

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 42(12), 1020-1027(2014)

DOI:http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2014.42.12.1020

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

제어모멘트자이로의 구동법칙 설계를 위한 특이성 지수의 적합성

진재현*

Suitability of Singularity Indices for Steering Law Design of Control Moment Gyros

Jaehyun Jin*

Sunchon National University*

ABSTRACT

Singularity indices for steering law design of CMGs have been analyzed. Several qualitative criteria to evaluate the suitability of indices have been suggested. Fast calculation and consistency with the condition number of the input matrix are the most important ones. Based on these criteria, modified indices have been proposed. Properties of infinite value and finite value indices have been compared and an ad hoc method to combine those properties has been presented. Computer simulation results are given to verify the proposed method.

초 록

CMG의 특이점 회피를 위한 구동법칙의 설계와 관련된 특이성 지수를 분석하였으며, 지수를 선택하거나 개발할 때 필요한 정성적인 적합성 기준을 제시하였다. 빠른 계산과 조건수와의 일치성을 중요한 기준으로 선정하였으며, 이에 따라 세 가지의 변형된 지수를 제안하였다. 유한지수와 무한지수의 특성을 비교하였고, 가중치를 이용하여 두 가지의 장점을 결합하는 방안을 제시하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 제안한 방법을 검증하였다.

Key Words : Control moment gyros(제어 모멘트 자이로), Singularity avoidance(특이점 회피), Singularity index(특이성 지수), Determinant(행렬식)

1. 서 론

위성의 자세제어용 구동기인 제어모멘트자이로(CMG)는 1960년대부터 연구 및 적용되어 왔으며, 다양한 버전으로 발전하고 있다[1]. 가장 큰 특징은 발생 토크가 반작용 휠에 비하여 훨씬 크다는 것이다. 주로 대형 시스템(Skylab, MIR,

ISS, Hubble telescope 등)에 적용되어 왔으며 최근에는 소형화하여 중소형 위성에 대한 적용연구가 수행되고 있다[2,3]. 아직까지는 국내 위성에 적용되고 있지 않지만, 국내에서도 소형 CMG에 대한 실용화 연구가 수행되고 있으며[4-6], 앞으로의 기술 추세이기 때문에, 이론적인 연구도 많이 필요하다.

† Received : August 21, 2014 Revised : October 30, 2014 Accepted : November 10, 2014

* Corresponding author, E-mail : donworry@sncu.ac.kr

일반적으로 4 개의 CMG를 하나의 클러스터로 구성하는데, 특정 방향으로 토크(torque)를 만들 수 없는 특이점(singularity)의 존재는 CMG 제어의 중요한 이슈이다. 반작용 휠과는 달리 CMG는 스핀 축의 회전과 함께 형상이 변하면서 특이 상태(singular condition)에 이를 수 있다. 특이점 근처로 접근하면, 임의의 방향으로 토크를 발생시킬 수 없게 되거나, 순간적으로 과도한 짐벌 회전각 명령이 발생하여 CMG 모듈을 비정상적으로 동작시켜 시스템에 충격을 가할 수 있다. 그래서 특이점을 회피할 수 있는 제어 방법에 관한 연구가 많이 수행되었다[1].

특이점을 회피하는 구동 법칙(steering law)은 크게 두 가지로 구분할 수 있다. 첫 번째는, 짐벌 회전각을 계산할 때 필요한 입력 행렬의 역변환을 변형하여 토크 오차를 허용하는 것이다[7-9]. 특이값 분해(SVD) 기법을 이용하여 특이 상태에 대한 정확한 정보를 알고, 최소 특이값에 변동을 주어 역변환이 가능하게 하거나[9], 입력 행렬 전체에 작은 변동을 주어[7], 실시간 처리를 빠릴 수 있다.

두 번째는, 영운동(null motion)을 이용하여 CMG 형상이 토크 발생에 유리한 모습을 유지하도록 하는 것이다[10,11]. 특이 형상으로부터 멀리 떨어져 있기 때문에 토크 증폭 효과를 최대한 활용할 수 있다. 특이 형상과의 상대적인 거리 혹은 형상의 특이성을 정량적으로 나타내는 지표가 중요한 역할을 하는데, 이를 특이성 지수(singularity index)라고 한다.

특이성 지수로, 조건수(condition number)와 입력 행렬 제곱의 행렬식(determinant)이 많이 사용되었으며, 목적에 따라 다양한 지수가 제안되었다[10-13]. 조건수는 특이값 분해를 해야 하므로 계산량이 많지만, 행렬의 특이성을 가장 잘 표현하는 것으로 알려져 있다.

지수는 값의 범위에 따라 유한지수와 무한지수로 구분할 수 있다. 무한지수는 특이성에 대한 분해능이 좋지만, 최댓값이 무한대이고, 구배 벡터도 무한대가 될 수 있다. 그 말은 과도한 영운동이 발생할 수 있다는 것이다. 그러나 한편으로, 이러한 특성 때문에 특이점 회피 특성이 좋아진다는 결과도 있다[11]. 이에 반하여 행렬식과 같은 유한지수는 계산에 있어서 발산의 염려가 없으며, 구배 벡터도 유한하여 과도한 동작이 없다. 이처럼 특이성 지수는 구동 법칙의 성능에 영향을 미칠 수 있는 중요한 요소이다.

본 논문에서는, CMG 구동 법칙에 적합한 특이성 지수의 성질에 대하여 연구한 내용을 소개

한다. 기존에 제안된 특이성 지수를 비교 분석하고, 적합하다고 판단되는 기준을 제시하였다. 그리고 이러한 기준에 적합하도록 기존의 것을 변형한 지수를 제안하였다. 유한지수와 무한지수의 특성을 비교하였으며, 가중치를 이용하여 유한지수와 무한지수의 특성을 결합하여 구동 법칙에 적용하였다. 이를 이용한 토크 생성 시뮬레이션을 수행하여 결과를 비교하면서 제시한 기법의 타당성을 검토하였다.

II. CMG와 위성의 방정식

2.1 CMG 모델

Figure 1과 같이, 4개의 CMG 모듈을 피라미드 형상으로 배치한 것을 고려한다. 각 휠의 움직임을 표현하기 위한 세 개의 직교 단위벡터 g_i, h_i, f_i 는 짐벌 벡터, 각운동량 벡터, 토크 벡터를 나타낸다. 편의상 동체 좌표계($X^B Y^B Z^B$)를 기준해서 성분을 표시한다.

휠은 모두 일정한 속도 Ω 로 회전하며, 짐벌 축에 대한 회전 각도는 γ_i 로 나타낸다. 휠의 각 운동량 벡터가 Fig. 1과 같은 방향일 때 $\gamma_i = 0$ 로 정한다. 짐벌 축은 평면 $X^B Y^B$ 에 대하여 $(90 - \beta)^\circ$ 의 각도로 기울어져 있다.

4개의 CMG 모듈에 대한 단위벡터는 식 (1), (2)와 같이 구해진다. 수식에서 s와 c는 각각 sine과 cosine 함수를 의미한다.

$$H = \begin{bmatrix} h_1, h_2, h_3, h_4 \\ -s\gamma_1 c\beta & -c\gamma_2 & s\gamma_3 c\beta & c\gamma_4 \\ c\gamma_1 & -s\gamma_2 c\beta & -c\gamma_3 & s\gamma_4 c\beta \\ s\gamma_1 s\beta & s\gamma_2 s\beta & s\gamma_3 s\beta & s\gamma_4 s\beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1, f_2, f_3, f_4 \\ -c\gamma_1 c\beta & s\gamma_2 & c\gamma_3 c\beta & -s\gamma_4 \\ -s\gamma_1 & -c\gamma_2 c\beta & s\gamma_3 & c\gamma_4 c\beta \\ c\gamma_1 s\beta & c\gamma_2 s\beta & c\gamma_3 s\beta & c\gamma_4 s\beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

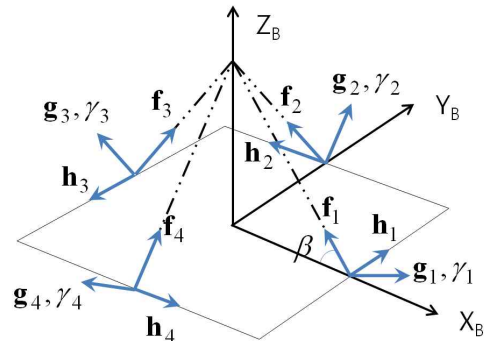


Fig. 1. CMGs configuration

짐벌 벡터는 고정되어 있지만, 나머지 두 벡터는 짐벌 축 혹은 벡터 g_i 를 기준으로 회전하면서, 다음의 관계식을 만족한다.

$$\frac{\partial h_i}{\partial \gamma_i} = f_i, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_i} = -h_i \quad (3)$$

2.2 위성의 운동방정식

휠, 짐벌, CMG의 관성 모멘트는 $I_{w,x}, I_{g,x}, I_{c,x}$ 로 나타낸다. 아래첨자 x 는 관성모멘트를 계산하는 기준 축을 의미하며, f, g, h 가 적용된다. 위성의 운동방정식은 다음과 같이 구해진다[7,9].

$$J_T \dot{\omega} = -\omega \times J_T \omega - I_{w,h} \Omega \sum_{i=1}^4 \dot{\gamma}_i f_i + \tau_i + \tau_e \quad (4)$$

$$\tau_i = -I_{c,g} \sum_{i=1}^4 \ddot{\gamma}_i g_i - \omega \times \sum_{i=1}^4 (I_{c,g} \dot{\gamma}_i g_i + I_{w,h} \Omega h_i) - \left[(I_{c,h} - I_{c,f}) \sum_{i=1}^4 \dot{\gamma}_i (f_i h_i^T + h_i f_i^T) \right] \omega \quad (5)$$

J_T 는 위성의 관성 모멘트 행렬이다. 식 (4)의 우변 두 번째 항은 CMG에 의해 발생하는 내부 토크(제어 입력)가 된다.

$$\tau_{CMG} = -I_{w,h} \Omega \sum_{i=1}^4 \dot{\gamma}_i f_i = -I_{w,h} \Omega F \dot{\gamma} \quad (6)$$

τ_e 는 외부 모멘트인데, 작용하는 외부 모멘트는 없다고 가정한다.

2.3 속도형 구동 법칙

Lee 등[11,14]이 제시한 구동 법칙을 사용한다.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= T u^c + \rho S n \\ n &= \frac{\partial V}{\partial \gamma}, \quad T = B^{-1} F^T (F B^{-1} F^T)^{-1}, \\ S &= [TF - I_4] B^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

ρ 는 가중치인데, $\rho = 1$ 일 때 식 (7)은 다음의 최적화 문제에 대한 해가 된다.

$$\text{minimize } \frac{1}{c} V(\gamma + \dot{\gamma} c) + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^T W \dot{\gamma} \quad (8)$$

c 와 W 는 가중치이다. V 는 최소화 하려는 특이성 지수인데, 최소가 되면 특이 형상에서 가장 멀다고 생각한다. 필요한 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma \partial \gamma}, \quad B = W + c \hat{B}, \\ \frac{\partial V}{\partial \gamma} &= \left[\frac{\partial V}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial V}{\partial \gamma_2}, \frac{\partial V}{\partial \gamma_3}, \frac{\partial V}{\partial \gamma_4} \right]^T \end{aligned} \quad (9)$$

이 방법은 특이성 지수를 직접적으로 최소화 하면서 특이점 회피를 시도한다. 이를 위해서 지수에 대한 1차, 2차 미분 값이 필요하다.

짐벌 각도 γ_i 에 대한 미분 기호가 많이 나오는데, 간략하게 다음의 기호를 사용한다.

$$\frac{\partial ()}{\partial \gamma_i} = (),_{i}, \quad \frac{\partial^2 ()}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = (),_{ij}$$

III. 특이성 지수와 구동 법칙

3.1 특이성 지수

많이 사용하고 있는 지수는 조건수와 행렬식이 있으며, 다른 지수들도 제안되고 있다[10-13].

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \det(FF^T), \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2, \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 (f_i^T f_j)^2 \quad (10)$$

이 외에도 다양한 방법으로 지수를 정의할 수 있는데, 새로운 지수를 개발할 때 적합성을 판별하는 근거가 필요할 것이다. 이를 위해 다음과 같은 기준을 제안한다.

- 다른 지수와의 동작 특성의 일치성
- 특이점에서의 일관성
- 쉽고 빠른 계산
- 1, 2차 미분의 존재 및 간단함

첫 번째 기준은, 짐벌 각도에 대하여 새로운 지수 값의 변화 추세가 기존의 조건수나 행렬식 지수 등과 비슷해야 함을 의미한다. 조건수는 특이성을 잘 표현한다고 알려져 있어서, 이와 비슷하게 동작해야 한다. 가장 바람직한 것은 같은 조건수가 얻어지는 모든 각도에 대해서 다른 지수도 동일한 값이 구해져야 한다. 그리고 조건수가 최대(무한대)가 되는 특이점에서 다른 지수도 최대가 되어야 한다.

두 번째는, 특이점에서 값이 비슷하게 나와야 한다는 것이다. 예를 들어, 무한 지수의 경우에는 수치 계산의 특성상 1×10^{11} 과 1×10^{12} 으로 다르게 나올 순 있지만, 유한 지수는 (특이점에서는) 같은 값이 나와야 한다.

세 번째 기준은, 쉽고 빠르게 계산할 수 있어야 한다는 것이다. 그런 의미에서 행렬의 특이값을 사용하는 지수는 계산량이 많다.

네 번째 기준은, 세 번째와 비슷한데, 1차, 2차 미분계수를 쉽고 좀 더 간단하게 구할 수 있으면 좋음을 의미한다. 수치적인 방법 보다는 해석적인 식을 구할 수 있어야 하고 이 식은 간단한 형

태일수록 좋을 것이다. 예를 들어, $V=f(\gamma)g(\gamma)$ 이면, 함수 $f(\gamma)$ 와 $g(\gamma)$ 가 특별한 형태가 아니면, 미분을 할수록 항이 늘어나게 된다. 항이 늘어나지 않거나 줄어드는 것이 유리하다.

지수의 최소화는 조건수와 다르게 동작하는 것을 허용할 수 있다. 특이점 회피는 지수가 최대가 되는 것을 피하는 전략인데, 나름대로 최대에서 멀리 벗어나 있다고 판단되면 영운동을 하지 않아도 될 것이다. 최소 또한 조건수와 일치한다면 좋겠지만, 최소에서의 일치성을 포기하고 좀 더 간단하게 동작하는 지수를 선택하는 것도 가능한 방법이다.

3.2 특이값 관련 지수

행렬 F 의 특이값($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)은 $A=FF^T$ 의 고유값이며, 다음 관계식이 성립한다.

$$\det(FF^T) = |A| = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2, \quad (11)$$

$$\text{tr}(A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 4$$

그래서 $\sqrt{4/3} \leq \sigma_1 \leq 2, 0 \leq \sigma_3 \leq \sqrt{4/3}$ 이다.

특이값과 관련된 지수를 사용하는 경우에는, 특이값 자체를 구하는 계산양도 많지만 1차와 2차 미분계수를 구하는데 계산양이 늘어날 수 있다. 조건수($V=\sigma_1/\sigma_3$)의 구배 벡터와 Hessian 행렬은 식 (12)와 같다[11,12].

$$V_{,i} = \frac{1}{\sigma_3}(\sigma_1)_{,i} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3^2}(\sigma_3)_{,i} \quad (12)$$

$$V_{,ij} = \frac{1}{\sigma_3}(\sigma_1)_{,ij} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3^2} \left(1 - \frac{2}{\sigma_3}\right) (\sigma_3)_{,ij}$$

$$- \frac{1}{\sigma_3^2} \{(\sigma_1)_{,i}(\sigma_3)_{,j} + (\sigma_3)_{,i}(\sigma_1)_{,j}\}$$

특이값에 대한 미분은 부록에 제시되어 있다. 조건수는 최소 특이값의 영향이 제일 크다. 그런 까닭에 지수를 다음과 같이 둔다.

$$V = -\sigma_3 \quad (13)$$

구배 벡터와 Hessian 행렬은 식 (12)에 비해서 훨씬 간단하게 구해진다($i \neq j$).

$$V_{,i} = -(\sigma_3)_{,i}, \quad V_{,ii} = -(\sigma_3)_{,ii}, \quad V_{,ij} = 0 \quad (14)$$

무한지수가 필요한 경우에는 역수($1/\sigma_3$) 보다는 로그 지수를 제안한다.

$$V = -\ln\sigma_3 \quad (15)$$

구배 벡터와 Hessian 행렬은 다음과 같다.

$$V_{,i} = -\frac{1}{\sigma_3}(\sigma_3)_{,i} \quad (16)$$

$$V_{,ij} = \frac{1}{\sigma_3^2} \{(\sigma_3)_{,i}(\sigma_3)_{,j} - \sigma_3(\sigma_3)_{,ij}\}$$

$\sigma_3 \rightarrow 0$ 으로 수렴하면서 역수와 로그 모두 발산하지만 로그가 더 느리게 발산한다. 식 (12)의 구배 벡터를 보면 σ_3^2 에 반비례하지만 로그의 경우에는 σ_3 에 반비례한다.

최대/최소 특이값(σ_1, σ_3) 모두를 사용하는 지수($\sigma_1/\sigma_3, (\sigma_1 - \sigma_3)^2/2$)는, 특이 조건으로부터 벗어나기 위해서 σ_1 의 정보도 함께 사용한다. 그러나 특이 조건에 가까워지면 σ_3 의 영향이 지수에 더 중요하고, 특이 조건에서 멀어지면 σ_1 의 영향도 고려할 수준이 된다. $1.155 \leq \sigma_1 \leq 2$ 이지만, $0.866 \leq \sigma_3^{-1} < \infty$ 혹은 $-0.144 \leq -\ln\sigma_3 < \infty$ 이다.

3.3 행렬식 관련 지수

행렬식 $\det(FF^T)$ 는 특이성 척도(measure)로 가중치를 적응적으로 변화시키는데 많이 사용되어 왔지만, 식 (7)의 방법으로 사용하기 위해서는 구배와 Hessian 행렬을 계산해야 한다. 다음은 행렬식과 관련된 수식을 정리한 것이다.

$$A = FF^T = \mathbf{f}_1\mathbf{f}_1^T + \mathbf{f}_2\mathbf{f}_2^T + \mathbf{f}_3\mathbf{f}_3^T + \mathbf{f}_4\mathbf{f}_4^T,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_i} = -\mathbf{f}_i\mathbf{h}_i^T - \mathbf{h}_i\mathbf{f}_i^T, \quad \frac{d|A|}{dx} = |A|\text{tr}\left(A^{-1}\frac{dA}{dx}\right),$$

$$\frac{d}{dx}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1} \quad (17)$$

부록에 $V = -|A|/2$ 에 대한 Hessian 행렬과 구배 벡터를 정리하였다. 2차 미분을 구하는 과정에서 수식을 좀 더 간단하게 만들기 위하여 다음과 같은 무한지수를 제안한다.

$$V = -\frac{1}{2} \ln|A| \quad (18)$$

조건수와 비교해서 극한 특성을 살펴본다.

$$\lim_{\sigma_3 \rightarrow 0} \frac{-\ln|A|}{\sigma_1/\sigma_3} = \lim_{\sigma_3 \rightarrow 0} \frac{-\ln(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)}{\sigma_1/\sigma_3} \quad (19)$$

$$\simeq \lim_{\sigma_3 \rightarrow 0} \frac{-\ln(\sigma_3)}{1/\sigma_3} = \lim_{\sigma_3 \rightarrow 0} \sigma_3 = 0$$

식 (18)은 무한지수여서 발산하지만 조건수 보다 좀 더 완만하게 동작한다. 이는 식 (15)의 지

수에도 동일하게 적용된다.

구배 벡터와 Hessian 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V_{,i} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{|A|} \frac{\partial |A|}{\partial \gamma_i} = -\frac{1}{2} \text{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} \right) \quad (20) \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr} (A^{-1} (\mathbf{f}_i \mathbf{h}_i^T + \mathbf{h}_i \mathbf{f}_i^T)) = \mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_i \\
 V_{,ii} &= (\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{f}_i - 1) (\mathbf{h}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_i + 1) \\
 &\quad + 1 + (\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_i)^2 \\
 V_{,ij} &= (\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{f}_j) (\mathbf{h}_j^T A^{-1} \mathbf{h}_i) \quad (i \neq j) \\
 &\quad + (\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_j) (\mathbf{f}_j^T A^{-1} \mathbf{h}_i)
 \end{aligned}$$

행렬 A 의 adjugate 행렬인 $\text{adj}(A) \equiv \hat{A}$ 를 이용한다($A^{-1} = \text{adj}(A)/|A|$). 이 행렬은 singularity와 무관하게 계산할 수 있다. 식 (20)에서 각각 $|A|$ 와 $|A|^2$ 을 빼낸다. 결과는 식 (16)과 유사하다.

$$\begin{aligned}
 V_{,i} &= \frac{1}{|A|} \mathbf{f}_i^T \hat{A} \mathbf{h}_i, \quad (21) \\
 V_{,ii} &= \frac{1}{|A|^2} \left\{ (\mathbf{f}_i^T \hat{A} \mathbf{f}_i - |A|) (\mathbf{h}_i^T \hat{A} \mathbf{h}_i + |A|) \right\}, \\
 V_{,ij} &= \frac{1}{|A|^2} \left\{ (\mathbf{f}_i^T \hat{A} \mathbf{f}_j) (\mathbf{h}_j^T \hat{A} \mathbf{h}_i) \right\} \quad (i \neq j)
 \end{aligned}$$

식(16)과 (21)을 보면 무한지수의 특성이 잘 드러난다. 구배 벡터에 σ_3 와 $|A|$ 가 분모에 곱해지기 때문에, 특이점에 가까워지면 구배 벡터의 크기가 급격하게 증가하게 된다. 실제 응용에서는 이러한 발산은 좋은 현상이 아니기 때문에 적절한 대응이 필요하다. 다음의 가중치를 이용해서 변형된 구배와 Hessian을 사용한다.

$$\epsilon V_{,i}, \quad \epsilon^2 V_{,ij}, \quad \epsilon = \begin{cases} 1 & J \geq Th \\ J/Th & J < Th \end{cases} \quad (22)$$

$J = \sigma_3$ 혹은 $J = |A|$ 이다. 일부 구간($J < Th$)에서는 유한지수를 사용하는 효과를 얻는다. Th 를 적절히 선정하여, 영운동을 조절할 수 있다.

IV. 시뮬레이션

4.1 특이점 지수의 비교

다음의 지수에 대하여 상호 비교하였다.

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad V_2 = -\ln \sigma_3, \quad V_3 = -\frac{1}{2} \ln |A|, \quad (23) \\
 V_4 &= -\sigma_3, \quad V_5 = -\frac{1}{2} |A|
 \end{aligned}$$

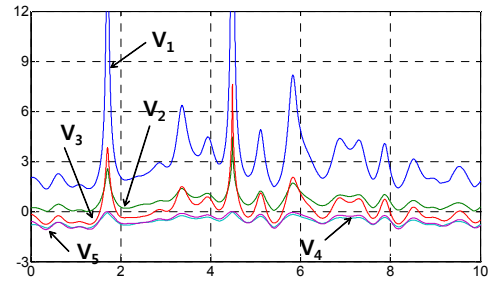


Fig. 2. Singularity indices results

앞의 세 개는 무한지수이다. 짐벌 각도는 다음처럼 변화도록 가정하였다.

$$\gamma_1 = t, \quad \gamma_2 = \sqrt{5}t, \quad \gamma_3 = \sqrt{7}t, \quad \gamma_4 = \sqrt{11}t$$

$\beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ 으로 설정하였다. Fig. 2는 $0 < t < 10$ 동안 다양한 조합의 짐벌 각도에 대하여 계산한 결과를 보여준다. 예상한 것처럼 V_1 에 비하여 V_2 와 V_3 가 작게 나온다. 대체적으로 V_3 가 V_2 에 비하여 작지만, 피크에서는 더 크게 나오며, V_3 가 좀 더 V_1 과 비슷하게 동작한다. V_3 에는 σ_1 의 정보도 포함되어 있어서 그런 결과가 나온 것으로 판단된다. 그리고 유한지수의 경우 거의 비슷하게 변한다.

4.2 토크 생성 시뮬레이션

다음처럼 주어진 토크 명령($\mathbf{u}^c = \mathbf{r}_{CMC}^c / (\Omega I_{w,h})$)에 대하여, 변화하는 짐벌 각도를 반영하여 생성 가능한 토크($\mathbf{u} = F\dot{\gamma}$)와 비교하였다.

$$\mathbf{u}^c = [\sin(t+1), \sin(t\sqrt{5}-1), \sin(t\sqrt{3})]^T$$

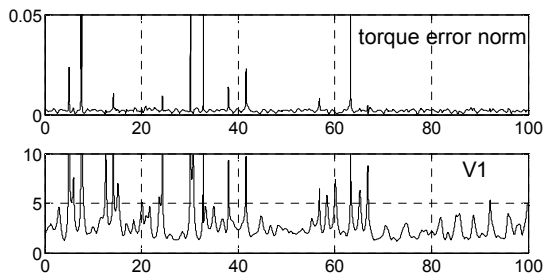
짐벌 각도는 다음과 같이 갱신하였다.

$$\gamma(t + \Delta t) \simeq \gamma(t) + \Delta t \dot{\gamma} \quad (24)$$

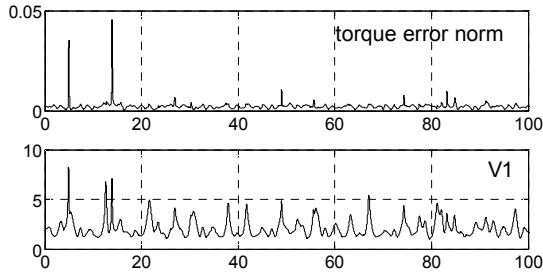
$\dot{\gamma}$ 는 식 (7)로부터 주어진다. $\gamma(0) = \mathbf{0}$ 로 두었으며, $\Delta t = 0.001$, $c = 0.001$, $W = I_4$, $\rho = 1$ 으로 정했다. 실제로는 지수에 특성에 맞추어 튜닝을 해서 최적의 성능을 낼 수 있도록 해야 한다.

Figure 3은 토크 생성 시뮬레이션 결과이다. 먼저 (a)는 영운동이 없이 $\dot{\gamma} = F^T (FF^T)^{-1} \mathbf{u}^c$ 를 적용한 결과이다.

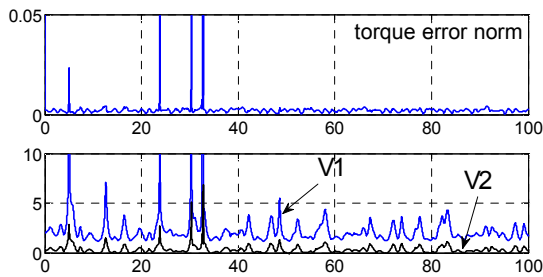
조건수(V_1)가 심하게 증가할 때마다 토크 오차가 상대적으로 크게 나타난다. (b)~(d)는 각각 V_1, V_2, V_3 를 이용하여 식 (7)의 구동법칙을 적용한 결과이다. (c)와 (d)는 조건수도 함께 도시하였다. 영운동으로 유리한 형상이 되도록 하여, 짐



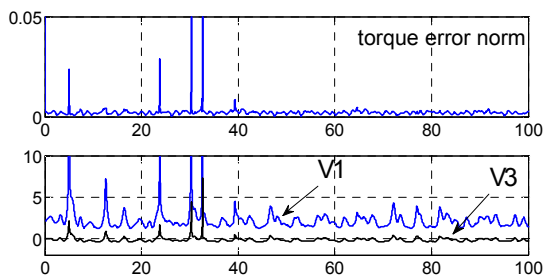
(a) No null motion



(b) V1 (with null motion)



(c) V2 (with null motion)



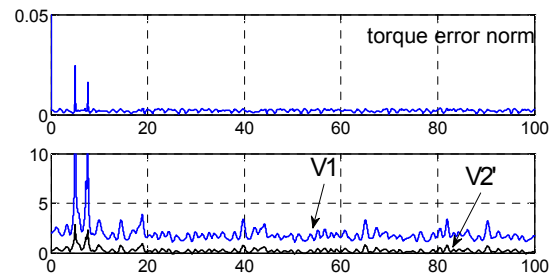
(d) V3 (with null motion)

Fig. 3. Torque generation simulation

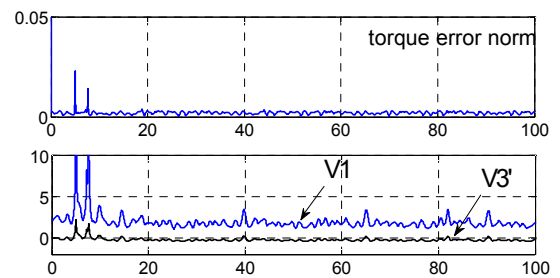
더 좋은 결과를 얻을 수 있다. (c), (d)의 경우 토크 오차가 과도해지는 순간이 남아있는데, 가중치를 조절하여 없앨 수 있다. 다음 시뮬레이션을 위하여 보인 것이다.

Figure 4는 무한지수의 발산을 억제하는 방법 (식 (22))을 적용한 결과이다. 모두 $Th = 0.1$ 로 선정하였다. 토크 오차도 심한 피크를 보이지 않으며, 지수가 작은 값으로 유지되고 있다.

제시한 가중치는 모든 상황을 고려한 최적의



(a) V2



(b) V3

Fig. 4. Torque generation with limited gradient and Hessian values

결과는 아니며, 제시한 지수의 적합성을 보이기 위한 예제이다. 실제 응용을 위해서는 여러 가지 상황에 적합한 구동 법칙과 게인이 필요하다.

4.3 위성 제어 시뮬레이션

2.2절의 방정식을 이용하여 위성 제어 시뮬레이션을 수행하였다. 모든 상태 변수는 안다고 가정하고, 제어 입력과 각속도 명령은 다음과 같다.

$$F\dot{\gamma} = \frac{1}{I_{w,h}\Omega} [K_P J_T (\omega - \omega^e) - \omega \times J_T \omega + \tau_i] \quad (25)$$

$$\omega^e = 0.1 \times [\sin(0.1t), \sin(0.2t), \sin(0.3t)]^T$$

집벌 각의 두 가지 초기조건을 가정하였다.

$$I1 : [0, -85, 0, 95] \text{ (degree)}$$

$$I2 : [10, 55, 45, -10] \text{ (degree)}$$

RK 4 방법으로 적분하였으며, 적분 가격은 0.1 sec 이다. 필요한 데이터는 Table 1에 제시하였다. 식 (7)의 ρ 는 좋은 성능을 위하여 조정하였다.

Table 1. Parameters for simulation

Parameters	Unit	Parameters	Unit
$J_T = \text{diag}[90, 70, 120]$	kg-m ²	$l_{c,t} = 0.07$	kg-m ²
$l_{c,h} = 0.13$	kg-m ²	$l_{c,g} = 0.08$	kg-m ²
$l_{w,h} \approx l_{c,h}$	kg-m ²	$K_P = 0.2$	
$\Omega_0 = 600$	rad/s	$\omega_0 = [1, 5, -1] \times 10^{-2}$	rad/s

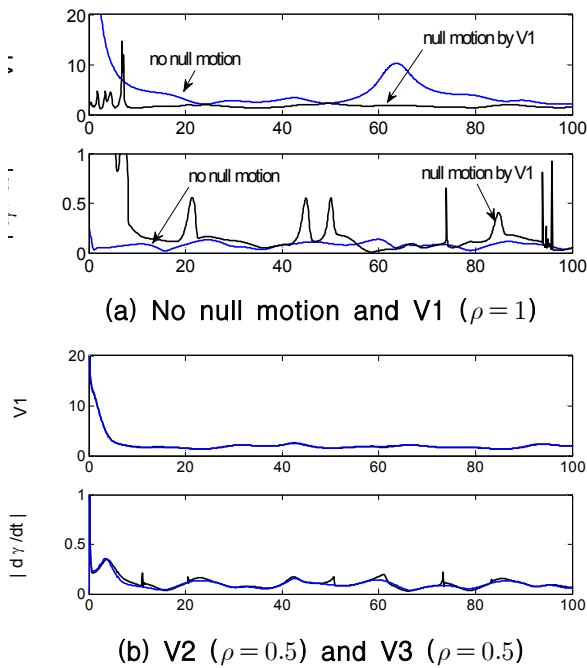


Fig. 5. Control simulation: initial condition 1

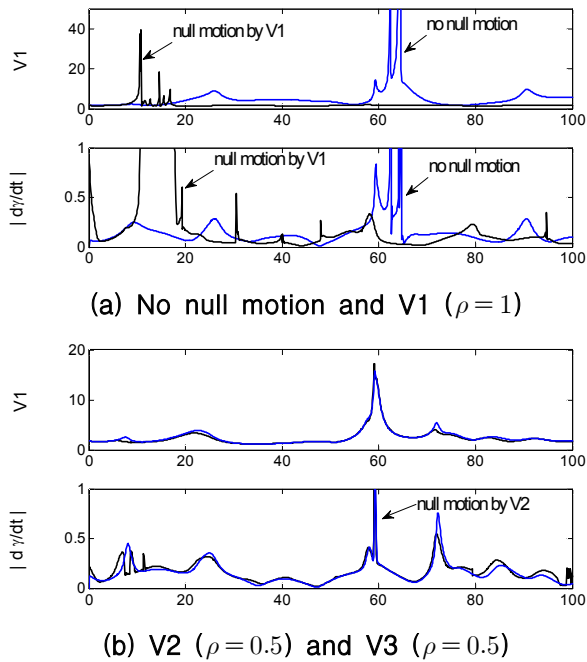


Fig. 6. Control simulation: initial condition 2

Figure 5와 6은 초기조건에 따른 결과이다. 조건수와 가해지는 입력의 놈($\|\dot{\gamma}\|$)을 제시하였다. 이 두 값을 보면 시스템에 충격이 가해지는지 아닌지를 판별할 수 있다. 초기조건 1은 조건수가 큰 형상에서 시작하는 것이다. 지수 V_1 은 시뮬레이션 초기에 과도한 입력($\dot{\gamma}$)이 가해져서 조건수를 빠르게 줄이지만, 물리적인 제약 때문에 실제

로는 불가능한 운동이다. 시뮬레이션에서는 물리적인 제약을 고려하지 않았다. 지수 V_2 와 V_3 는 지속적으로 (a) 보다는 큰 입력이 가해지는데, 영운동에 의한 것으로 조건수를 낮게 유지하게 된다. 초기의 대응에서도 (a)보다는 빨리 조건수를 줄이고 있다.

Figure 6은 시간이 지나면서 형상이 나빠지는 경우인데, Fig. 5와 비슷하게, 지수 V_1 을 채택한 구동법칙은 조건수를 좋게 하려고 가끔씩 급격한 운동을 보인다. V_2, V_3 는 무난하게 동작한다. Fig. 5(b), 6(b)에서는 두 지수가 거의 비슷한 특성을 보였다.

V. 결 론

CMG의 특이 형상과 관련된 다양한 특이성 지수를 분석하였으며, CMG의 구동법칙 설계를 위해 지수의 적합한 기준을 제시하였다. 기존의 지수와 동작 특성이 일치해야 하며, 구배 벡터와 Hessian 행렬의 빠른 계산이 제일 중요한 기준이 될 것이다. 유한지수와 무한지수의 특성을 비교하였고, 가중치를 이용하여 두 가지의 장점을 결합하는 방안을 제시하였으며, 시뮬레이션을 이용하여 효과를 확인하였다.

여러 가지 결과를 바탕으로, 가장 적합한 지수는 로그 함수를 이용하여 무한지수로 만든 행렬식이라고 판단된다. 역수보다 좀 더 느리게 발산하면서도, 특이점 회피 특성은 유한지수보다 우수하기 때문이다.

본 논문에서 제시한 지수의 적합성 기준은, 여러 가지 지수를 개발하거나 선택할 때 유용한 체크리스트가 될 것이라고 판단된다.

추가적으로 정량적인 평가지표(계산시간, 코드 길이, 지수간의 유사도 혹은 상관관계, 최대 토크 오차, 시뮬레이션 시나리오 등) 개발이 필요하다.

부 록

▶ 벡터 g_i 표현식:

$$G = [g_1, g_2, g_3, g_4] = \begin{bmatrix} s\beta & 0 & -s\beta & 0 \\ 0 & s\beta & 0 & -s\beta \\ c\beta & c\beta & c\beta & c\beta \end{bmatrix}$$

▶ 지수 $V = -\frac{1}{2}|A|$ 에 대한 구배와 Hessian:

$$V_{,i} = |A| (f_i^T A^{-1} h_i) = (f_i^T adj(A) h_i)$$

$$V_{,ii} = |A| \left\{ \left(\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{f}_i - 1 \right) \left(\mathbf{h}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_i + 1 \right) \right. \\ \left. + 1 - \left(\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_i \right)^2 \right\}$$

$$V_{,ij} = |A| \left\{ \left(\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{f}_j \right) \left(\mathbf{h}_j^T A^{-1} \mathbf{h}_i \right) \right. \\ \left. + \left(\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_j \right) \left(\mathbf{f}_j^T A^{-1} \mathbf{h}_i \right) \right. \\ \left. - 2 \left(\mathbf{f}_j^T A^{-1} \mathbf{h}_j \right) \left(\mathbf{f}_i^T A^{-1} \mathbf{h}_i \right) \right\} \quad (i \neq j)$$

▶ 특이값에 대한 1차, 2차 미분[11,12]:

$$F = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ & \sigma_2 & 0 \\ & & \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \mathbf{y}_3^T \\ \mathbf{y}_4^T \end{bmatrix},$$

$$(\sigma_k)_{,i} = -y_{ik} \mathbf{x}_k^T \mathbf{h}_i,$$

$$(\sigma_k)_{,ii} = -y_{ik} \mathbf{x}_k^T \mathbf{f}_i, \quad (\sigma_k)_{,ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

References

1) Kurokawa, H., "Survey of theory and steering laws of single-gimbal control moment gyros," *Journal of Guidance, Navigation, and Control*, Vol.30, No.5, 2007, pp.1331-1340.

2) Lappas, V., et al., "Design and testing of a control moment gyroscope cluster for small satellites," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol.42, no.4, pp.729-739, 2005.

3) Lapas, V., et al., "Laboratory experiments of a control moment gyroscope cluster for agile small satellites," *Proceedings of the 5th International ESA Conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems*, pp. 109-113, 2002.

4) Jang, W., Rhee, S., and Kwon, H., "Development of 0.6Nm small CMG hardware and performance test," *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol.38, No.9, 2010, pp.933-942.

5) Rhee, S. and Kwon, H., "Low cost small CMG performance test and analysis," *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol.39, No.6, 2011, pp.543-552.

6) Lee, S., "Technology of control moment gyroscope and its industrial trend," *Journal of*

The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol.40, No.1, 2012, pp.86-92.

7) Oh, H. and Vadali, S., "Feedback control and steering laws for spacecraft using single gimbal control moment gyros," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 39, No. 2, 1991, pp.183-203.

8) Wie, B., Bailey, D., and Heiberg, C., "Singularity robust steering logic for redundant single-gimbal control moment gyros," *Journal of Guidance, Navigation, and Control*, Vol.24, No.5, 2001, pp.865~872.

9) Ford, K. and Hall, C., "Singular direction avoidance steering for control moment gyros," *Journal of Guidance, Navigation, and Control*, Vol.23, No.4, 2000, pp.648-656.

10) Schaub, H. and Junkins, J., "Singularity avoidance using null motion and variable-speed control moment gyros," *Journal of Guidance, Navigation, and Control*, Vol.23, No.1, 2000, pp.11-16.

11) Leeghim, H., Bang, H., Park, J., "Singularity avoidance of control moment gyros by one-step ahead singularity index," *Acta Astronautica*, Vol. 64, No.9-10, 2009, pp.935-945,

12) McMahon, J. and Schaub, H., "Simplified singularity avoidance using variable speed control moment gyroscope null motion," *Journal of Guidance, Navigation, and Control*, Vol.32, No.6, 2009, pp.1938-1943.

13) Cui, P. and He, J., "Steering law for two parallel variable speed double gimbal control moment gyros," *Journal of Guidance, Navigation, and Control*, Vol.37, No.1, 2014, pp.350-359.

14) Lee, H., Lee, I., and Bang, H., "Optimal steering laws for variable speed control moment gyros," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, SF, CA, AIAA Paper 2005-6395, Aug., 2005, pp.5368-5378.