

Lot간 변동이 존재하는 Short Run 공정 적용을 위한 일반화된 Q 관리도

이 현 철[†]

한국항공대학교 경영학과

Generalized Q Control Charts for Short Run Processes in the Presence of Lot to Lot Variability

Hyun Cheol Lee[†]

Korea Aerospace University, Department of Business Administration

■ Abstract ■

We derive a generalized statistic form of Q control chart, which is especially suitable for short run productions and start-up processes, for the detection of process mean shifts. The generalization means that the derived control chart statistic concurrently uses within lot variability and between lot variability to explain the process variability. The latter variability source is noticeably prevalent in lot type production processes including semiconductor wafer fabrications. We first obtain the generalized Q control chart statistic when both the process mean and process variance are unknown, which represents the case of implementing statistical process control charting for short run productions and start-up processes. Also, we provide the corresponding generalized Q control chart statistics for the rest of three cases of previous Q control chart statistics : (1) both the process mean and process variance are known (2) only the process mean is unknown and (3) only the process variance is unknown.

Keywords : Between Lot Variability, Generalized Q Control Chart, Semiconductor Wafer Fabrication, Short Run Production, Statistical Process Control

1. 서 론

Hawkins[7] 이래로 지난 20여 년간에 걸쳐 start-up 공정과 short run 공정을 대상으로 한 통계적 공정 관리도의 개발이 광범위하게 진행되어 왔다 [3-5, 11-16, 19-21]. 특히 short run 공정에 대한 통계적 공정관리의 수요와 중요성은 최근에도 점점 확대되고 있는데, 이는 제품에 대한 고객의 요구가 점점 다양해지고 복잡해지고 있다는 사실과 밀접하게 관련이 있다. 고객 요구의 다양화는 지속적으로도 다양한 형태의 신제품 개발과 이들 제품의 생산을 위한 여러 형태의 다품종 소량 생산으로 이어지고 있다. 예를 들어 DRAM, Nand Flash와 같은 메모리 반도체의 경우, 다양한 모바일(mobile) 기기가 출현함에 따라 다양한 성능과 사양의 반도체에 대한 동시 다발적 수요를 충족하기 위하여 하나의 양산라인에서도 여러 종류의 반도체가 동시에 소량 생산 되는 상황이 흔히 나타나고 있다. 이는 새로운 PC 운영체제(operating system) 출시에 따른 수요를 충족하기 위해서 동일 사양의 한 세대 반도체 제품을 여러 개의 양산라인에서 대량 생산 하던 기존 생산환경과 상당히 다르다.

또한 첨단 소재기술과 나노(nano) 기술에 기반한 제조기술의 발전은 전자부품의 성능 향상을 매우 빠르게 촉진하고 있으며, 이는 역설적으로 한세대 전자부품의 수명주기를 더욱 짧게 만들고 있다. 즉, 새로운 전자부품의 출시 주기가 빨라짐에 따라 특정 전자부품이 시장에서 머무는 시간이 점점 짧아지고 있다. 메모리 반도체의 경우 제조기술과 생산성 수준을 나타내는 design rule 변화에 따른 반도체 세대간 변경이 1~2년 주기로 매우 신속하게 진행되고 있다[1]. 이러한 전자부품의 빠른 수명주기는 이들 부품의 조립을 기반으로 한 스마트폰이나 태블릿 PC 같은 완제품 형태의 전자제품에 대한 수명주기의 단축으로 이어지고 있다. 이와 같이 고객 요구의 다양성과 복잡성에 따른 다품종 소량 생산의 확대와 생산기술 발전에 의한 제품 세대간 빠른 변경은 한 종류의 제품에 대한 충분한 양의 공

정 데이터 수집을 어렵게 하는 원인으로 작용한다.

한편, 고객의 요구사항이 증가하고 복잡해짐에 따라 개발제품이 고사양화 되고, 이는 생산을 담당하는 기업에게는 상당한 규모의 연구개발(R&D) 활동을 유도한다. 일반적으로 반도체나 자동차 같은 고부가 가치 제품 생산의 경우 R&D 개발라인을 양산라인과 별도로 운영하고 있고, 이러한 R&D 개발라인의 경우 전형적인 short run 생산 형태를 보인다. Short run 생산은 job shop 형태의 생산에서도 반복적으로 관찰되는 특징이다. 특히 기존의 short run 공정에 대한 통계적 공정관리를 제한한 연구에서 설명하는 바와 같이, 일반적인 양산라인에서도 공정 셋업 후 생산초기(start-up process)에 충분한 양의 공정 데이터의 수집에 한계가 존재하기 때문에 이 경우도 short run 공정의 특징을 잘 보여준다.

이러한 생산초기의 양산라인이나 short run과 같은 생산 환경은 일반적인 통계적인 공정 관리도를 활용하기 위한 상황과 상당한 차이를 보인다. 그 중에서도 가장 중요한 차이점은 위에서 언급된 바와 같이 관리도 셋업을 위한 공정 안정 상태에서 충분한 양의 공정 데이터 수집이 어렵다는 점이다. 공정 안정상태에서 수집된 충분한 양의 공정 데이터는 관리도의 셋업을 위해 두가지 주요 공정 모수(공정 평균과 공정 분산)의 추정을 위해 사용된다. 일반적으로 통계적 공정 모니터링에서 이러한 단계를 phase I 문제라고 일컫는다[17].

Start-up 공정과 short run 공정을 대상으로 통계적 공정 관리도를 적용하기 위해 개발된 다양한 방법론 중에서 Q 관리도는 관리도 통계량의 비교적 쉬운 이해와 관리도 통계량의 표준화에 의한 관리도 생성의 용이성에서 큰 활용가치를 갖는다. 특히, 관리도 통계량의 표준화에 기인한 하나의 관리도 상에서 공정 평균과 공정 분산 통계량의 동시 타점의 특성은 프로그램 운영상의 장점으로 인식되어 다양한 연구에 의해 발전되어 온 동시에 다양한 공정에서 널리 사용되어 왔다[11-16, 19-21]. Short run 관리도의 기본적인 개념은 phase I 문제

와 phase II 문제를 동시에 진행하는 것이다. Phase II 문제는 phase I에서 셋업된 관리도를 이용하여 공정을 실제 모니터링 하는 단계를 의미한다. 즉, short run 관리도는 공정 모수를 추정하면서 동시에 그 모수 변화의 추이를 모니터링 하는 방법이다. 이를 위해 Q 관리도는 공정 데이터가 수집되는 순간마다 공정 모수의 추정을 업데이트 함과 동시에 그 순간까지 추정된 관리도 통계량의 표준화를 통해 공정 안정/불안정 상태-예를 들어 3 σ 관리한계선-를 표시할 수 있는 관리한계선과 비교한다. 이렇게 별개의 phase I 절차 없이 통계량 스스로 업데이트 되면서 모니터링이 시작되는 이유로 short run 관리도는 흔히 self-starting 관리도라고도 불린다.

다만 현재 존재하는 Q 관리도는 공정 분산의 요인으로 공정 내 분산에 국한한다. 하지만 앞에서 언급한 바와 같이 모든 종류의 공정에서 변동의 원인으로 공정 내 분산만이 존재하는 것은 아니다. 대표적으로 반도체 생산공정이 그러하다. 잘 알려진 바와 같이, 반도체 생산 공정은 lot 방식의 생산 형태로 일반적인 통계적 공정관리가 가정하는 공정(lot) 내 분산의 존재와 동시에 lot간 분산이 존재한다. Lot내 분산은 동일 lot내에서 제품간의 변동을 의미하고, lot간 분산은 서로 다른 lot간에 존재하는 제품들간의 변동을 의미한다.

반도체 생산 공정을 구성하는 다양한 단위공정 중에서 화학적 반응에 의해 웨이퍼상에 특정 패턴을 만드는 식각(etching) 공정 등이 lot 방식에 의해 생산된다[6]. 그 외에도 반도체 공정에는 다양한 종류의 lot 방식의 생산공정이 존재한다. Lot 생산 공정에서는 일반적인 통계적 공정관리가 가정하는 lot내 분산과 동시에 lot간 분산이 존재하기 때문에 만일 실제 존재하는 lot간 분산 요인을 고려하지 않을 경우에 문제가 발생하게 된다. 실제 존재하는 변동이 고려되지 않았기 때문에 관리도에 사용되는 공정 분산 통계량이 과소 추정되어 공정 평균의 변화가 발생하지 않았음에도 경보를 발생시키는 오경보 발생 비율(false alarm rate)이 증

가하게 된다. 오경보 비율의 증가는 작업자의 실질적인 작업을 방해하고 불필요한 문제 확인 작업을 증가시켜 궁극적으로는 작업의 능률을 떨어뜨리게 된다[2]. 특히, 잦은 오경보는 작업자들의 경보에 대한 민감도를 저하시켜 정작 진성경보가 발생했을 때 경보를 무시하게 되는 심각한 문제를 초래할 수 있다.

본 논문에서 우리는 반도체 공정처럼 lot 방식 공정에 보편적으로 존재하는 lot간 분산을 고려하여 공정평균의 변화를 탐지하기 위한 Q 관리도를 개발하고자 한다. 특히, 비교적 어렵지 않은 통계량의 전개를 통해 현장에서의 높은 적용가능성에 주안점을 두고자 한다. 기존의 Q 관리도가 lot내 분산만을 고려한 관리도인 반면, 제안된 관리도에서는 추가적으로 lot간 분산까지 관리도 통계량에 포함하여 표현한다. 이렇게 유도된 Q 통계량에서 lot간 분산을 0으로 대입할 경우 lot내 분산만을 고려한 기존 Q 관리도 통계량과 일치하게 됨을 확인할 수 있다. 따라서, 제안된 Q 통계량은 목적에 따라 lot 방식 공정 또는 일반 공정 모두에 사용할 수 있으므로 ‘일반화된 Q 통계량’이라고 부르고 이 통계량에 의한 관리도를 ‘일반화된 Q 관리도’라고 명명한다. 이의 개발을 위해 먼저 공정 평균과 공정 분산을 모두 모르는 경우의 일반화된 Q 통계량을 유도하고, 이 통계량에 기반하여 기존의 공정(lot) 내 분산만을 설명하는 Q 관리도에서 제안되었던 3가지 경우, 즉, (1) 공정 평균과 공정 분산을 모두 아는 경우, (2) 공정 평균은 모르고 공정 분산을 아는 경우, (3) 공정 평균은 알고 공정 분산을 모르는 경우에 대해 대응되는 일반화된 Q 통계량을 유도한다([11], p.217).

2. 공정 모형 및 관련 통계량

2.1 공정 모형 및 기존 Q 통계량

Lot내 분산 요인과 lot간 분산 요인을 나타내기 위한 공정 모형은 아래 식과 같이 정의된다.

$$x_{ij} = \mu + L_i + \epsilon_{ij} \quad (1)$$

x_{ij} 는 독립적이면서 정규분포를 따르는 i 번째 lot, j 번째 공정 데이터를 나타내고 L_i 는 i 번째 lot에 의한 효과를 나타내고 $N(0, \sigma_b^2)$ 를 따르며 ϵ_{ij} 는 오차항으로 $N(0, \sigma_w^2)$ 를 따른다. 여기서 σ_b^2 와 σ_w^2 은 각각 lot간 분산과 lot내 분산을 나타내고 두 분산은 상호 통계적으로 독립이다. 두 분산 간 독립은 lot 방식 공정에서 lot내 상황과 lot간 상황이 일반적으로 서로 영향을 받지 않는다는 사실을 반영하고 lot간 분산을 고려하는 관리도에서 널리 사용하는 가정이다[10, 18]. <표 1>은 lot 방식 공정에서 Q 관리도 적용을 위해 수집되는 부분군 형태의 공정데이터와 각 lot 별 평균과 분산 통계량을 나타낸다.

<표 1> Lot 방식 공정 데이터형태

Lot	데이터	Lot 평균	Lot내 분산
1	$x_{11} x_{12} \cdots x_{1n_1}$	\bar{x}_1	S_1^2
2	$x_{21} x_{22} \cdots x_{2n_2}$	\bar{x}_2	S_2^2
:	:	:	:
i	$x_{i1} x_{i2} \cdots x_{in_i}$	\bar{x}_i	S_i^2

각 lot 별 평균과 분산은 아래의 식에 의해 계산된다.

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in_i}}{n_i} \quad (2)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (3)$$

주어진 공정 모형에 대한 공정평균 변화를 모니터링하기 위한 기존의 Q 통계량은 다음과 같이 정의된다([11], p.217 식 (13)).

$$Q_i(\bar{x}_i) = \Phi^{-1} [G_{n_1 + \cdots + n_{i-1}}(w_i)] \quad (4)$$

$$i = 2, 3, \dots$$

여기서

$$w_i = \sqrt{\frac{n_i(n_1 + \cdots + n_{i-1})}{n_1 + \cdots + n_{i-1}}} \left(\frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}}{S_{p,i}^2} \right) \quad (5)$$

그리고 lot 방식 공정 전체 평균을 나타내는 \bar{x}_i 와 lot 공정 내 합동분산을 나타내는 $S_{p,i}^2$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{x}_i = \frac{n_1 \bar{x}_1 + \cdots + n_i \bar{x}_i}{n_1 + \cdots + n_i} \quad (6)$$

$$S_{p,i}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + \cdots + (n_i - 1)S_i^2}{n_1 + \cdots + n_i - i} \quad (7)$$

식 (4)의 Φ^{-1} 는 표준정규분포 누적확률함수의 역함수를 의미하고 $G_{n_1 + \cdots + n_{i-1}}$ 는 자유도가 $n_1 + \cdots + n_{i-1}$ 인 t 분포의 누적확률함수를 나타낸다. 위 식으로부터 Q_i 는 $N(0, 1^2)$ 을 따르는 표준정규분포 확률변수가 되고 표준화된 관리도에 순차적으로 타점된다. 따라서 공정 안정 상태의 평균 런 길이(In-control average run length(ARL))가 370(제1종 오류 = 0.0027) 일 때를 가정할 경우, 일반적인 Shewhart 형태에 해당하는 표준화된 Q 관리도는 ± 3 으로 표시된다. 한편 이렇게 변환된 통계량에 대해 필요에 따라 크기가 작은 공정 변화에 민감하게 반응하는 누적합(Cumulative Sum) 통계량, 또는 EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) 통계량을 추가적으로 적용 할 수 있다.

2.2 관련 통계량

본 논문에서 lot간 분산 요소가 포함된 일반화된 Q 통계량을 유도하기 위하여 사용될 관련 통계량들을 아래와 같이 표시할 수 있다. 먼저 각 lot 별 평균을 나타내는 통계량은 공정 모형을 이용해 표현할 경우,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \mu + L_i + \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \epsilon_{ij} \quad (8)$$

으로 표현된다. 이 통계량의 기대값, 즉 전체 공정의 평균은 L_i 와 ϵ_{ij} 의 각각 평균이 0이므로

$$E(\bar{x}_i) = E\left(\mu + L_i + \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \epsilon_{ij}\right) = \mu \quad (9)$$

으로 표현되고 전체 공정의 평균이 μ 임을 알 수 있다. 또한 식 (8)의 분산 통계량은 lot내 분산과 lot간 분산이 서로 독립이므로

$$var(\bar{x}_i) = var\left(\mu + L_i + \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \epsilon_{ij}\right) = \sigma_b^2 + \frac{1}{n_i} \sigma_w^2 \quad (10)$$

으로 표현 가능하다. 식 (10)을 보면 lot 방식 공정의 분산요소로 lot내 분산과 lot간 분산이 포함되고 두 분산이 선형 결합되어 있음을 알 수 있다.

만일 lot간 분산(= σ_b^2)과 lot내 분산(= σ_w^2)의 추정 통계량을 각각 $\hat{\sigma}_b^2$ 과 $\hat{\sigma}_w^2$ 로 나타낸다면, 각각의 추정량은 아래의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_{i-1})^2 \quad (11)$$

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + \dots + (n_i-1)S_i^2}{n_1 + \dots + n_i - i} \quad (12)$$

식 (12)의 lot내 분산 추정량은 식 (7)의 공정 내 합동분산 추정량과 일치한다. 그리고 식 안에 존재하는 S_i^2 는 lot 별 분산으로 식 (3)에 의해 추정될 수 있다.

3. Lot간 분산을 고려한 Q 관리도

3.1 일반화된 Q 통계량 유도

공정 평균과 공정 분산을 모두 모르는 경우의 일반화된 Q 통계량을 기존의 Q 통계량처럼 아래와 같이 표현하면,

$$Generalized Q_i = \Phi^{-1}[G_{df(i)}(w_i)] \quad (13)$$

$i = 2, 3, \dots$

여기서

$$w_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i-1}}{\sqrt{var(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i-1})}} \quad (14)$$

으로 나타낼 수 있다. 궁극적으로 위 관리도 통계량의 완성을 위해서 구해져야 하는 부분은 $\sqrt{var(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i-1})}$ 과 w_i 의 자유도 $df(i)$ 이다. 먼저 $(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i-1})$ 의 분산 통계량을 유도하기 위해서 제 2.2절의 관련 통계량을 이용하여 아래와 같이 유도 할 수 있다.

$$var(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i-1}) \quad (15)$$

$$= var\left(\bar{x}_i - \frac{n_1 \bar{x}_1 + \dots + n_{i-1} \bar{x}_{i-1}}{n_1 + \dots + n_{i-1}}\right)$$

$$= var(\bar{x}_i) + \frac{n_1^2 var(\bar{x}_1) + \dots + n_{i-1}^2 var(\bar{x}_{i-1})}{(n_1 + \dots + n_{i-1})^2}$$

$$= \sigma_b^2 + \frac{1}{n_i} \sigma_w^2 + \frac{n_1^2 \left(\sigma_b^2 + \frac{1}{n_1} \sigma_w^2\right) + \dots + n_{i-1}^2 \left(\sigma_b^2 + \frac{1}{n_{i-1}} \sigma_w^2\right)}{(n_1 + \dots + n_{i-1})^2}$$

$$= \sigma_b^2 + \frac{1}{n_i} \sigma_w^2 + \frac{(n_1^2 + \dots + n_{i-1}^2) \sigma_b^2 + (n_1 + \dots + n_{i-1}) \sigma_w^2}{(n_1 + \dots + n_{i-1})^2}$$

$$= \left(1 + \frac{n_1^2 + \dots + n_{i-1}^2}{(n_1 + \dots + n_{i-1})^2}\right) \sigma_b^2 + \left(\frac{n_1 + \dots + n_i}{n_i (n_1 + \dots + n_{i-1})}\right) \sigma_w^2$$

따라서, 식 (15)를 이용하여 식 (14)을 다시 정리하면 아래의 식으로 정리할 수 있다.

$$w_i = \quad (16)$$

$$\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i-1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{n_1^2 + \dots + n_{i-1}^2}{(n_1 + \dots + n_{i-1})^2}\right) \sigma_b^2 + \left(\frac{n_1 + \dots + n_i}{n_i (n_1 + \dots + n_{i-1})}\right) \sigma_w^2}}$$

또한 w_i 의 자유도 $df(i)$ 는 Welch-Satterthwaite 식을 이용하여 구할 수 있다. Welch-Satterthwaite 식은 서로 독립인 분산항이 선형결합 되어 있을 때 통합 자유도를 계산할 수 있는 식이다[9]. Lot 방식

공정의 분산은 서로 독립인 lot간 분산과 lot내 분산이 선형결합의 형태로 구성되어 있으므로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$df(i) = \frac{(\hat{\sigma}_b^2/i + \hat{\sigma}_w^2/(n_1 + \dots + n_i - i + 1))^2}{\left(\frac{(\hat{\sigma}_b^2/i)^2}{i-1} + \frac{(\hat{\sigma}_w^2/(n_1 + \dots + n_i - i + 1))^2}{n_1 + \dots + n_i - i}\right)} \quad (17)$$

따라서, 최종적으로 식 (11)의 lot내 분산 추정량과 식 (12)의 lot간 분산 추정량을 각각 식 (16)과 식 (17)에 대입하면, 일반화된 Q 통계량을 아래의 식과 같이 정리할 수 있다.

$$\text{Generalized } Q_i = \Phi^{-1}[G_{df(i)}(w_i)] \quad (18)$$

$i = 2, 3, \dots$

그리고

$$w_i = \quad (19)$$

$$\frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{n_1^2 + \dots + n_{i-1}^2}{(n_1 + \dots + n_{i-1})^2}\right) \hat{\sigma}_b^2 + \left(\frac{n_1 + \dots + n_i}{n_i(n_1 + \dots + n_{i-1})}\right) \hat{\sigma}_w^2}}$$

$$df(i) = \frac{(\hat{\sigma}_b^2/i + \hat{\sigma}_w^2/(n_1 + \dots + n_i - i + 1))^2}{\left(\frac{(\hat{\sigma}_b^2/i)^2}{i-1} + \frac{\hat{\sigma}_w^2/(n_1 + \dots + n_i - i + 1)^2}{n_1 + \dots + n_i - i}\right)} \quad (20)$$

만일 lot 방식 공정이 아닌 일반적인 공정의 경우 lot간 분산이 존재하지 않으므로 $\hat{\sigma}_b^2$ 에 0을 대입하여 그 결과를 확인할 수 있다. 식 (19)의 $\hat{\sigma}_b^2$ 에 0을 대입하면 기존 Q 통계량(식 (5))과 일치함을 알 수 있다. 또한 자유도를 나타내는 식 (20)도 $\hat{\sigma}_b^2$ 가 0이면 $n_1 + \dots + n_i - i$ 가 되어 기존 Q 통계량의 자유도와 같아진다. 결과적으로 식 (19)와 식 (20)은 각각 lot간 분산까지 포함한 일반화된 Q 통계량을 나타냄을 알 수 있다.

3.2 Lot별 동일 크기의 데이터 수집 시 일반화된 Q 통계량

만일 각 lot에서의 데이터의 크기가 n 으로 일정하다면, 즉 $n_1 = n_2 = \dots = n_i = n$ 이면, 식 (18)~식 (20)은 각각 아래와 같이 좀 더 간단하게 표현될 수 있다.

$$\text{Generalized } Q_i = \Phi^{-1}[G_{df(i)}(w_i)] \quad (21)$$

$i = 2, 3, \dots$

그리고

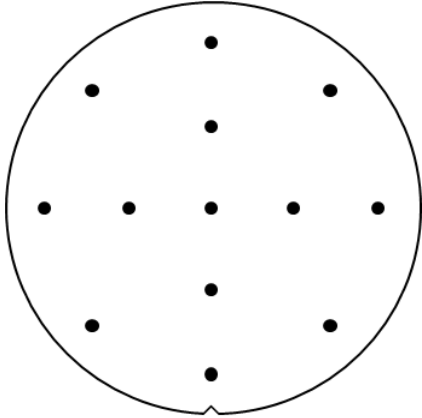
$$w_i = \sqrt{\frac{i-1}{i}} \left[\frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}}{\sqrt{\hat{\sigma}_b^2 + \frac{1}{n} \hat{\sigma}_w^2}} \right] \quad (22)$$

그리고

$$df(i) = \frac{(\hat{\sigma}_b^2/i + \hat{\sigma}_w^2/(i(n-1) + 1))^2}{\left(\frac{(\hat{\sigma}_b^2/i)^2}{i-1} + \frac{\hat{\sigma}_w^2/(i(n-1) + 1)^2}{i(n-1)} - i\right)} \quad (23)$$

식 (22), 식 (23)이 각각 식 (19), 식 (20)과 비교되었을 때, 통계량이 훨씬 간단한 형태로 표현되고 있다. 일반화된 Q 관리도가 실제 현장에서 적용될 경우, 식 (22)과 식 (23)에 의해 정의된 Q 통계량이 더 빈번하게 사용될 수 있다. 왜냐하면 실제 공정에서는 lot 마다 측정 데이터 수를 달리 하지 않고 동일한 크기의 데이터를 측정하기 때문이다. 반도체 공정의 경우를 보더라도 lot 마다 측정 데이터의 수가 달라지는 것이 아니라 계측 설비에 계측 지점과 계측 수가 미리 프로그래밍되어 있어 하나의 lot 안에서 측정되는 데이터의 개수가 일정하다. 예를 들어, 300mm 웨이퍼의 경우 아래, 위, 중간, 왼쪽, 오른쪽 등 미리 지정된 13개 지점에서 계측되어 lot 마다 13개의 측정 데이터를 얻게 된다. <그림 1>는 300mm 웨이퍼상에서 13개 측정 지점의 예를 표시한다[8]. 제 4장에서 소개될 일반화된

Q 관리도의 적용 예제도 13개 지점에서 측정된 반도체 공정의 데이터를 이용하여 적용한다.



<그림 1> 300mm 웨이퍼의 13개 측정 지점

Qusenberry[11]의 기존 Q 관리도 통계량에 대응하는 일반화된 Q 관리도 통계량도 다음의 3가지 경우에 대해 아래와 같이 유도할 수 있다.

(1) 공정 평균(μ)과 공정 분산(σ_b^2, σ_w^2)을 모두 아는 경우

$$Generalized Q_i = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\sqrt{\sigma_b^2 + \frac{1}{n} \sigma_w^2}} \quad (24)$$

$i = 1, 2, \dots$

공정 모수에 대한 추정이 필요치 않아 통계량에 의한 모니터링이 첫 번째 lot ($i = 1$)부터 바로 시작됨을 알 수 있다.

(2) 공정 평균은 모르고 공정 분산(σ_b^2, σ_w^2)을 아는 경우

$$Generalized Q_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{n_1^2 + \dots + n_{i-1}^2}{(n_1 + \dots + n_{i-1})^2}\right) \sigma_b^2 + \left(\frac{n_1 + \dots + n_i}{n_i(n_1 + \dots + n_{i-1})}\right) \sigma_w^2}} \quad (25)$$

$i = 2, 3, \dots$

(3) 공정 평균(μ)은 알고 공정 분산을 모르는 경우

$$Generalized Q_i = \Phi^{-1} \left[G_{df(i)} \left(\frac{\bar{x}_i - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}_b^2(i) + \frac{1}{n_i} \hat{\sigma}_w^2(i)}} \right) \right] \quad (26)$$

그리고

$$df(i) = \frac{(\hat{\sigma}_b^2(i)/i + \hat{\sigma}_w^2(i)/(n_1 + \dots + n_{i-1} - i + 1))^2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_b^2(i)/i}{i-1} + \frac{\hat{\sigma}_w^2(i)/(n_1 + \dots + n_{i-1} - i + 1)}{n_1 + \dots + n_i - i} \right)}$$

$i = 2, 3, \dots$

식 (26)과 식 (27)의 $\hat{\sigma}_b^2(i)$ 와 $\hat{\sigma}_w^2(i)$ 는 각각 아래에 정의된 식 (28)와 식 (29)에 의해 추정될 수 있다. 이 경우에는 공정 평균(μ)을 알고 있기 때문에 추정식이 각각 식 (11), 식 (12)와 달라짐에 유의하여야 한다.

$$\hat{\sigma}_b^2(i) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu)^2 \quad (28)$$

$$\hat{\sigma}_w^2(i) = \frac{\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^{n_k} (x_{kj} - \mu)^2}{n_1 + \dots + n_i} \quad (29)$$

4. 일반화된 Q 관리도의 적용 및 성능

4.1 일반화된 Q 관리도의 적용 예제

본 논문에서 제시한 Q 관리도의 적용절차를 설명하기 위해 반도체 공정을 나타내는 시뮬레이션 데이터를 이용하여 일반화된 Q 관리도에 적용하고자 한다. 사용될 데이터는 <표 1>에 제시된 lot 방식 공정 데이터 형태로 식 (1)의 공정 모형에 맞게 정규분포를 이용하여 발생시켰다. 구체적으로 공정

평균($\mu=10$), $L_i \sim N(0, 0.3^2)$, 그리고 $\epsilon_{ij} \sim N(0, 0.15^2)$ 인 상황을 가정하였다. 또한 구경 300mm 반도체 제조공정에서 가장 보편적으로 수집되는 데이터 형태를 표현하기 위하여 lot 마다 측정 데이터 수는 13개로 정하고 30개의 lot을 사용하였다. 따라서 공정 데이터는 30×13 행렬이다. 이는 앞장에서 설명한 바와 같이, 실제 공정에서 lot 마다 측정 데이터 수를 달리 하지 않고 동일한 크기의 데이터를 측정하는 상황을 나타내기 위한 것이다. 일반적인 반도체 공정에서의 데이터 수집 절차를 보면, lot 마다 1장의 웨이퍼를 선택하여 선택된 웨이퍼의 미리 지정된 13개의 지점에서 데이터가 측정된다. 따라서 이장에서 일반화된 Q 관리도를 적용하기 위하여 식 (21)~식 (23)을 사용한다.

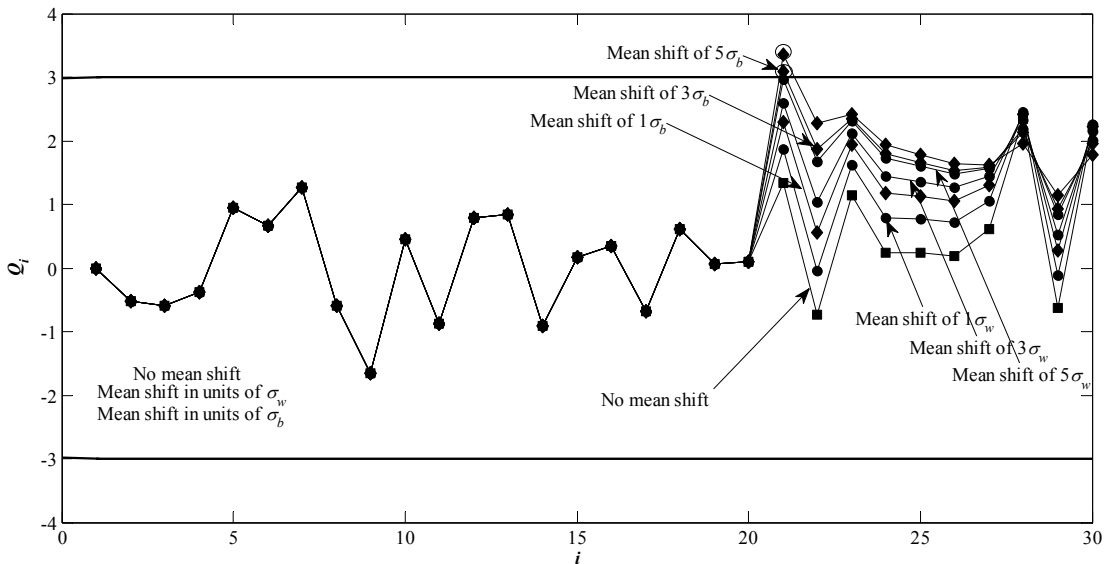
반도체 제조 공정의 다양한 상황에서 제안된 Q 관리도의 적용을 위해 공정 안정 상태에서 적용을 기본으로 하여 공정 분산별 크기 단위로 공정 평균이 변화(상승)된 경우에 대해 적용한다. 구체적으로 공정 불안정 상태는 (1) lot내 표준편차 단위로 공정 평균이 변화거나 (2) lot간 표준편차 단위로 공정 평균이 변화거나 (3) lot내/lot간 전체 표준편차 단

위로 공정 평균이 변화거나 한 상황을 가정하여 적용한다. 공정 평균의 변화(상승)는 30개 lot 중에서 21번째 lot에서 발생시켰다. 시뮬레이션을 위한 분산 요소별 변화 조건을 <표 2>에 정리한다.

<표 2> Out-of-control 실험 조건

Mean shift magnitude(in units of σ)		
Lot내 분산요소	Lot간 분산요소	Lot내/lot간 분산요소
$1\sigma_w$	$1\sigma_b$	$1\sqrt{\sigma_b^2 + \frac{1}{n}\sigma_w^2}$
$3\sigma_w$	$3\sigma_b$	$3\sqrt{\sigma_b^2 + \frac{1}{n}\sigma_w^2}$
$5\sigma_w$	$5\sigma_b$	$5\sqrt{\sigma_b^2 + \frac{1}{n}\sigma_w^2}$

<그림 2>은 위에서 설명된 실험 조건을 사용하여 30개 lot의 13개 지점에서 측정된 데이터에 대한 공정 안정상태와 공정 불안정상태의 일반화된 Q 관리도의 적용 모습이다. 공정 평균이 변화하지 않은 in-control 상태의 Q 통계량의 추세는 ■ 모양으로 타점하였다. 공정 안정상태의 Q 통계량이 어느



<그림 2> 반도체 공정 데이터를 이용한 일반화된 Q 관리도의 적용 예제

하나의 lot도 관리한계선을 벗어나지 않고 있음을 볼 수 있다. 더불어 공정평균 Q 통계량이 0을 중심으로 안정된 모습을 보이고 있다.

반면에 공정 변동이 발생한 모든 경우에 대해서는 21번째 Q 통계량이 커지고 있음을 볼 수 있다. 먼저 lot내 표준편차의 크기로 변화된 모습(● 모양 타점)을 보면 관리한계선을 벗어나는 Q 통계량은 존재하지 않고 있다. 하지만 공정 평균의 변화 크기가 커질수록 Q 통계량의 변화 크기도 커지고 있음을 확인할 수 있다.

Q 통계량이 ◆ 모양으로 타점된 lot간 표준편차의 크기로 변화된 공정 불안정 상태의 모습을 보면 두 지점에서 out-of-control 경보(O로 표시)가 발생하고 있음을 알 수 있다. 이는 적용 예제에서 가정한 공정 데이터의 lot간 표준편차의 크기가 Lot내 표준편차의 크기보다 크기 때문에 lot간 표준편차의 단위로 변화된 공정 평균의 변화에 더욱 민감하게 반응한 결과이다. Lot내/lot간 전체 표준편차 단위로 공정 평균이 변하는 경우의 Q 관리도의 적용 모습은 lot간 표준편차의 크기로 변화된 공정 불안정 상태의 모습과 거의 일치하여 별도로 그림에 포함하지 않았다. 이는 식에서 보이는 바와 같이, lot내 분산이 하나의 lot에서 측정되는 데이터의 크기($n = 13$)로 나뉘기 때문에 두 분산요소가 동시에 작용하더라도 전체 크기에는 크게 영향을 미치지 못하고 있기 때문이다.

<표 3>은 수치 예($\mu = 10, L_i \sim N(0, 0.15^2), \epsilon_{ij} \sim N(0, 0.15^2), n = 13$)를 활용하여 일반화된 Q 관리도와 기존 Q 관리도를 오경보 확률(a) 측면에서 비교하였다. 표의 모든 안정/불안정 상태의 평균 런 길이(In-control/Out-of-control ARL)는 Monte Carlo 시뮬레이션을 이용하였고 1개의 평균 런 길이 계산을 위해 10,000회의 실험 회수가 사용되었다. 모든 경우에 있어서 기존 Q 관리도의 평균 런 길이 값이 제안된 Q 관리도의 평균 런 길이 보다 작다. 이는 서론에서 설명하였듯이 실제 존재하는 lot간 변동을 고려하지 않았기 때문에 관리도에 사용되는 공정 분산 통계량이 과소 추정되어 같은 크기의 공

정 평균의 변화에 대해서 더욱 민감하게 반응했기 때문이다. 이렇듯 실제 존재하는 공정 산포 요인을 무시하게 될 경우 잦은 오경보를 발생시키게 된다. 3 σ 관리한계선이 사용되었기 때문에 제안된 관리도에서는 안정 상태의 평균 런 길이가 370이다.

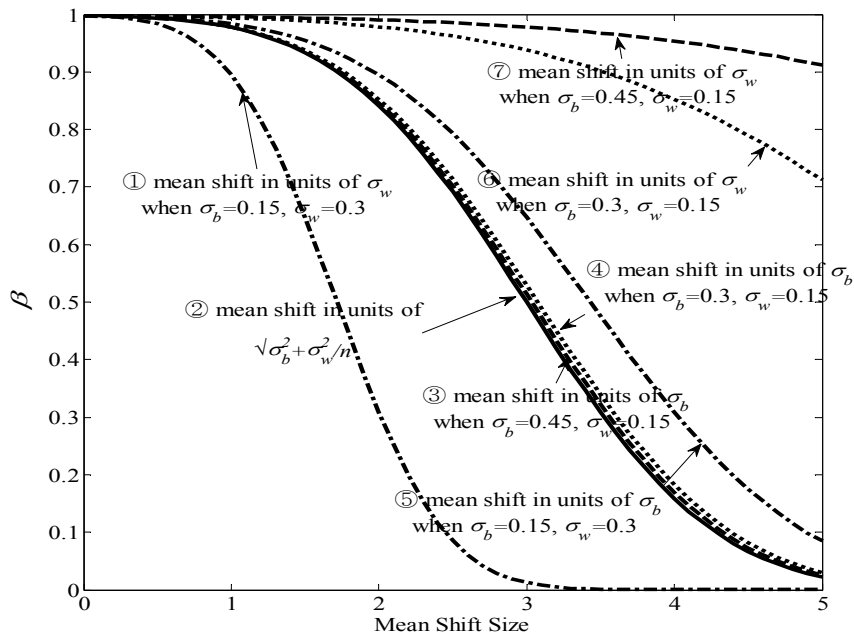
<표 3> 안정/불안정 상태의 평균 런 길이 비교

	Mean shift size(in units of $\sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_w^2/n}$)					
	0	1	2	3	4	5
기존	196	158	82.6	24.5	4.07	1.17
제안	369	297	160	52.1	7.89	1.63

4.2 일반화된 Q 관리도의 검출 능력

제안한 관리도의 공정 변동에 대한 검출 능력을 파악하고자 Operating Characteristic(OC) 곡선을 <그림 3>과 <그림 4>에 표시하였다. 그림 안에 삽입된 번호(①, ②, ..., ⑦)는 해당 OC 곡선을 지칭하기 위해 그림에서 왼쪽으로부터의 위치를 표시한다. <그림 3>은 공정 평균의 변동이 <표 2>의 조건처럼 lot내 표준편차, lot간 표준편차, lot내/lot간 전체 표준편차 단위로 변화할 때 OC 곡선을 나타낸 것이다. 특히 <그림 4>는 제안한 관리도에서 n 크기의 변화에 따라 공정 평균 변동에 대한 탐지능력을 비교하고자 도식화하였다. Lot내/lot간 변동을 동시에 고려하여 유도된 Q 관리도의 3 σ 관리한계선은 궁극적으로 lot내/lot간 전체 표준편차($\sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_w^2/n}$)의 3배로 표시가 가능하기 때문에, lot내/lot간 전체 표준편차 단위로 공정 평균이 변화할 때 OC 곡선은 Shewhart X 관리도의 3 σ 관리한계선이 갖는 OC 곡선과 동일하게 나타내어진다. <그림 3>의 ②번 실선(—)이 이 경우의 OC 곡선이다. <그림 4>에서도 마찬가지로 lot내/lot간 전체 표준편차 단위로 공정 평균이 변화하게 될 경우 ③번 OC 곡선(— 실선)은 동일하다.

<그림 3>에서는 lot간 표준편차 대 lot내 표준편차의 크기의 비가 2 : 1(④, ⑥번 : dot), 3 : 1(③, ⑦번 : - - dash), 1 : 2(①, ⑤번 : - - - dash-



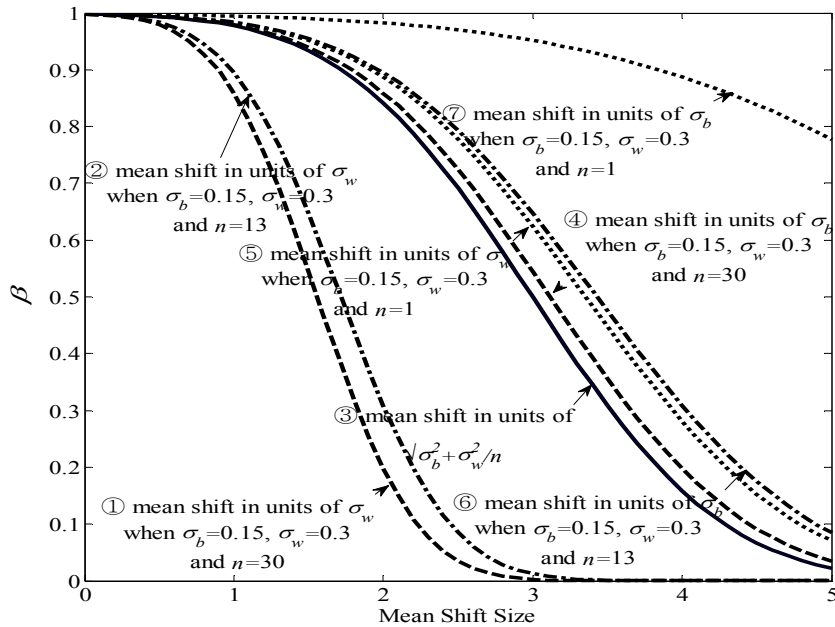
〈그림 3〉 주요변동 원인의 변화에 따른 OC 곡선

dot)가 되는 경우를 가정하여 OC 곡선을 나타내었다. 이 그림에서 사용된 n 의 크기는 13이다. lot간 변동 대 lot내 변동 크기의 비가 1:2일 때, lot내 표준편차 크기 단위로 공정 변동이 발생하는 경우 (①번 OC 곡선)를 제외하고 나머지 모든 경우들은 공정 평균 변화가 lot내/lot간 전체 표준편차 단위로 변화하는 경우(②번 OC 곡선)보다 검출 확률 $(1-\beta)$ 이 낮음을 알 수 있다. 이는 lot내 변동이 lot간 변동 보다 클 때, 즉, lot내 변동 이 공정의 주요 변동원인으로 작용할 때, lot내 표준편차 크기 단위로 공정 평균의 변화가 발생한다면, 13개의 데이터 크기를 활용하여 lot내 변동을 모델링하는 것이 공정의 변화를 어느 정도 민감하게 잘 탐지하는데 반영되었다고 해석할 수 있다. 따라서, 위의 경우보다 lot내 변동이 더 크게 작용하는 공정에 대해서 동일한 형태의 제안된 관리도는 동일 크기의 공정 평균의 변동에 대해서 더욱 큰 검출력을 보일 것이다. 아울러 13보다도 더 큰 크기의 n 이 활용된다면, 동일한 조건에서 역시 더 큰 크기의 검출력을 보여야 할 것이다.

이를 구체적으로 확인하기 위하여 lot내 변동이 공정의 주요 변동원인으로 작용하는 경우들에 대해서만 제안된 관리도의 검출력을 <표 4>에 나타내었다. <표 4>는 lot간 표준편차 대 lot내 표준편차의 크기의 비가 각각 1:3인 경우와 1:2인 경우에 대한 검출 확률이다. 큰 크기의 공정 평균의 변동($3\sim 5\sigma_w$)에서는 두 경우의 검출력에 차이가 거의 존재하지 않지만, 비교적 작은 크기의 공정 변동($1\sim 2\sigma_w$)에서는 예상한 바와 같이 lot내 변동이 lot간 변동 보다 더 크게 작용하는 조건(1:3 조건)이 lot내 변동의 크기의 비가 1:2인 경우보다 검출력이 더 큼을 확인할 수 있다. 한편 동일한 조건에서 13개 보다 더 큰 데이터의 크기가 사용될 때

〈표 4〉 Lot내 변동이 주요한 경우 검출확률($1-\beta$)

$\sigma_b : \sigma_w$	Mean shift size(in units of σ_w)				
	1	2	3	4	5
1:3	0.24	0.95	1	1	1
1:2	0.11	0.69	0.98	1	1



〈그림 4〉 n 크기의 변화에 따른 OC 곡선

예상되는 증가된 크기의 검출 확률에 대한 확인은 <그림 4>에서 자세히 설명한다.

반면, lot내 변동이 lot간 변동보다 크더라도 공정 변동의 크기가 공정 변동의 주요 성분이 아닌 lot간 변동의 크기 단위로 변할 때(⑤번 OC 곡선)는 관리도의 검출력이 lot내/lot간 전체 표준편차 단위로 공정 평균이 변화하는 경우(②번 OC 곡선)보다 크지 않다. 아울러 lot간 변동이 lot내 변동 보다 클 때(비율 2 : 1과 3 : 1 조건, ③, ⑦번 OC 곡선과 ④, ⑥번 OC 곡선)도, 즉, 아무리 lot간 변동이 공정의 주요 변동 원인으로 작용하더라도-공정 변동이 lot내/lot간 전체 표준편차 단위로 변화하는 경우(②번 OC 곡선)보다 검출력이 낮음을 알 수 있다. 즉, 이 경우들은 어느 정도 다수의 lot이 수집되기 전까지는 lot별 평균치인 1개의 데이터만을 활용하여 lot간 변동을 모델링하기 때문에 첫 번째 설명한 경우(①번 OC 곡선)처럼 1개의 lot 당 다수(13개)의 데이터를 활용하는 만큼의 탐지 능력을 발휘하지 못한 것으로 해석할 수 있다. 하지만, 이 경우에도 공정 변동의 크기가 공정 변동의 주요 원인인

‘lot간 산포의 크기 단위로 변할 때의 OC 곡선’(③, ④번 OC 곡선)의 탐지능력이 주요 원인이 아닌 ‘lot내 산포의 크기 단위로 변할 때의 OC 곡선’(⑥, ⑦번 OC 곡선)의 탐지능력보다는 높다는 것을 볼 수 있다. 또한, ⑥번과 ⑦번의 OC 곡선을 비교해 보면, 상대적으로 lot간 변동이 더 주요한 변동 원인으로 작용하는 ⑦번 경우(비율 3 : 1조건)에서 ⑥번의 경우(비율 2 : 1조건) 보다 검출력이 낮음을 볼 수 있다. 이는 lot간 변동이 주요한 공정에서 상대적으로 작은 크기의 lot내 표준편차의 크기로 공정 평균의 변화가 발생하면 lot간 변동이 더 주요한 경우(비율 3 : 1조건, ⑦번 OC 곡선)에서 공정 변동이 더 미약하게 영향을 미치기 때문이다.

<그림 4>를 보면 제안된 관리도의 성능이 n의 크기에 의해 상당한 영향을 받고 있음을 확인할 수 있다. lot간 표준편차 대 lot내 표준편차의 크기의 비가 1 : 2가 되는 경우를 가정하여 각각 n의 크기가 30인 경우(①, ④번 : --- dash), 13인 경우(②, ⑥번 : -.- dashdot)와 1인 경우(⑤, ⑦번 : dot)를 비교해 보면, n이 큰 경우의 검출 확률이 상

대적으로 큼을 알 수 있다. 즉, n 이 작아짐에 따라 OC 곡선이 그림의 우측으로 상향 이동하면서 β 가 커지는 모습을 보인다. 특히, n 이 13인 경우와 1인 경우의 검출 확률을 비교해 보면 상당한 차이를 관찰할 수 있다. <표 5>에서 n 이 13, n 이 1인 경우에 대해 공정 평균의 변동이 각각 lot간 표준편차와 lot내 표준편차의 크기로 변화할 때 $1-\beta$ 를 정리하였다. lot내 표준편차의 크기로 변화할 때 $1-\beta$ 는 각 칸의 아래에 괄호로 표시하였다. 모든 경우에 있어서 n 이 13인 경우가 n 이 1인 경우 보다 상당한 크기 차이로 검출력 측면에서 우수함을 보이고 있다. 이는 <그림 3>에서도 설명한 바와 같이, lot내 변동이 공정의 주요 변동원인으로 작용할 때 이러한 lot내 변동을 잘 반영할 수 있는 n 의 크기가 클수록 관리도의 감지 성능 향상에 도움을 주고 있기 때문이다.

<표 5> n 크기의 변화에 따른 검출확률($1-\beta$)

n	Mean shift size(in units of σ_b) (Mean shift size(in units of σ_w))				
	1	2	3	4	5
13	0.02 (0.11)	0.12 (0.69)	0.35 (0.99)	0.69 (1)	0.92 (1)
1	0.01 (0.02)	0.02 (0.11)	0.05 (0.38)	0.11 (0.72)	0.22 (0.93)

5. 결 론

소비자 요구가 복잡해지고 다양해짐에 따라 다양한 종류의 제품에 대한 소량생산은 피할 수 없는 추세이다. 또한 생산되는 제품의 생애주기도 점점 짧아지는 상황이 보편화되고 있다. 본 연구에서는 이렇게 공정 데이터의 수가 충분하지 않은 start-up 공정이나 short run 공정에 대한 통계적 공정 관리 기법을 제안하였다. 제안한 통계적 공정 관리 기법은 특별히 반도체 생산공정처럼 lot 방식 형태의 공정에서 쉽게 나타나는 lot간 분산 요인을 통계량에 포함시키기 위해 기존의 Q 관리도 통계량을 수정한 것이다. 유도된 Q 관리도 통계량에서 분산 부분

은 각각 lot내 분산과 lot간 분산의 선형결합의 형태로 표현되었다. 일반적인 공정을 나타내기 위해서 lot간 분산을 0으로 대입하였을 경우, 기존의 Q 관리도 통계량과 정확하게 일치하는 결과를 보였다. 이러한 특징에 기반하여, 우리는 본 연구에서 제시된 Q 관리도 통계량이 lot 방식 공정이건 일반적인 공정이건 간에 상관없이 하나의 관리 통계량으로 표현이 가능하기 때문에 일반화된 Q 통계량으로 명명하였다. 즉, 일반화된 Q 통계량은 공정의 특성에 따라 lot간 분산 요인의 존재 유무를 고려하여 취사선택함으로써 상황에 맞게 사용 가능하다.

제안된 Q 관리도의 적용절차를 설명하기 위하여 300mm 구경 반도체 제조공정을 나타내는 데이터를 발생시켜 Q 관리도 적용 결과를 제시하였다. 특히 시뮬레이션을 통하여 제안한 관리도가 안정 상태의 평균 런 길이를 잘 유지하면서도 공정 평균의 변화의 크기에 따라 적절하게 공정 변화를 탐지함을 관찰할 수 있었다. 또한 다양한 경우의 OC 곡선을 활용하여 제안된 관리도의 성능을 비교적 자세한 수준으로 평가하였다. 향후 본 연구에서 제안된 Q 관리도의 탐지 성능 관점의 좀 더 다양한 형태의 추가적인 후속 연구가 필요해 보인다. 예를 들어, 본 연구에서 제시한 일반화된 Q 통계량을 바탕으로 미세한 변화를 탐지하는 목적에 효과적인 누적합 통계량이나 EWMA 통계량을 추가적으로 적용하여 기본 형태의 Q 관리도와의 변화탐지 능력을 비교하는 연구 등이 중요한 의미를 가질 것으로 판단한다.

참 고 문 헌

- [1] 이현철, “검출력 향상된 자기상관 공정용 관리도의 강건 설계: 반도체 공정설비 센서데이터 응용”, 『산업경영시스템학회지』, 제34권, 제4호(2011), pp.57-65.
- [2] Apley, D.W. and H.C. Lee, “Design of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for Autocorrelated Processes With

- Model Uncertainty," *Technometrics*, Vol.45, No.3(2003), pp.187-198.
- [3] Capizzi, G. and G. Masarotto, "An enhanced control chart for start-up processes and short runs," *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 9, No.2(2012), pp.189-202.
- [4] Crowder, S.V., "An SPC model for short production runs : minimizing expected cost," *Technometrics*, Vol. 34, No.1(1992), pp.64-73.
- [5] Del Castillo, E. and D.C. Montgomery, "Short-run statistical process control : Q-Chart enhancements and alternative methods," *Quality and Reliability Engineering International*, Vol.10, No.2(1994), pp.87-97.
- [6] Gary, S.M. and J.S. Costas, *Fundamentals of Semiconductor Manufacturing and Process Control*, Wiley, New Jersey, 2006.
- [7] Hawkins, D.M., "Self-starting CUSUM charts for location and scale," *The Statistician*, Vol. 36, No.4(1987), pp.299-316.
- [8] Hwang, J.Y. and H.C. Lee, "Parametric yield modeling using hidden variable logistic regression," *Journal of Quality Technology*, Vol.6, No.4(2014), pp.323-339.
- [9] Kutner, M.H., C.J. Nachtsheim, J. Neter, and W. Li, *Applied Linear Statistical Models*, New York, McGraw-Hill, 2005.
- [10] Nurani, R.K. and J.G. Shanthikumar, "Process control for items produced in lots with inter and intra lot variations," *International Journal of Industrial Engineering*, Vol.7, No.1 (2000), pp.57-66.
- [11] Quesenberry, C.P., "SPC Q charts for start-up processes and short or long runs," *Journal of Quality Technology*, Vol.23, No.3(1991), pp.213-224.
- [12] Quesenberry, C.P., "SPC Q charts for a binomial parameter p : short or long Runs," *Journal of Quality Technology*, Vol.23, No.3 (1991), pp.239-246.
- [13] Quesenberry, C.P., "SPC Q charts for a Poisson parameter λ : short or long runs," *Journal of Quality Technology*, Vol.23, No.3(1991), pp.213-224.
- [14] Quesenberry, C.P., "On properties of Q charts for variables," *Journal of Quality Technology*, Vol.27, No.3(1995), pp.184-203.
- [15] Quesenberry, C.P., "On properties of binomial Q charts for attributes," *Journal of Quality Technology*, Vol.27, No.3(1995), pp. 204-213.
- [16] Quesenberry, C.P., "Geometric Q charts for high quality processes," *Journal of Quality Technology*, Vol.27, No.3(1995), pp.304-315.
- [17] Woodall, W.H. and D.C. Montgomery, "Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring," *Journal of Quality Technology*, Vol.46, No.1(2014), pp.78-94.
- [18] Woodall, W.M. and E.V. Thomas, "Statistical process control with several components of common cause variability," *IIE Transactions*, Vol.27, No.6(1995), pp.757-764.
- [19] Zantek, P.F., "Run-length distributions of Q-chart schemes," *IIE Transactions*, Vol.37, No.11(2005), pp.1037-1045.
- [20] Zantek, P.F., "Design of cumulative sum schemes for start-up processes and short runs," *Journal of Quality Technology*, Vol.38, No.4(2006), pp.365-375.
- [21] Zantek P.F. and S.T. Nestler, "Performances and properties of Q-statistic monitoring schemes," *Naval Research Logistics*, Vol.56, No.3 (2009), pp.279-292.