

Analysis of Multiple Life Insurance using Copula and Common Shock

Doyoung Kim^a · Issac Lee^a · Hangsuck Lee^{a,1}

^aDepartment of Actuarial Science, Sungkyunkwan University

(Received September 14, 2014; Revised November 11, 2014; Accepted December 04, 2014)

Abstract

Multiple-life policies pay a benefit on the first death or the last death among the group of lives. In practice, the future lifetime random variable of policy holders has been considered to be independent, but it is more rational to take into account the correlations among the policy holders. In this paper, the Gaussian copula is applied to reflect the correlations among policy holders and then to diversify the common shock of the multiple life policies which follows an exponential distribution. Five case studies demonstrate its usefulness of using copula in calculating the premiums of the multiple-life policies including the common shock.

Keywords: Multiple-life policies, Gaussian copula, common shock, dependence among the lifetimes.

1. 서론

연생보험은 한 계약을 통해서 두 명의 보험가입자들의 보험사고를 보장하는 상품이다. 보험 가입자들 중 첫 번째 사망자 발생 시 또는 마지막 사망자 발생 시와 같이 가입자들의 생사(生死)여부에 따라 보험금을 지급한다. 연생보험에 커먼-쇼크를 반영하면 다양한 지급조건을 고려한 연생상품 설계가 가능하다. 그리고 코플라 모델을 연생보험에 적용하면 보험가입자들의 상관성을 반영하여 합리적인 보험료를 계산할 수 있다. 그러나 아직까지 국내 연생보험시장의 규모는 미비하여 다양한 연생상품이 출시되어 있지 않고 이에 대한 연구도 부족한 실정이다.

반면 우리 사회는 저출산과 평균수명의 증가로 인해 빠른 속도로 고령사회로 진입하고 있다. 이에 따라 노후생활 보장과 자녀들의 교육 및 독립을 위한 자금을 마련하는 것이 가정경제에 중요한 이슈가 되고 있다. 이러한 문제에 대응하여 보험소비자들의 복합적인 니즈를 충족하는 상품을 설계하기 위해서는 다수의 보험가입자들에 대한 확률변수와 확률변수들 간의 상관성이 고려되어야 한다. 앞서 언급하였듯이 연생보험을 활용하면 하나의 계약을 통해서 다수의 보험계약자에 대한 보험사고를 보장하는 상품설계가 가능하다. 따라서 앞으로 연생보험에 대한 시장의 수요가 증가될 것으로 예상되며, 이에 따라 다양한 연생상품을 설계하고 합리적인 보험료를 계산할 수 있는 방법에 대한 연구가 필요한 시점이라 생각된다. 전통적으로 보험 실무에서는 연생보험 가입자들의 장래생존기간을 독립인 두 개의 확률변수로 다루어 왔다. 그러나 가족의 경우 유전적인 요소와 더불어 생활환경의 많은 부분을 공유하기 때문에 장래생존기간에 상관관계(이하 보험 가입자들의 상관성으로 생략)가 존재할 수 있다. Baek 등 (2014)는 국민연

¹Corresponding author: Professor, Department of mathematics, Sungkyunkwan University, 25-2 Sungkyunkwan-Ro, Jongro-Gu, Seoul 110-745, Korea. E-mail: hangsuck@skku.edu

금의 유족 연금 자료를 사용하여 가입자들의 상관성에 대한 분석을 실시한 결과 스피어만 상관계수 0.54 정도의 상관성이 존재함을 보였다. 이는 보험사의 데이터를 사용하여 분석한 Frees 등 (1996)의 스피어만 상관계수 0.49의 값과 유사한 결과이다.

Sklar (1973)에 의하여 제시된 코플라는 이러한 보험 가입자들의 상관성을 반영하는 방법이다. 외국의 경우 Frees 등 (1996) 를 시작으로, Youn 등 (2002), Shemyakin과 Youn (1999a, 1999b)등이 코플라를 이용하여 연생보험의 보험료를 계산하였으며, 우리나라의 경우 Lee 등 (2013)과 Lee 등 (2014)이 코플라를 이용하여 가입자들의 상관성이 반영된 연생보험의 보험료와 책임준비금에 대하여 고찰한바 있다. 이러한 연구들은 코플라와 연생보험 가입자들 각각의 주변분포를 사용하여 부부의 장래생존기간 확률변수의 결합분포함수를 추정하여 분석을 실시하였다.

그러나 앞선 연구들은 가입자들의 상관성과는 별개로 발생하는 사건에 의하여 보험금의 지급여부가 결정되는 연생보험 상품을 모델링하기에는 적합하지 않다. 예를 들어 부부가 가입하는 보험에서 둘 중 한 명이 심각한 질병 혹은 재해를 당했을 때 연금이 개시되는 상품의 경우, 독립적인 질병 또는 재해 발생에 대한 확률변수를 정의하여 분석하는 것이 타당하다. Marshall과 Olkin (1967)은 두 명의 가입자가 동일한 거대재해의 영향을 받아서 장래생존기간에 상관관계가 발생하는 커먼-속 모델을 제안했다. 그러나 커먼-속 모형에서는 두 명의 가입자들의 장래생존기간이 서로 독립이라고 가정하고 오직 커먼-속으로 인해 발생할 수 있는 상관관계만을 반영하였다는 점에서 한계가 있다.

본 논문에서는 가입자들의 장래 생존분포와는 독립적인 커먼-속을 연생보험에 적용하여 연생보험의 지급조건을 다양하게 설정할 수 있도록 한다. 또한 코플라를 이용하여 가입자들의 상관성을 반영하고 합리적인 보험료 산출을 위한 모델을 제시하고자 한다. 분석을 위해 사용한 코플라는 가우시안 코플라이다. Wang (1999)이 언급한 것처럼 가우시안 코플라를 사용하면 임의의 공분산 행렬을 다룰 수 있고, 동시에 효율적인 계산과정을 유지할 수 있다. 또한 가우시안 코플라의 상관성을 나타내는 모수인 가 상관계수(coefficient of correlation) 와 의미상으로 일치하기 때문에 이해가 쉽고, 다변수로 확장이 용이하기 때문이다.

연구의 진행 순서는 다음과 같다. 2절에서는 가우시안 코플라에 대해 소개하고 이를 이용하여 연생보험 가입자들의 상관성을 고려한 장래생존기간 확률변수들의 난수를 생성하는 방법을 다룬다. 3절에서는 커먼-속을 고려한 연생보험 및 연생연금의 보험수리적현가를 계산해 본다. 4절에서는 기존의 연생연금의 가입대상을 부부에서 가족으로 확장하여 새로운 연생상품을 설계하고 가입자들 간의 상관성을 고려하여 보험료를 계산한다. 마지막으로 5절에서는 본 연구에 대한 결론을 제시하고자 한다.

본 논문의 이론적 배경이 되는 코플라 모형과 추정 방법에 대한 사항은 Nelsen (1999), Klugman 등 (2010), Cherubini 등 (2004)등을 참조하였다. 그리고 보험계리적 모형은 Bowers 등 (1997)과 Dickson 등 (2009) 등을 참고하였다.

2. 상관성을 고려한 코플라 모형

2.1. 가입자들의 장래생존기간 확률변수

본 절의 표기법은 Bowers 등 (1997)을 기준으로 작성하였다. x 세인 남자의 장래생존기간을 연속형 확률변수인 T_x 로 정의하자. 따라서 $T_0 = X$ 로 정의하면, X 는 0세인 남자아이의 장래생존기간을 나타내는 확률변수가 된다. 확률 변수 X 를 사용하여 T_x 를 다시 나타내면 다음과 같다.

$$T_x = X - x \mid X > x. \quad (2.1)$$

비슷한 방법으로 y 세인 여자의 장래생존기간을 연속형 확률변수 T_y 와 y 를 사용하여 정의할 수 있다.

부부가 같이 가입하는 연생보험의 경우, 연생확률변수 T_{xy} 와 $T_{\bar{xy}}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$T_{xy} = \min(T_x, T_y), \quad T_{\bar{xy}} = \max(T_x, T_y). \quad (2.2)$$

따라서 T_{xy} 는 현재 x 세인 남자와 y 세인 여자 중 최초 사망이 발생하기까지의 시간을 나타낸다. 반면 $T_{\bar{xy}}$ 는 현재 x 세인 남자와 y 세인 여자 중 최종 사망이 발생하기까지의 시간을 나타낸다. x 세인 남자와 y 세인 여자가 가입한 연생보험에서 부부의 생존분포와는 다른 분포를 따르는 사건을 고려하기 위하여 확률변수 Z 를 정의하자. 이 사건의 발생 분포가 포아송을 따른다고 가정하면, 사건이 발생할 때까지 걸리는 시간은 지수 분포를 따른다. 이때 사건이 발생할 때까지 걸리는 시간을 연속형 확률변수 Z 로 정의한다.

2.2. 가우시안 코플라

F 를 F_1, \dots, F_d 의 주변확률밀도 함수를 가지는 d 차원의 결합확률밀도 함수로 정의하자. Sklar (1973)에 의하여 연속형 주변확률밀도 함수를 갖는 결합밀도함수에 대한 코플라 C 는 식 (2.3)과 같이 나타낼 수 있고 모든 $x_1, \dots, x_d \in R$ 에 대하여 유일하게 존재함이 증명되었다.

$$F(x_1, \dots, x_d) = C[F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)]. \quad (2.3)$$

따라서 위 식에서 모든 $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ 에 대하여 각각의 코플라 함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C(u_1, \dots, u_d) = F[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)]. \quad (2.4)$$

여기서 나아가 본 논문에서 다루는 가우시안 코플라는 식 (2.5)로 나타낼 수 있으며, Φ 는 표준정규분포의 누적분포함수를 의미한다.

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)). \quad (2.5)$$

따라서 Φ_P 는 표준정규분포를 따르는 확률변수의 결합분포함수(각각의 평균이 0이고, 분산이 1)이고, P 는 각 확률변수간의 상관성 구조를 나타내는 상관행렬(correlation matrix)을 나타낸다. 앞 절에서 정의한 확률변수 T_x, T_y, Z 의 결합분포함수를 가우시안 코플라를 사용하여 표현하면 식 (2.6)과 같다.

$$F_{T_x, T_y, Z}(t_1, t_2, t_3) = \Phi_P(\Phi^{-1}(F_{T_x}(t_1)), \Phi^{-1}(F_{T_y}(t_2)), \Phi^{-1}(F_{T_Z}(t_3))). \quad (2.6)$$

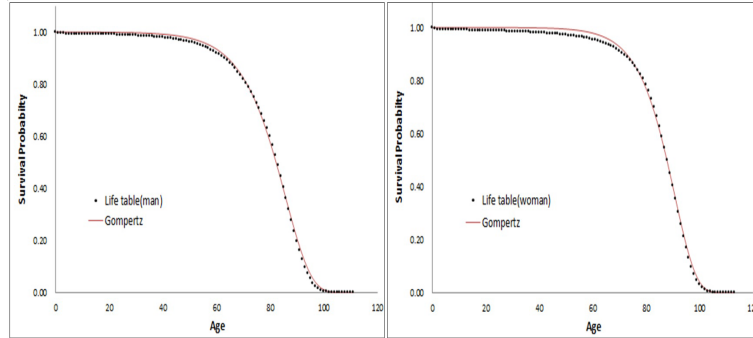
여기서 상관행렬 P 는

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

이며, $F_{T_x}(t_1)$ 는 나이 x 세인 남자의 장래생존기간에 대한 주변분포 함수, $F_{T_y}(t_2)$ 는 나이 y 세인 여자의 장래생존기간에 대한 주변분포 함수, $F_Z(t_3)$ 은 커먼-쇼크의 주변분포 함수를 각각 의미한다.

Table 2.1. Estimated parameters of Gompertz distribution

	Man	Woman
\hat{m}	85.69	90.7
$\hat{\sigma}$	9.57	8.01

**Figure 2.1.** Comparison of experience life table and estimated survival function

2.3. 주변분포함수의 추정

본 논문에서는 제7회 경험생명표로부터 남자와 여자의 각 나이별 생존확률을 계산한 후, 이것을 잘 반영하는 곱페르츠 분포(Gompertz distribution)의 모수를 결정하여 주변분포 함수를 추정한다. 모수를 결정하는 방법은 최소제곱법을 이용하였으며, 가우시안 코플라를 이용하여 추정된 각각의 주변확률분포를 결합분포함수로 바꾸어 사용한다. 모수를 찾는데 사용된 곱페르츠 분포함수는 식 (2.8)와 같고, 추정된 모수의 값은 Table 2.1과 같다.

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \exp\left\{e^{-\frac{(x-m)}{\sigma}}(1 - e^{t/\sigma})\right\}. \quad (2.8)$$

위의 식 (2.8)는 Carriere (1994)가 제안한 식으로 기존의 곱페르츠 분포함수 공식을 모수 추정에 알맞게 변형시킨 것이며, 모수 m 은 최빈값(mode)을 나타내고, σ 는 척도 모수(scale parameter)를 나타낸다. 생명표의 생존함수와 추정된 곱페르츠 생존함수를 남자와 여자에 대해 각각 비교해 본 결과는 Figure 2.1과 같다.

커먼-속에 대한 분포는 지수분포를 가정하므로 확률변수 Z 는 다음의 분포함수를 따른다.

$$F_Z(z) = 1 - e^{-\lambda z}, z > 0. \quad (2.9)$$

확률변수의 모수인 λ 가 의미하는 것은 커먼-속이 발생하기 까지 걸리는 시간에 대한 평균을 나타낸다. 곱페르츠 분포함수의 모수추정에 관한 추가적인 논의는 Carriere (1994)를 참고하라.

2.4. 상관성이 반영된 두 생존 기간의 난수 발생

2.4.1. 주변분포(marginal distribution)를 따르는 난수 발생 방법 각각의 주변확률분포를 따르는 난수를 발생시키는 방법으로 역변환법을 이용한다. 곱페르츠 분포의 누적분포함수 식 (2.8)와 지수분포의 누적분포함수 식 (2.9)를 이용하여 각각의 역함수를 구해보면

$$F_{T_x}^{-1}(p) = \sigma \cdot \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{(x-m)}{\sigma} \right) \ln(1-p) \right), \quad (2.10)$$

$$F_Z^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-p). \quad (2.11)$$

를 구할 수 있다. 첫 번째 함수는 나이가 x 세인 사람의 생존 시간을 나타내는 분위수 함수(quantile function)를 의미하며, 두 번째 함수는 개별 사건이 발생하기까지의 시간을 의미한다.

2.4.2. 가우시안 코플라를 이용한 상관관계를 갖는 확률 벡터 발생 본 논문에서 가우시안 코플라를 사용하는 이유는 Wang (1999)이 언급했듯이, 오직 가우시안 코플라만이 임의의 공분산 행렬을 다룰 수 있게 해주며, 그러면서도 효율적인 계산과정을 유지하기 때문이다. 또한 가우시안 코플라의 모수 ρ 는 이변량 정규분포에서와 같이 두 분포의 상관성을 나타내는 모수이며, ρ 값이 0이면 독립, 양수이면 양의 상관성, 음수이면 음의 상관성을 갖는 일반적인 상관계수(correlation coefficient)와 해석이 일치하는 편리성이 있다. 또한 다변수로의 확장도 용이하다. 먼저 앞에서 추정된 분포를 따르는 부부의 장래 생존기간과 독립적으로 발생하는 사건에 대한 확률 벡터를 가우시안 코플라를 이용하여 생성하는 방법에 대하여 알아보자.

상관행렬 P 가 주어지고, 각각의 주변분포함수가 F_1, \dots, F_d 일 때, 가우시안 코플라를 이용하여 각각의 주변분포함수를 따르는 d 차원의 확률벡터를 다음과 같은 방법으로 생성한다.

- 가) $X^T = (x_1, \dots, x_d)$ 는 상관행렬 P 인 다변량 표준정규분포의 확률 벡터(random vector) 라고 할 때.
 나) 확률 벡터 X 의 각각의 원소를 표준정규분포의 누적분포함수를 사용하여, 상관성이 반영된 균등분포를 따르는 확률변수로 변환한다. $u_i = \Phi(x_i)$, $i = 1, \dots, d$.
 다) 앞 절에서 구한 분위수 함수를 이용하여, 주변분포함수를 따르는 확률벡터를 생성한다. $t_i = F_i^{-1}(u_i)$, $i = 1, \dots, d$.

위의 방법을 이용하여 앞서 2.1에서 정의한 T_x, T_y, Z 를 확률벡터로 전환하면

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{T_x}^{-1}(\Phi(z_1)) \\ F_{T_x}^{-1}(\Phi(\rho_{12}z_1 + \sqrt{(1-\rho_{12}^2)}z_2)) \\ F_{T_x}^{-1}(\Phi(\rho_{13}z_1 + \frac{\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}z_2 + z_3\sqrt{1-\rho_{12}^2-\rho_{13}^2})) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

로 나타낼 수 있다.

지금까지 설명한 방법을 토대로 다변수로 확장된 경우에도 상관행렬 P 만 정의하면 다양한 상관관계를 반영한 확률벡터를 생성할 수 있다. 식 (2.12)와 같은 확률벡터를 기반으로 연생함수를 이용하면 시뮬레이션을 통해 다양한 연생상품의 합리적 보험료 도출이 가능하다. $P = LL^T$ 에서 L 을 구성하고 있는 행렬의 원소에 대한 일반식은 다음과 같다. 식 (2.13)에서 a_{ij} 는 상관행렬 P 의 원소를 나타낸다.

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki}^2}, \quad L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki}L_{kj}}{L_{ii}}. \quad (2.13)$$

본 논문에서는 시뮬레이션 10만 번을 기준으로 난수를 발생하였으며, 가우시안 코플라를 이용한 상관성이 반영된 난수발생 방법에 대한 자세한 내용은 Klugman 등 (2010)과 Wang (1999)을 참고하라.

3. 커먼-속이 포함된 연생보험의 분석

3.1. 커먼-속을 고려한 연생보험의 보험수리적현가

연생보험은 보험 가입자들의 생존상태에 따라 보험금을 지급한다. 따라서 보험 가입자들의 특정한 생존상태를 정의할 필요가 있는데, 대표적인 모형으로 결합생존상태(joint-life status)와 최종생존자상

태(last-survival status)가 있다. 먼저 결합생존상태는 2인 이상의 보험 가입자가 모두 생존해 있는 상태에서 최초 사망자가 발생할 때까지의 상태를 나타내고, 최종생존자상태는 2인 이상의 보험 가입자가 모두 생존해 있는 상태에서 최종 사망자가 발생할 때까지의 상태를 나타낸다. 본 논문에서는 이러한 보험가입자의 생사여부와 더불어 제 3의 확률변수인 Z 를 함께 고려한다. 여기서 Z 는 커먼-속으로 지진, 해일, 교통사고 등과 같은 재해뿐만 아니라 보험금의 지급사유가 되는 임의의 사건으로 자유롭게 정의할 수 있다. 가우시안 코플라를 이용해 부부의 상관성을 반영하게 되면 부부의 결합생존분포를 다변량 표준정규분포로 모델링하게 되므로 부부가 동시에 사망하게 되는 확률, 즉 $Pr[T_x = T_y]$ 이게 된다. 여기에 연생함수를 통해 커먼-속을 함께 고려함으로써 부부가 동시에 사망하게 되는 확률을 일정 부분 반영할 수 있다. 확률변수 Z 는 이러한 사건이 발생하기까지 걸리는 시간을 나타내는 확률변수이다. 예를 들어 확률변수 Z 가 특정 여성 질환이 발생하기까지 걸리는 시간이라고 할 때, 확률변수의 분포는 남성의 생존분포와는 독립이지만 여성의 생존분포와는 상관성이 있기 때문에 식 (2.7)의 상관행렬 P 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} T_x & T_y & Z \\ 1 & \rho_{12} & 0 \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ 0 & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

그러나 본 논문에서는 확률변수 Z 를 부부의 생존분포와는 독립인 사건으로 가정하고 상관성이 반영된 커먼-속에 대한 논의는 향후 연구과제로 남겨 둔다.

지금부터는 커먼-속을 고려한 연생함수를 정의하고 이 함수를 이용하여 결합생존상태와 최종생존자상태에서의 연생보험과 연생연금의 보험수리적현가를 구하는 방법에 대해서 알아본다. 식 (2.2)에서 정의한 보험 가입자들의 장래생존기간에 대한 연생확률변수와 커먼-속을 함께 고려함으로써 좀 더 다양한 현상을 모델링 할 수 있다. 예를 들어, 두 명의 보험가입자 중 최초 사망이 발생하거나, 특정한 사고로 인하여 경제적인 능력을 상실하게 되는 사건 중 먼저 발생하는 사건에 대한 확률변수 T_{xy}^* 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$T_{xy}^* = \min(T_{xy}, Z). \quad (3.1)$$

식 (3.1)에서 Z 는 교통사고와 같이 보험가입자가 보험 가입 후 사고로 인해 경제적인 능력을 상실할 때까지 걸린 시간이라고 볼 수 있다. 최종생존자상태는 보험가입자 중 최종사망 또는 교통사고 중 먼저 발생한 사건에 대한 확률변수로서 앞서 정의한 연생확률변수와 함께

$$T_{\overline{xy}}^* = \min(T_{\overline{xy}}, Z). \quad (3.2)$$

로 정의하여 사용할 수 있다.

\bar{A}_{xy} 는 연생보험에서 결합생존상태에 대한 종신보험의 일시납 보험료를 의미하며, 미래에 지급하게 될 보험료의 보험수리적현가이다. 앞서 정의한 두 명의 보험가입자 중 최초 사망이 발생하거나, 특정한 사고로 인하여 경제적인 능력을 상실할 때까지의 시간 T_{xy}^* 를 보험금의 지급시점이라 정의하면, 이 보험상품의 일시납 보험료는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\bar{A}_{xy}^* = E[v^{T_{xy}^*}]. \quad (3.3)$$

한편, 최종생존자상태에 대한 종신보험의 일시납 보험료는 $\bar{A}_{\overline{xy}}$ 로 정의한다. 최종생존자상태는 보험 가입자 중 최종 사망이 발생하는 시점과 커먼-속이 발생하는 시점 중 먼저 발생하는 사건에 대하여 보험금

1원을 지급한다. 따라서 보험금 지급시점 T_{xy}^* 를 이용하여 \bar{A}_{xy} 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\bar{A}_{xy}^* = E[v^{T_{xy}^*}]. \quad (3.4)$$

연생연금의 경우 결합생존상태 연금(\bar{a}_{xy})과 최종생존자상태 연금($\bar{a}_{\overline{xy}}$)으로 나눌 수 있다. 결합생존상태 연금은 가입자 중 첫 번째 사망이 발생하는 시점까지 연금을 지급하고, 최종생존자상태 연금은 마지막 사망이 발생할 때 까지 연금을 지급한다. 따라서 연생연금의 지급기간 역시 앞에서 살펴본 T_{xy}^* 와 $T_{\overline{xy}}^*$ 의 경우를 생각해 볼 수 있다. 커먼-속을 고려한 결합생존상태 연생연금의 보험수리적현가는

$$\bar{a}_{xy}^* = E[\bar{a}_{T_{xy}^*}] = E\left[\frac{1 - v^{T_{xy}^*}}{\delta}\right] = \frac{(1 - \bar{A}_{xy}^*)}{\delta}. \quad (3.5)$$

과 같이 계산할 수 있다. 마찬가지로 최종생존자상태의 경우도 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{a}_{\overline{xy}}^* = E[\bar{a}_{T_{\overline{xy}}^*}] = E\left[\frac{1 - v^{T_{\overline{xy}}^*}}{\delta}\right] = \frac{(1 - \bar{A}_{\overline{xy}}^*)}{\delta}. \quad (3.6)$$

3.2. 연생보험 가입자들의 나이에 따른 보험료 분석

다음으로 보험 가입자의 나이에 따라 커먼-속이 반영된 연생상품의 보험수리적현가가 어떻게 변하는지를 분석해 보자. 가우시안 코플라를 이용하여 상관성이 반영된 부부의 장래생존기간 확률변수인 T_x , T_y 와 이와는 독립적으로 지수분포를 따르는 커먼-속 확률변수 Z 의 확률표본을 발생시킨 후 앞서 정의한 T_{xy}^* 와 $T_{\overline{xy}}^*$ 를 계산한다. 그리고 T_{xy}^* 와 $T_{\overline{xy}}^*$ 를 이용하여 커먼-속을 고려한 연생보험 및 연생연금의 보험수리적현가를 계산한다.

이력 0.03, 부부간의 상관관계 0.54(스피어만의 상관관계를 기준), 커먼-속이 발생할 때까지의 시간을 나타내는 확률변수 Z 는 모수가 $\lambda = 100$ 인 경우(상대적으로 높은 확률로 일어나는 사건)와 $\lambda = 10000$ 인 경우(상대적으로 낮은 확률로 일어나는 사건)를 살펴본다.

3.2.1. 결합생존상태 연생보험 이번 절에서는 결합생존상태서 연생보험 가입자들의 나이와 커먼-속의 모수인 λ 가 바뀔 때 보험료가 어떻게 변하는지 알아보려고 한다. Figure 3.1은 커먼-속을 고려한 결합생존상태에 1원을 지급하는 종신보험의 일시납 보험료를 가입연령에 따라 남자 40세, 여자 40세부터 남자 80세, 여자 80세까지 분석한 것이다. 즉, 이 보험은 보험가입자 중 최초 사망 또는 커먼-속 중 먼저 발생하는 사건에 대하여 1원을 지급한다. Figure 3.1을 보면 커먼-속을 고려한 결합생존상태 보험의 보험수리적현가가 가입자의 연령에 따라 변화하는 것을 알 수 있다. 커먼-속을 고려한 결합생존상태 종신보험의 보험수리적현가는 보험가입자 중 한명이라도 나이가 많으면 일시납 보험료가 증가한다.

Table 3.1의 $\lambda = 100$ 인 경우를 기준으로 살펴보면, 남자의 나이 40세를 기준으로 여자의 가입나이가 증가하여도 일시납 보험료가 증가하고, 반대로 여자의 나이 40세를 기준으로 남자의 가입나이가 증가하여도 보험료가 증가한다. 이러한 이유는 보험금이 첫 번째 사망이 발생할 경우에 지급되는데 가입자들 중 한명이라도 나이가 많으면 상대적으로 단기간 내 첫 번째 사망이 발생할 확률이 높아져 보험금의 기대지급시점이 앞당겨 지기 때문이다.

또한 이러한 상품의 보험수리적현가는 커먼-속이 발생하는 평균적인 시간에 의해서도 변화한다. Table 3.1에서 $\lambda = 100$ 인 경우와 $\lambda = 10000$ 인 경우를 살펴보자. 남자와 여자의 가입나이가 40세인 경우, 커먼-속의 평균적인 발생 시간이 짧은 $\lambda = 100$ 인 경우가 0.4285로 $\lambda = 10000$ 인 경우의 0.3343보다 크다. λ 의 값이 작으면 보험금을 지급하는 시점이 식 (3.1)에 의해 Z 로 결정 될 확률이 증가하기 때문이다. 커먼-속이 보험료에 미치는 영향력은 가입자의 나이가 고령일수록 줄어든다. Table 3.2는 가입자의

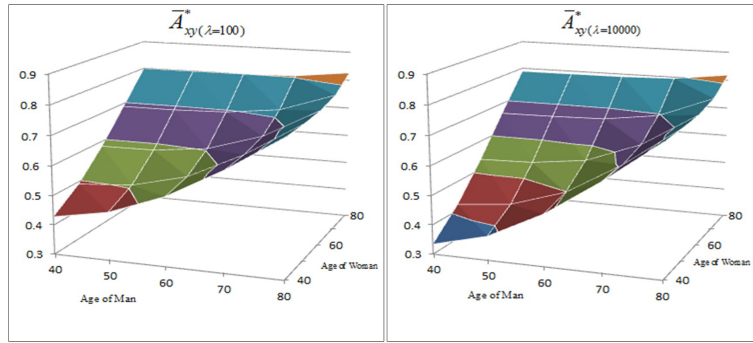


Figure 3.1. Premiums of multiple-life (joint life) insurance by multiple-insured's age

나이에 따라 $\lambda = 10000$ 인 경우(커먼-속의 영향력이 거의 없는 경우)를 $\lambda = 100$ 인 경우(커먼-속의 영향력이 큰 경우)로 나누어 보았다. 여기서 M 은 남편, F는 아내를 각각 나타낸다. Table 3.2를 보면 가입자의 나이가 많을수록 이 두 경우의 비율이 같아지는 것을 알 수 있다. 이는 가입자의 나이가 많을수록 커먼-속의 영향력보다 사력이 더 크게 작용하기 때문이다.

Table 3.1. Premiums of multiple-life (joint life) insurance by multiple-insured's age

		$\bar{A}_{xy}^*(\lambda = 100)$							$\bar{A}_{xy}^*(\lambda = 10000)$				
$x \setminus y$		40	50	60	70	80	$x \setminus y$		40	50	60	70	80
40		0.4285	0.4626	0.5330	0.6360	0.7567	40		0.3343	0.3818	0.4761	0.6016	0.7422
50		0.4918	0.5054	0.5511	0.6416	0.7575	50		0.4205	0.4388	0.4982	0.6080	0.7434
60		0.5822	0.5839	0.6039	0.6619	0.7626	60		0.5350	0.5397	0.5626	0.6328	0.7483
70		0.6893	0.6897	0.6950	0.7161	0.7795	70		0.6641	0.6660	0.6705	0.6953	0.7678
80		0.7990	0.7988	0.8002	0.8042	0.8259	80		0.7883	0.7891	0.7902	0.7947	0.8178

Table 3.2. Premiums of multiple-life (joint life) insurance by frequencies of common shock

Type \ (M,F)	(40,40)	(50,50)	(60,60)	(70,70)	(80,80)
$\frac{\bar{A}_{xy}^*(\lambda=10000)}{\bar{A}_{xy}^*(\lambda=100)}$	0.7801	0.8683	0.9316	0.9709	0.9902

3.2.2. 최종생존자상태 연생보험 다음으로 최종생존자상태에서 연생보험의 보험료를 분석해 보자. Figure 3.2는 커먼-속을 고려한 최종생존자상태에 1원을 지급하는 종신보험의 일시납 보험료를 가입연령에 따라 나타내었다. 이 경우 보험금은 최초 사망 발생 후 마지막 사망 또는 커먼-속 중 먼저 일어난 사건에 대하여 보험금 1 원을 지급한다. Figure 3.2를 보면, 가입자의 나이에 따른 보험수리적현가의 변화가 결합생존상태 종신보험과는 다른 것을 알 수 있다. 커먼-속을 고려한 최종생존자상태 종신보험의 보험수리적현가는 보험가입자 모두 나이가 많아야만 일시납 보험료가 증가한다. 다시 말해서 부부 두 사람 중 한 사람만 나이가 작아도 보험료가 상승한다.

Table 3.3의 $\lambda = 100$ 인 경우를 살펴보면, 남자의 나이 40세를 기준으로 여자의 가입나이가 증가하여도 일시납 보험료가 증가하지 않으며, 반대로 여자의 나이 40세를 기준으로 남자의 가입나이가 증가하여도 보험료의 변화량이 상대적으로 작다. 보험금이 최종 사망이 발생하는 경우 지급되기 때문에 가입자 중 나이가 적은 가입자의 장래생존기간에 의해 보험금의 지급시점이 결정될 확률이 높기 때문이다. 결합생존상태 종신보험의 경우와 마찬가지로, 최종생존자상태 종신보험의 보험수리적현가 역시 커먼-속

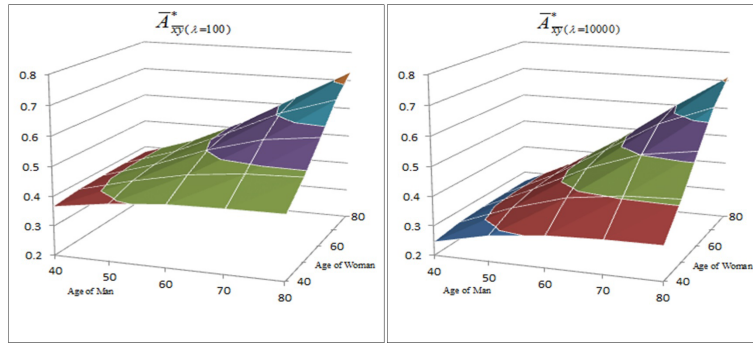


Figure 3.2. Premiums of multiple-life (last survivor) insurance by multiple-insured's age

Z 의 모수인 λ 의 영향을 받게 된다. Table 3.3의 $\lambda = 100$ 인 경우와 $\lambda = 10000$ 인 경우를 살펴보면, 남자와 여자의 가입나이가 40세인 경우, 커먼-속의 평균 발생 시간이 짧은 $\lambda = 100$ 인 경우가 0.3661로 $\lambda = 10000$ 인 경우의 0.2457보다 크다. λ 의 값이 작으면 보험금을 지급하는 시점이 식 (3.2)의 T_{xy}^* 가 Z 로 결정이 될 확률이 증가하기 때문이다. 또한 Table 3.4를 보면 앞서 결합생존상태에서와 마찬가지로 커먼-속이 보험료에 미치는 영향력은 가입자의 나이가 많을수록 독립적으로 발생하는 사건보다 사력이 더 크게 작용한다. 이제까지 연생보험에 대하여 살펴보았다. 다음 절에서는 연생 연금에 대하여 알아보자.

Table 3.3. Premiums of multiple-life (last survivor) insurance by multiple-insured's age

		$\bar{A}_{xy}^*(\lambda = 100)$							$\bar{A}_{xy}^*(\lambda = 10000)$				
$x \setminus y$		40	50	60	70	80	$x \setminus y$		40	50	60	70	80
40		0.3661	0.3935	0.4098	0.4142	0.4161	40		0.2457	0.2869	0.3074	0.3145	0.3164
50		0.3761	0.4226	0.4605	0.4799	0.4860	50		0.2593	0.3289	0.3823	0.4063	0.4139
60		0.3787	0.4342	0.5019	0.5525	0.5742	60		0.2631	0.3469	0.4370	0.5016	0.5279
70		0.3798	0.4386	0.5195	0.6064	0.6655	70		0.2641	0.3514	0.4585	0.5680	0.6392
80		0.3794	0.4393	0.5235	0.6275	0.7293	80		0.2642	0.3526	0.4643	0.5942	0.7120

Table 3.4. Premiums of multiple-life (last survivor) insurance by frequencies of common shock

Type \ (M,F)	(40,40)	(50,50)	(60,60)	(70,70)	(80,80)
$\frac{\bar{A}_{xy}^*(\lambda=10000)}{\bar{A}_{xy}^*(\lambda=100)}$	0.6710	0.7783	0.8709	0.9366	0.9762

3.2.3. 결합생존상태 연생연금 이번 절에서는 결합생존상태에서 보험가입자들의 나이와 커먼-속 Z 의 모수인 λ 에 따른 연생연금의 보험료를 계산해보고 이를 분석하고자 한다. Figure 3.3은 가입자 중 첫 번째 사망이 발생하거나 커먼-속이 발생할 때까지 연액 1원을 연속적으로 지급하는 연생연금의 일시납 보험료를 가입연령 남자 40세, 여자 40세부터 남자 80세, 여자 80세까지 계산한 것이다. 즉 커먼-속이 고려된 결합생존상태 연생연금이다. Figure 3.3 을 보면, 앞에서 살펴본 연생보험의 보험수리적현가와 다른 변화를 볼 수 있다. 커먼-속의 발생 빈도가 일정할 경우 결합생존상태 연생연금의 보험수리적현가는 보험가입자 중 한명이라도 나이가 많으면 감소한다. 보험료는 가입자의 나이가 남자 40 세, 여자 40세일 때 가장 높은 값을 갖는다. 이것을 기준으로 여자의 가입나이가 증가하여도 보험수리적현가는 감소하고, 반대로 남자의 가입나이가 증가하여도 보험수리적현가가 감소한다. 이러한 이유는 연금의

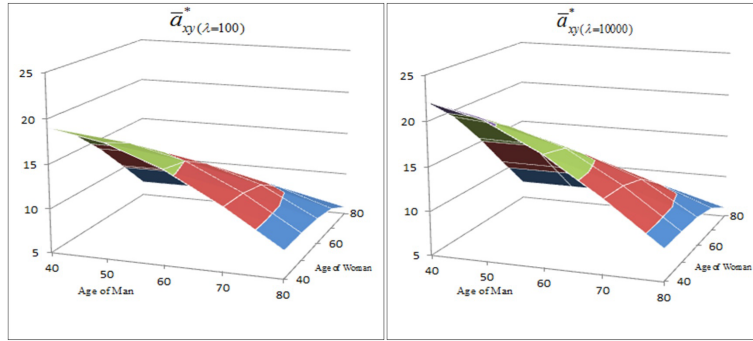


Figure 3.3. Premiums of multiple-life (joint life) annuity by multiple-insured's age

지급기간이 첫 번째 사망이 발생할 때까지이므로 가입자 중 고령의 가입자의 장래생존기간에 의해 연금의 지급기간이 결정될 확률이 높기 때문이다. 따라서 가입자 중 한명이라도 나이가 많을 경우 연금의 종료시점이 평균적으로 짧아지게 된다.

또한 이러한 상품의 보험수리적현가는 커먼-속에 의해서도 변화한다. Table 3.5의 $\lambda = 100$ 인 경우와 $\lambda = 10000$ 인 경우를 살펴보자. 남자와 여자의 가입나이가 40세인 경우, 커먼-속의 평균 발생 시간이 짧은 $\lambda = 100$ 인 경우가 19.05로 $\lambda = 10000$ 인 경우의 22.19보다 작다. λ 의 값이 작으면 보험금을 지급하는 시점이 식 (3.1)의 T_{xy}^* 가 Z 로 결정이 될 확률이 증가한다. 따라서 커먼-속의 발생시간 Z 가 첫 번째 사망 시점보다 먼저 발생하여 연금이 조기 종료되는 것이다.

Table 3.6에서 볼 수 있는 것처럼, $\lambda = 10000$ 인 경우(커먼-속의 영향력이 거의 없는 경우)의 보험수리적현가를 $\lambda = 100$ 인 경우의 보험수리적현가(커먼-속의 영향력이 센 경우)로 나눈 값이 나이가 증가할수록 1로 수렴한다. 이것은 커먼-속이 보험료에 미치는 영향이 가입자들의 나이가 많을수록 줄어든다는 것을 의미한다.

Table 3.5. Premiums of multiple-life (joint life) annuity by multiple-insured's age

$x \setminus y$	$\bar{a}_{xy}^*(\lambda = 100)$					$x \setminus y$	$\bar{a}_{xy}^*(\lambda = 10000)$				
	40	50	60	70	80		40	50	60	70	80
40	19.05	17.91	15.57	12.13	8.11	40	22.19	20.61	17.46	13.28	8.59
50	16.94	16.49	14.96	11.95	8.08	50	19.32	18.71	16.73	13.07	8.55
60	13.93	13.87	13.20	11.27	7.91	60	15.50	15.34	14.58	12.24	8.39
70	10.36	10.34	10.17	9.46	7.35	70	11.20	11.13	10.98	10.16	7.74
80	6.70	6.71	6.66	6.53	5.80	80	7.06	7.03	6.99	6.84	6.07

Table 3.6. Premiums of multiple-life (joint life) annuity by frequencies of common shock

Type \ (M,F)	(40,40)	(50,50)	(60,60)	(70,70)	(80,80)
$\frac{\bar{a}_{xy}^*(\lambda=10000)}{\bar{a}_{xy}^*(\lambda=100)}$	1.1649	1.1346	1.1042	1.0733	1.0464

3.2.4. 최종생존자상태 연생연금 다음으로는 최종생존자상태에서 연생연금의 보험료를 계산하고 이를 분석하고자 한다. Figure 3.4 은 가입자 중 마지막 사망이 발생하거나 커먼-속이 발생할 때까지 연액 1원을 연속적으로 지급하는 연생연금의 가입연령별 일시납 보험료를 나타낸다. 즉, 커먼-속이 고려된 최종생존자상태 연생연금이다. 앞서 살펴본 결합생존상태 연생연금의 보험수리적현가와와는 다르게

커먼-속의 최종생존자상태 연생연금의 보험수리적현가는 보험가입자 중 한명이라도 나이가 작으면 감소하지 않는다.

Table 3.7의 $\lambda = 100$ 인 경우를 살펴보자. 가입자의 나이가 남자 40세로 고정되어있을 경우, 여자의 나이가 40세에서 80세까지 증가하더라도 보험수리적현가가 상대적으로 작게 감소한다. 반대로 여자의 나이가 40세로 고정되고, 남자의 나이가 변하는 경우도 마찬가지이다. 최종생존자상태의 연생연금의 경우 마지막 사망이 발생하거나 커먼-속이 일어날 때까지 연금을 지급하므로 가입자 중 나이가 많은 가입자가 있다 하더라도 상대적으로 나이가 적은 가입자의 장래생존기간에 의해 연금의 지급기간이 결정될 확률이 높기 때문이다.

커먼-속이 보험수리적현가에 미치는 영향에 대하여 살펴보기 위하여 Table 3.7의 $\lambda = 100$ 인 경우와 $\lambda = 10000$ 인 경우를 살펴보자. 남자와 여자의 가입나이가 40세인 경우, 커먼-속의 평균 발생 시간이 짧은 $\lambda = 100$ 인 경우의 최종생존자상태 연생연금의 보험수리적현가가 21.23 로 $\lambda = 10000$ 인 경우의 25.14보다 작다. λ 의 값이 작으면 커먼-속의 평균 발생 시간이 당겨지게 되고, 따라서 식 (3.2)에서와 같이 연금을 지급하는 기간인 T_{xy}^* 가 Z 에 의해 결정될 확률이 높아진다. 즉, 커먼-속의 발생시간 Z 가 마지막 사망 시점보다 먼저 발생하여 연금이 조기 종료될 확률이 높아진다. 또한 Table 3.8에서 볼 수 있듯 커먼-속이 보험료에 미치는 영향은 가입자들의 나이가 많아질수록 작아지는 것을 알 수 있다. 이는 앞선 논의와 마찬가지로 가입자들의 나이가 많아질수록 사력이 미치는 영향이 커지기 때문이다.

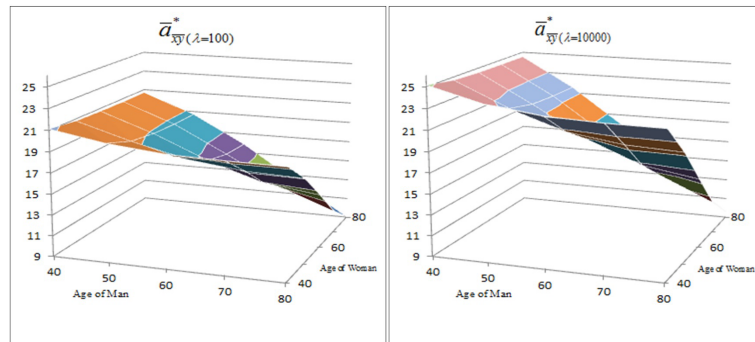


Figure 3.4. Premiums of multiple-life (last survivor) annuity by multiple-insured's age

Table 3.7. Premiums of multiple-life (last survivor) annuity by multiple-insured's age

		$\bar{a}_{xy}^*(\lambda = 100)$					$\bar{a}_{xy}^*(\lambda = 10000)$					
$x \setminus y$		40	50	60	70	80	$x \setminus y$	40	50	60	70	80
40	40	21.13	20.22	19.67	19.53	19.46	40	25.14	23.77	23.09	22.85	22.79
	50	20.80	19.25	17.98	17.34	17.13	50	24.69	22.37	20.59	19.79	19.54
	60	20.71	18.86	16.60	14.92	14.19	60	24.56	21.77	18.77	16.61	15.74
	70	20.67	18.71	16.02	13.12	11.15	70	24.53	21.62	18.05	14.40	12.03
	80	20.69	18.69	15.88	12.42	9.02	80	24.53	21.58	17.86	13.53	9.60

Table 3.8. Premiums of multiple-life (last survivor) annuity by frequencies of common shock

Type \ (M,F)	(40,40)	(50,50)	(60,60)	(70,70)	(80,80)
$\frac{\bar{a}_{xy}^*(\lambda=10000)}{\bar{a}_{xy}^*(\lambda=100)}$	1.1900	1.1622	1.1301	1.0976	1.0641

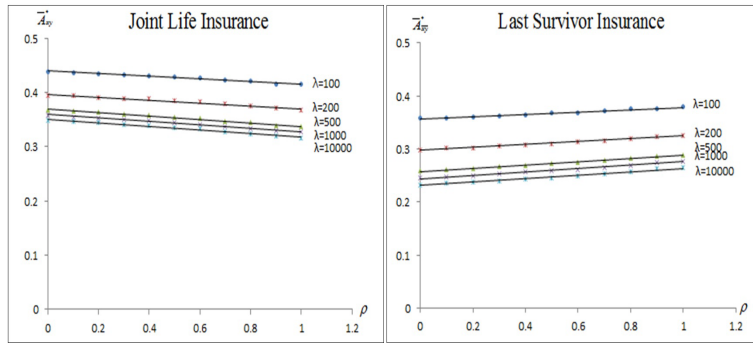


Figure 3.5. Premiums of multiple-life insurance by frequencies of common shock and degree of correlation

Table 3.9. Premiums of multiple-life insurance by frequencies of common shock and degree of correlation

$\rho \setminus \lambda$	\bar{A}_{xy}^*					$\rho \setminus \lambda$	$\bar{A}_{\overline{xy}}^*$				
	100	200	500	1000	10000		100	200	500	1000	10000
0.4	0.4315	0.3951	0.3580	0.3488	0.3386	0.4	0.3644	0.3078	0.2697	0.2562	0.2431
0.5	0.4290	0.3841	0.3552	0.3442	0.3355	0.5	0.3675	0.3099	0.2725	0.2582	0.2460
0.6	0.4260	0.3821	0.3514	0.3411	0.3325	0.6	0.3687	0.3132	0.2749	0.2619	0.2499
0.7	0.4235	0.3453	0.3473	0.3375	0.3272	0.7	0.3715	0.3161	0.2777	0.2653	0.2529
0.8	0.4212	0.3754	0.3440	0.3337	0.3236	0.8	0.3748	0.3196	0.2822	0.2694	0.2574

3.3. 커먼-속의 모수 λ 에 따른 보험료 분석

이번 절에서는 커먼-속의 발생률이 연생보험에 미치는 영향을 좀 더 자세히 분석한다. 먼저 보험가입자를 부부인 남자 40세, 여자 40세로 가정하고, 이력은 0.03으로 고정시킨 후 지수 분포를 따르는 커먼-속 Z 의 평균인 λ 가 변할 때 각각의 보험료를 산출해 보았다. 여기서 $\lambda = 100$ 이라는 것은 평균적으로 100년에 한번 발생하는 사건 또는 1년간 발생확률이 1/100인 사건으로 생각할 수 있다.

Figure 3.5는 각각 결합생존상태와 최종생존자상태에서 커먼-속의 모수인 λ 가 변할 때 부부의 상관관계에 따른 종신보험의 일시납 보험료를 나타내고 있다. 앞 절에서 살펴본 것처럼 결합생존상태에서 종신보험의 경우 부부의 장래생존기간에 대한 양의 상관관계가 증가 할수록 보험료가 감소하는 경향을 보인다. 이는 부부의 장래생존기간이 양의 상관관계를 가질 때, 단 기간 내 첫 번째 사망이 발생할 확률이 ρ 가 증가함에 따라 감소하고 따라서 보험금의 기대지급시점이 상대적으로 멀어지기 때문이다. 반대로 최종생존자상태의 종신보험의 경우 부부의 장래생존기간이 양의 상관관계가 강할수록 보험료가 증가하는 경향을 보인다. 이러한 이유는 ρ 가 증가함으로 인해 첫 번째 사망이 발생한 후 단기간 내 두 번째 사망이 발생할 확률이 증가하여 보험금의 기대지급시점이 앞당겨지기 때문이다.

다음으로 부부간의 상관관계를 나타내는 모수인 ρ 를 고정시킨 후 λ 가 변할 때 보험료가 어떻게 변하는지 분석해 보자. Table 3.9를 보면 결합생존상태에서 $\rho = 0.5$ 일 때 $\lambda = 100$ 인 경우의 보험료를 기준으로 $\lambda = 500$ 일 때 보험료가 17% 감소하며, $\lambda = 10000$ 일 때에는 22%까지 감소하는 것을 알 수 있다. 최종생존자상태에서도 마찬가지로 ρ 가 0.5일 때 $\lambda = 100$ 을 기준으로 $\lambda = 500$ 인 경우 26%, $\lambda = 10000$ 일 때 33%까지 감소한다. 이러한 이유는 결합생존상태의 경우 보험금의 지급시점인 T_{xy}^* 가 λ 가 작을수록, 즉 커먼-속 Z 가 단기간 내 발생할 확률이 높을수록 앞당겨지기 때문이다. 최종생존자상태의 경우도 마찬가지로 보험금의 지급시점이 식 (3.2)에서와 같이 $T_{\overline{xy}}^*$ 로 결정되기 때문에 λ 가 작아지면 보험금의 지급시점이 앞당겨져 보험료가 감소하게 된다. 다음으로 연생연금에 대하여 알아보자.

Figure 3.6은 결합생존상태와 최종생존자상태에서 커먼-속의 모수인 λ 가 변할 때 부부의 상관관계에 따른 연생연금의 일시납 보험료를 나타내고 있다. 결합생존상태의 연생연금의 경우 최초 사망 또는 커먼-속 중 먼저 발생한 사건에 대하여 그 시점까지 연금 연액 1 원을 지급하는 상품으로 앞서 결합생존상태의 종신보험과는 반대로 부부의 장래생존기간에 대한 양의 상관관계가 증가할수록 보험료가 증가하는 경향을 보인다. 앞서 설명한 바와 마찬가지로 부부의 장래생존기간에 대한 양의 상관관계가 증가할수록 단기간 내에 첫 번째 사망이 발생할 확률이 감소하고 따라서 연금의 기대지급기간이 길어지기 때문이다. 최종생존자상태의 연생연금의 경우 최종사망자 또는 커먼-속 중 먼저 발생한 사건에 대하여 그 시점까지 연금 연액 1원을 지급하는 상품으로 결합생존상태와는 반대로 상관관계가 증가함에 따라 보험료가 감소하는 경향을 보인다. 이러한 이유는 부부의 상관관계를 나타내는 모수인 ρ 가 증가함으로 인해 첫 번째 사망이 발생하고 단기간 내 두 번째 사망이 발생할 확률이 증가하여 연금의 기대지급기간이 줄어들기 때문이다.

다음으로 ρ 가 고정된 상태에서 커먼-속의 모수인 Z 가 변할 때 보험료가 어떻게 변하는지 알아보자. Table 3.10을 보면 결합생존상태의 연생연금에서 $\rho = 0.5$ 인 경우 $\lambda = 100$ 을 기준으로 보험료가 $\lambda = 500$ 일 때 13%, $\lambda = 10000$ 일 때 16%까지 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 최종생존자상태에서도 $\rho = 0.5$ 인 경우 $\lambda = 100$ 을 기준으로 보험료가 $\lambda = 500$ 일 때 15%, $\lambda = 10000$ 일 때 19%까지 증가함을 알 수 있다. 이러한 이유는 종신보험에서와 같은 원리로 이해할 수 있다. 먼저 결합생존상태의 경우 연금의 지급기간이 식 (3.1)에서와 같이 보험가입일로부터 T_{xy}^* 까지이므로 Z 의 모수인 λ 가 증가하면 연금의 지급기간인 T_{xy}^* 가 상대적으로 늘어나 보험료가 상승한다. 최종생존자상태의 경우도 마찬가지로 Z 의 모수인 λ 가 증가하면 식 (3.2)에서와 같이 연금의 지급기간을 나타내는 $T_{\overline{xy}}^*$ 가 Z 의 의해 결정될 확률이 줄어든다. 즉 연금이 조기종료 될 확률이 줄어들어 보험료가 상대적으로 상승하게 된다.

지금까지는 커먼-속 Z 의 모수인 λ 가 변할 때 보험료가 어떻게 변하는지를 살펴보았다. 다음 절에서는 지금까지의 이론을 토대로 다변수로 확장된 형태의 연생 상품을 설계하고 이를 분석하고자 한다.

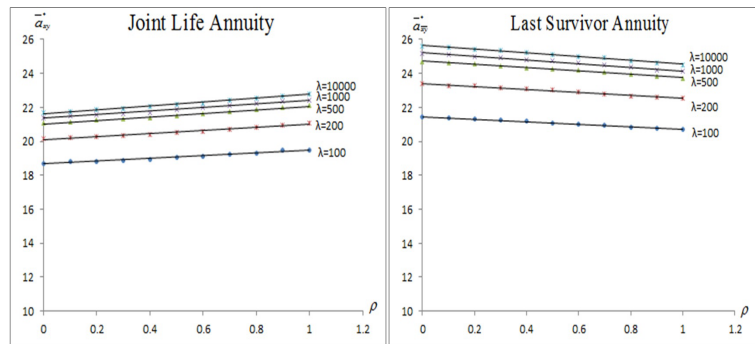


Figure 3.6. Premiums of multiple-life annuity by frequencies of common shock and degree of correlation

4. 연생 상품에의 적용

4.1. 가족연금에 적용한 모델

지금까지 기본적인 연생상품에서 다루는 보험수리적현가가 커먼-속 확률변수 Z 가 반영됨에 따라서 어떻게 변화하는지에 대하여 알아보았다. 이번 절에서는 실제 보험실무에서 다루고 있는 보험 상품에 본 논문에서 다루는 모델이 어떻게 적용 될 수 있는지에 대하여 알아본다. 한 가지 예로써 보험실무에서 사

Table 3.10. Premiums of multiple-life annuity by frequencies of common shock and degree of correlation

		\bar{a}_{xy}^*							\bar{a}_{xy}^*				
$\rho \setminus \lambda$		100	200	500	1000	10000	$\rho \setminus \lambda$	100	200	500	1000	10000	
0.4		18.94	20.40	21.40	21.71	22.05	0.4	21.19	23.07	24.34	24.79	25.23	
0.5		19.03	20.53	21.49	21.86	22.15	0.5	21.08	23.00	24.25	24.73	25.13	
0.6		19.13	20.60	21.62	21.96	22.25	0.6	21.04	22.89	24.17	24.60	25.00	
0.7		19.22	20.70	21.76	22.08	22.43	0.7	20.95	22.80	24.08	24.49	24.90	
0.8		19.30	20.82	21.87	22.21	22.55	0.8	20.84	22.68	23.93	24.35	24.75	

용되는 교육연금의 상품구조를 변화시켜 가족 전체가 가입하는 가족연금 상품을 제안해 보았다. 교육연금은 부부가 자녀를 위해 가입하는 연금으로 대학등록금과 같은 교육비의 문제를 해결해 줄 수 있다는 장점이 있는 반면 가입자인 부부에 대한 보장이 없고, 보험금의 수혜자가 자녀에게 집중되어 있다.

본 논문에서 제안한 가족연금은 경제적인 위험에 대한 보장의 대상을 가족 전체로 바라볼 수 있다는 점에서 의의를 찾을 수 있다. 예를 들어 남편의 나이가 x 세이고, 아내의 나이가 y 세, 자녀의 나이가 w 세인 3인 가족이 있다고 하자. 가족연금은 가족원 전체를 보장대상으로 한다. 연금은 부부 중 한명이 사망하거나, 불의의 사고로 경제적인 능력을 잃었을 경우, 혹은 자녀의 나이가 40세가 되었을 경우에 개시되며, 가족원 중 마지막 사람이 죽을 때까지 연금 연액 1원을 지급한다. 또한 자녀가 40세 이전에 사망하는 경우에 대해서는 보험금 1원을 지급한다.

이러한 가족연금의 현금흐름을 단순화하여 나타내면 Figure 4.1과 같다. 여기서 $(40 - w)$ 는 자녀의 보험가입시점의 나이가 w 세일 때 자녀가 40세가 되기까지의 시간을 의미한다. 예를 들어 보험가입 시 자녀의 나이가 0세 라면 40년 후로 쉽게 생각할 수 있다. 이 경우 연금의 개시 시점은 40년 이전에 부모 중 한 명이 사망하거나 또는 커먼-속 Z 가 발생하거나 40년간 위 두 가지 사유가 발생하지 않아 자녀의 나이가 40세가 되는 경우이다.

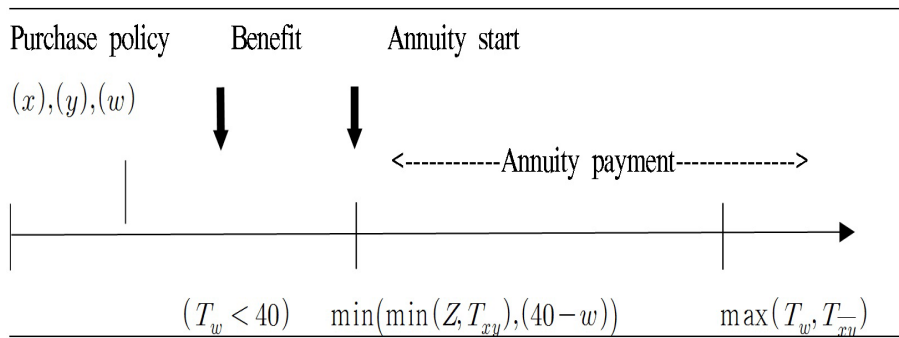


Figure 4.1. The structure of family annuity

Z 는 보험가입시점부터 커먼-속(경제적인 능력을 잃게 되는 불의의 사고)이 일어날 때까지의 시간을 의미한다. 연금의 지급시점이 부부의 생존상태와 경제력, 자녀의 나이에 의존하고 있어서, 기존의 상품과는 다르게 보험의 보장 대상이 부부와 자녀를 포함하는 가족 구성원 전체로 확장되는 것이다. Z 를 지수분포를 따르는 확률변수로 가정하고, 부부와 자녀의 장래생존분포를 앞에서 추정된 고펜페르츠 분포를 이용하여 일시납 보험료를 계산해 보았다. 또한 앞에서 부부의 장래생존기간 간의 상관성을 반영하는 것에 추가하여, 부모와 자식 사이의 상관성을 추가로 부여할 수 있다. 부모와 자식 사이의 상관성에 대한 연구는 본 논문의 논의를 벗어나므로, 임의로 설정하였다.

$$\begin{matrix} T_x & T_y & T_w & Z \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

일시납 보험료 계산에 가정한 상관행렬은 위와 같다. 즉, 부부간의 상관성은 0.5, 부모와 자식간의 상관성은 0.3, 커먼-쇼크 Z는 가족구성원의 생존기간과 독립으로 설정하였다. 그리고 가입시점의 자녀의 나이는 0세를 기준으로 보험료를 계산하였다.

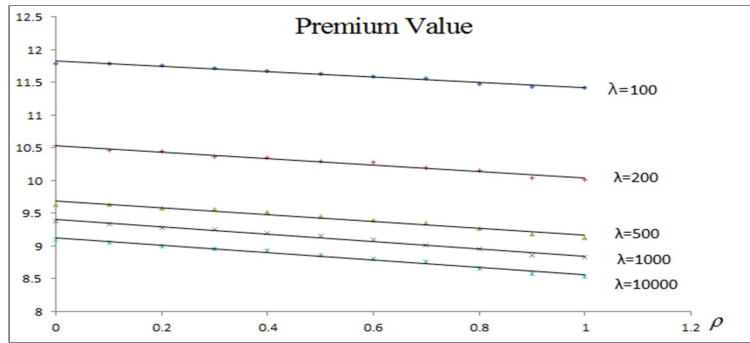


Figure 4.2. Premiums of family annuity by frequencies of common shock and degree of correlation

Table 4.1. Premiums of family annuity by frequencies of common shock and degree of correlation

		Premium Value				
$\rho \setminus \lambda$		100	200	500	1000	10000
0.4		11.68	10.35	9.52	9.20	8.92
0.5		11.63	10.29	9.44	9.15	8.86
0.6		11.59	10.27	9.39	9.09	8.80
0.7		11.56	10.19	9.35	9.01	8.76
0.8		11.48	10.16	9.26	8.95	8.65

Figure 4.2와 Table 4.1은 앞서 제한한 가족연금의 일시납 보험료를 부부의 상관성과 커먼-쇼크가 일어나는 빈도를 바꿔가며 계산한 것을 그래프로 나타낸 것이다. 경제적인 능력을 상실하게 되는 사건인 Z의 모수가 $\lambda = 100$ 인 경우에서부터 $\lambda = 10000$ 인 경우까지를 비교하였다. Figure 4.2를 보면 부부의 상관성이 고정되어 있다는 전제하에서, λ 의 값이 감소할수록 가족연금의 보험수리적현가는 증가한다. Table 4.1에서 ρ 가 0.5인 경우를 살펴보면, λ 가 1000일 때의 값 9.15보다 λ 가 100일 때의 값이 11.63으로 큰 것을 알 수 있다. 이것은 연금의 시작시점이 부부 중 첫 번째 사망이 발생하거나, 경제적인 능력을 잃게 되는 시점에 의존하기 때문이다. 즉, λ 의 값이 감소하게 되면 상대적으로 커먼-쇼크가 발생하는 시점이 T_{xy} 보다 앞설 확률이 높아지기 때문에 연금의 시작시점이 앞당겨진다. 반대로, λ 의 값이 증가하게 되면 가족연금의 보험수리적현가는 감소하지만 그 감소의 폭이 줄어든다. Table 4.1에서 ρ 가 0.5인 경우를 살펴보면, λ 가 100에서 200으로 증가했을 경우의 감소폭 $11.63 - 10.29 = 1.34$ 보다 λ 가 500에서 1000으로 증가했을 경우의 감소폭 $9.44 - 9.15 = 0.29$ 이 더 작다. 이러한 이유는 연금의 시작시점이 T_{xy} 혹은 자녀의 나이가 40세가 되는 시점으로 결정되기 때문이다. 즉, λ 의 값이 일정수준으로 증가

하게 되면, 독립적인 사건이 일어나기까지의 시간이 너무 길어지기 때문에 연금의 시작여부에 커먼-속이 거의 영향을 미치지 못하게 된다.

이번에는 커먼-속의 모수를 고정시켜놓고 부부의 상관성이 변화함에 따른 보험수리적현가의 변화를 살펴보자. Figure 4.2와 Table 4.1을 살펴보면 λ 가 고정된 경우 ρ 가 증가하면 보험료가 전체적으로 감소하는 경향을 보인다. 부부의 상관성이 증가할수록 T_x 와 T_y 의 차이, 즉, 부부의 사망시기의 격차($|T_x - T_y|$)가 줄어들게 되어 연금의 지급기간이 줄어들게 되는 것이다. 이러한 부부의 상관성이 가족연금의 일시납 보험료에 미치는 영향은 커먼-속의 모수의 값이 증가할수록 커진다. 모수 값이 증가할수록 연금의 시작 시점이 에 의하여 결정되는 경우가 더 많이 발생하기 때문이다.

5. 결론

본 논문에서는 연생보험에서 보험가입자들의 장래생존기간 사이의 상관성과 커먼-속 확률변수를 고려하여 연생상품을 분석하기 위한 모델을 제시하였다. 기존의 연구가 부부 가입자의 상관성이 변화함에 따라서 연생보험의 보험수리적현가가 어떻게 변화하는지에 대하여 살펴본 것과 비교하여 3절에서는 커먼-속이 연생보험의 보험수리적현가에 어떠한 영향을 미치는가에 대하여 살펴보았다. 또한 커먼-속이 일어나는 빈도가 변화함에 따라서 각 연생보험의 지급 조건 별 보험수리적현가의 변화 양상이 달라짐을 살펴보았다. 연생보험의 경우는 커먼-속의 빈도가 높아짐에 따라서 보험수리적현가가 높아졌으며, 연생연금의 경우는 반대로 보험수리적현가가 낮아졌다. 또한 커먼-속이 발생하기까지의 평균시간인 λ 가 증가함에 따라서 보험수리적현가가 변화하는 폭이 달라졌다.

또한 보험 가입자들의 나이가 커먼-속이 고려된 연생보험의 보험수리적현가에 어떤 영향을 미치는지에 대하여 분석하였다. 결합생존상태 연생보험의 경우 두 명의 가입자 중 한명이라도 고연령층에 속할 경우 보험수리적현가가 증가하였으며, 이와 달리 최종생존자상태 연생보험의 경우는 두 명의 가입자가 모두 고령층에 속해야만 보험수리적현가가 증가하였다. 커먼-속이 보험수리적현가에 미치는 영향은 고령층으로 갈수록 줄어들었는데, 고연령층의 사망시점이 커먼-속의 발생시점보다 더 빨라지기 때문이다. 연생연금의 경우는 연생보험의 경우와는 반대로 결합생존상태에서는 두 명의 가입자 중 한명이라도 고연령층에 속할 경우, 최종생존자상태에서는 두 명의 가입자 모두 고연령층에 속할 경우 보험수리적현가가 감소하였다.

4절에서는 상관성이 반영된 가입자의 생존분포와 커먼-속을 함께 고려하여 좀 더 다양한 연생상품을 설계하고 합리적인 보험료를 계산할 수 있음을 제안하기 위해, 커먼-속이 고려된 가족연금을 설계하고 일시납 보험료를 계산해 보았다. 기존의 연생 상품들이 주로 두 명의 가입자에 대하여 보장을 하였다면, 본 논문에서 제안한 방법을 이용하여 보장단위를 가족구성원 전체로 확장시킬 수 있다. II-4에서 언급한 시뮬레이션 방법을 바탕으로 가족들의 간의 상관성을 반영하면 보장 범위를 (조)부모와 (손)자녀에 이르기까지 다양하게 설정할 수 있다. 또한 가입자들의 생존분포와 커먼-속을 함께 고려하여 좀 더 다양한 현금흐름을 고려할 수 있다.

향후 연구과제로는 다음과 같은 문제들이 추가적으로 논의 될 필요가 있다. 본 논문에서는 부부의 상관성을 가정하고 시뮬레이션을 통해 보험료를 분석하였지만 데이터를 이용한 실증분석이 이루어져야 한다. 특히 주어진 데이터로부터 커먼-속 때문에 생기는 종속성과 그것을 제외한 종속성을 분리하는 것에 대한 연구가 필요하다. 그리고 국내 시장상황을 반영한 다양한 연생상품을 설계하고 합리적인 보험료를 계산하기 위해서 먼저 보험가입자들과 다양한 재해들 간의 상관성에 대한 실증연구 또한 진행되어야 한다. 이러한 실증 연구를 토대로 보험가입자 및 커먼-속을 다변수로 확장하여 보험소비자들의 수요를 반영한 다양한 연생상품을 설계할 수 있다. 또한 상관관계를 반영하기 위해 사용한 코플라 모형에 대한 고찰도 필요하다. 본 논문에서 사용한 가우시안 코플라라는 앞서 언급한 것처럼 많은 장점이 있지만 미처 다

루지 못한 여러 코플라 모형들과의 비교를 통해 보험료 산출에 더욱 적절한 코플라 모형에 대한 선정기준을 마련할 필요가 있다. 더불어 본 연구의 방법론을 3대 공적연금에서 지급하는 유족연금에 적용해 보는 것도 의미가 있다.

References

- Baek, H. Y., Han, J. L. and Lee, H. (2014). Analysis of dependent future lifetimes of married couples using survivor's annuity data. *To be appeared*.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. and Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries.
- Carriere, J. F. (1994). An investigation of the Gompertz law of mortality, *Actuarial Research Clearing House*, **2**, 161-77.
- Chapra, S. (2008). *Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists*, McGrawHill.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, Ltd.
- Dickson, D., Hardy, M. R. and Waters, H. R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*, Cambridge University Press.
- Carriere, J. F., Frees, E. W. and Valdez, E. A. (1996). Annuity Valuation with Dependent Mortality, *Journal of Risk and Insurance*, **63**, 229-261.
- Frees, E. W. and Valdez, E. A. (1998). Understanding Relationships Using Copulas, *Actuarial Research Clearing House*, **1**, 5-45.
- Klugman, S., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2010). *A Loss Models: From Data to Decisions*, WILEY, Inc.
- Lee, S., Baek, H. Y. and Lee, H. (2013). Analysis of multiple life insurance using copula, *Journal of the Korean Data Analysis Society*, **15**, 1933-1954.
- Lee, I., Lee, H. and Kim, H. T. (2014). Analysis of reserves in multiple life insurance using copula, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **21**, 1-21.
- Li, D. X. (2000). On Default Correlation: A Copula Function Approach, *Journal of Fixed Income*, **9**, 43-54.
- Lindskog, F. and McNeil, A. J. (2003). Common Poisson Shock Models: Applications to Insurance and Credit Risk Modeling, *Astin Bulletin*, **33**, 209-238.
- Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967). A multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 30-44.4
- Meyers, G. G. (2007). The common Shock Model for Correlated Insurance Losses, *Journal of Variance*, **1**, 40-52.
- Nelsen, R. (1999). *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag NewYork, Inc.
- Shemyakin, A. and Youn, H. (1999a). Copula models of joint last survivor analysis, *Applied Stochastic Models In Business and Industry*, **22**, 211-224
- Shemyakin, A. and Youn, H. (1999b). Statistical Aspects of Joint Life Insurance Pricing, *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section of the American Statistical Association*, 34-38.
- Sklar, A. (1973). Random Variables, Joint Distribution Functions and Copulas, *Kybernetika*, **9**, 449-460.
- Wang, S. S. (1999). Understanding Relationships Using Copulas, *North American Actuarial Journal*, **3**, 137-141.
- Herman, E., Youn, H. and Shemyakin, A. (2002). A Re-examination of the Joint Mortality Functions, *North American Actuarial Journal*, **6**, 166-170.

코플라와 커먼-속을 이용한 연생상품의 분석

김도영^a · 이삭^a · 이항석^{a,1}

^a성균관대학교 보험계리학과

(2014년 09월 14일 접수, 2014년 11월 11일 수정, 2014년 12월 04일 채택)

요약

연생보험은 보험가입자 2인의 생사여부에 따라 보험금을 지급하는 보험상품이다. 보험실무에서는 연생보험 가입자들의 장래생존기간을 독립으로 가정하고 보험료를 산출한다. 그러나 보험가입자들 사이에 존재하는 상관성을 고려할 때 이는 합리적이지 않다. 또한 보험가입자들의 생존분포와 독립적인 커먼-속(common shock)을 연생보험에 반영하면 다양한 지급조건을 설정할 수 있는데 이에 대한 충분한 고려가 이루어지지 않고 있다. 본 논문에서는 커먼-속(common shock)을 연생보험에 적용하고, 코플라(copula)를 이용하여 가입자들의 장래생존기간 간에 존재하는 상관성을 반영한 후 분석을 수행한다. 또한 연생보험가입자에 대한 확률변수를 추가적으로 고려하여 기존의 연생모형에서 다루지 못했던 새로운 상품을 설계하고 시뮬레이션을 통해 보험료를 계산한다. 그리고 그 결과를 바탕으로 본 논문에서 제시한 모형이 연생상품에 다양하게 적용 가능함을 논하고자 한다.

주요용어: 연생상품, 가우시안 코플라, 커먼-속, 생존분포의 상관성.

¹교신저자: (110-745) 서울특별시 종로구 성균관로 25-2, 성균관대학교 수학과, 부교수.

E-mail: hangsuck@skku.edu