	1	**15/100**	75	–	–	–		100
	2	15/ 0		–		–		200
	3	15/ 0		–		–		50
	4	30/ 0		–		–		50
Farm C	1	30/ 0	100	**10/ 40**	75	–		40
	2	30/ 0		**9/100**		–		100
	3	**10/ 50**		11/ 0		–		75
	4	**10/ 75**		10/ 0		–		100
Chicago	1	–		–		**75/110**	200	–
	2	–		–		**75/100**		–
	3	–		–		**75/ 50**		–
	4	–		–		**75/ 75**		–
St. Louis	1	–		–		**80/ 40**	200	–
	2	–		–		**80/100**		–
	3	–		–		80/ 0		–
	4	–		–		80/ 0		–
요구량	1	–		–		150		–
	2	–		–		200		–
	3	–		–		50		–
	4	–		–		75		–

$z=178,575$

(c) MMCF-5

그림 3. 복합상품 중개운송 문제

Fig. 3. Multi-commodity Transshipment Problem

2. 복합상품 운송 문제

그림 2의 MMCF-1에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 표 1에 제시되어 있다.

표 1. MMCF-1의 최적 해

Table 1. Optimal Solution of MMCF-1

(a) 초기 배정

c_{ij}/x_{ij}		D1		D2		D3		공급량	$s_i - \Sigma x_{ij}$
		c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량		
S1	상품1	**1/2.0**	2→0	8	3→1	9	3	2	0
	상품2	4		**2/2.0**		8		2	**0**
S2	상품1	10	3	**1/2.0**	3→1	**4/0.0**	3→1	2	0
	상품2	**3/0.0**		3		**2/2.0**		2	0
S3	상품1	4	3	10	3	4	3	2	**2**
	상품2	18		4		3		2	**2**
요구량	상품1	2		2		2			
	상품2	2		2		2			
$\Sigma x_{ij} - d_j$	상품1	**0**		**0**		**-2**			
	상품2	**-2**		**0**		**0**			

c_{ij}/x_{ij}		D1		D2		D3		공급량	$s_i - \Sigma x_{ij}$
		c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량		
S1	상품1	1/2.0	0	8/0.0	1	9/0.0	3	**0**	**0**
	상품2	4/0.0		2/2.0		8/0.0		**0**	**0**
S2	상품1	10/0.0	3	1/2.0	1	4/0.0	1	**0**	**0**
	상품2	3/0.0		3/0.0		2/2.0		**0**	**0**
S3	상품1	4/0.0	3→1	10/0.0	3	**4/2.0**	3→1	**2**	**0**
	상품2	**18/2.0**		4/0.0		3/0.0		**2**	**0**
요구량	상품1	**0**		**0**		**-2**			
	상품2	**-2**		**0**		**0**			
$\Sigma x_{ij} - d_j$	상품1	**0**		**0**		**0**			
	상품2	**0**		**0**		**0**			

(b) 배정량 조정

c_{ij}/x_{ij}		D1		D2		D3		공급량
		c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	
S1	상품1	**1/2.0**	0	8/0.0	1	9/0.0	3	2
	상품2	4/0.0		**2/2.0**		8/0.0		2
S2	상품1	10/0.0	3→2	**1/2.0**	1	4/0.0	1→2	2
	상품2	**3/1.0 (0.0+1.0)**		3/0.0		**2/1.0 (2.0-1.0)**		2
S3	상품1	4/0.0	1→2	10/0.0	3	**4/2.0**	1→0	2
	상품2	**18/1.0 (2.0-1.0)**		4/0.0		**3/1.0 (0.0+1.0)**		2
요구량	상품1	2		2		2		
	상품2	2		2		2		

c_{ij}/x_{ij}		D1		D2		D3		공급량
		c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	
S1	상품1	**1/2.0**	0	8/0.0	1	9/0.0	3	2
	상품2	**4/1.0 (0.0+1.0)**		**2/1.0 (2.0-1.0)**		8/0.0		2
S2	상품1	10/0.0	2	**1/2.0**	1	4/0.0	2	2
	상품2	**3/1.0**		3/0.0		**2/1.0**		2
S3	상품1	4/0.0	2→3	10/0.0	3	**4/2.0**	0	2
	상품2	**18/0.0 (1.0-1.0)**		**4/1.0 (0.0+1.0)**		**3/1.0**		2
요구량	상품1	2		2		2		
	상품2	2		2		2		

(c) 최적해

c_{ij}/x_{ij}		D1		D2		D3		공급량
		c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	
S1	상품1	**1/2.0**	2	8/0.0	3	9/0.0	3	2
	상품2	**4/1.0**		**2/1.0**		8/0.0		2
S2	상품1	10/0.0	3	**1/2.0**	3	4/0.0	3	2
	상품2	**3/1.0**		3/0.0		**2/1.0**		2
S3	상품1	4/0.0	3	10/0.0	3	**4/2.0**	3	2
	상품2	18/0.0		**4/1.0**		**3/1.0**		2
요구량	상품1	2		2		2		$z=30$
	상품2	2		2		2		

MMCF-1에 대해 표 1의 (a)에서 상품별로 열 (수요지) 기준으로 최소 비용을 선택하고, 행 (공급지)의 상품별로 비용 오름차순으로 수용량과 공급량, 요구량 조건을 만족하도록 수송량 x_{ij}를 배정하여 초기해를 구한다. 요구량을 충족시키지 못하는 $\Sigma x_{ij} - d_j < 0$이 존재하여 $\Sigma x_{ij} - d_j < 0$인 열과 $s_i - \Sigma x_{ij} > 0$인 행의 비용들만을 대상으로 열의 최소 비용을 선택하고 행의 비용 오름차순으로 다시 수송량을 배정하였다. (b)에서는 상품 2의 S3-D1의 18/2.0의 수송량을 감소시키기 위해 S3-D3 (3/0.0), S2-D3 (2/2.0), S1-D1 (3/0.0)을 비교하여 수송량을 조정하였다.

수송량 조정 가능 조건은 (18+2)=20>(3+3)=6이 되어야 한다. 따라서 18/2.0(-), 3/0.0(+), 2/2.0(-), 3/0.0(+)가 되어야 하며, 조정량은 (-)가 되는 18/2.0, 2/2.0과 S3-D1의 여유 수용량 1 중 최소 값인 1.0이다. 결국, 18/2.0→18/1.0(2.0-1.0), 3/0.0→3/1.0 (0.0+1.0), 2/2.0→2/1.0 (2.0-1.0), 3/0.0→3/1.0 (0.0+1.0)으로 수송량을 조정하면 (18*2)+(2*2)=40이 (18*1)+(3*1)+(2*1)+(3*1)=26으로 수송비용을 감소시킨다. 동일한 방법으로 상품 2에 대해 S3-D1의 18/1.0 (-), S3-D2의 4/0.0 (+), S1-D2의 2/2.0 (-), S1-D1의 4/0.0 (+)을 수행하면 18/0.0, 4/1.0, 2/1.0. 4/1.0으로 되어 (18*1)+(2*2)=22가 (4*1)+(2*1)+(4*1)=10으로 소송비용을 감소시킬 수 있다. 이와 같이 하여 최적해를 구한 결과는 (c)에 제시되어 있으며, 최적해로 $z=30$을 얻었다. 제안된 알고리즘은 정수배정원칙도 준수하였을 뿐 아니라 Monsere[10]가 얻은 정수배정원칙 위배인 $z=33$에 대해 수송비용을 9% 개선하는 효과도 얻었다.

표 2. MMCF-2의 최적 해

Table 2. Optimal Solution of MMCF-2

(a) 초기 배정

수요지 / 공급지		M1		M2		M3		공급량	$s_i - \Sigma x_{ij}$
		c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량		
P1	상품 A	6	35	4	-	**5/110**	-	150	**40**
	상품 B	10		**3/30**		9		140	**110**
P2	상품 A	**5/ 60**	-	**3/70**	-	6	10→0	130	**0**
	상품 B	**8/150**		4		**6/10**		170	**10**
요구량	상품 A	100		70		110		공급:280/ 요구:280	
	상품 B	150		30		130		공급:310/ 요구:310	
$\Sigma x_{ij} - d_j$	상품 A	**-40**		**0**		**0**			
	상품 B	**0**		**0**		**-120**			

수요지 / 공급지		M1		M2		M3		공급량	$s_i - \Sigma x_{ij}$
		c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량	c_{ij}/x_{ij}	수용량		
P1	상품 A	**6/ 35**	35→0	4/ 0	-	5/110	-	**40**	**5**
	상품 B	10/ 0		3/30		**9/110**		**110**	**0**
P2	상품 A	5/ 60	-	3/70	-	6/ 0	0	**0**	**0**
	상품 B	8/150		4/ 0		6/ 10		**10**	**10**
요구량	상품 A	**40**		**0**		**0**			
	상품 B	**0**		**0**		**120**			
$\Sigma x_{ij} - d_j$	상품 A	**-5**		**0**		**0**			
	상품 B	**0**		**0**		**-10**			

(b) 배정량 조정

공급지 \ 수요지		M1 c_{ij}/x_{ij}	M1 수용량	M2 c_{ij}/x_{ij}	M2 수용량	M3 c_{ij}/x_{ij}	M3 수용량	공급량	$s_i-\Sigma x_{ij}$
P1	상품 A	6/ 35	0	**4/ 5 (0+5)**	–	5/110	–	**5**	**0**
	상품 B	10/ 0		**3/20 (30-10)**		**9/120 (110+10)**		**0**	**0**
P2	상품 A	**5/ 65 (60+5)**	–	**3/65 (70-5)**	–	6/ 0	0	**0**	**0**
	상품 B	8/150		**4/10 (0+10)**		6/ 10		**10**	**0**
요구량	상품 A	**5**		**0**		**0**			
	상품 B	**0**		**0**		**-10**			
$\Sigma x_{ij}-d_j$	상품 A	**0**		**0**		**0**			
	상품 B	**0**		**0**		**0**			

(c) 최적해

공급지 \ 수요지		M1 c_{ij}/x_{ij}	M1 수용량	M2 c_{ij}/x_{ij}	M2 수용량	M3 c_{ij}/x_{ij}	M3 수용량	공급량
P1	상품 A	**6/ 35**	35	**4/ 5**	–	**5/110**	–	150
	상품 B	10/ 0		**3/20**		**9/120**		140
P2	상품 A	**5/ 65**	–	**3/65**	–	6/ 0	10	130
	상품 B	**8/150**		**4/10**		**6/ 10**		170
요구량	상품 A	100		70		110		$z=3,740.00$
	상품 B	150		30		130		

그림 2의 MMCF-2에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 표 2에 제시되어 있다. MMCF-1과 동일한 방법을 적용하여 Barnhart와 Wilson[9]가 선형계획법으로 얻은 $z=3,740.00$과 동일한 값을 쉽게 얻음을 알 수 있다.

3. 복합상품 중개운송 문제

그림 3의 복합상품 중개운송 문제에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 각각 표 3 ~ 표 5에 제시되어 있다. 표 3의 MMCF-3의 복합상품 중개운송 문제로 (a)에서 일반 운송문제로 변환하는 방법은 공급지에서 수요지로의 가능한 경로를 모두 파악하여 공급지와 중개지를 공급지로 취급한다. 또한, 중개지의 수용량을 공급량으로 치환한다. 중개지로부터 수요지로의 경로들 중 최소 비용을 선택한다. 초기 배정은 열에서 최소 비용을 선택하고 행에서 비용 오름차순으로 공급량과 요구량을 만족하도록 수송량을 배정한다. 이때 공급지의 남은 공급량 $s_i-\Sigma x_{ij}$은 공급지의 배정된 총 수송량과 경유지에 배정된 총 수송량을 뺀 값으로 치환된다. 배정량 조정 방법은 복합상품 운송문제와 동일한 방법으로 수행한다.

MMCF-3과 MMCF-4 문제에 대해 Sugoo.com[11]은 최적해를 제시하지 않아 제안된 알고리즘과 z 값을 비교할 수 없었다. MMCF-5 문제에 대해 Woodruff[12]는 $z=178,575$를 제시하였으나 제안된 알고리즘은 $z=173,575$를 얻어 운송비용을 3% 줄이는 효과를 얻었다.

표 3. MMCF-3의 최적 해
Table 3. Optimal Solution of MMCF-3

(a) 상품별 분할 일반 운송문제로 변환

상품 1		D1	D2	D3	D4	D5	공급량
공급지	F1	**2.75**	**3.50**	**2.50**	**3.00**	**2.50**	90,000
	F2	**3.00**	**3.50**	**3.50**	**2.50**	**2.00**	75,000
	F1-W1	0.50+1.50=**2.00**	0.50+0.80=**1.30**	0.50+0.50=**1.00**	0.50+1.50=**2.00**	0.50+3.00=**3.50**	20,000
	F2-W1	1.50+1.50=3.00	1.50+0.80=2.30	1.50+0.50=2.00	1.50+1.50=3.00	1.50+3.00=4.50	
	F1-W2	0.50+1.00=1.50	0.50+0.50=1.00	0.50+0.50=1.00	0.50+1.00=1.50	0.50+0.50=1.00	20,000
	F2-W2	0.30+1.00=**1.30**	0.30+0.50=**0.80**	0.30+0.50=**0.80**	0.30+1.00=**1.30**	0.30+0.50=**0.80**	
	F1-W3	1.00+1.00=2.00	1.00+1.50=2.50	1.00+2.00=3.00	1.00+2.00=3.00	1.00+0.50=1.50	25,000
	F2-W3	0.50+1.00=**1.50**	0.50+1.50=**2.00**	0.50+2.00=**2.50**	0.50+2.00=**2.50**	0.50+0.50=**1.00**	
	F1-W4	0.20+2.50=**2.70**	0.20+1.50=**1.70**	0.20+0.60=**0.80**	0.20+1.50=**1.70**	0.20+0.50=**0.70**	20,000
	F2-W4	0.20+2.50=2.70	0.20+1.50=1.70	0.20+0.60=0.80	0.20+1.50=1.70	0.20+0.50=0.70	
요구량		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000	

상품 2		D1	D2	D3	D4	D5	공급량
공급지	F1	**2.50**	**3.00**	**2.00**	**2.75**	**2.60**	100,000
	F2	**2.25**	**2.95**	**2.20**	**2.50**	**2.10**	65,000
	F1-W1	1.00+1.00=**2.00**	1.00+0.90=**1.90**	1.00+1.20=**2.20**	1.00+1.30=**2.30**	1.00+2.10=**3.10**	20,000
	F2-W1	1.25+1.00=2.25	1.25+0.90=2.15	1.25+1.20=2.45	1.25+1.30=2.55	1.25+2.10=3.25	
	F1-W2	0.75+1.25=**2.00**	0.75+1.00=**1.75**	0.75+1.00=**1.75**	0.75+0.90=**1.65**	0.75+1.50=**2.25**	20,000
	F2-W2	0.80+1.25=2.05	0.80+1.00=1.80	0.80+1.00=1.80	0.80+0.90=1.70	0.80+1.50=2.30	
	F1-W3	1.25+0.90=2.15	1.25+1.35=2.60	1.25+1.45=2.70	1.25+1.80=3.05	1.25+1.00=2.25	25,000
	F2-W3	1.00+0.90=**1.90**	1.00+1.35=**2.35**	1.00+1.45=**2.45**	1.00+1.80=**2.80**	1.00+1.00=**2.00**	
	F1-W4	1.25+1.75=3.00	1.25+1.30=2.55	1.25+0.70=1.95	1.25+1.25=2.50	1.25+1.10=2.35	20,000
	F2-W4	0.75+1.75=**2.50**	0.75+1.30=**2.05**	0.75+0.70=**1.45**	0.75+1.25=**2.00**	0.75+1.10=**1.85**	
요구량		20,000	15,000	22,000	12,000	18,000	

상품 3		D1	D2	D3	D4	D5	공급량
공급지	F1	**2.90**	**3.00**	**2.25**	**2.80**	**2.35**	80,000
	F2	**2.45**	**2.75**	**2.35**	**2.85**	**2.45**	90,000
	F1-W1	0.75+1.25=**2.00**	0.75+0.70=**1.45**	0.75+1.10=**1.85**	0.75+0.80=**1.55**	0.75+1.60=**2.35**	20,000
	F2-W1	1.40+1.25=2.65	1.40+0.70=2.10	1.40+1.10=2.50	1.40+0.80=2.20	1.40+1.60=3.00	
	F1-W2	1.25+1.10=2.35	1.25+1.10=2.35	1.25+0.90=2.15	1.25+1.40=2.65	1.25+1.75=3.00	20,000
	F2-W2	0.90+1.10=**2.00**	0.90+1.10=**2.00**	0.90+0.90=**1.80**	0.90+1.40=**2.30**	0.90+1.75=**2.65**	
	F1-W3	1.00+1.25=2.25	1.00+1.20=2.20	1.00+1.75=2.75	1.00+1.70=2.70	1.00+0.85=1.85	25,000
	F2-W3	0.95+1.25=**2.20**	0.95+1.20=**2.15**	0.95+1.75=**2.70**	0.95+1.70=**2.65**	0.95+0.85=**1.80**	
	F1-W4	0.80+1.50=**2.30**	0.80+1.10=**1.90**	0.80+1.50=**2.30**	0.80+1.10=**1.90**	0.80+0.90=**1.70**	20,000
	F2-W4	1.10+1.50=2.60	1.10+1.10=2.20	1.10+1.50=2.60	1.10+1.10=2.20	1.10+0.90=2.00	
요구량		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000	

(b) 초기 배정

상품 1		D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	2.75	3.50	2.50	3.00	2.50	**90,000**	**70,000**
	F1-W1	2.00	1.30	1.00	2.00	3.50	20,000	**20,000**
	F1-W4	2.70	1.70	**0.80/ 4,000**	1.70	**0.70/16,000**	20,000	**0**
	F2	3.00	3.50	3.50	2.50	2.00	**75,000**	**55,000**
	F2-W2	**1.30/ 0**	**0.80/20,000**	**0.80/ 0**	**1.30/ 0**	0.80	20,000	**0**
	F2-W3	1.50	2.00	2.50	2.50	1.00	25,000	**25,000**
d_j		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		**-30,000**	**-3,000**	**-11,000**	**-32,000**	0		

상품 1		D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	**2.75/ 5,000**	3.50	2.50	3.00	2.50	**70,000**	**45,000**
	F1-W1	2.00	**1.30/ 3,000**	**1.00/11,000**	**2.00/ 6,000**	3.50	**20,000**	**0**
	F1-W4	2.70	1.70	0.80/ 4,000	1.70	0.70/16,000	**0**	**0**
	F2	3.00	3.50	3.50	2.50	2.00	**55,000**	**4,000**
	F2-W2	1.30/ 0	0.80/20,000	0.80/ 0	1.30/ 0	0.80	**0**	**0**
	F2-W3	**1.50/25,000**	2.00	2.50	**2.50/26,000**	1.00	**25,000**	**0**
d_j		**30,000**	**3,000**	**11,000**	**32,000**	0		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		**0**	**0**	**0**	**0**	0		

상품 1		D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	**2.75/ 5,000**	3.50/ 0	2.50/ 0	3.00/ 0	2.50/ 0	90,000
	F1-W1	2.00/ 0	**1.30/ 3,000**	**1.00/15,000 (11000+4000)**	**2.00/ 2,000 (6000-4000)**	3.50/ 0	20,000
	F1-W4	2.70/ 0	1.70/ 0	**0.80/ 0 (4000-4000)**	**1.70/ 4,000 (0+4000)**	1.00/ 0	25,000
	F2	3.00/ 0	3.50/ 0	3.50/ 0	**2.50/26,000**	2.00/ 0	75,000
	F2-W2	1.30/ 0	**0.80/20,000**	0.80/ 0	1.30/ 0	0.80/ 0	20,000
	F2-W3	**1.50/25,000**	2.00/ 0	2.50/ 0	2.50/ 0	0.70/16,000	20,000
d_j		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000	$z=\$161,950$

상품 2		D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	2.50	3.00	2.00	2.75	2.60	**100,000**	**80,000**
	F1-W1	2.00	1.90	2.20	2.30	3.10	20,000	**20,000**
	F1-W2	2.00	**1.75/ 8,000**	1.75	**1.65/12,000**	2.25	20,000	0
	F2	2.25	2.95	2.20	2.50	2.10	**65,000**	**25,000**
	F2-W3	**1.90/20,000**	2.35	2.45	2.80	2.00	25,000	**5,000**
	F2-W4	2.50	2.05	**1.45/20,000**	2.00	**1.85/ 0**	20,000	0
d_j		20,000	15,000	22,000	12,000	18,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		0	**-7,000**	**-2,000**	0	**-18,000**		

상품 2		D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	2.50	3.00	**2.00/ 2,000**	2.75	2.60	**80,000**	**71,000**
	F1-W1	2.00	**1.90/ 7,000**	2.20	2.30	3.10	**20,000**	**13,000**
	F1-W2	2.00	1.75/ 8,000	1.75	1.65/12,000	2.25	0	**0**
	F2	2.25	2.95	2.20	2.50	**2.10/13,000**	**25,000**	**7,000**
	F2-W3	1.90/20,000	2.35	2.45	2.80	**2.00/ 5,000**	**5,000**	**0**
	F2-W4	2.50	2.05	1.45/20,000	2.00	1.85/ 0	0	**0**
d_j		0	**7,000**	**2,000**	0	**18,000**		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		0	**0**	**0**	0	**0**		

상품 3		D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	2.90	3.00	2.25	2.80	2.35	80,000	40,000
	F1-W1	2.00/ 0	1.45/20,000	1.85	1.55/ 0	2.35	20,000	0
	F1-W4	2.30	1.90	2.30	1.90	1.70/20,000	20,000	0
	F2	2.45	2.75	2.35	2.85	2.45	90,000	74,000
	F2-W2	2.00	2.00	1.80/16,000	2.30	2.65	20,000	4,000
	F2-W3	2.20	2.15	2.70	2.65	1.80	25,000	25,000
d_j		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		-25,000	-2,000	0	-20,000	-5,000		

상품 3		D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	2.90	3.00	2.25	2.80/20,000	2.35	40,000	20,000
	F1-W1	2.00/ 0	1.45/20,000	1.85	1.55/ 0	2.35	0	0
	F1-W4	2.30	1.90	2.30	1.90	1.70/20,000	0	0
	F2	2.45/ 3,000	2.75	2.35	2.85	2.45	74,000	42,000
	F2-W2	2.00/ 4,000	2.00/ 0	1.80/16,000	2.30/ 0	2.65	4,000	0
	F2-W3	2.20/18,000	2.15/ 2,000	2.70	2.65/ 0	1.80/ 5,000	25,000	0
d_j		25,000	2,000	0	20,000	5,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		0	0	0	0	0		

(c) 최적해

상품 1		D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	2.75/ 5,000	3.50/ 0	2.50/ 0	3.00/ 0	2.50/ 0	90,000
	F1-W1	2.00/ 0	1.30/ 3,000	1.00/15,000	2.00/ 2,000	3.50/ 0	20,000
	F1-W4	2.70/ 0	1.70/ 0	0.80/ 0	1.70/ 4,000	1.00/ 0	25,000
	F2	3.00/ 0	3.50/ 0	3.50/ 0	2.50/26,000	2.00/ 0	75,000
	F2-W2	1.30/ 0	0.80/20,000	0.80/ 0	1.30/ 0	0.80/ 0	20,000
	F2-W3	1.50/25,000	2.00/ 0	2.50/ 0	2.50/ 0	0.70/16,000	20,000
d_j		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000	$z=\$161,950$

상품 2		D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	2.50/ 0	3.00/ 0	2.00/ 2,000	2.75/ 0	2.60/ 0	100,000
	F1-W1	2.00/ 0	1.90/ 7,000	2.20/ 0	2.30/ 0	3.10/ 0	20,000
	F1-W2	2.00/ 0	1.75/ 8,000	1.75/ 0	1.65/12,000	2.25/ 0	20,000
	F2	2.25/ 0	2.95/ 0	2.20/ 0	2.50/ 0	2.10/13,000	65,000
	F2-W3	1.90/20,000	2.35/ 0	2.45/ 0	2.80/ 0	2.00/ 5,000	25,000
	F2-W4	2.50/ 0	2.05/ 0	1.45/20,000	2.00/ 0	1.85/ 0	20,000
d_j		20,000	15,000	22,000	12,000	18,000	$z=\$155,400$

상품 3		D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	2.90/ 0	3.00/ 0	2.25/ 0	2.80/20,000	2.35/ 0	80,000
	F1-W1	2.00/ 0	1.45/20,000	1.85/ 0	1.55/ 0	2.35/ 0	20,000
	F1-W4	2.30/ 0	1.90/ 0	2.30/ 0	1.90/ 0	1.70/20,000	20,000
	F2	2.45/ 3,000	2.75/ 0	2.35/ 0	2.85/ 0	2.45/ 0	90,000
	F2-W2	2.00/ 4,000	2.00/ 0	1.80/16,000	2.30/ 0	2.65/ 0	20,000
	F2-W3	2.20/18,000	2.15/ 2,000	2.70/ 0	2.65/ 0	1.80/ 5,000	25,000
d_j		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000	$z=\$216,050$

$$\Sigma z=\$533,400$$

표 4. MMCF-4의 최적 해
Table 4. Optimal Solution of MMCF-4

(a) 상품별 분할 일반 운송문제로 변환

상품 1		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	공급량
공급지	F1	2.75x4=10.80	3.50x4=14.00	2.50x4=10.00	3.00x4=12.00	2.50x4=10.00	90,000
	F2	3.00x2=6.00	3.50x2=7.00	3.50x2=7.00	2.50x2=5.00	2.00x2=4.00	75,000
	F1-W1 F2-W1	(0.50+1.50)x4=8.00 (1.50+1.50)x2=6.00	(0.50+0.80)x4=20.80 (1.50+0.80)x2=9.20	(0.50+0.50)x4=4.00 (1.50+0.50)x2=4.00	(0.50+1.50)x4=8.00 (1.50+1.50)x2=6.00	(0.50+3.00)x4=14.00 (1.50+3.00)x2=9.00	20,000
	F1-W2 F2-W2	(0.50+1.00)x4=6.00 (0.30+1.00)x2=2.60	(0.50+0.50)x4=4.00 (0.30+0.50)x2=1.60	(0.50+0.50)x4=4.00 (0.30+0.50)x2=1.60	(0.50+1.00)x4=6.00 (0.30+1.00)x2=2.60	(0.50+0.50)x4=4.00 (0.30+0.50)x2=1.60	20,000
	F1-W3 F2-W3	(1.00+1.00)x4=8.00 (0.50+1.00)x2=3.00	(1.00+1.50)x4=10.00 (0.50+1.50)x2=4.00	(1.00+2.00)x4=12.00 (0.50+2.00)x2=5.00	(1.00+2.00)x4=12.00 (0.50+2.00)x2=5.00	(1.00+0.50)x4=6.00 (0.50+0.50)x2=2.00	25,000
	F1-W4 F2-W4	(0.20+2.50)x4=10.80 (0.20+2.50)x2=5.40	(0.20+1.50)x4=6.80 (0.20+1.50)x2=3.40	(0.20+0.60)x4=3.20 (0.20+0.60)x2=1.60	(0.20+1.50)x4=6.80 (0.20+1.50)x2=3.40	(0.20+0.50)x4=2.80 (0.20+0.50)x2=1.40	20,000
요구량		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000	

상품2		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	공급량
공급지	F1	2.50x5=12.5	3.00x5=15.00	2.00x5=10.00	2.75x5=13.75	2.60x5=13,0	100,000
	F2	2.25x8=18.00	2.95x8=23.00	2.20x8=17.60	2.50x8=20.00	2.10x8=16.80	65,000
	F1-W1 F2-W1	(1.00+1.00)x5=10.00 (1.25+1.00)x8=18.00	(1.00+0.90)x5=9.50 (1.25+0.90)x8=17.20	(1.00+1.20)x5=11.00 (1.25+1.20)x8=19.60	(1.00+1.30)x5=11.50 (1.25+1.30)x8=20.40	(1.00+2.10)x5=15.50 (1.25+2.10)x8=26.00	20,000
	F1-W2 F2-W2	(0.75+1.25)x5=10.00 (0.80+1.25)x8=16.40	(0.75+1.00)x5=8.75 (0.80+1.00)x8=14.40	(0.75+1.00)x5=8.75 (0.80+1.00)x8=14.40	(0.75+0.90)x5=8.25 (0.80+0.90)x8=13.60	(0.75+1.50)x5=11.25 (0.80+1.50)x8=18.40	20,000
	F1-W3 F2-W3	(1.25+0.90)x5=10.75 (1.00+0.90)x8=15.20	(1.25+1.35)x5=13.00 (1.00+1.35)x8=18.00	(1.25+1.45)x5=13.50 (1.00+1.45)x8=19.60	(1.25+1.80)x5=15.25 (1.00+1.80)x8=22.40	(1.25+1.00)x5=11.25 (1.00+1.00)x8=16.00	25,000
	F1-W4 F2-W4	(1.25+1.75)x5=15.00 (0.75+1.75)x8=20.00	(1.25+1.30)x5=12.75 (0.75+1.30)x8=16.40	(1.25+0.70)x5=9.75 (0.75+0.70)x8=11.60	(1.25+1.25)x5=12.50 (0.75+1.25)x8=16.00	(1.25+1.10)x5=11.75 (0.75+1.10)x8=14.80	20,000
요구량		20,000	15,000	22,000	12,000	18,000	

상품3		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	공급량
공급지	F1	2.90x3=8.70	3.00x3=9.00	2.25x3=6.75	2.80x3=8.40	2.35x3=7.05	80,000
	F2	2.45x6=14.70	2.75x6=16.50	2.35x6=14.10	2.85x6=17.10	2.45x6=14.70	90,000
	F1-W1 F2-W1	(0.75+1.25)x3=6.00 (1.40+1.25)x6=15.90	(0.75+0.70)x3=4.35 (1.40+0.70)x6=12.60	(0.75+1.10)x3=5.55 (1.40+1.10)x6=15.00	(0.75+0.80)x3=4.65 (1.40+0.80)x6=13.20	(0.75+1.60)x3=7.05 (1.40+1.60)x6=18.00	20,000
	F1-W2 F2-W2	(1.25+1.10)x3=7.05 (0.90+1.10)x6=12.00	(1.25+1.10)x3=7.05 (0.90+1.10)x6=12.00	(1.25+0.90)x3=6.45 (0.90+0.90)x6=10.80	(1.25+1.40)x3=7.95 (0.90+1.40)x6=13.80	(1.25+1.75)x3=9.00 (0.90+1.75)x6=15.90	20,000
	F1-W3 F2-W3	(1.00+1.25)x3=6.75 (0.95+1.25)x6=13.20	(1.00+1.20)x3=6.60 (0.95+1.20)x6=12.90	(1.00+1.75)x3=8.25 (0.95+1.75)x6=16.20	(1.00+1.70)x3=8.10 (0.95+1.70)x6=15.90	(1.00+0.85)x3=5.55 (0.95+0.85)x6=10.80	25,000
	F1-W4 F2-W4	(0.80+1.50)x3=6.90 (1.10+1.50)x6=15.60	(0.80+1.10)x3=5.70 (1.10+1.10)x6=13.20	(0.80+1.50)x3=6.90 (1.10+1.50)x6=15.60	(0.80+1.10)x3=5.70 (1.10+1.10)x6=13.20	(0.80+0.90)x3=5.10 (1.10+0.90)x6=12.00	20,000
요구량		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000	

(b) 초기 배정 및 배정량 조정

상품 1		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	10.80	14.00	10.00	12.00	10.00	90,000	90,000
	F2	6.00	7.00	7.00	5.00	4.00	75,000	35,000
	F2-W1	6.00	9.20	4.00	6.00	9.00	20,000	20,000
	F2-W2	2.60/ 0	1.60/20,000	1.60/ 0	2.60/ 0	1.60	20,000	0
	F2-W3	3.00	4.00	5.00	5.00	2.00	25,000	25,000
	F2-W4	5.40	3.40	1.60/ 4,000	3.40	1.40/16,000	20,000	0
d_j		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		-30,000	-3,000	-11,000	-32,000	0		

상품 1		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	10.80/ 5,000	14.00/ 3,000	10.00/ 1,000	12.00/32,000	10.00	90,000	49,000
	F2	6.00	7.00	7.00	5.00/ 0	4.00	35,000	0
	F2-W1	6.00	9.20	4.00/10,000	6.00	9.00	20,000	
	F2-W2	2.60/ 0	1.60/20,000	1.60/ 0	2.60/ 0	1.60	0	
	F2-W3	3.00/25,000	4.00/ 0	5.00	5.00	2.00	25,000	
	F2-W4	5.40	3.40	1.60/ 4,000	3.40	1.40/16,000	0	
d_j		30,000	23,000	15,000	32,000	0		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		0	0	0	0	0		

상품 1		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	10.80/ 8,000 (5000+3000)	14.00/ 0 (3000-3000)	10.00/ 1,000	12.00/32,000	10.00/ 0	90,000
	F2	6.00/ 0	7.00/ 0	7.00/ 0	5.00/ 0	4.00/ 0	75,000
	F2-W1	6.00/ 0	9.20/ 0	4.00/10,000	6.00/ 0	9.00/ 0	
	F2-W2	2.60/ 0	1.60/20,000	1.60/ 0	2.60/ 0	1.60/ 0	
	F2-W3	3.00/22,000 (25000-3000)	4.00/ 3,000 (0+3000)	5.00/ 0	5.00/ 0	2.00/ 0	
	F2-W4	5.40/ 0	3.40/ 0	1.60/ 4,000	3.40/ 0	1.40/16,000	
d_j		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000	

상품 2		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	12.50	15.00	10.00	13.75	13,00	100,000	42,000
	F1-W1	10.00/20,000	9.50	11.00	11.50	15.50	20,000	0
	F1-W2	10.00	8.75/ 0	8.75/ 0	8.25/20,000	11.25/ 0	20,000	0
	F1-W3	10.75	13.00	13.50	15.25	11.25/18,000	25,000	7,000
	F1-W4	15.00	12.75	9.75	12.50	11.75	20,000	20,000
	F2	18.00	23.00	17.60	20.00	16.80	65,000	65,000
d_j		20,000	15,000	22,000	22,000	18,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		0	-15,000	-22,000	-2,000	0		

상품 2		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	12.50	15.00/ 8,000	10.00/ 2,000	13.75/ 2,000	13,00	42,000	3,000
	F1-W1	10.00/20,000	9.50/ 0	11.00/ 0	11.50/ 0	15.50/ 0	0	0
	F1-W2	10.00/ 0	8.75/ 0	8.75/ 0	8.25/20,000	11.25/ 0	0	0
	F1-W3	10.75	13.00/ 7,000	13.50	15.25	11.25/18,000	7,000	0
	F1-W4	15.00	12.75/ 0	9.75/20,000	12.50/ 0	11.75/ 0	20,000	0
	F2	18.00	23.00	17.60	20.00	16.80	65,000	65,000
d_j		0	15,000	22,000	2,000	18,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		0	0	0	0	0		

상품 2		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	12.50/ 8,000 (0+8000)	15.00/ 0 (8000-8000)	10.00/ 4,000 (2000+2000)	13.75/ 0 (2000-2000)	13,00/ 0	100,000
	F1-W1	10.00/12,000 (20000-8000)	9.50/ 8,000 (0+8000)	11.00/ 0	11.50/ 0	15.50/ 0	20,000
	F1-W2	10.00/ 0	8.75/ 0	8.75/ 0	8.25/20,000	11.25/ 0	20,000
	F1-W3	10.75/ 0	13.00/ 7,000	13.50/ 0	15.25/ 0	11.25/18,000	25,000
	F1-W4	15.00/ 0	12.75/ 0	9.75/18,000 (20000-2000)	12.50/ 2,000 (0+2000)	11.75/ 0	20,000
	F2	18.00/ 0	23.00/ 0	17.60/ 0	20.00/ 0	16.80/ 0	65,000
d_j		20,000	15,000	22,000	22,000	18,000	

상품 3		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	8.70	9.00	6.75	8.40	7.05	80,000	40,000
	F1-W1	6.00/ 0	4.35/20,000	5.55/ 0	4.65/ 0	7.05	20,000	0
	F1-W2	7.05	7.05	6.45	7.95	9.00	20,000	20,000
	F1-W3	6.75	6.60	8.25	8.10	5.55	25,000	25,000
	F1-W4	6.90	5.70	6.90	5.70	5.10/20,000	20,000	0
	F2	14.70	16.50	14.10	17.10	14.70	90,000	90,000
d_j		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		-25,000	-2,000	-16,000	-20,000	-5,000		

상품 3		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
공급지	F1	8.70	9.00	6.75	8.40	7.05	40,000	0
	F1-W1	6.00/ 0	4.35/20,000	5.55/ 0	4.65/ 0	7.05/ 0	0	0
	F1-W2	7.05	7.05	6.45/16,000	7.95/ 0	9.00	20,000	4,000
	F1-W3	6.75/13,000	6.60/ 2,000	8.25	8.10	5.55/ 5,000	25,000	5,000
	F1-W4	6.90/ 0	5.70/ 0	6.90/ 0	5.70/ 0	5.10/20,000	0	0
	F2	14.70/12,000	16.50	14.10	17.10/20,000	14.70	90,000	58,000
d_j		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000		
$\Sigma x_{ij}-d_j$		0	0	0	0	0		

상품 3		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	8.70/ 0	9.00/ 0	6.75/ 0	8.40/ 0	7.05/ 0	80,000
	F1-W1	6.00/ 0	4.35/20,000	5.55/ 0	4.65/ 0	7.05/ 0	20,000
	F1-W2	7.05/ 0	7.05/ 0	6.45/16,000	7.95/ 0	9.00/ 0	20,000
	F1-W3	6.75/13,000	6.60/ 2,000	8.25/ 0	8.10/ 0	5.55/ 5,000	25,000
	F1-W4	6.90/ 0	5.70/ 0	6.90/ 0	5.70/20,000 (0+20000)	5.10/ 0 (20000-20000)	20,000
	F2	14.70/12,000	16.50/ 0	14.10/ 0	17.10/ 0 (20000-20000)	14.70/20,000 (0+20000)	90,000
d_j		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000	

상품 3		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	8.70/ 0	9.00/ 0	6.75/ 0	8.40/ 0	7.05/ 0	**80,000**
	F1-W1	6.00/ 0	**4.35/20,000**	5.55/ 0	4.65/ 0	7.05/ 0	20,000
	F1-W2	7.05/ 0	7.05/ 0	**6.45/16,000**	7.95/ 0	9.00/ 0	20,000
	F1-W3	**6.75/ 0 (13000-13000)**	**6.60/ 2,000**	8.25/ 0	8.10/ 0	**5.55/18,000 (5000+13000)**	25,000
	F1-W4	6.90/ 0	5.70/ 0	6.90/ 0	**5.70/20,000**	5.10/ 0	20,000
	F2	**14.70/25,000 (12000+13000)**	16.50/ 0	14.10/ 0	17.10/ 0	**14.70/ 7,000 (20000-13000)**	**90,000**
d_j		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000	

(c) 최적해

상품 1		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	**10.80/ 8,000**	14.00/ 0	**10.00/ 1,000**	**12.00/32,000**	10.00/ 0	90,000
	F2	6.00/ 0	7.00/ 0	7.00/ 0	5.00/ 0	4.00/ 0	75,000
	F2-W1	6.00/ 0	9.20/ 0	**4.00/10,000**	6.00/ 0	9.00/ 0	
	F2-W2	2.60/ 0	**1.60/20,000**	1.60/ 0	2.60/ 0	1.60/ 0	
	F2-W3	**3.00/22,000**	**4.00/ 3,000**	5.00/ 0	5.00/ 0	2.00/ 0	
	F2-W4	5.40/ 0	3.40/ 0	**1.60/ 4,000**	3.40/ 0	**1.40/16,000**	
d_j		30,000	23,000	15,000	32,000	16,000	$z=\$659,200$

상품 2		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	**12.50/ 8,000**	15.00/ 0	**10.00/ 4,000**	13.75/ 0	13.00/ 0	**100,000**
	F1-W1	**10.00/12,000**	**9.50/ 8,000**	11.00/ 0	11.50/ 0	15.50/ 0	20,000
	F1-W2	10.00/ 0	8.75/ 0	8.75/ 0	**8.25/20,000**	11.25/ 0	20,000
	F1-W3	10.75/ 0	**13.00/ 7,000**	13.50/ 0	15.25/ 0	**11.25/18,000**	25,000
	F1-W4	15.00/ 0	12.75/ 0	**9.75/18,000**	**12.50/ 2,000**	11.75/ 0	20,000
	F2	18.00/ 0	23.00/ 0	17.60/ 0	20.00/ 0	16.80/ 0	**65,000**
d_j		20,000	15,000	22,000	22,000	18,000	$z=\$995,000$

상품 3		수요지 D1	D2	D3	D4	D5	s_i
공급지	F1	8.70/ 0	9.00/ 0	6.75/ 0	8.40/ 0	7.05/ 0	**80,000**
	F1-W1	6.00/ 0	**4.35/20,000**	5.55/ 0	4.65/ 0	7.05/ 0	20,000
	F1-W2	7.05/ 0	7.05/ 0	**6.45/16,000**	7.95/ 0	9.00/ 0	20,000
	F1-W3	6.75/ 0	**6.60/ 2,000**	8.25/ 0	8.10/ 0	**5.55/18,000**	25,000
	F1-W4	6.90/ 0	5.70/ 0	6.90/ 0	**5.70/20,000**	5.10/ 0	20,000
	F2	**14.70/25,000**	16.50/ 0	14.10/ 0	17.10/ 0	**14.70/ 7,000**	**90,000**
d_j		25,000	22,000	16,000	20,000	25,000	$z=\$887,700$

$$\Sigma z = \$2,541,900$$

표 5. MMCF-5의 최적 해

Table 5. Optimal Solution of MMCF-5

(a) 일반 운송문제로 변환 : 고정비용+운송비용

Product		공급지 \ 수요지	N.Y	공급량
Farm A	1	Farm A - Chicago Farm A - St. Louis	100+20+200+75=**395** 150+30+200+80=460	100
	2	Farm A - Chicago Farm A - St. Louis	100+15+200+75=**390** 150+25+200+80=455	100
	3	Farm A - Chicago Farm A - St. Louis	100+17+200+75=**392** 150+27+200+80=457	40
	4	Farm A - Chicago Farm A - St. Louis	100+22+200+75=**397** 150+22+200+80=452	-
Farm B	1	Farm B - Chicago	75+15+200+75=**365**	100
	2	Farm B - Chicago	75+15+200+75=**365**	200
	3	Farm B - Chicago	75+15+200+75=**365**	50
	4	Farm B - Chicago	75+30+200+75=**380**	50
Farm C	1	Farm C - Chicago Farm C - St. Louis	100+30+200+75=405 75+10+200+80=**365**	40
	2	Farm C - Chicago Farm C - St. Louis	100+30+200+75=405 75+9+200+80=**364**	100
	3	Farm C - Chicago Farm C - St. Louis	100+10+200+75=385 75+11+200+80=**366**	75
	4	Farm C - Chicago Farm C - St. Louis	100+10+200+75=385 75+10+200+80=**365**	100
요구량	1		150	-
	2		200	-
	3		50	-
	4		75	-

(b) 초기 배정 ⇒ 최적 해

상품 1	N.Y	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
Farm A - Chicago	**395/ 10**	100	90
Farm B - Chicago	**365/100**	100	0
Farm C - St. Louis	**365/ 40**	40	0
d_j	150	$z=55,050$	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0		

상품 2	N.Y	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
Farm A - Chicago	390/ 0	100	100
Farm B - Chicago	**365/100**	200	100
Farm C - St. Louis	**364/100**	100	0
d_j	200	$z=72,900$	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0		

상품 3	N.Y	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
Farm A - Chicago	392/ 0	40	40
Farm B - Chicago	**365/50**	50	50
Farm C - St. Louis	366/ 0	75	25
d_j	50	$z=18,250$	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0		

상품 4	N.Y	s_i	$s_i-\Sigma x_{ij}$
Farm B - Chicago	380/ 0	50	50
Farm C - St. Louis	**365/75**	100	25
d_j	75	$z=27,375$	
$\Sigma x_{ij}-d_j$	0		

$$\Sigma z = 173,575$$

V. 결론

본 논문은 복합상품 운송 문제의 최적해를 쉽게 구하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 먼저, 중개운송 문제인 경우 일반 운송문제로 변환시키고, 복합상품을 단일상품으로 분할하여 문제를 단순화시켰다. 다음으로 열을 기준으로 최소 비용을 선택하고 행을 기준으로 최소비용 우선 배정 원칙을 적용하여 비용 오름차순으로 운송량을 배정하였다. 마지막으로 비용을 줄일 수 있는 경우가 발생하면 운송량을 조정하는 방법을 적용하였다. 5개의 문제에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과 최적해를 제시한 3개 문제 중 2개 문제에 대해 해를 개선하는 효과를 얻었다. 최적해를 얻지 못한 MMCF-2 1개 문제에 대해서는 동일한 해를 얻었다.

References

[1] Wikipedia, "Transportation Problem," http://en.wikipedia.org/wiki/Transportation_problem, Wikimedia Foundation Inc., 2008.

[2] W. L. Winston, J. B. Goldberg, and M. Venkataramanan, "*Introduction to Mathematical Programming: Operations Research*," Vol. 1, 4th edition, Duxbury Pr, 2003.

[3] L. Ntaimo, "Transportation and Assignment Problems," http://ie.tamu.edu/INEN420_2005Spring/SLIDES/Chapter 7.pdf, 2005.

[4] 강진규, "Operations Research," http://secom.hanbat.ac.kr/or/ch06/right04.html, 한밭대학교, 2006.

[5] Wikipedia, "Multi-commodity Flow Problem," http://en.wikipedia.org/wiki/Multi-commodity_Flow_Problem, Wikimedia Foundation Inc., 2008.

[6] J. Lindström, "Multicommodity Network Flow -

Methods and Applications," Linköping University, http://www.ida.liu.se/~TDDB19/reports-2003/mcnf.pdf, 2003.
[7] I-Lin, "Shortest Paths and Multicommodity Network Flows," Ph. D Thesis, Department of Industrial and Information Management, National Cheng Kung University, Taiwan, 2003.
[8] P. M. Pardalos and E. Romeijn, "Heuristic Procedures for Supply Chain Problems with Multi-commodities and Fixed Charge Cost Functions," Sandra Duni Euşioğlu, http://www.ise.ufl.edu/Scimec/sandra.pdf, 2002.
[9] C. Barnhart and N. H. M. Wilson, "Network Problems – Transportation Operations, Planning and Control: Carrier Systems", reference to Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications (Ahuja, Magnanti, Orlin), http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Civil-and-Environmental-Engineering/, 2004.
[10] C. M. Monsere, "A Review of a Multicommodity Network Flow Models for Freight Transportation Planning," Department of Civil and Construction Engineering, Iowa State University, http://web.cecs.pdx.edu/~monserec/papers/econ576.pdf, 1999.
[11] Sugoo.com, "Distribution/Logistics Examples," http://info.sugoo. com/CN/Ebook/電子書籍/運作管理/Distribution Examples.xls, 2007.
[12] R. W. Woodruff, "SAS/OR User's Guide: Mathematical Programming," http://www.sph.emory.edu/computing/unix/ sas/sas8OnlineDoc/ormp/chap3/sect59.htm, Emory University, 2005.
[13] Sang-Un Lee, "A Reverse-Delete Algorithm for Assignment Problems," Journal of Advanced Information Technology and Convergence, pp. 117~126, vol. 10, no. 8, 2012. 8.
[14] Sang-Un Lee, Myeong-Bok Choi, "Optimal Algorithm for Transshipment Problem", The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC), pp. 153~162, vol. 1, no. 13, 2013. 02.

저자 소개

이 상 운(정회원)

• 1998년 ~ 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
• 2007.3 ~ 현재 : 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과 부교수
<주관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 알고리즘 등>
• e-mail : sulee@gwnu.ac.kr

최 명 복(종신회원)

• 2001년 : 아주대학교 컴퓨터공학과 (박사)
• 1997~현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 교수
• 2004. 1~현재 : 한국인터넷방송통신학회 이사
<주관심분야 : 지능형 정보검색, 알고리즘 등>
• e-mail : cmb5859@gmail.com