韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.1.25
2014. 02. 제 53권, 제 1호, 25-40.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2014, Vol. 53, No. 1, 25-40.

도함수의 성질에 관련한 학생들의 사고에 대하여

최영주(서울대학교 대학원)
홍진곤(건국대학교)†

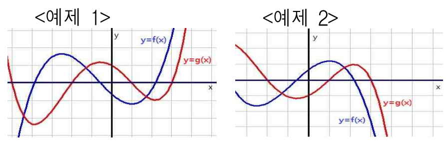
Ⅰ. 서론

미분과 적분은 수학의 많은 이론의 근거가 될 뿐만 아니라 자연과학, 공학, 경제학 등 다양한 분야에서 많은 현상을 모델링 하는 중요한 개념 도구로서 학교수학에서 중요하게 다루어진다. 더욱이 응용수학의 측면에서 미적분의 활용은 그 근간을 이루는 미분과 적분이 구조적으로 내재된 미분방정식에서 찾아볼 수 있는데(정상권, 2011), 학교수학에서 직접적으로 제시되지는 않지만 미분방정식을 구성하는 미분과 미분방정식의 해를 구하는 적분으로 그 관계가 나타난다. 이와 같이 미적분에 관한 수학적 개념은 독립적으로 존재하지 않고 개념들 사이의 관계를 형성하며 구조적으로 존재한다.

그러나 실제로 미분과 적분을 학습하는 학생들은 도함수와 원시함수를 계산하는 대수적 알고리즘에는 능숙하지만 미적분 개념과 그들 사이의 관계를 이해하는데 어려움을 겪는다(Tall, 2003). 이는 학생들이 미적분 개념구조에 대한 이해보다는 기계적인 계산 과정 또는 단순히 공식으로 암기하여 정형화된 알고리즘 문제 유형을 주로 학습하였기 때문에 나타나는 현상이다(우정호, 2001; 임선정, 2005).

다음은 경기도 소재 S고등학교 자연계열 2학년 학생을 대상으로 진행된 '수학 Ⅱ' 수업의 일부이다.

교사: 지난 시간에는 도함수의 성질을 이용하여 함수의 특징을 판단할 수 있음을 배웠어요. 여기 두 함수가 그래프로 주어져 있습니다. 예제 1에서 두 함수 사이의 관계를 추론할 수 있나요?
학생들: f(파랑)는 g(빨강)의 도함수가 되요.
교사: 왜 그렇지요?
학생 A: g는 4차 함수인데, 미분하면 3차가 되고 f도 3차이니깐요.
교사: g가 4차, f가 3차? 주어진 그래프는 다항함수의 그래프라 하는 거니? 만약 다항함수라 하더라도 차수가 같으면 두 함수 사이의 관계는 어떻게 되나요? 학생 A. 예제 2에서 하나의 함수가 다른 함수의 도함수가 되는데 그 이유를 설명할 수 있나요?
학생 A: f가 3차이고, 어? g도 3차인데…….



위에 제시된 교사와 학생의 대화는 미적분 수업에서 흔히 관찰되는 모습이다. 예제 1과 예제 2에서 제시된 함수들의 관계를 다항함수의 차수로 정당화하는 학생들은 도함수의 성질과 관련된 개념구조에 대한 이해보다는 함수식을 이용한 대수적 조작에 익숙하다. 이는 학생들이 시각적으로 보다는 대수적으로 생각하려는 경향이 강하다는 Tall(1991)의 주장과 학생들이 미적분 시험에서 전형적인 문제해결을 위해 기하적인 방법보다는 대수적 방법을 일반적으로 더 사용한다는 Vinner(1989)의 주장에 의해 뒷받침된다. 이와 같은 현상은 미적분을 수나 기호의 능숙한 조작활동으로 여기는 생각에서 비롯되었고(Hallet, 1991), 학생들이 하나의 표상에서 다른 표상으로 모순 없이 번역할 수 있는 수학적 능력(Janvier, 1987)을 기르기 위한 지도가 이루어지지 않는 등 대수적인 계산과 전형적인 유형별 문제의 해결에만 치중하고 있는 현재의 수학교육 문제를 드러낸다(임선정, 2005).

그래프는 현상을 분석하고 이해하는 데 유용한 수학

* 접수일(2013년 10월 04일), 수정일(2013년 12월 26일), 게재확정일(2014년 02월 12일)
* ZDM분류 : C34
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 도함수의 성질, 수학적 개념구조의 관계망, 이계도함수, 함수와 도함수의 그래프
† 교신저자

적 표상으로서, 특히 미적분학의 많은 응용에서 현상을 수식이 주어지지 않은 그래프의 형태만으로 이해하는 경우가 많으므로 학생들은 그래프의 의미를 이해하고 그것으로부터 정보를 얻어내는 활동 즉, 그래프를 해석할 수 있어야 한다(Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). 그러나 학교수학의 미적분 교육에서 함수식의 대수적인 접근에 집중한 나머지 기하적인 측면을 간과하여 그래프 접근법을 통한 미적분의 개념 학습을 소홀히 하고 있다(우정호, 2001). 더욱이 학생들은 함수식이 주어져 있을 때에는 원시함수를 어렵지 않게 구하는 데 반해, 피적분함수의 함수식이 주어지지 않고 그래프만 제시된 상황에서는 원시함수의 그래프의 특징을 예측하기 어려워하였다(Tall, 2003; Thomas & Hong, 1996). 이는 미분 영역에서 학생들에게 도함수의 계산을 강조하거나 '접선'에만 국한하여 미분의 기하적 의미를 제공하고, 적분 영역에서는 학생들이 적분의 의미를 탐구하기보다는 원시함수를 이용하여 적분을 계산하거나 곡선으로 둘러싸인 부분이나 도형의 넓이를 적분으로 구하는 기하적 접근 문제에 국한하여 이루어지기 때문에 나타나는 현상이다(우정호, 2001; 정연준, 2010). 그러나 도함수의 개념의 중요한 의미는 곡선의 접선을 구하는 데 국한되는 것이 아니라, 함수의 변화량과 시간(변수)에 따른 변화율의 관계를 이해하는 데 있으며(정상권, 2011), 또한 미적분학의 많은 응용들은 도함수에 대한 정보로부터 그 함수의 원시함수에 대한 정보를 유추하는 능력에 의존한다. 따라서 자연과학 및 공학 분야의 학습의 기초를 다지기 위한 고등학교 미적분 교육에서는 함수와 도함수의 사이의 관계를 구조적으로 이해하는 학습이 중요하며, 곡선의 그래프로 시작하여 곡선의 변화를 미적분을 이용하여 연구하는 학습이 강조되어야 한다(우정호, 2001).

최근 고등학교 학생들의 미적분의 이해에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 미적분의 오류 및 오개념에 관한 연구(김민경, 2002; 김정희, 2005; 최나영, 2001), 미적분에서의 수학화 교수·학습에 관한 연구(조완영, 2006), 일계도함수와 함수 사이의 그래프의 학생들의 이해에 관한 연구(Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2010; 최나영, 2001)가 있다. 그러나 이 연구들은 함수식이 주어지지 않고 그래프 개형만 주어진 상황에서 함수와 도함수 그리고 이계도함수의 관계와 관련된 수학적 개념구조의 관계망에 대한 학생들의 이해를 설명하고 있지는 않다.

이상의 논의는 학생들이 함수식이 주어지지 않고 그래프의 개형만 주어진 상황에서 도함수의 성질에 대한 정보를 읽을 수 있는지, '함수-도함수-이계도함수'의 관계와 관련된 수학적 개념구조를 학생들이 실제로 어떻게 형성하고 있는지에 대한 고찰의 필요성을 시사한다. 따라서 본 연구에서는 함수의 그래프의 개형을 통하여 함수와 도함수 그리고 원시함수 사이의 관계를 정당화하는 데 사용되는 도함수의 성질을 분석하고 학생들이 가지고 있는 개념구조에 대한 관계망을 고찰하고자 한다. 또한 수식이 주어지지 않고 그래프의 개형만 주어진 함수들 사이의 관계를 추론하기 위해 학생들이 실제로 사용하는 사고 양식은 무엇인가 살펴보고, 이것이 학교수학의 미적분의 교수·학습에 시사하는 바를 고찰하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 도함수의 성질에 관련한 개념구조

본 연구에서는 도함수의 활용에 관한 학생들의 사고과정을 면밀하게 관찰·분석하기 위하여, 2007 개정 수학과 교육과정의 '미적분과 통계기본', '수학 Ⅱ'에 제시된 도함수의 활용에 관한 정리들과 대학수학의 해석학[1]에서 제시되는 정리들과의 차이를 분석하였다. 이를 토대로 학교수학에서 제시된 함수와 도함수의 관계와 관련된 수학적 개념구조에 대한 관계망을 구성하였다.

1) '수학 Ⅱ'[2]에서 도함수의 활용에 관한 정리들

2007 개정 수학과 교육과정에서 도함수의 활용은 '미적분과 통계기본'과 '수학 Ⅱ'에서 다룬다. 도함수의 활용에서는 접선의 방정식, 평균값의 정리, 극대와 극소의 판

1) 고등학교의 도함수의 활용 단원과 관련된 대학수학의 내용은 해석학 책마다 표현의 차이만 있을 뿐 그 내용에는 차이가 없다. 따라서 본고에서는 Bartle와 Sherbert(2000)의 해석학 책을 참고하여 수학 내용을 정리하였다.

2) 도함수의 활용 단원에서 '미적분과 통계기본'과 '수학 Ⅱ'의 차이는 교과서에서 다루는 함수의 종류의 차이 즉, '미적분과 통계기본'에서는 다항함수만을 다루는 차이가 있을 뿐 수학적 내용에는 차이가 없다. 따라서 '수학 Ⅱ' 교과서에서의 도함수의 활용에 대한 성질을 중심으로 내용을 정리한다.

정, 방정식과 부등식, 속도와 가속도의 문제를 다루고 있다([표 1]).

[표 1] '수학 II' 내용체계
[Table 1] System of content for 'Mathematics II'

영역	내용	세부 내용	지도 내용
미분법	미분계수	(생략)	(생략)
	도함수	(생략)	(생략)
	도함수의 활용	접선의 방정식	(생략)
		평균값의 정리	(생략)
		함수의 증가와 감소	함수의 증가와 감소의 뜻
			미분계수를 이용한 함수의 증가와 감소 판정
		함수의 극대와 극소	함수의 극대와 극소의 뜻과 판정
			이계도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정
			함수의 최댓값과 최솟값 구하기
		함수의 그래프	곡선의 볼록 판정
			변곡점의 뜻과 변곡점 구하기
			함수의 그래프의 개형 그리기
		방정식과 부등식에의 응용	(생략)
		속도와 가속도	(생략)

본 연구에서는 도함수의 활용의 모든 내용을 다루지 않고, 함수의 그래프가 주어진 문제 상황에서 도함수의 성질을 이용하여 함수의 정보를 추론할 수 있는 개념구조와 관련된 즉, 함수와 도함수 그리고 원시함수 사이의 관계에 관한 수학 내용 지식을 다룬다. 그 주요 내용은 도함수의 성질을 이용하여 함수의 증가와 감소를 판정하기, 함수의 극대와 극소를 판정하기 그리고 함수의 볼록성을 판정하기에 관한 것이다. 그 구체적인 내용은 다음과 같다.

- 정리 A: 도함수의 값의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판정하기
- 정리 B: 도함수의 부호의 변화에 의해 함수의 극대와 극소를 판정하기
- 정리 C: 이계도함수의 부호를 이용하여 함수의 극대와 극소를 판정하기
- 정리 D: 이계도함수의 부호를 이용하여 함수의 그래프 개형의 볼록성을 판정하기

이는 교과서에서 일반적으로 다음 [표 2]와 같이 제시된다(정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 김정배 외, 2010).

[표 2] '수학 II'의 도함수의 성질에 관한 정리
[Table 2] Theorem for the properties of derivatives in 'Mathematics II'

도함수의 성질을 이용한 함수 성질 판정	
정리 A	함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여 i. $f'(x)>0$이면, $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. ii. $f'(x)<0$이면, $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
정리 B	미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 x의 값이 증가하면서 $x=a$를 지날 때, i. $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 변하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다. ii. $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다.
정리 C	이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때, i. $f''(a)<0$이면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다. ii. $f''(a)>0$이면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다.
정리 D	이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 i. $f''(x)>0$이면, 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 아래로 볼록하다. ii. $f''(x)<0$이면, 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 위로 볼록하다.

도함수의 부호 또는 부호의 변화를 살펴 함수의 증가와 감소를 판정하거나 극대와 극소를 판정하는 정리 A와 정리 B는 각각 함수의 증가와 감소의 정의와 평균값의 정리에 의해, 극대와 극소의 정의와 정리 A에 의해 증명된다.

학교수학에서 함수의 증가와 감소의 정의[3]는 대학의

3) 구간에 속하는 임의의 $x_1<x_2$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$일 때, 함수 f는 그 구간에서 증가(감소)한다고 한다(정상권 외, 2010).

해석학에서의 엄밀한 정의[4]와 다르기 때문에, 정리 A의 함의는 필요충분조건[5]이 아니라 충분조건이다. 그러나 학생들은 필요충분조건과 충분조건의 차이를 간과하여 '함수 $f(x)=x^3$가 실수 전체에서 증가하므로 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.'와 같은 오류를 범한다. 따라서 학생들에게 정리 A의 역에 대한 반례가 존재하기 때문에 필요조건의 함의관계가 성립하지 않음을 이해시키고, 학생들이 도함수의 성질에 근거하여 함수의 증가와 감소를 판정하도록 지도해야 한다. 학교수학에서 정리 B의 함의 또한 필요충분조건이 아니다. 해석학에서의 극대와 극소의 정의[6]에 의하면 상수함수는 모든 점에서 극대이면서 극소이지만, 이와 달리 학교수학에서는 극대와 극소의 직관적인 정의[7]에 의해 상수함수는 모든 구간에서 증가상태도 감소상태도 아니므로 극대와 극소를 가지지 않는다. 따라서 학교수학에서 미분 가능한 함수에 대하여 정리 B를 학습할 때에는 도함수의 부호가 변화하는 정보에 의해 함수의 극값을 판정해야 함을 유의하여야 한다(조완영, 2011).

이계도함수를 이용하여 함수의 극대와 극소를 판정하는 정리 C는 '함수-도함수' 관계에서 성립하는 정리 A와 정리 B에 의해 유도된다. 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때 $f''(a)<0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지고, $f''(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다는 내용의 정리 C는 다음과 같이 유도된다. $f''(a)>0$이면 f''는 f'의 도함수이기 때문에 정리 A에 의해 $f'(x)$는 $x=a$ 근방에서 증가상태[8]에 있다. 따라서 $f'(a)=0$이므로 $x<a$일 때, $f'(x)<0$이고, $x>a$일 때, $f'(x)>0$이고 이는 $x=a$에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 변함을 뜻한다. 정리 B에 의해 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다(정상권 외, 2010).

함수의 그래프 개형의 볼록성은 이계도함수를 이용하여 판정할 수 있는데, 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 아래로 볼록이고, $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 위로 볼록이다는 내용의 정리 D는 정리 A와 함수의 볼록성의 정의 그리고 '접선의 기울기'의 개념으로 유도된다. 즉, 어느 구간에서 $f''(x)>0$이면 정리 A에 의해 그 구간에서 $f'(x)$는 증가하고 이는 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 그 구간에서 증가함을 나타내므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 접점을 제외하고는 접선의 위쪽에 위치함을 알 수 있다. 해석학에서는 함수의 볼록성에 대한 엄밀한 정의[9]에 의해 Taylor 정리를 이용하여 "I를 개구간이라 하고 $f: I \to R$가 I에서 이계도함수를 갖는다고 하면, f가 I에서 볼록함수이기 위한 필요충분조건은 모든 $x \in I$에 대하여 $f''(x) \geq 0$이다(Bartle & Sherbert, 2000)."를 유도한다.

위의 분석을 토대로 학교수학에서 일계도함수의 성질을 이용하여 함수의 특징을 추론하는 정리 A, 정리 B

4) 구간에 속하는 임의의 $x_1 \leq x_2$에 대하여 $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$일 때, 함수 f는 그 구간에서 증가(감소)한다고 한다(Bartle & Sherbert, 2000). 이와 같이 함수의 증가와 감소를 정의하면 정리 A는 함수의 성질을 이용하여 도함수의 정보를 추론하는 방향을 포함한다.

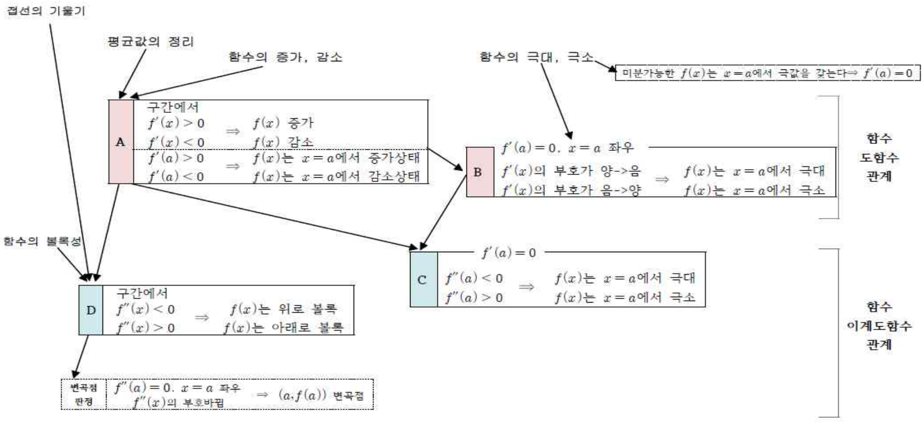
5) $f: I \to R$ 가 구간 I에서 미분가능하다고 하자. 그러면, (ⅰ) f가 I에서 증가하기 위한 필요충분조건은 모든 $x \in I$에 대하여 $f'(x) \geq 0$이고, (ⅱ) f가 I에서 감소하기 위한 필요충분조건은 모든 $x \in I$에 대하여 $f'(x) \leq 0$이다(Bartle & Sherbert, 2000). 이 때 도함수의 부호에 의해 함수의 증가와 감소를 도출하는 방향의 증명은 평균값의 정리를 이용하는 학교수학에서의 증명과 같다.

6) 모든 $x \in V \cap I$에 대하여 $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$가 되는 c의 근방 $V=V_\delta(c)$가 존재하면, 함수 $f: I \to R$는 $c \in I$에서 극댓값(극솟값)을 갖는다고 정의한다(Bartle & Sherbert, 2000). 따라서 해석학에서는 연속함수가 아니더라도 극값을 가질 수 있다.

7) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 x의 값이 증가하면서 $x=a$를 지날 때, 함숫값 $f(x)$가 (ⅰ) 증가상태에서 감소상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, 그 때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 하고, (ⅱ) 감소상태에서 증가상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 극솟값이라고 한다(정상권 외, 2010).

8) 일부 교과서는 함수의 증감상태를 정의하지 않지만 '증가상태, 감소상태'라는 표현은 사용한다. 함수의 '증가·감소'와 '증가상태·감소상태'의 차이를 구분하여 교수·학습되어야 하지만(계승혁, 하길찬, 2010), 본 연구의 문제를 벗어나기 때문에 '증가와 감소'에 '증가상태와 감소상태'의 의미를 내포한 것으로 가정하여 학생들이 그 차이를 구분한다는 전제로 본 연구를 진행한다.

9) 구간 $I \subseteq R$에 대하여 $f: I \to R$라 하자. $0 \leq t \leq 1$을 만족하는 임의의 t와 I의 임의의 점들 x_1, x_2에 대하여 $f((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$가 성립하면, f는 I에서 볼록하다고 한다(Bartle & Sherbert, 2000).



[그림 1] 도함수의 성질에 관한 정리 A, 정리 B, 정리 C, 정리 D의 관계
[Fig. 1] The relation among the theorem A, B, C, and D in the properties of derivatives

그리고 이계도함수의 성질을 이용하여 함수의 특징을 추론하는 정리 C, 정리 D의 관계를 구조화하면 다음 [그림 1][10]과 같다.

2) 도함수의 성질의 개념구조에 관한 관계망

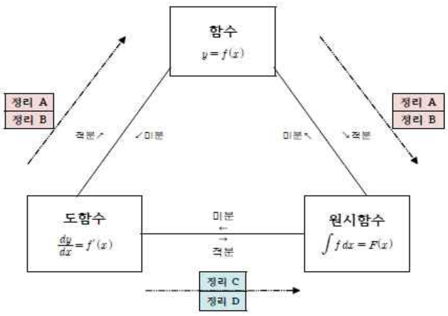
연속함수들의 집합에서 동치류를 고려하면 미분과 적분은 서로 역함수—함수에 대한 서로의 작용을 상쇄하는 작용소—관계가 존재한다. '변화량-변화율' 관계로 설명되는 이 관계는, 적분은 변화율에 대한 정보가 주어진 상황에서 변화량을 결정하는 과정으로, 미분은 변화량에 대한 정보가 주어진 상황에서 변화율을 결정하는 과정으로 정리된다(정연준, 2010). 미적분학의 기본정리는 피적분함수 $f(x)$로부터 원시함수 $F(x)$에 이르는 적분 과정을 거꾸로 원시함수 $F(x)$를 미분하여 함수 $f(x)$를 구하는 미분 과정에 적용할 수 있음을 의미하며, 학교수학에서는 연속함수의 범위에서 함수와 도함수, 피적분함수와 원시함수 사이의 역관계를 다루기 때문에 '이계도함수-도함수-함수'와 '도함수-함수-원시함수'는 동일한 관계 구조를 가진다. 따라서 학교수학에서 학생들은 미적분학의 기본정리에 관한 이해를 통해 적분이 미분의 역 과정에 해당된다는 것과 '이계도함수-도함수-함수'와 '도함수-함수-원시함수'의 동일한 개념구조를 이해하여야 한다. 또한 도함수의 개념의 중요한 의미는 곡선의 접선의 방정식을 구하는 데 국한되는 것이 아니라, 함수의 변화량과 시간에 따른 변화율의 관계를 이해하는 데 있기 때문에(정상권, 2011), 학교수학에서 학생들에게 '변화량-변화율' 관계의 의미를 바탕으로 미분과 적분의 개념을 이해하는 과정을 제공할 필요가 있다(정연준, 2010). 수학 내용의 구조를 파악한다는 의미로서 진정한 이해를 하기 위해서는 학생들은 개념구조의 관계망의 형성이 전제가 되어야 하므로(김응태, 박한식, 우정호, 2007), 학생들은 미분과 적분의 역관계를 통찰하고, 함수로부터 도함수의 정보를 얻는 미분방향과 도함수의 정보로부터 함수의 특징을 찾는 적분방향의 의미를 내포한 관계망을 형성하여야 한다.

학교수학에서 도함수의 성질과 관련된 개념들의 구조는 미분과 적분의 관점에서 어떻게 연결이 되어 있는가? 2007 개정 수학과 교육과정에서는 학생들이 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 이해하고 이를 판정할 수 있어야 함을 도함수 활용 내용영역의 목표로 제시하고 있다. 즉 학생들은 도함수의 부호를 관찰하여 함수의 증가와

10) [그림 1]의 관계를 바탕으로, 도함수의 성질을 이용하여 함수의 성질을 판단하는 정리들을 중심으로 개념구조의 관계망을 구성한다([그림 2]). Fermat의 정리나 이계도함수의 성질을 이용하여 함수의 변곡점을 판정하는 정리에 관한 관계망은 본 연구의 문제를 벗어나기 때문에 다루지 않는다. 그러나 본 연구 검사 문항을 해결한 학생들의 풀이에서 Fermat의 정리와 변곡점에 관한 학생들의 풀이가 관찰되는 바, [그림 1]에서 그 내용을 제시하였다.

감소를 판정하거나(정리 A), 도함수의 부호의 변화에 관한 정보를 읽고 함수의 극대와 극소를 판정(정리 B)할 수 있어야 한다. 이는 학생들이 도함수의 성질과 관련된 개념구조의 관계망을 형성할 때 도함수(피적분함수)의 성질을 이용하여 함수(원시함수)의 성질을 판정하는 방향 즉, 변화율이란 정보로부터 변화량에 대한 정보를 도출하는 적분방향으로 내용 구조를 파악해야 함을 의미한다. '함수-도함수-이계도함수'의 관계에서, 이계도함수의 부호에 근거하여 함수의 극대와 극소를 판정(정리 C) 또는 볼록성을 판단(정리 D)하는 정리들 또한 변화율에 대한 정보가 주어진 상황에서 변화율을 결정하는 과정, 즉 적분방향으로 연결된다.

이와 같이 미적분학의 기본정리에 의해 함수와 도함수, 피적분함수와 원시함수 사이에는 역관계가 존재하고, '함수-이계도함수'의 관계는 '도함수-함수-원시함수'의 관계에서 '원시함수-도함수'의 관계에 대응되며[11], 함수와 도함수 그리고 원시함수 사이의 관계에는 '변화량-변화율'의 관계로 설명할 수 있는 미분방향과 적분방향의 사고 과정이 내재되어 있다. 이를 토대로 도함수의 성질에 관한 개념들 사이의 관계를 연결하여 관계망으로 표현하면 다음 [그림 2]와 같다.



[그림 2] '도함수-함수-원시함수'의 개념구조에 관한 관계망

[Fig. 2] The network for the mathematical concept structure of 'derivatives-function-primitive function'

11) 학교수학에서는 연속함수의 범위에서 함수와 도함수, 피적분함수와 원시함수 사이의 역관계를 고려하기 때문에 함수와 도함수 그리고 이계도함수 사이의 관계 구조는 원시함수와 함수 그리고 도함수의 관계 구조와 동일하다.

2. 도함수의 성질에 관련한 수학적 사고양식

본 연구에서는 도함수의 활용에 관한 학생들의 사고양식을 관찰하기 위하여, '수학 II'의 교과서를 분석하여 도함수의 성질에 관한 수학적 사고 양식을 살펴보았다.

1) 기하적 사고 양식과 대수적 사고 양식

Sternberg(2001)에 따르면 학생들의 문제해결에서 나타나는 방법이 각기 다른 이유는 수학적 학습능력뿐만 아니라 교수·학습에서 성공과 실패의 영향으로 오랜 기간에 걸쳐 형성되어 일괄적으로 나타나는 습관적 패턴 또는 선호하는 방식인 사고 양식의 차이에서 비롯된다. 따라서 교수·학습 과정에서 기하적 사고와 대수적 사고에 관한 학생들의 사고 양식을 모두 고려해야 할 뿐만 아니라, 학생들이 하나의 사고에 고착되지 않고 다양한 사고 양식을 형성할 수 있도록 지도되어야 한다(Ferri & Kaiser, 2003). Ferri와 Kaiser(2003)의 두 가지 사고 유형, 문제해결 과정에서 대수식을 주로 활용하는 대수적 사고 양식과 시각적으로 나타난 그래프와 같은 표상으로부터 정보를 활용하는 기하적 사고 양식을 기반으로 학생들의 문제해결 과정을 살펴보면, 학생들은 문제 상황에 따라 대수적 혹은 기하적 양식을 적절하게 혼합하여 사고하지 않고 전반적으로 수식에 의존하는 경향이 강하다(임선정, 2005). 임선정(2005)의 연구에 따르면, 학생들은 함수나 도함수의 그래프로부터 정보를 읽어 변화와 움직임을 인식하기보다는 기울기나 넓이가 주는 물리적 의미 그 자체를 암기하여 문제에 적용한다.

도함수의 성질에 관한 교과서의 예제 유형들은 문제해결에 관한 학생들의 사고 양식의 형성에 어떤 영향을 미치는가? 학교수학에서 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 그리고 볼록성에 관하여 개념을 도입할 때는 직관적인 이해를 바탕으로 기하적으로 접근하여 교수·학습이 이루어지고, 함수와 도함수 사이의 관계에 관한 정리들을 학습할 때는 기하적, 대수적 접근이 혼합된 형태로 이루어진다. 그러나 학생들이 도함수 성질에 관한 개념구조의 관계망을 형성하도록 돕기 위한 교과서의 예제 유형들은 대부분 대수적 접근으로 문제를 해결할 수 있는 형태이다. 미정계수를 포함한 함수식을 직접 미분하여 도함수를 구한 후 제시된 함수가 증가함수가 되기 위한 조건을 구하는 문제가 대수적 조작이 주를 이루는 문

[표 3] 수학 II 도함수의 활용단원의 예제 문항에 대한 사고 양식
[Table 3] The thinking style for example items related to the applications of derivatives in ‘Mathematics II’

내용	도함수의 활용 단원 교과서 예제 문항 유형	특성
함수의 증가와 감소	• 함수식이 주어질 때, 그 함수의 증가와 감소를 조사 • 미정계수를 포함한 함수식이 주어지고 증가(감소)함수가 되기 위한 미정계수의 조건 구하기	대수적 사고 양식 정리 A
함수의 극대와 극소	• 함수식이 주어지고 극값을 구한 후 그래프를 그리기(다항함수, 분수함수, 삼각함수, 절댓값 함수, 무리함수, 지수함수, 로그함수) • 미정계수를 포함한 함수식이 주어지고 극값을 갖기 위한 미정계수의 조건 구하기	대수적 사고 양식 정리 B, C
	• 함수의 그래프를 통해 도함수의 그래프를 추정하기 • 도함수의 그래프를 통해 함수의 그래프를 추정하기	기하적 사고 양식 정리 A, B
함수의 볼록성, 변곡점	• 함수식이 주어질 때, 곡선의 볼록성과 변곡점을 조사 • 미정계수를 포함한 함수식이 주어지고, 볼록성과 변곡점을 활용하여 미정계수의 조건 구하기	대수적 사고 양식 정리 C, D
함수의 그래프	• 함수식이 주어질 때, 함수의 증가, 감소와 극대, 극소(도함수의 부호로 판정), 곡선의 볼록성과 변곡점(이계도함수의 부호로 판정)을 이용하여 그래프의 개형 그리기	기하적 사고 양식, 대수적 사고 양식 정리 A, B, C, D

제 유형의 예이다. 기하적 사고 양식으로 해결할 수 있는 문제는 함수의 그래프로부터 도함수의 그래프를 추정하거나 도함수의 그래프로부터 함수의 그래프를 추정하는 유형의 문제로 제시되지만, 함수식을 직접 미분하여 계산하는 문제 유형보다 비중이 작다.[12] 특히 ‘도함수’를 거치지 않고 ‘함수-이계도함수’의 관계를 기하적 접근으로 확인할 수 있는 문제를 제시한 교과서는 없었다. 함수식에 의존하는 대수적 사고 양식의 문제 유형이 그 비중을 대부분 차지하며, 기하적 사고 양식으로서는 일부 그래프 개형을 그리는 문제 유형으로 한정되어 나타난다([표 3]).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상

본 연구는 학업성취도가 상위권인 경기도 소재 일반계 고등학교 2학년과 3학년 자연계열 학생들을 대상으로 하였다. 연구 대상으로 선정된 고등학교 2학년 60명과 3학년 28명은 ‘수학 II’[13]를 학습한 자연계열 학생들로, 이들의 모의고사 수리영역의 백분위 평균은 각각 94.125와 91.124로서 학교에서 상위권으로 분류된 학생들이다. 이는 본 연구가 학생들에 따른 문제해결능력 수준을 보려는 것이 아니라, 함수 간의 관계에 대한 정답을 아는 학생들이 실제 정답을 정당화하는 데에서 개념의 구조와 그 이해의 사고를 관찰하기 위함이다. 따라서 연구의 수월성을 위하여 실제 문제를 해결하는 데 어려움이 없는 학생들을 연구 대상으로 선정하였다.

2. 검사 문항

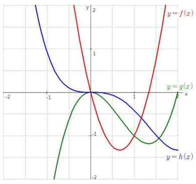
본 연구는 고등학생들이 도함수와 함수의 관계와 이계도함수와 함수의 관계에 대한 개념을 어떻게 구조화하였는지 그 이해를 관찰하는 것, 함수와 도함수 그리고 원시함수 사이의 관계를 추론하기 위해 학생들이 실제로 사용하는 사고 양식은 무엇인가를 살펴보는 것을 목표로 하였다. 이를 구현하기 위해서는 도함수의 성질을 이용할 수 있도록 명확히 읽을 수 있는 함수의 형태를 제시해야 하며, 기하적 사고 양식으로 접근하여 문제를 해결할 수 있는 과제 형태여야 한다. 이를 위해 2007 개정 수학과 교육과정의 ‘수학 II’의 ‘도함수의 활용’ 단원에

12) ‘수학 II(최용준, 김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 조동석 외, 2010)’와 ‘수학 II 익힘책(계승혁, 김홍종, 하길찬, 박복현, 장성욱, 박장순, 2010; 황선욱, 강병개, 허민, 최수창, 신동윤, 장경성 외, 2010)’에는 기하적 접근으로 문제를 해결할 수 있는 예제가 제시되어 있다.

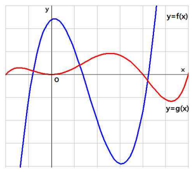
13) ‘수학 II’에서와는 달리 ‘미적분과 통계기본’에서는 다항함수에 국한되어 도함수의 활용을 다루기 때문에 본 연구의 대상을 ‘수학 II’를 학습한 자연계열 학생으로 한다.

수록된 문제를 분석하여([표 3]) 검사 문항을 제작하였다. 그 내용은 다음과 같다.

문제 1. 다음 제시된 세 함수는 각각 함수, 도함수, 그 함수의 부정적분들 가운데 한 함수에 대한 그래프의 일부이다. 각각의 함수에 대응되는 그래프를 찾고, 자신의 풀이를 **정당화**하시오[14].



문제 2. 다음 제시된 두 함수의 그래프는 각각 어느 함수의 도함수와 부정적분들 가운데 하나의 함수에 대한 그래프의 일부이다. 각각의 함수에 대응되는 그래프를 찾고, 그 이유를 **정당화**하시오.



문제 1은 학생들이 함수식이 주어지지 않은 세 개의 서로 다른 함수의 그래프의 개형에 대한 정보만을 이용하여 함수와 도함수 그리고 원시함수의 관계에 관한 정당화를 보이는 과정을 관찰하기 위해 제시하였다. 이 과정에서 나타나는 정리 A, 정리 B, 정리 C, 정리 D에 관한 학생들의 문제해결 과정을 분석하여 '도함수–함수–원시함수'의 관계에 관한 학생들의 이해를 살펴보고자 하였다. 문제 2는 이계도함수와 함수의 관계에 대한 정리 C와 정리 D의 이해를 조사하기 위해 함수식이 제시되지 않은 두 개의 그래프 개형으로 구성하였다. 각 문제들은 개념구조에 대한 학생들의 이해를 살펴보기 위하여 서술형 문항으로 제시하였다.

위와 같은 문제를 제시할 때 두 가지 사항에 유의하였다. 첫째, '도함수'와 '원시함수'의 개념을 통합하여 미분과 적분의 사고 과정이 나타나게 하기 위하여 '함수–도함수–이계도함수'라는 표현 대신 '도함수–함수–원시함수'라는 표현을 사용하였다. 둘째, 학생들이 주어진 그래프의 형태만 보고 다항함수의 그래프로 판단하여 다항함수의 차수에 의한 정당화를 보이는 것을 방지하기 위해, 제시된 함수는 다항식 항을 갖지만 다항함수로 단정을 지을 수 없음을 인지하도록 '함수에 대한 그래프의 일부'라는 표현을 사용하였다.

14) 학생들이 '도함수–함수–원시함수'의 관계를 도함수의 성질을 이용하여 정당화할 수 있도록, 검사 문항은 도함수의 성질의 개념을 명확히 읽을 수 있는 형태의 함수를 제시해야 한다. 이를 위해 문제 1은 Arzarello와 Sabena(2011)의 논문에 제시된 검사 문항을 참고하였으며, 이를 토대로 문제 2는 본 연구의 의도에 맞게 제작하였다.

3. 자료 수집 및 분석

분석을 위한 자료는 도함수의 성질에 관련한 학생들 개개인의 문제해결 과정을 면밀히 분석하기 위하여 제작된 서술형 문항으로 이루어진 활동지이다. 활동지를 검사하기 전에 학생들에게 연구의 개괄적 요지에 대하여 설명하였으며, 풀이 과정을 자세히 서술할 것을 안내하였다. 학생들은 주어진 문항들을 30분 동안 해결하였고, 학생들의 활동지는 분석을 위해 모두 수합하였다.

이 자료를 토대로 개개인의 문제해결 과정을 반복적으로 분석하면서, 공통적 범주와 주제를 파악하는 질적 분석 과정을 통해(우정호 외, 2007), 문제해결 과정에서 나타난 학생들의 사고의 특성에 따라 그 결과를 4가지로 범주화하였다. 수학적 사고 양식과 관련한 결과를 제외하고 이 연구에서 논의되는 결과의 범주는 기존의 이론적 틀에 의해 분류되고 조직된 것이 아니라, 앞서 분석된 수학적 개념구조의 관계망과 관련한 학생들의 반응을 바탕으로 얻어진 결과들이다. 각 범주에 해당하는 문제해결 과정의 사례들을 예시하고 분석하여 도함수의 성질에 관련한 학생들의 개념구조와 그 이해의 사고를 고찰하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

이 장에서는 [그림 2]에 제시된 '도함수–함수–원시함수'의 개념구조에 대한 관계망과 수학적 사고 양식이 함수식이 주어지지 않고 그래프의 개형만 주어진 문제를 해결할 때 실제 학생들에게 어떻게 나타나는지를 분석하고 그 결과의 의미를 고찰할 것이다.

1. 결과 분석

함수식이 주어지지 않고 그래프 개형만 주어진 상황에서, 문제 1은 세 함수의 관계를 도함수와 함수 그리고 원시함수의 관계로 정당화하는 과정에서, 문제 2는 두 함수의 관계를 함수와 이계도함수의 관계로 정당화하는 과정에서 나타나는 학생들의 도함수의 성질에 대한 개념

의 관계망과 사고 양식을 관찰하기 위한 문항이다. 학생들의 풀이를 분석한 결과, 도함수의 활용과 관련된 개념과 정리를 사용하여 문제를 해결한 학생은 문제 1에서는 44명, 문제 2에서는 33명이었다. 그 외에 구체적인 함수식을 구하거나 다항함수식의 차수를 이용하는 등 대수적 접근을 한 학생은 문제 1에서는 36명, 문제 2에서는 31명이었으며 나머지는 정당화의 과정을 보여주지 않고 정답만 제시하거나 응답하지 않은 학생들이었다([표 4]).

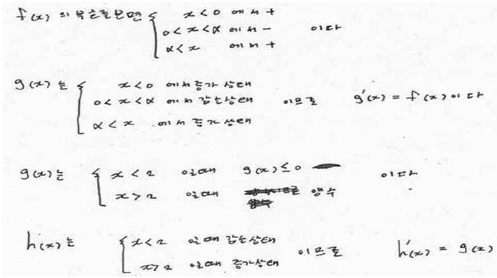
[표 4] 문제 1과 문제 2에 대한 분석 결과
[Table 4] Analysis results of the problem 1 and 2

문제해결 과정		학생 수(명) 문제 1	학생 수(명) 문제 2
도함수의 활용과 관련된 개념과 정리 적용	정리 A, B, C, D, 접선의 기울기 활용	24	10
	그 외 도함수의 개념들 사이의 잘못된 관계 이용	20	23
함수식을 구하거나 다항함수식의 차수를 이용		36	31
정당화 과정 없이 정답만 제시		8	19
무응답		0	5

학생들의 반응을 토대로 학생들의 사고의 특성을 4가지로 범주화하였으며, 자세한 문제해결 과정과 그 분석 내용은 다음과 같다.

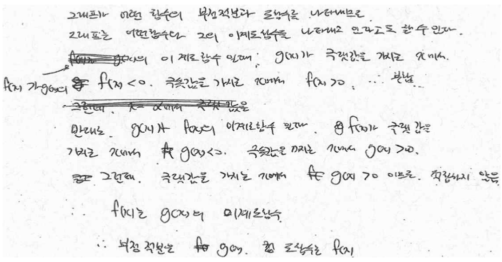
1) '함수-도함수'의 관계에 편중된 사고

문제 1에 대하여 수식 없이 그래프 개형에서 얻을 수 있는 함수의 성질을 찾아서 정당화를 보인 학생들은 88명 중에서 44명이었으며, 이 중에서 도함수의 성질과 관련된 정리를 사용한 학생들은 24명이었다. 접선의 기울기를 직접 그려서 함수와 도함수의 관계를 찾아 해결하는 학생들도 관찰되었다. 그러나 정리 C 또는 정리 D의 이계도함수의 성질을 사용하여 함수의 관계를 정당화한 풀이는 관찰되지 않았다. 학생들은 문제 1의 제시문의 '함수, 도함수, 그 함수의 부정적분들 가운데 한 함수'라는 표현에서 세 함수의 관계를 두 함수씩 짝을 지어 함수와 도함수의 관계로 인식, 이와 관련된 정리 A 또는 정리 B를 사용하여 정당화를 하였다([그림 3]).

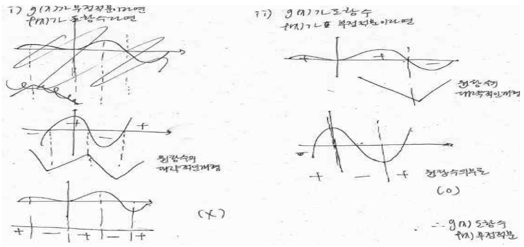


[그림 3] 문제 1에서 정리 A를 사용한 학생 답안
[Fig. 3] The case using the theorem A in the problem 1

이계도함수의 성질에 관한 정리를 사용하여 문제를 해결하도록 의도한 문제 2에서 10명의 학생들은 도함수의 성질과 관련된 정리를 사용하였으며, 이 중 4명의 학생들이 하나의 함수의 부호를 이용하여 다른 함수의 극대와 극소(정리 C) 또는 볼록성을 판단하여(정리 D) 두 함수의 관계를 정당화하였다([그림 4]). 나머지 6명의 학생들은 '어느 함수의 도함수와 부정적분들 가운데 하나의 함수'를 '이계도함수-함수'의 관계로 관점을 전환하지 않고 접선의 기울기나 도함수의 부호(정리 A 또는 정리 B)를 이용하여 생략된 '어느 함수'를 찾아 주어진 그래프의 두 함수 사이의 관계를 정당화하는 과정을 보여주었다([그림 5]). 학생들은 함수식이 주어지지 않은 그래프 개형에서 '함수-이계도함수'의 관계와 관련된 정보를 도출하는 것을 어려워하였다.



[그림 4] 문제 2에서 정리 C를 사용한 학생 답안
[Fig. 4] The case using the theorem C in the problem 2

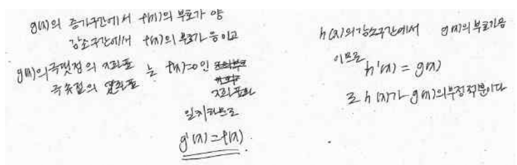


[그림 5] 문제 2에서 생략된 함수를 찾는 과정을 보이는 학생 답안

[Fig. 5] The case using the process of finding a hidden function in the problem 2

2) 미분방향으로 편향된 사고 과정

문제 1과 문제 2에 대해 도함수의 성질과 관련된 정리를 이용하여 정당화를 보인 24명과 10명의 학생 중에서 각각 16명과 7명의 학생은 미분방향으로의 사고 과정을 보였으며, 문제 2를 해결한 학생 중 3명의 풀이에서는 적분방향과 미분방향의 사고 과정이 모두 관찰되었다. 학생들은 변화량을 이용하여 변화율을 구하는 과정의 사고가 익숙하므로, 함수의 그래프에서 관찰되는 정보(변화량)로부터 도함수의 그래프에 대한 정보(변화율)를 예측하는 미분방향으로 사고가 편향된 것으로 해석된다. 한 학생은 '$g(x)$의 극값에서 $f(x)$의 부호가 바뀌고, $h(x)$는 감소함수이므로 그 도함수가 모든 실수에서 0보다 작거나 같아야 한다.'라는 이유로 세 함수 사이의 관계를 도함수를 찾아가는 방향으로 설명하였다. 미분방향으로 편향된 사고는 증가(감소)하는 함수를 찾고, 증가(감소)하는 구간에서 다른 함수의 함숫값은 양수이기 때문에 두 함수 사이의 관계는 '함수-도함수'의 관계로 정당화하는 학생의 풀이에서도 확인된다([그림 6]).



[그림 6] 미분방향으로의 사고 과정을 보이는 학생 답안

[Fig. 6] The case appearing the thinking process which is differentiation

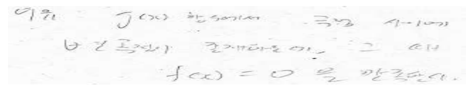
3) 도함수 성질과 관련된 개념들 사이의 잘못된 관계망

학생들의 문제해결 과정을 분석한 결과, 학생들은 도함수의 성질에 관한 개념을 구조적으로 연결하지 않고, 개개의 개념을 이해하거나 그 개념들 사이의 잘못된 관계망을 형성하고 있음이 관찰되었다.

문제 1에 대하여 함수와 도함수의 성질과 관련된 정보를 찾아 해결한 44명의 학생 중에서 20명의 학생들은 하나의 함수의 함숫값이 0인 곳에서 다른 함수가 극값을 가지기 때문에 두 함수 사이의 관계는 함수와 도함수의 관계를 갖는다는 이유로 함수와 도함수의 관계를 정당화하였다. 다시 말해, 이 학생들은 '미분 가능한 함수가 극값을 가지면 그 점에서 도함수의 함숫값은 0이다.'라는 Fermat의 정리를 구조적으로 바르게 이해하지 못하고, 단순히 함수의 극값과 도함수의 함숫값을 관련지어 함수와 도함수의 관계를 정당화하는데 Fermat의 정리를 사용하였다. 다음은 이러한 이유로 정당화를 보인 학생의 답안이다.

> $f(x)=0$인 점에서 $g(x)$가 극값을 가지므로 $f(x)$는 $g(x)$의 도함수이다. $g(x)=0$인 점에서 $h(x)$가 극값을 가지고 $f(x)=0$인 지점에서 $h(x)$의 이계도함수가 0이 되므로 함수는 $g(x)$, 도함수는 $f(x)$, 부정적분은 $h(x)$이다.

문제 2에 대하여 33명의 학생 중에 23명의 학생들이 함수의 변곡점이라 생각되는 점에서 다른 함수의 함숫값이 0이기 때문에 함수와 이계도함수의 관계가 성립한다는 논리로 정당화 과정을 보였다([그림 7]). 이는 학생들이 교과서에 제시된 함수의 변곡점과 도함수의 관계를 함수의 변곡점을 찾기 위해 도함수의 정보를 이용하는 것으로 이해하지 않고, '변곡점'과 '$f'(x)=0$'를 단편적으로 연결지어 함수와 도함수의 관계를 정당화하기 위한 이유로서 사용한 것으로 분석된다.

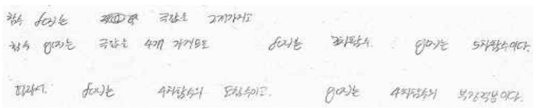


[그림 7] 개념들 사이의 잘못된 관계망이 나타난 학생 답안

[Fig. 7] The case using the wrong network among the mathematical concepts

4) 도함수 성질에 관한 대수적 사고 양식

문제 1과 문제 2를 해결하는 과정에서 각각 36명과 31명의 학생이 대수적 접근 방식으로 문제를 해결하여 함수들 사이의 관계에 대한 답은 맞았으나 그 과정은 잘못된 풀이였다.[15] 이 학생들은 기하적 사고 양식, 즉 그래프 개형에서 관찰되는 함수의 정보를 읽고 함수와 도함수 사이의 관계를 정당화하기보다는 대수식의 조작을 기본으로 하는 대수적 사고 양식을 선호하는 것으로 해석된다. 검사 문항에서 제시된 함수에 대하여 '다항식 항을 갖지만 다항함수로 단정할 수 없음'을 학생들이 인지하도록 '함수의 일부를 나타내는 그래프'라는 표현을 문제의 제시문에 기술하였다. 그러나 학생들은 주어진 그래프를 다항함수의 그래프로 인식하여 미적분의 공식을 적용, 직접 함수식을 구하려고 시도하거나 '다항함수의 차수'를 찾아 도함수와 함수 그리고 원시함수의 관계를 정당화하였다.[16] 특히, 문제 1의 해결 과정에서는 기하적 사고 양식을 보여준 학생들 중 그 일부의 학생들도 '함수-이계도함수'와 관련된 개념구조의 관계망을 살펴보고자 제시된 문제 2에서는 이계도함수의 정보를 직접 읽어내는 것을 어려워하며 'g의 차수가 f의 차수보다 높으므로', '5차를 두 번 미분하면 3차이므로' 등의 설명으로 문제를 해결하였다. 대수적 접근 방식으로 문제를 해결한 학생들 중 각각의 함수의 차수를 정당화하는 이유를 구체적으로 보여주는 학생도 있었다([그림 8]).



[그림 8] 다항함수의 차수로 문제를 해결한 학생 답안
[Fig. 8] The case using the degree of polynomial

15) 문제 1과 문제 2에 대하여 각각 풀이 과정 없이 정답만 제시한 8명과 19명의 학생들은 주어진 그래프의 함수를 다항함수로 인식, 그 함수식의 최고차항의 차수를 이용하여 문제를 해결한 것으로 추정된다. 따라서 대수적 접근으로 문제 1과 문제 2를 푼 학생의 수는 각각 44명과 50명으로 추정할 수 있을 것이다. 그러나 보다 정확한 이유를 분석하기 위해 면담 등의 추가적인 질적 연구가 필요하므로 정답만 제시한 학생들의 수는 제외하고 그 결과를 분석한다.

16) 제시된 문제의 조건만으로는 구체적인 함수식을 구할 수 없고, 또한 다항식 항을 가진 것만으로는 함수식의 최고차항의 차수에 의한 정당성을 보장받지 못한다.

2. 분석 결과에 대한 논의

앞서 언급한 분석 결과는 실제 고등학생들이 함수와 도함수 그리고 원시함수의 관계와 관련한 개념 구조의 관계망과 함수들의 관계를 추론하기 위해 사용되는 사고 양식에 대한 것으로, 그 결과의 이유를 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 문제해결을 위한 학생들의 사고는 '함수-이계도함수'의 관계보다 '함수-도함수'의 관계에 편중되어 있다. 도함수의 활용에 관한 정리를 이용하여 문제 1을 해결한 학생들은 두 함수씩 짝을 짓고 '함수-도함수'의 관계와 관련된 정리 A와 정리 B를 사용하여 정당화의 과정을 보여줄 뿐, '함수-이계도함수'의 관계를 고려하지 않았다. '함수-이계도함수'의 관점을 유도한 문제 2에서는 정리 C와 정리 D를 이용한 풀이가 관찰되었으나, 일부 학생들의 풀이에서 '함수-도함수'의 관계를 근거로 숨겨진 함수-문제에서 제시된 두 함수를 미적분 관점에서 직접 연결하는-의 개형을 찾아서 정당화하는 과정이 관찰되었다.

이는 '함수-이계도함수'에 관한 정리 C와 정리 D가 '함수-도함수'의 관계에서 성립하는 정리 A와 정리 B 그리고 접선의 기울기에 의해 유도되기 때문에([그림 1]), 많은 학생들이 함수식이 주어지지 않은 그래프 개형에서 직접 이계도함수의 정보를 도출하는 것을 어려워하기 때문에 나타나는 현상이다.

또한 이계도함수의 성질과 관련된 교과서의 문제 유형들이 함수식을 두 번 미분하여 이계도함수의 값을 구한 후 주어진 함수의 극값을 구하거나 혹은 볼록성을 판정, 이를 근거로 함수의 그래프를 그리는 전형적인 형태로만 제시되고 있기 때문에, 학생들은 함수식이 없는 그래프 개형의 정보와 '함수-이계도함수'의 관계를 직접 연결 짓지 못한다. 다시 말해, '대수적 조작 → 정리 C·정리 D 사용 → 그래프 그리기'라는 알고리즘에 익숙해진 학생들은 그래프 개형에서 직접 이계도함수의 구조적 특성을 파악하기 어려워한다.

둘째, 적분방향보다 미분방향, 즉 함수의 그래프의 정보로부터 도함수의 그래프의 정보를 도출하는 방향으로 학생들의 사고 과정이 편향되어 있다. 도함수의 활용에 관한 정리를 이용하여 문제 1과 문제 2를 해결한 학생들은 각각 함수의 증가와 감소 또는 극값으로부터 직접 도

함수의 부호를 결정한 후 이와 일치하는 그래프를 찾거나, 하나의 함수의 그래프 개형에서 직접 도함수의 그래프 개형을 그려서 그와 일치하는 그래프를 찾았다.

도함수에 대한 정보로부터 함수의 정보를 추론하는 적분방향의 개념적 관계를 내포하고 있는 교과서의 정리들과 달리 학생들에게 그 반대방향 즉, 미분방향으로 정보를 도출하는 사고 과정이 나타나는 이유는 무엇일까? 그 이유 중 하나는 교과서에서 미분과 적분의 '변화율-변화량'의 관계를 개념적 이해를 위한 소재로만 다루어 그 구조적 의미에 관한 학습이 충분히 이루어지지 않기 때문이고(정연준, 2010), 대부분 학생들이 교과서의 예제 유형들을 해결할 때 함수식을 직접 미분하여 도함수를 구한 후 도함수의 성질을 이용하여 함수의 성질을 판정하는 순서로 해결하였기 때문에 적분방향보다는 미분방향으로의 사고를 우선시하는 학습에서 그 이유를 찾을 수 있다.

또한 학교수학에서 '접선과 곡선'은 학생들에게 구체적으로 식이 주어지지 않거나 직접 계산할 수 없는 상황에서 미분에 관련된 과제를 효과적으로 해결할 수 있는 수단으로 활용되어 왔기 때문에, 학생들의 도함수의 성질에 대한 이해가 '접선의 기울기'라는 기하적 이미지에 고착되어 학생들은 도함수가 아닌 함수로부터 정보를 도출하는 방향으로 사고한다. 이는 하나의 함수의 그래프 개형에서 직접 접선의 기울기를 그리면서 미분계수에 대한 정보를 찾는 학생들의 문제풀이에 의해 뒷받침된다.

셋째, 일부 학생들은 도함수의 성질과 관련된 개념들 사이에서 잘못된 관계망을 형성하고 있다. 이는 하나의 함수의 함숫값이 0인 곳에서 다른 함수가 극값을 갖는다는 이유로 문제 1을 해결한 학생의 풀이답안과 '변곡점으로 추정되는 점에서 다른 함수의 함숫값은 0'을 근거로 문제 2를 해결한 학생의 답안에서 관찰할 수 있다. 앞서 언급한 정리 A와 정리 B에 편중된 이해와 미분방향으로의 편향된 사고 과정을 보여준 학생들과 달리, 이 학생들은 도함수의 성질에 대하여 개념과 개념 사이의 관계를 구조적으로 이해하지 않고 개념구조의 관계망을 바르게 형성하지 못하여 단편적으로 한 점에서의 함숫값과 관련된 피상적인 처리 과정으로서 도함수의 개념을 이해하고 있으며, 도함수의 성질 그 자체를 암기하여 문제에 적용하는 경향을 가진 것으로 분석된다. 진정한 개념의 이해는 개념 하나의 단편적인 이해가 아니라 개념들 사이의 올바른 관계망의 형성이 전제되어야 함은 자명한 사실이다. 하지만 학생들은 도함수의 성질과 관련된 개념들 사이의 관계를 공식화하여 알고리즘 학습을 주로 하므로 개념구조의 관계망에 대한 진정한 이해가 이루어지지 않는다.

넷째, 학생들은 함수식이 주어지지 않은 그래프 개형에서 함수에 대한 정보를 직접 도출하는 기하적 사고 양식보다는 구체적으로 함수식을 구하거나 다항함수의 차수를 이용하는 대수적 사고 양식에 의존하는 경향을 보인다. 이는 '함수-도함수'의 관계(정리 A, 정리 B)와 '함수-이계도함수'의 관계(정리 C, 정리 D)에 대한 학생들의 이해가 미흡함을 확인할 수 있을 뿐만 아니라, 학교수학의 미적분 지도와 관련하여 교과서에서 대수적 접근 방식이 강조되고 있음을 확인할 수 있는 결과이다. 도함수의 활용 단원의 예제 유형들은 대부분 함수식을 직접 미분하여 도함수를 구한 후 함수의 증가와 감소를 판단하거나 극값을 구하는 등의 대수적 조작을 기반으로 문제를 해결할 수 있는 형태로 구성되어 있기 때문에, 함수의 그래프의 개형에서 직접 정보를 읽어 기하적 접근 방식으로 해결해야 하는 문제에서도 학생들은 대수적 조작에 의존하려는 경향을 보인다. 교과서에서 제시되는 기하적 접근 방식의 문제 유형은 '함수-도함수' 관계의 그래프 유형에 국한되어 있고 대부분 다항함수의 그래프 꼴로 제시된다. 또한 이계도함수와 관련한 기하적 사고 접근 문제 유형은 함수식에서 출발하여 그래프의 성질을 이용한 함수의 그래프를 그리는 형태로만 제시되기 때문에, 학생들은 습관처럼 함수식을 먼저 찾아 문제를 해결하고자 한다.

V. 결론 및 제언

수학적 개념은 독립적으로 존재하는 것이 아니라 구조적으로 존재하므로 함수와 도함수 사이의 관계에 내재된 개념구조를 미분과 적분의 관점에서 이해하고 이를 활용하는 수학적 능력은 중요하다. 따라서 학생들은 도함수의 성질과 관련된 개념구조에 대한 올바른 관계망을 형성하여야 한다. 또한 다양한 현상을 이해하기 위해서는 그래프의 형태만으로 제공된 정보를 읽는 능력이 필

요하며, 이는 학생들에게 자연 과학 및 공학 분야의 기초를 제공하기 위한 미적분 교육에서 함양되어져야 한다. 그러나 많은 고등학생들이 미적분 개념들 사이의 관계에 대한 이해보다는 단편적으로 개념들만 이해하고 대수적 계산과 전형적인 유형의 문제해결에만 치우쳐 학습하고 있다는 문제의식으로부터 본 연구를 진행하였다.

본 연구에서는 우선, 고등학교 '수학 Ⅱ'의 도함수의 활용 단원을 분석하여 함수와 도함수의 관계와 관련된 수학적 개념구조를 정리하였다. 이를 토대로 함수식이 주어지지 않고 그래프 개형만 제시된 문제 상황에서 '도함수-함수-원시함수'의 관계와 관련된 수학적 개념구조에 대한 고등학생들의 이해를 조사하고, 학생들이 실제 하게 되는 사고의 특성을 고찰하는 데 중점을 두었다. 이를 위해 검사 문항을 서술형 문항으로 구성하였으며, 경기도 소재 일반계 고등학교 2학년과 3학년 자연계열 학생 88명을 대상으로 실시하였다. 연구 결과, 학생들은 함수와 도함수 그리고 이계도함수의 관계와 관련된 정리를 사용하거나 다항함수의 차수를 이용한 대수적 접근 방식으로 문제를 해결하였다. 이와 같이 학생들의 반응을 토대로 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 문제해결을 위한 학생들의 사고는 '함수-이계도함수'의 관계보다 '함수-도함수'의 관계에 편중되어 있다. 둘째, 적분방향보다는 함수의 그래프의 정보로부터 도함수의 그래프의 정보를 도출하는 미분방향으로 학생들의 사고 과정이 편향되어 있다. 셋째, 일부 학생들은 도함수의 성질과 관련된 개념들 사이에서 잘못된 관계망을 형성하고 있다. 마지막으로, 학생들은 함수식이 주어지지 않은 그래프 개형에서 함수에 대한 정보를 직접 도출하는 기하적 사고 양식보다는 구체적으로 함수식을 구하거나 다항함수의 차수를 이용하는 대수적 사고 양식에 의존하는 경향을 보인다.

앞서 논의한 결론을 바탕으로, 미적분 개념 학습에 관한 교육적 시사점을 제안한다. 학생들이 도함수의 성질과 관련된 정리들을 공식으로 암기하여 단순히 문제해결에 적용하지 않도록 도함수의 성질에 관한 정리에 내재된 개념들 사이의 관계와 그 구조의 의미를 충분히 이해할 수 있는 학습의 기회가 학생들에게 제공되어야 한다. 이러한 학습은 함수와 일계도함수의 관계에 대한 의미뿐만 아니라 함수와 이계도함수의 관계에 대한 의미를 보다 잘 이해할 수 있는 기회를 제공할 것이다. 또한 도함수 성질에 대한 개념구조의 관계망에서 개념들 사이의 연결이 적분방향으로의 사고 과정을 내포하고 있는바 학생들에게 변화율로부터 변화량을 추론하는 방향으로의 다양한 과제를 제공하여 학생들의 편향된 사고를 방지할 수 있을 것이다. 모든 현상을 다항함수나 단일 함수식으로 표현할 수는 없으며, 더욱이 구체적인 함수식이 제시되지 않고 그래프의 형태만으로 자연 현상과 사회 현상 등을 이해하는 경우가 많으므로, 학생들이 그래프 형태로 주어진 자료에서 필요한 정보를 읽을 수 있도록 학생들에게 대수적 조작에 의한 학습뿐만 아니라 기하적 사고 양식에 기반을 둔 학습도 충분히 제공되어야 한다.

본 연구는 도함수의 성질과 관련된 개념구조에 관하여 학생들이 실제로 형성하고 있는 관계망과 수학적 사고 양식을 고찰하기 위한 기초 연구의 성격을 지닌 것으로, 학생들의 개념구조의 관계망 형성이 어디에 기인하는지에 대한 연구 등 보다 심층적인 연구에 기본 자료로 사용될 수 있을 것이다. 본 연구의 결과는 지필 검사에 의한 것이기에 그 한계점을 보완하기 위하여 면담, 관찰 등의 방법을 통한 연구가 필요하다. 또한 이를 수학 수업에 적용하기 위하여, 미분과 적분의 개념 사이의 관계에 대한 구조적 이해를 바탕으로 하는 교수·학습 방안에 관한 후속 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

계승혁, 김홍종, 하길찬, 박복현, 장성욱, 박장순 (2010). 고등학교 수학 Ⅱ 익힘책, 서울: (주)성지출판사.

Kye, S., Kim, H., Ha, K., Park, B., Chang, S. & Park, J. (2010). *High school mathematics II workbooks*, Seoul: Sungji publisher.

계승혁, 하길찬 (2010). 우리나라 고등학교 수학 교과서에서 함수의 증감과 극대·극소를 설명하는 방식에 대한 비판적 논의, 수학교육, 49(2), 247-257.

Kye, S. & Ha, K. (2010). A critical analysis on an explanation for monotonicity and local extrema of functions in Korean mathematics textbooks, *The Matematical Education 49*(2), 247-257.

김민경 (2002). 미분단원에서의 오개념에 관한 연구. 석사학위논문, 서울대학교 대학원.

Kim, M. (2002). *A study on the misconceptions in the calculus chapter*, Master's degree, Seoul national university.

김응태, 박한식, 우정호 (2007). 수학교육학개론(제3증보). 서울: 서울대학교 출판부.

Kim, Y., Park, H. & Woo, J. (2007). *Introduction to mathematical education*, Seoul: Seoul national university publisher.

김정희 (2005). 고등학교 학생들의 미분개념의 이해 및 오류유형 분석. 석사학위논문, 충북대학교 대학원.

Kim, J. (2005). *An analysis on the 12th graders' misconceptions and some errors on differential calculus*, Master's degree, Chung Book national university.

우정호 (2001). 학교수학의 교육적 기초(증보판). 서울: 서울대학교 출판부.

Woo, J. (2001). *Educational basics for the school mathematics*, Seoul: Seoul national university publisher.

우정호, 정역옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈 (2007). 수학교육학 연구방법론. 서울: 경문사

Woo, J., Chung, Y., Park, K., Lee, K., Kim, N., Na, K. & Lim, J. (2007). *Research methodology for mathematical education*, Seoul: Kyungmoon publishers.

임선정 (2005). 고등학교 학생들의 미분개념 이해와 수학적 사고 스타일 연구. 석사학위논문, 서울대학교 대학원.

Lim, S. (2005). *A study of the understanding of the concepts of differentiation and mathematical thinking style of highschool students*, Master's degree, Seoul national university.

정상권 (2011). 교사를 위한 해석학. 서울: 교우사.

Chung, S. (2011). *Analysis for teachers*, Seoul: Kyowoosa.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 김정배, 김상훈, 김윤희, 우혜영 (2010). 고등학교 수학 Ⅱ-교사용 지도서, 서울: (주)금성출판사.

Chung, S., Lee, J., Park, H., Hong, J., Park, B., Kim, J., Kim, S., Kim, Y. & Woo, H. (2010). *High school mathematics Ⅱ teachers guide books*, Seoul: Kumsung publisher.

정연준 (2010). 미적분의 기본정리에 대한 교수학적 분석. 박사학위논문, 서울대학교 대학원.

Joung, Y. (2010). *A Didactical analysis on the fundamental theorem of calculus*, Doctoral degree, Seoul national university.

조완영 (2006). 고등학교 미적분에서의 수학화 교수·학습에 관한 연구. 대한수학교육학회지, 학교수학, 8(4), 417-439.

Cho, W. (2006). A Study on mathematizing teaching and learning in highschool calculus, *School Mathematics 8*(4), 417-439.

조완영 (2011). 중등 수학교사의 수학내용 지식. 대한수학교육학회지, 학교수학, 13(2), 347-364.

Cho, W. (2011). Mathematical content knowledge of secondary mathematics teachers, *School Mathematics 13*(2), 347-364.

최나영 (2001). 미분개념에 대한 오류와 오개념에 관한 연구-함수와 도함수 사이의 그래프 표현을 중심으로. 석사학위논문, 이화여자대학교 교육대학원.

Choi, N. (2001). *A study of error and misconception in the concepts of calculus*, Master's degree, Ewha womansl university.

최용준, 김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 조동석, 이한주, 김덕환, 김민정, 박효정 (2010). 고등학교 수학 Ⅱ, 서울: (주)천재교육.

Choi, Y., Kim, S., Lee, J., Sunwoo, H., Lee, J., Cho, D., Lee, H., Kim, D., Kim, M. & Park, H. (2010). *High school mathematics Ⅱ*, Seoul: Chungae Education.

황선욱, 강병개, 허민, 최수창, 신동윤, 장경성, 김수영, 한용익, 황세호, 김창일, 정상일, 이문호, 박진호 (2010). 고등학교 수학 Ⅱ 익힘책, 서울: (주)좋은책신사고.

Hwang, S., Kang, B., Hu, M., Choi, S., Sin, D., Chang, K., Kim, S., Han, Y., Hwang, S., Kim, C., Chung, S., Lee, M. & Park, J. (2010). *High school mathematics Ⅱ workbooks*, Seoul: Sinsago.

Arzarello, F. & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities, *Educational Studies in Mathematics*. 77: 189-206.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2006). 실해석학개론 (강수철 역.). 서울: (주)범한서적. (원저 *Introduction to real analysis*. New York: John Wiley & Sons. 2000).

Ferri, R. B. & Kaiser, G. (2003). First results of a study of different mathematical thinking styles of schoolchildren. In L. Burton (Ed.), *Which Way Social Justice in Mathematics Education?* (209-239). London: Greenwood.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. C. (2010). Contrasting case of calculus students' understanding of derivative graphs, *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 152-176.

Hallet, D. H. (1991). Visualization and calculus reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (121-126). Washington. DC: Mathematical Association of America.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching, *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64.

Sternberg, R. & Zhang, L. Preface. In R. Sternberg & L. Zhang (Eds.). (2001). *Perspectives on Thinking, Learning and Cognitive Styles* (ⅶ-ⅹ). London: Lawrence Erlbaum.

Tall, D. (1991). Intuition and Rigor: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (105-119). Washington. DC: Mathematical Association of America.

Tall, D. (2003). 고등수학적 사고 (류희찬, 조완영, 김인수 역.). 서울: 경문사. (원저 *Advanced mathematical thinking.* 1991)

Thomas, M. & Hong, Y. (1996). The Riemann Integral in Calculus: Students' Processes and Concepts, *Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia,* 572-579.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students, *Focus on Learning Problems in Mathematics. 11*(2), 149-156.

On the students' thinking of the properties of derivatives

Young Ju Choi
Graduate School of Mathematics Education, Seoul National University
E-mail : badarock@snu.ac.kr

Jin Kon Hong†
Konkuk University
E-mail : dion@konkuk.ac.kr

Mathematical concept exists in the structural form, not in the independent form. The purpose of this study is to consider the network which students actually have for the mathematical concept structure related to the properties of derivatives. First, we analyzed the properties of derivatives in 'Mathematics II' and showed the mathematical concept structure of the relations among derivatives, functions, and primitive functions as a network. Also, we investigated the understanding of high school students for the mathematical concept structure between derivatives and functions, and the structure between functions and second order derivatives when the functional formula is not given, and only the graph is given. The results showed that students mainly focus on the relation of 'function-derivatives', the thinking process for direction of derivative and the thinking style for algebra. On this basis, we suggest the educational implication that is necessary for students to build the network properly.

* ZDM Classification : C34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : the properties of derivative, network of the mathematical concept structure, second order derivatives, graphs of function and its derivatives
† Corresponding author