Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 5-6 (Nov. 2013), 389–400

Reconceptualization of Histo-Genetic Principle

역사발생적 원리의 재개념화

YOO Yoon Jae 유윤재

The article makes a discussion to conceptualize a histo-genetic principle in the real historical view point. The classical histo-genetic principle appeared in 19th century was founded by the recapitulation law suggested by biologist Haeckel, but recently it was shown that the theory on it is no longer true. To establish the alternative rationale, several metaphoric characterizations from the history of mathematics are suggested: among them, problem solving, transition of conceptual knowledge to procedural knowledge, generalization, abstraction, circulation from phenomenon to substance, encapsulation to algebraic representation, change of epistemological view, formation of algorithm, conjecture-proof-refutation, swing between theory and application, and so on.

Keywords: 역사발생적 원리

MSC: 01A20 ZDM: A30

1 서론과 문제제기

수학교육에서「역사발생적 원리」란「수학은 생명체」라는 은유로 요약된다. 이 원리는 19세기에 유행했던 교수학습 원리로서 유클리드 〈원론〉을 통한 단선적인 교수법에 대한 비판과 함께 대안으로 제시되었다. 그 당시 이 원리를 견고한 토대위에 구축하기 위하여 『개체 발생은 계통 발생을 되풀이 한다.』고 하는 헤켈의『재현의 법칙』을 이론적 근거로 제시하였다. 아동의 수학적 발달과 수학의 흐름은 발생학적 유사성이 있고 따라서 교수법도 이런 맥락을 반영하여 설계하면 과학적으로도 타당하다는 주장이다. 불행하게도 헤켈의 법칙은 Richardson [33]과 Richardson & Keuck [34]에 의하여 날조된 것으로 판명되었지만 그럼에도 불구하고 역사발생적 원리는 여전히 수학교육에서 유용한 명제로 남아있을 수 있는 논리를 가지고 있다. 그 이유는 헤켈의 법칙을 인용한 이유가 학습자의 수학적 발달이 수학의 발달과 유사하다는 근거를 사용하기 위함에 있었지「수학은

이 논문은 2012학년도 경북대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음.
YOO Yoon Jae: Dept. of Math. Edu., Kyungpook National Univ. E-mail: yjyoo@knu.ac.kr
Receiveded on Sep. 10, 2013, revised on Oct. 24, 2013, accepted on Nov. 1, 2013.

생명체」라는 근거를 제시하기 위함은 아니었기 때문이다. 사실 수학을 생명체로 보는 관점은 매력적이다. 먼저 그런 관점은 수학을 천상의 학문으로 간주한 객관주의적 견해와 달리 수학을 좀 더 인간 친화적으로 보이게 한다.

그러면 역사발생적 원리란 구체적으로 어떤 것인가? 쉬운 것에서 어려운 것으로, 단순한 것에서 복잡한 것으로 설계하는 것이 이 원리에 부합되는 것일까? 단순히 그런 식의 설계라면 수학사를 참조할 필요 없이 단지 Gagné [16]의 과제 분석 방법을 따르면 충분하다. 수학의 역사를「단순 대 복잡」또는「쉬움과 어려움」등과 같은 단순 지향성 구조로 파악한다면 그것은 수학을 지나치게 단순화하는 것이다. 다음 절에서 논의하겠지만 수학의 역사는 생명체와 같은, 한, 두 줄의 문장으로 설명될 수 없는 다양하면서도 역동적인 양상을 보인다. 뿐만 아니라 생명체의 초기 발생 과정은 지향성 논리로 설명될 수 있겠지만 외부와 상호작용하는 학습 과정은 개인적인 동시에 사회문화적이므로 단순 지향성 논리로는 충분치 않다. 마찬가지로 수학적 지식도 한 사람이 만든 것이 아니라 여러 사람들이 함께 이룬 결과이므로 지향성 논리로는 충분하지 않다. 실제로 수학의 형성 과정에는 인식론, 패러다임의 경합, 고정관념, 간문화적 융합, 지식의 유용성, 수학에 대한 이념 등 다양한 요인들이 작용하였다. 특히 수학은 방법의 학문이고 그런 방법들은 사용된 도구의 효과에 의하여 평가되어야 하므로 이런 맥락에서 보면 고대의 수학이 현재의 수학보다 쉬운 것이라고 단언할 수는 없다. 그 이유는 고대의 수학과 현대의 수학은 각각 다른 도구나 기술에 의존하고 있기 때문이다.

본 연구에 의하면 역사발생적 원리는 적어도 10개의 양상이 존재한다. 따라서 수학은 생명체라는 은유는 적어도 그 10가지 양상을 종합할 때 어느 정도 윤곽을 그릴 수 있다. 즉 이 양상들은 역사발생적 원리에 대한 존재론적 은유를 제공하며 비트겐슈타인의 의미로서『가족 유사성』개념을 얻는다 [21]. 다음 절에는 이 양상들을 상세하게 논하면서 수학교육에의 의의를 찾아보는 순서로 진행하겠다.

2 역사발생적의 원리

여기서는 앞에서 언급된 10개의 양상을 제시하고 이에 대한 교수학적 의미를 찾아본다. 그 중 일부는 유윤재 [1]에 소개되어 있고 여기서는 수정을 거쳐 좀 더 세밀하게 다루었다.

1. 수학은「문제해결의 과정」이다. 수학사에 의하면 수학적 지식은 주로 문제해결로 이루어진 결과들이다. 고대의 3대 난문, 제논의 역리, 유클리드의 평행선 공준의 문제, 대수방정식의 문제, 접선법의 문제 등은 수학 발전을 위한 이정표가 된 문제들이다. 문제해결은 다양한 지식과 아이디어를 창출한다. 예를 들면 수학기호, 도형, 다이어그램과

같은 표상과 관련된 아이디어, 공식, 절차와 같은 방법에 대한 아이디어, 방법론의 전환과 같은 전략적 아이디어 등 다양하게 존재한다.

문제해결은 동서양의 수학에서 공통적으로 나타나는 현상이다. 그러나 문제해결을 바라보는 두 축의 관점은 같지 않는 것 같다. 서양의 수학은 방법의 창안에 머무르지 않고 그것들을 체계화하여 문학적 대상으로 조직했지만 동양인들은 일상적 도구 또는 기예로 간주했기 때문에 체계화는 실패했다.

문제는 가정에서 결론에 이르게 하는 문제와 답을 구하는 문제로 되어 있다. 여기서 이 두 문제가 풀렸다는 것은 증명에 의하여 검사된다. 한편 문제는 명확하게 주어진 것이 있고 그렇지 않는 것이 있는데 전자를 구조화 된 문제라고 하고 후자를 비구조화 된 문제라고 한다 [25, 26]. 일반적으로 문제는 비구조화 된 문제가 주류이긴 하지만 그것을 재정의함으써 구조화 된 문제로 명확하게 만들 수 있다. 학교수학에서는 대개 구조화 된 문제를 다룬다. 이 점은 수학을 배운 후 보다 일반적인 상황에 적용할 때 문제점으로 작용한다.

문제해결을 학교수학에서 다룬다고 할 때 수학자의 탐구 방식을 그대로 따라야 하는가? 여기서 수학자는 문제를 제기하고, 해결하며, 일반화 또는 응용과 같은 일련의 작업을 수행한다. 그러나 이런 실행들은 학교수학에서 다루기 어려운 과제들이다. 그러면 학교수학이 권고하는 Polya [29]의 발견술은 어떠한가? 폴리아의 발견술은 문제를 해결하기 위한 단계와 각 단계에서 필요한 지침을 제시하고 있다. 그러나 그의 발견술은 영역 일반적인 설명이지 주어진 상황에 맞춤식으로 대답하는 처방적 지시는 아니다. 비유로 말하면 성분 표시는 들어 있지만 어떤 질환에 어떻게 먹어야 한다는 지시가 없는 약이다. 실제로 폴리아 자신도 그의 발견술이 교수적 효과가 있다는 어떤 증거도 제시하지 못했다 [3]. 뿐만 아니라 그의 발견술이 문제해결을 위한 긍정적인 측면을 제공한다는 체계적인 정보도 없다 [24]. 사실 문제해결에 대한 처방적 연구는 아직까지 제시되지 않았다. 이 점은 문제해결을 연구한 심리학에서도 마찬가지이다 [38]. 최근에는 문제해결의 대안으로서 자기설명과 같은 예제효과가 문제를 푸는 것보다 더 효과적임이 드러났는데 이 점은 문제해결의 대안으로서 주목해야 할 부분이다 [8, 32, 36].

2. 수학은 개념적 지식(knowing what)과 방법적 지식(knowing how)의「교대 과정」이다. 즉 수학은 개념적 지식과 방법적 지식이 서로 변환되는 역동적 과정을 통하여 더 높은 수준의 수학을 축조한다. 대표적인 예가 구적법인데 구적법의 역사를 요약하면 먼저 고대 그리스의 구적법은 작도법에 의한 것이었고 이어 아르키메데스에 의하여 지레를 사용한「지레법」이 나타났으며 데카르트가 좌표를 도입함으로써 방정식의 중근 조건으로 푸는「방정식법」에 의하여 좀 더 개선되었다가 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 구적법의 역산인 접선을 구하는「접선법」으로 발전하였다. 이후 구적법은 더 다양한 방법으로

발전하였다. 여기서 각각의 방법을 분석하면서 각 방법에 대응하는 개념적 지식들이 조직되었으며 이때 생긴 개념적 지식들은 더 높은 수준의 수학을 위한 언어를 조직한다. 이와 같은 방식으로 개념적 지식과 방법적 지식은 서로 순환한다.

Anderson [2]의 ACT 이론은 개념적 지식이 절차적 지식으로 변환되는 과정을 설명하고 있다. 그는 이것을 지식의 「구성」(compile)이라고 했는데 정확히 말하면 일련의 개념적 지식이 절차적 지식으로 변환되는 과정을 의미한다. 이에 대하여 절차적 지식이 역으로 개념적 지식으로 변화는 과정을 「대상화」(encapsulation)라고 한다. 대상화는 Piaget [27]로부터 자극을 받아 여러 견해들이 제시되었는데 그 중에서도 Dubinsky [10]의 APOS 이론과 Sfard [37]의 구상화(reification) 이론이 대표적이다. 세부적으로 약간의 차이가 있지만 이 두 이론은 공통적으로 절차적 수행이 자동화를 통하여 개념적 대상을 구성하는 과정을 묘사하고 있다. 예를 들면 더하기라는 절차를 통하여 교환법칙이라는 규칙을 대상화하며 수열의 각 항이 만드는 추세를 관찰함으로써 극한 개념을 대상화한다. 대상화는 본질적으로 유한의 사례로부터 얻는 추론, 즉 귀납 추론에 기초를 두고 있지만 이 두 예시의 수학적 의미는 서로 다르다. 먼저 전자는 덧셈의 과정으로부터 「교환법칙」이란 내삽적 법칙을 얻는 반면에 후자는 수열의 양태로부터 「극한」이라는 외삽적 정보를 얻는다. 이런 차이를 구별하기 위하여 전자를 $\aleph_0$-대상화로 명명하고 후자를 ω-대상화라고 명명한다. 이런 이름을 부여한 이유는 전자가 자연수 전체와 관련되어 있는 반면에 후자는 자연수의 극한과 관련되어 있기 때문이다. 이 두 대상화는 심리적 관점에서 볼 때도 약간의 차이가 있다. 전자의 경우 일단 덧셈 과정을 통하여 교환법칙이 성립한다는 것을 추측하게 된다. 이 추측은 어떤 게슈탈트적인 전환이 필요하다. 이어 그 추측을 조심스럽게 주어진 과제에 다시 적용함으로써 자신의 추측이 확실하다는 것을 확인하게 되면 개념적 실체로 수용하게 된다. 이에 대하여 후자의 경우는 좀 더 미묘하다. 예를 들어 10개의 수열이 주어져 있고 그 수열로부터 어떤 하나의 집합을 만드는 방법의 경우의 수는 이론적으로 무한하고 「극한을 가지는 수열의 집합」도 그중의 하나이기 때문에 그 10개의 수열로부터 극한 개념을 만들 확률은 0이다. 따라서 수열의 극한 개념은 단순히 자동화에 의하여 주어지는 것이 아니라 관련 지식에 의하여 수학적으로 유용하다는 것이 밝혀질 때 한하여 대상화 된다. 즉 이 대상화는 공적 과정이 필요할지도 모른다.

수학적 지식의 변환 과정은 수학사의 논리를 교육의 논리로 활용할 수 있는 대표적인 수학화이다. 그러나 이 과정은 자발적으로 일어나지 않으며 자발적으로 일어난다고 해도 매우 느리게 나타난다. 특히 대상화는 그것이 수학적으로 유의미함이 확인되어야 하기 때문에 개별적인 관찰로는 부족하고 집단에서의 확인 또는 교사의 도움이 필요하다.

한편 대상화는 수학적 지식의 압축 현상을 설명한다. 과학이 혁명을 통하여 지식을

선택한다면 수학은 내용을 압축함으로써 지식을 단순화 한다. 피아제의 이론이 지금에 와서 약간 퇴색되긴 했지만 그럼에도 불구하고 그의 영향을 받은 대상화 이론은 수학적 지식의 구성 과정을 훌륭하게 설명한다. 그럼에도 불구하고 대상화는 자발적으로 일어나지 않는 반성적 측면이 필요하기 때문에 학교 상황의 경우 비계설정과 같은 교수적 개입이 필요하다 [7, 11, 35].

한편 Gray & Tall [18]이 제안한 과념(procept) 개념은 기호가 가진 과정과 대상의 이중성을 논하고 있다. 절차를 지시하는 기호는 절차를 수행하는 기의와 절차 자체의 개념적 측면을 지시하는 기의를 가지고 있다. 예를 들면 1+1에서 '+' 기호는 절차로서 「더하기」가 있고 개념으로서 「덧셈」이라는 의미가 있다. 과념은 중의적 기호(polysemy)와 일견 유사하게 보이지만 서로 다르다. 먼저 과념의 경우 사람이 그 기호를 어떤 용도로 사용하는가에 따라 그 이중적 측면의 어느 하나만 활성화되므로 과념의 이중성은 행위 개입이 중요한 역할을 하는 실존적 측면이 있지만 이에 대하여 중의적 기호는 인간의 행위 개입에 독립된 의미를 가지고 있다.

수학사를 종합하면 하나의 문제를 해결하기 위하여 개발한 다양한 방법들이 개발되었음을 볼 수 있다. 최근의 방법은 과거의 방법에 비하여 더 다양한 유형의 문제를 해결할 수 있다. 그러면 학교에서는 이 방법을 다 공부해야 하는가 아니면 최근의 방법만 다루어야 하는가? 예를 들면 구적법을 다룰 때 뉴턴과 라이프니츠의 접선법만 다루어야 하는가? 아니면 여러 종류의 방법을 경험해야 하는가? 실제로 학교수학에서 구적법은 접선법 외에도 고대 그리스의 작도법과 데카르트의 방정식법을 소개하고 있다. 방법의 학문이라는 관점에서 볼 때 지금까지 개발된 모든 방법을 경험하게 할 것인가 아니면 가장 강력한 방법만 경험하게 할 것인가? 이 점은 교육과정 개발자에게 중요한 문제이다.

3. 수학은 「일반화 과정」이다. 역사를 보면 간단한 문제나 주제들은 좀 더 넓은 맥락으로 확대되었다. 일반화는 여러 명제를 하나의 명제로 통합하거나 또는 여러 개념을 하나의 개념에 포섭시킴으로써 수학적 지식의 양이 무제한적으로 난립하는 사태를 막아주는 기능을 가지고 있다. 예를 들면 자연수는 유리수, 실수, 복소수, 벡터 등으로 일반화 되었고 평면기하학은 입체기하학으로 일반화 되었으며 대수방정식은 차수를 확대하는 방식으로 일반화 되었다.

Harel & Tall [19]은 일반화를 인지적 관점에서 확장적 일반화(expanded generalization), 재구성적 일반화(reconstructive generalization), 이접적 일반화(disjunctive generalization)로 구분하였다. 여기서 확장적 일반화는 현 도식을 재구성하지 않고 새로운 영역으로 확장하는 것을 의미하고, 재구성적 일반화는 현 도식을 재구성함으로써 새로운 영역에 적용하는 것이고, 이접적 일반화는 새로운 상황에서 새로운 도식을 구성하는 것이다. 예를 들면 방정식의 차수 확장, 공간의 차원 확장 등은 확장적 일반화이고,

접선법과 함수 개념의 일반화는 재구성적 일반화이며 평행선 공준을 포기함으로써 유클리드 기하학의 일부는 비유클리드 기하학으로 이접적 일반화를 이룬다.

일반화는 학교수학에서 광범위하게 적용되고 있으며 주로 학습 계열을 설계하는 데 중요한 역할을 한다. 따라서 교육과정의 계열 설계는 주로 일반화의 역사를 참고한다.

4. 일반화와 더불어 언급되어야 할 수학화는 「추상화」이다. 추상화를 통하여 개별 현상들에 포함된 속성, 개념, 사실은 새로운 개념적 대상으로 전환된다. 뿐만 아니라 하나의 대상은 추상화에 의하여 다른 대상을 연결해주기 때문에 추상화는 개별적인 대상을 하나의 대상으로 통합하는 기능을 가지고 있다. 예를 들면 수열의 수렴성은 폐집합 개념으로 추상화 되면서 해석학과 기하학은 추상공간론으로 통합되었다. 이 과정에는 칸토어와 프레세의 역할이 크다. 미국수학회에서 발행하는 「수학평람」(Mathematical Reviews)에 등록된 수학의 여러 분과가 하나의 수학으로 통합될 수 있는 것도 추상화가 언어 공유를 가능하게 해주는 기능이 있기 때문이다.

학교수학에서 추상화는 개념학습과 관련되어 있다. 모든 개념의 구성, 정의의 조직은 추상화 과정이기 때문에 추상화는 학교수학에서 자연스럽게 나타난다. 추상화는 이미 1960년대 있었던 새수학 운동에서 중요한 역할을 하였으며 이를 교수학습 차원에서 실행하기 위하여 Bruner [5]는 EIS 이론과 발견학습 이론을 제시하였다. 이 두 이론은 사물로부터 각 교과의 고유 개념을 발견하는 학습 방법을 제시한다. 그러나 추상화는 학교수학에서 쉽게 다룰 수 있는 주제가 아니다. 이 점은 브루너의 발견학습이 왜 실패했는지를 보여준다. 사물로부터 수학적 의미를 가진 대상을 추상할 수 있는 능력은 수학에 대한 민감성이란 인지적 특성에 기인하기 때문이다.

5. 수학은 「현상」으로부터 「본질」을 조직하는 「관점의 전환 과정」이다. 이 견해는 수학사를 현상학적 관점에서 접근하고 있는데 Freudenthal [15]에 의하여 제안되었다. 먼저 어떤 수학적 현상이 주어져 있을 때 그것으로부터 수학적 성질을 도출함으로써 수학적 대상을 조직하는데 이 대상을 본질이라고 한다. 이어 이 대상은 다시 다른 관점에 의하여 탐구 대상인 현상이 되고 이로부터 다시 새로운 수학적 대상을 조직한다. 예를 들면 계산 과정은 현상이고 이 현상으로부터 조직된 군, 환, 체와 같은 수학적 대상은 본질이다. 또 군, 환, 체와 같은 현상들은 범주론이라는 본질로 통합된다. 이와 같은 과정을 통하여 수학은 점점 더 추상적인 대상으로 전환된다.

현상과 본질의 전환 과정과 개념적 지식과 방법적 지식의 변환 과정은 일견 유사성을 보이지만 다르다. 둘은 지식이 변환된다는 점에서 유사성을 가진다. 그러나 전자는 각각의 전환 과정이 각각 다른 관점에 의하여 이루어지고 후자는 사고 수준만 차이가 날 뿐 각 단계에서 관점은 모두 동일하다는 점에서 둘은 다르다. 또 전자는 수학적 관점이

부각되어 있으나 후자는 인지적 관점이 부각되어 있다. van Hiele [40]은 이 전환 과정의 역사적 측면을 관찰하여 기하학적 사고 수준 이론을 정립하였다. 그의 이론에 의하면 기하학적 사고 단계는 시각화, 분석, 추상, 연역, 형식화의 수준으로 상승한다고 보았다. 특히 처음 네 수준은 학교수학에서 중요한 역할을 한다.

6. 수학은「대수화 과정」이다 [4, 12]. 최초의 수학은 주로 심상에 의존하는 유비적 수학으로서 기하학적 특성이 강했다. 예를 들면 설형문자와 로마자의 수 표기도 임의의 기호가 아니라 수를 직접 묘사하고 있다. 그러나 인지가 발달하면서 초기의 수학은 상징 기호를 기반으로 하는 기호 수학으로 발전하였으며 이러한 기호의 정교화는 대수적 사고를 좀 더 유연하게 할 수 있게 해주었다. 19세기에 Nesselmann은 대수학의 발달 과정을 디오판토스까지의 수사적(rhetoric) 대수, 디오판토스에서 비에트까지의 축약적(syncopated) 대수, 비에트 이후의 상징적(symbolic) 대수라는 3단계 구분을 제시하였다. 이 구분은 현재 대부분의 교과서에서 널리 인용되고 있지만 이는 사실 문제가 있는 구분이다. 그 이유는 대수학이란 기호와 무관하며 수의 구조를 탐구하는 사고 또는 그런 방법을 의미하기 때문이다. 다만 기호가 있기 때문에 대수적 사고를 좀 더 유연하게 할 수 있을 뿐이다. 오히려 [28]의 기호학 언어를 빌리면 수학의 역사는 시각에 기초를 둔 도상(icon)에서 정보 압축을 중시하는 상징(symbol)으로 나아가는 2단계 흐름을 보이고 있다.

대수화 과정은 인지적으로도 타당하다. Lakoff & Núñez [23]는 수학적 발달의 초기 상태는 영상도식(image schema)이 중요한 역할을 한다고 보았다. 영상도식은 언어가 형성되기 전에 세상을 바라보는 내적 언어로서 주로 순서 관계나 위상 관계와 관련된 인지를 담당하는 일종의 내적 언어이다 [22]. 예를 들면 전과 후, 상부와 하부, 내부와 외부 등은 영상도식에 의존하는 전형적인 개념들이다. 인지적 발달에서 도상에 의한 표상이 상징에 의한 표상보다 앞서기는 하지만 전문가들도 도상을 사용하는데 그 이유는 도상이 직관과 관련되어 있기 때문이다 [9, 13, 17, 31].

대수화 과정은 학교수학에서 조직적으로 활용되고 있다. 예를 들면 초등학교 수학은 대개 도상에 의존하여 직관적으로 파악하는 방식을 취하지만 학년이 올라갈수록 언어와 기호라는 상징 도구를 통하여 분석적 사고를 배운다. 실제로 기하학적 사고에서 대수적 사고로의 전환이 필요한 이유는 기하학적 증명보다 대수적 증명이 더 유연한 것처럼 상징 기반의 사고가 도상 기반의 사고보다 더 많은 정보를 처리할 수 있기 때문이다. 예를 들면 정적분과 같은 기하학적 문제는 대수적 규칙을 적용하여 자동적으로 처리될 수 있지만 그것을 기하학적으로 접근하면 각 단계마다 논증이 필요하게 된다. 그렇다고 대수적 방법이 기하학적 방법보다 반드시 이익이라고 할 수 없다. 예를 들어 논리적 사고 훈련만 국한할 경우 대수적 방법은 너무 자동적이기 때문에 기하학학의 분석적 방법

보다 반드시 낫다고 할 수는 없다. 또 통찰 문제에는 기하학적 사고 또는 심상 기반의 사고가 효과적이다. 그 이유는 심상 기반의 사고는 상징 기반의 사고보다 전일적으로 접근해줄 수 있기 때문에 직관과 어울린다. 이런 측면들을 고려하면 심상 기반의 사고와 상징 기반의 사고는 상보적인 측면도 있다.

7. 수학은 경험주의적 지식에서 합리주의적 지식으로의「인식론적 전환 과정」이다. 수학사 [4, 6, 12] 에 의하면 수학이 경험주의적 지식에서 합리주의적 지식으로 전환된 것은 증명을 최초로 도입한 탈레스에 의하며 그 이전의 바빌로니아와 고대 이집트의 수학, 그리고 고대 인도의 수학은 귀납적 판단의 결과 또는 단순히 측정한 결과를 열거하거나 검증되지 않는 공식을 수용했으므로 그들의 지식은 본질적으로 경험주의적이다. 경험주의적 수학의 특징은 현상을 수학적으로 있는 그대로 표상하는 데 있다. 예를 들면 기하학의 초기 경험은 바로 경험주의적이다 [39]. 이 점은 인도의 수학자들이 스스로 천문학자라고 하는 데서 더 특징적으로 나타나는데 그들은 천문 현상을 단지 기술하는 데만 주목하였다. 따라서 탈레스 이전의 수학은 가설-결론-증명의 구조가 아니라 단순히 공식의 적용으로 특징된다. 증명이 없었기 때문에 잘못된 공식도 많이 있었지만 그것을 개선하는 것도 합리적 논거에 의거하는 것이 아니라 또 다른 경험을 통하여 대치하는 방식을 택했다. 이런 맥락에서 탈레스 이전은 그들의 경험을 평가할 수 있는 잣대가 없었다는 점에서 현대 경험주의와는 다른 무비판적 경험주의이다. 이에 대하여 탈레스 이후의 수학은 현상에 대한 설명을 요구하였으며 그 결과 증명이라는 형식을 정립하였다.

학교수학에서 경험주의적 판단은 개인적인 수학에 대응하고 합리주의적 판단은 공론화 된 수학, 즉 적어도 학교수학을 의미한다. 초등학교의 수학은 주로 경험주의 인식론에 기반을 두며 올라갈수록 합리주의 인식론을 따른다.

8. 수학은「알고리듬 조직 과정」이다 [9, 12]. 수학적 지식은 전제와 결론으로 구조화 되어있지만 이 결론은 최종적으로 공식 또는 알고리듬으로 완성된다. 즉 알고리듬 과정의 최종 단계는『이러이러한 전제가 주어지면 이러이러한 규칙과 공식을 취하라. 그러면 그게 답이다.』고 하는 형태의 지식이 된다. 문제를 해결한다는 것은 처음에 개인의 시행착오 또는 개별적으로 수행하나 다양한 수학적 도구의 개발을 통하여 전체가 하나로 정형화 되고 마침내 알고리듬이 만들어진다. 예를 들면 방정식 풀기는 근의 공식이라는 알고리듬으로 완성되었다. 구적법은 미적분학의 기본정리라는 명제로 완성되었다.

알고리듬과 관련된 교육적 활동은「알고리듬 만들기」와「알고리듬 적용하기」가 있다. 전자는 분명히 탐구 목표가 될 수 있지만 후자는 탐구 목표가 아니라 알고리듬을 통한 실행이기 때문에 후자를 지향하는 수학은 규칙과 공식의 적용이 목표로 왜곡될 수 있다. 실제로 학교수학을 보면 알고리듬을 발견하는 것보다는 그것을 실수 없이 실행하는 데

초점을 맞추고 있고 그 결과 문제해결의 전략과 아이디어를 개발하기보다는 반복적인 훈련이 주류가 되어 있다. 이것은 분명히 잘못된 수학교육이다.

9. 수학은 추측, 증명, 논박이라는 「변증 과정」이다. 이 견해는 Lakatos [20]에 의하여 제안되었는데 하나의 정리 또는 단일 이론의 성장 과정을 주목하고 있다. 이 아이디어는 과학의 발견의 논리에 대한 Popper [30]의 과학적 발견의 논리에 대응하는 수학적 발견의 논리를 정립하기 위한 라카토스의 제안으로서 포퍼의 반증주의의 수학판이다.

이 과정은 실제로 교실에서도 유사하게 일어난다. 즉 교사가 문제를 제시하면 학생은 그것을 풀고 그 풀이를 다른 학생이 비판하고 대안을 제시하는 수업이 바로 여기에 해당한다. 그러나 이 상황은 일반적인 토론식 수업의 양상이지 증명과 논박의 양상은 아니다. 증명과 논박이 교수학습으로 활성화 되려면 교사가 이 논리의 순환 과정을 정확하게 파악하고 있어야 한다.

10. 수학은 「이론과 응용의 순환 과정」이다 [9]. 수학의 응용이란 수학이 경험 세계를 이해할 수 있는 표상 도구를 제공한다는 데 있다. 수학을 과학의 언어라고 부르는 것은 정확하게 여기에 해당된다. 수학자들은 수학 외에도 다른 인접 학문을 동시에 수행했기 때문에 수학의 응용은 자연스럽게 이루어졌다. 응용은 수학 외부로의 응용과 수학 내부에서의 응용을 생각할 수 있기 때문에 엄밀하게 이론과 응용을 구분하는 것은 어렵고 또 바람직하지도 않다.

학교수학에서도 응용은 이론의 이해를 돕기 위한 방편으로 제공되고 있으며 이론은 응용의 근거를 세우기 위하여 제공되거나 더 높은 수준의 응용을 위한 언어를 제공한다. 문제기반 학습은 이 순환 과정을 강력하게 실천할 수 있는 학습 방법인데 잘 실천되고 있는 것 같지는 않다.

한편 학교수학은 지나치게 단순화 되어 있고 탈맥락적이기 때문에 실제 응용에는 어려움과 한계가 있다. 예를 들어 학생들은 삼각형의 합동을 배우지만 실제 문제는 일반적인 도형에 대한 것으로 나타난다. 그런 문제는 삼각형의 합동 지식만으로는 해결하기 어렵다. Freudenthal [14]은 교실에서 배운 수학으로부터 실제적인 수학을 즉각 실행할 수 있는 수학을 제안했는데 그것을 현실수학(realistic mathematics)이라고 하였다. 즉 현실수학이란 비록 수학적 모형이라고 해도 학습자가 현실적으로 느끼도록 맥락이 제공된 수학이다.

3 결론과 제언

본 연구를 통하여 역사발생적 원리가 실제로 어떤 것인가를 살펴볼 수 있었고 학교수학에서 어떻게 연결되어 있는가를 중심으로 그 역할을 가늠해보았다. 실제로 학교수학에서 이런 원리들은 방대하게 적용되고 있음이 확인되었다. 그러나 이 10개가 역사발생적 원리의 모두를 열거한 것은 아니다. 예를 들면 형식불역의 원리는 19세기 중엽까지는 이 원리에 속했지만 지금은 그렇지 않다. 수학의 역사를 엄격성 관점에서 논할 수 있지만 여기서는 다루지 않고 있다. 미래의 어느 시점에는 현재 태동하고 있는 기술공학적 활용이 역사발생적 원리에 포함될지도 모른다. 마지막으로 수학과 문화 또는 수학과 예술의 맥락에서 수학화를 고찰할 수도 있다. 이와 같이 역사발생적 원리는 열려있는 주제이기 때문에 항상 후속 연구를 기다리고 있다.

앞에서 제시된 역사발생적 원리는 일방적인 방향성을 가진다. 그러나 수학의 역사는 흥망성쇠의 변화를 가졌다. 따라서 수학의 퇴보 현상에서도 역사발생적 원리를 도출할 수 있고 이 점이 학교수학과 관련된 교훈을 줄지도 모른다. 또 동양 수학사의 논리는 전혀 고려되어 있지 않지만, 수학의 도구성에 대한 교육적 의미를 분석할 경우, 서양의 수학사에 비하여 단순한 동양 수학사의 논리가 좀 더 좋은 분석 여건을 만들어 줄지도 모른다. 이런 점들을 더 고찰하게 되면 더 포괄적인 역사발생적 원리를 얻을지도 모른다.

참고 문헌

1. YOO Yoon Jae, *An invitation to mathematics education*, Kyung Moon Sa, Seoul, 2013. 유윤재, 「수학교육으로 초대」, 서울: 경문사, 2013.
2. J. R. Anderson, *Cognitive Psychology and Its Applications* (4th ed.), New York: Freeman & Company, 1995.
3. J. B. Biggs, "Student learning in the context of school", in J. B. Biggs (Ed.), *Teaching for Learning: The View from Cognitive Psychology* (7–29). Hawthorn, Australia: Australian Council for Educational Research, 1991.
4. C. B. Boyer & U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, 1991.
5. J. S. Bruner, "The course of cognitive growth", *American Psychologist* 19 (1964), 1–15.
6. F. Cajori, *A History of Mathematics*, New York: Chelsea, 1985.
7. A. Collins, J. S. Brown & S. E. Newman, "Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics", in L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (453–494). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
8. G. Cooper & J. Sweller, "The effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer", *Journal of Educational Psychology* 79 (1987), 347–362.

9. P. J. Davis & R. Hersh, *The Mathematical Experience*, New York: Houghton Mifflin, 1981.
10. E. Dubinsky, "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking", in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1991.
11. J. Enkenberg, "Instructional design and emerging models in higher education", *Computers in Human Behavior* 17 (2001), 495–506.
12. H. W. Eves, *Introduction to the History of Mathematics* (6th. ed.), Philadelphia, PA: Saunders College, 1990.
13. E. Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics*, An Educational Approach, Dordrecht, Netherlands: Reidel Publishing Company, 1987.
14. H. Freudenthal, "Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics?", *For the Learning of Mathematics* 2(1) (1981), 30–33.
15. H. Freudenthal, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1983.
16. R. Gagné, *The Conditions of Learning*, New York: Holt, Rinehart & Winston, 1985.
17. A. Gehlen, *Man. His Nature and Place in the World*, New York: Columbia University Press, 1988.
18. E. M. Gray & D. O. Tall, "Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic", *The Journal of Research in Mathematics Education* 26(2) (1994), 115–141.
19. G. Harel & D. Tall, "The general, the abstract and the generic in advanced mathematics", *For the Learning of Mathematics* 11 (1991), 38–42.
20. I. Lakatos, *Proofs and Refutation: The Logic of Mathematical Discovery*, New York: Cambridge University Press, 1976.
21. G. Lakoff & M. Johnson, *Metaphor We Live By*, Chicago: The University of Chicago Press, 1980.
22. G. Lakoff & M. Johnson, *Philosophy in the Flesh: The Embodied Mind and Its Challenge to Western Thought*, New York: Basic Books, 1999.
23. G. Lakoff & R. Núñez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books, 2000.
24. R. Lesh, "Book review of mathematical solving by A. Schoenfeld", *Teaching, Thinking, and Problem Solving* 8 (1987), 4–11.
25. NCTM, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* Reston, VA: NCTM, 1989.
26. NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM, 2000.
27. J. Piaget, *The Psychology of Intelligence*, Totowa, NJ: Littlefield, Adams, 1972.
28. C. S. Pierce, *Philosophical writings of Peirce*, Selected and edited with an introduction by Justus Buchler. New York: Dover, 1955.
29. G. Polya, *How to Solve It*, Garden City, NY: Double day, 1957.
30. K. R. Popper, *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*, London, UK: Routledge & Kegan Paul, 1963.

31. L. Radford, "Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings", *Educational Studies in Mathematics* 70(3) (2009), 111–126.
32. M. A. Ringenberg & K. VanLehn, "Scaffolding problem solving with annotated, worked-out examples to promote deep learning", in M. Ikeda, K. D. Ashley & T. Chan (Eds.), *Proceedings of the 8th international conference on Intelligent Tutoring Systems* (625–634). Berlin: Springer, 2006.
33. M. K. Richardson, "Haeckel's embryos, continued", *Science* 281 (1998), 1289.
34. M. K. Richardson & G. K. Keuck, "A question of intent: when is a 'schematic' illustration a fraud?", *Nature* 410 (2001), 144.
35. B. Rosenshine & C. Meister, "The use of scaffolds for teaching higher-level cognitive strategies", *Educational Leadership* 49(7) (1992), 26–32.
36. S. Schworm & A. Renkl, "Learning by solved example problems: Instructional explanations reduce self-explanation activity", in W. D. Gray & C. D. Schunn (Eds.), *Proceeding of the 24th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (816–821). Mahwah, NJ: Erlbaum, 2002.
37. A. Sfard, "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin", *Educational Studies in Mathematics* 22 (1991), 1–36.
38. R. J. Sternberg & W. M. Williams, *Educational Psychology* (2nd ed.), New York: Allyn & Bacon, 2010.
39. H. Struve, "Probleme der Begriffsbildung in der Schulgeometrie", *Journal für Mathematik-Didaktik* 8 (1987), 257–276.
40. P. M. Van Hiele, *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, New York: Academic Press, 1986.