韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.1.41
2014. 02. 제 53권, 제 1호, 41–55.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2014, Vol. 53, No. 1, 41–55.

고등학교 수학 교과서에서의 반례에 대한 학습가능성 탐색

오혜미(보평고등학교)
권오남(서울대학교)

Ⅰ. 서론

명제를 추측하고 증명하는 과정에서, 수학자들은 최종 형태의 정리나 증명에서는 설명될 수 없는 다양한 활동을 한다. 증명은 수학을 연구하고 학습하는데 중요하며(Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002), 명제를 증명하는 방법처럼 반박하는 방법을 학생들에게 가르치는 것은 중요하다(Epp, 1998). 특히 수학자들은 반례를 찾음으로써, 자신의 수학적 논증 과정에 대하여 논리적 연결의 정확성과 일관성을 끊임없이 검토하게 된다. 수학 발달에 있어서 명제가 거짓임을 밝히는 반박은 중요한 역할을 해왔으며, 수학에서 항상 반례의 형식으로 나타났다(Lampert, 1990). 수학자들이 증명에만 의존하지 않고 반례를 찾아 정리를 개선하면서 새로운 수학 개념이 발생하는 것처럼, 수학적 지식이 성장하는데 반례가 사고 확장의 원동력이 될 수 있다.

이와 같이 명제를 반박하는 과정에서 생성되는 반례는 수학 교수학습에서 중요한 역할을 하기 때문에 수학교육연구에서도 관심이 증가되고 있다. 개인의 수학 교수학습을 심화하는데 반례가 기초가 된다는 다수의 연구가 있다(Knuth 2002; Peled & Zaslavsky, 1997; Schoenfeld, 2009; Yackel & Hanna, 2003). 또한 많은 연구는 고등학생, 대학생, 고등학교 수학교사가 증명과 반례를 생성하고 이해하는 능력을 탐구하였다(Knuth, 2002; Ko, 2010; Peled & Zaslavsky, 1997; Selden & Selden, 2003; Weber, 2010). 하지만, 고등학생, 대학생, 고등학교 수학교사가 증명과 반례를 생성하고 이해하는 능력을 탐구한 연구 결과에 의하면, 학생과 교사들이 증명과 반례에 상당히 어려움을 느낀다는 것이다(Alcock & Weber, 2005; Knuth, 2002; Peled & Zaslavsky, 1997; Weber, 2010).

국내 연구에 있어서도 반례에 관련된 다수의 연구가 진행되었다. 김수미와 정은숙(2005)은 초등학교 4학년 교과서 중 도형 단원을 중심으로 분석함으로써 정례와 반례를 포함한 범례 제시를 통한 학습 효과성을 제안하였다. 이종희와 이지현(2009)은 구체적 사례에 의한 반례를 지양하는 학생들의 경향을 밝혀내고 수학적 개념이 불명확한 경우 정당화와 반례 생성에 어려움이 있음을 분석하였다. 또한, 이정곤과 류희찬(2011)은 예비교사를 대상으로 수열의 극한에 대한 명제의 증명과 반례 생성을 분석하여 그 유형을 제안하였다. 이와 같이 반례에 대한 국내 연구에서는 반례와 더불어, 예나 정당화에 관련된 학습자의 특성을 분석한 연구가 주로 이루어졌으며 중등학교 학습 측면에서 반례를 분석한 연구는 거의 없었다.

이러한 수학교육연구에서의 반례에 대한 관심은 학교수학과 밀접하게 관련된 교육과정에서도 나타나고 있다. 우리나라 2009 개정에 따른 수학과 교육과정(2009 개정 수학과 교육과정)의 경우, 고등학교 수학Ⅱ 과목의 명제 단원에서 한정사를 포함하고, 대우를 이용한 증명과 귀류법을 추가함으로써, 증명 단원의 내용을 보강하고 강화하였다(교육과학기술부, 2011). 미국의 경우도, 학교 수학을 위한 규준 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989)에서 9-12학년 학생들이 반례를 생성해낼 수 있어야 한다고 권고하였으며, 2000년대를 위한 학교 수학을 위한 원리 및 규준(NCTM, 2000)에서는 중등학교 학생들은 수학적 서술의 참과 거짓을 확인하는데 참여할 수 있어야 하고, 증명과 반례를 경험할 풍부한 기회를 학교 수학에서 제공해야 함을 강조하였다. 뿐만 아니라, 미국의 새로운 교육과정인 핵심

* 접수일(2013년 08월 05일), 수정일(2013년 12월 20일), 게재확정일(2014년 02월 15일)
* ZDM분류 : U24
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 반례, 명제, 고등학교 수학 교과서

공통교육과정(Common Core State Standards Initiative, 2011)에서는 고등학생들은 증명을 이해할 수 있어야 하고, 증명과 반례를 모두 생성해낼 수 있어야 함을 언급하고 있다. 이처럼 최근 수학교육 연구와 새로운 교육과정에서 반례에 대한 관심이 높아지고 있다.

이러한 교육과정의 흐름에 따라, 반례 학습가능성을 교과서 중심으로 살펴볼 필요가 있다. 왜냐하면, 수학교육에서 교과서는 수학을 학습할 수 있는 학습자의 기회에 초점을 두고 연구되었으며(Lithner, 2004; Mesa, 2010), 의도된 교육과정, 실행된 교육과정, 획득된 교육과정의 세 가지 교육과정 형태와 연관되어 교과서가 연구되었다(Travers & Westbury, 1989). 또한 교과서는 교육과정의 의도와 목표를 실행으로 바꾸는 중재자이며(Schmidt, McKnight, Valverde, Houang, & Wiley, 1996) 수학 교수학습에 대한 다양한 함의점을 포함한 유비쿼터스 과정이 되고 있지만(Mesa & Griffiths, 2012), 교과서를 중심으로 반례 학습가능성을 분석한 연구는 시도되지 않았다. 따라서 교과서를 중심으로 한 반례에 대한 학습가능성 탐색을 통해, 학습자의 수학적 개념 이해를 위한 예의 일반성을 확보하고, 새로운 교육과정의 실행 및 학습자의 수학적 사고를 심화시키기 위한 함의점을 도출할 수 있을 것이다. 하지만, 정수론, 기하, 연속함수, 미분법의 수학내용영역이 대학교뿐만 아니라 고등학교 과정에서도 증명이 포함될 수 있는 수학 내용인 것처럼(Ko, 2010), 학습의 맥락에서 반례가 의미있는 수학내용영역은 한정될 수밖에 없다. 학교 수학에서 반례 학습가능성에 대한 연구는 학습자가 반례를 구성할 수 있는 수학내용영역을 중심으로 전개하는 것이 본 연구의 결과 및 함의점의 실현가능성 및 실효성을 확보하기에 적절할 것이다.

이에 본 연구는 반례에 관련된 선행연구 분석을 통하여 명제에 대한 접근방식에 따른 반례의 관점, 반례의 분류와 그 기준을 분석하여 제시하고자 한다. 이를 바탕으로 고등학교 수학 교과서를 분석하여, 학교수학에서 적용할 수 있는 반례에 대한 교과서 활용 방안을 구안하여 제시함으로써 반례에 대한 학습가능성을 탐색하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

반례에 대한 선행연구 분석을 바탕으로 명제에 대한 접근방식에 따른 반례의 관점, 반례의 분류와 그 기준을 제시함으로써, 고등학교 수학 교과서에서의 반례 학습가능성과 이의 함의를 제안하는데 기반을 삼고자 한다.

1. 명제에 대한 접근방식에 따른 반례에 대한 관점

Lakatos(1976)는 “수학은 분명하게 정리의 개수가 증가되는 것으로부터 발전하지 않으며, 증명과 반박의 논리에 의해, 검토자와 비평자에 의한 추측의 끊임없는 발전을 통해 성장한다.”라고 언급하였다. 이처럼 개인 및 타인에 의해 제기된 반례에 의한 반박은 수학에서 중요한 역할을 한다. 수학교육연구자의 반례에 대한 관점은 반례에 대한 학습가능성을 분석하는데 출발점이 될 수 있다. 즉, 반례의 관점에 따라 반례의 수학적 및 교육학적 역할이 달라지기 때문이다. 또한 하나의 수학적 개념이 주어졌을 때 예가 제시될 수 있으나, 반례는 수학적 개념보다는 제시된 명제를 기반으로 하여 생성될 수 있다. 따라서 본 연구에서는 명제에 대한 접근방식에 따라 반례에 대한 관점을 분류하고자 한다.

본 연구에서는 선행 연구를 기반으로 반례에 대한 관점을 명제에 대한 접근방식에 따라 세 가지 관점으로 분류하였다. 즉, 명제의 거짓을 확인하는 관점, 명제가 거짓인 이유를 설명하는 관점, 수학하는 사람들 사이의 의사소통의 산물이라는 관점이다. 이러한 관점은 다음 [표 1]과 같이 수학적 명제에 대한 반례의 접근방식에 따라 과정론적 접근에서부터 결과론적, 사회적 접근까지의 차원을 포함할 수 있다.

[표 1] 명제에 대한 접근방식에 따른 반례에 대한 관점
[Table 1] Views about counter-examples according to a method of approach to statements

반례에 대한 관점	명제에 대한 접근방식
명제의 거짓을 확인	결과론적 접근
명제가 거짓인 이유를 설명	과정론적 접근
수학하는 사람들 사이의 의사소통의 산물	사회적 접근

첫째, 반례는 명제의 거짓을 확인하는 것이란 관점이다. Lakatos(1976)는 명제를 거짓으로 만들 수 있는 예제를 반례로 생각하였다. Lakatos(1976)는 추측이 개선되는 측면에서 반례를 두 가지 형태로 구분하였다. 증명

이란 원래의 추측을 여러 개의 부분 추측으로 분해하는 사고실험이므로, 원래의 추측을 반박하지는 않지만 부분 추측을 반박하는 국소적 반례(local counter-examples)와 원래의 추측을 반박하는 전면적 반례(global counter-examples)로 분류하였다. 이러한 반례들에 의해서 수학적 추측이 개선되고 용어의 재정의를 통해 개념의 명료화에 이르게 된다고 하였다. 또한, Peled와 Zaslavsky (1997)는 수학에서 반례의 기본적인 역할을 명제의 거짓을 확인하는 것으로 보았으며, 명제가 거짓이란 것은 명제에 적용되지 않는 원소가 하나 이상 존재하는 것으로 간주하였다. 그들은 '거의 옳은' 명제를 '병적인' 몇 개의 원소를 제외하고 옳은 경우로 보았으며, 이러한 명제를 통해 학습자가 몇몇 예외적인 경우를 제외시킴으로써 원래의 거짓 명제를 수정하는 것에 주목하였다. Zaskis와 Chernoff(2008)는 하나의 반례는 명제를 반박한다고 보았다. 반례를 명제의 거짓을 밝히는 집합의 원소로 볼 때, 명제에 대한 반례의 접근 방식은 명제가 참인지 거짓인지 판단하는 것으로서, 반례의 결과론적 접근이라고 볼 수 있다.

둘째, 반례는 명제의 거짓을 확인하는 관점에서 확대되어 명제가 거짓인 이유를 설명하는 것이란 관점이다. 수학자들은 수학적 명제의 참 또는 거짓인지 보다는 수학적 명제가 왜 참인지 거짓인지에 더 관심이 많다 (Hanna, 1995; Hersh, 1993). Polya(1973)는 문제해결 전략으로 반례의 역할을 강조하였다. 또한, Peled와 Zaslavsky(1997)는 반례는 왜 명제가 거짓인지 설명할 뿐만 아니라 다른 반례를 생성하는 방법을 제공해야 한다고 주장하였다. Zaskis와 Chernoff(2008)도 서로 다른 반례들은 학습자가 명제가 거짓이라고 확신하는 범위에 미치는 영향이 서로 다르다고 결론내렸다. 즉, 명제를 반박하는 동일한 수학적 기능을 수행하는 반례일지라도, 학습자에게 명제의 거짓 이유를 탐구하는 과정에서는 동일한 교육적 효과를 가지지 않는다는 것이다. 김수미와 정은숙(2005)은 학습과정에서 원형과 반례를 제시하고 이해하는 과정을 통해 수학적 개념을 이해하고 발전시킬 수 있음을 제안하였으며, 이종희와 이지현(2009)은 연구결과를 통해 반증 과정에서 반례는 추측을 반증하는 것 뿐만 아니라 다른 역할도 갖고 있음을 주장하였다. 이처럼 반례에는 주어진 명제가 거짓인 이유를 설명하는 기능이 있다. 이러한 관점에서 볼 때, 명제에 대한 반례의 접근 방식은 명제의 거짓인 이유를 설명하고 밝히는 과정론적 접근이라고 볼 수 있다.

셋째, 반례는 수학하는 사람들 사이의 의사소통의 산물이라는 관점이다. 예를 들어, 연속하는 함수의 수렴하는 급수가 연속이라는 코시의 증명에 대하여 푸리에 급수가 반례가 되었다. 이후 아벨이 코시의 정리를 탐구함으로써 평등수렴에 대한 아이디어가 발전하게 되었으며, 수학적 개념에 있어서 단순 수렴과 평등 수렴이라는 두 개념이 탄생되었다(Lakatos, 1976). 이와 같이 수학적 증명은 엄밀하거나 완벽하지 않은데, 그 이유는 정리는 엄밀한 증명보다는 다른 수학자들의 이해와 중요성을 동의받아야 하는 사회적 과정이기 때문이다(Hanna, 1991). 이처럼 수학자들 사이에 반례는 수학적 사고를 의사소통하기 위한 수단으로써의 역할을 수행한다(Carpenter & Franke, 2001). 나아가 수학적 지식은 특별한 주제에 대하여 생각하는 의미 생성 활동으로써(Thurston, 1995), 반례는 수학적 담화 과정의 사회적 산물이다. 이러한 관점에서 볼 때, 명제에 대한 반례의 접근 방식은 반례를 통하여 수학적 개념으로 발전시켜나가는 사회적 접근이라고 볼 수 있다.

학습자가 반례를 생성함으로써 거짓 명제를 확인하고 거짓 명제의 이유를 탐구하고 타인과 반례를 중심으로 의사소통할수록, 반례 생성에 관련된 수학적 개념이 더욱 발달하고 다듬어질 수 있다. 따라서 교수·학습 상황에서 반례는 앞서 언급한 세 가지 관점 모두를 포함하는 것이 가장 폭넓은 교수·학습 형태가 될 것이다. 또한, 반례에 대한 세 견해는 독립적이거나 대립적인 것이 아니며 교수·학습에서 상호보완적으로 작용하여 수학 교수학습의 원동력이 될 것이다. 왜냐하면 수학을 탐구하는데 있어서 명제의 참, 거짓에 대한 판별 및 판별 과정에 대한 탐구에서만 그치는 것이 아니라, 반례에 의해 수학적 개념들 사이의 구분이 분명해짐으로써 수학이라는 학문 발전의 원동력이 되어 왔기 때문이다.

2. 반례의 분류와 그 기준

반례를 이용하여 명제를 반박하는 과정에 대한 연구는 주로 Lakatos의 인식론적 견해에 따라 실행되어왔음에도(Balacheff, 1991), 반례를 연구한 각 연구자들마다

연구참여자가 생성한 반례를 분석하여 서로 다른 반례의 분류 체계를 제시하였다. 이에 본 연구에서는 반례를 분류한 각 선행 연구에서 반례의 분류와 그 기준을 제시하고자 한다.

Peled와 Zaslavsky(1997)는 반례의 정확성에 따라 명제를 반박할 수 있는 '적절한 반례(adequate counter-exmaples)'와 명제를 반박할 수 없는 '부적절한 반례(inadequate counter-examples)'로 분류하였다. 여기서 적절한 반례는 또 다시 반례의 설명적 성질에 따라 세 가지 유형인 '특수한 예(specific examples)', '반-일반적 예(semi-general examples)', '일반적 예(general examples)'로 분류하였다. 특수한 예는 명제와 모순되는 특정한 예를 제공하는 반례지만, 반례 구성을 위한 근본적 메커니즘의 단서를 제공하지는 못한다. 반-일반적 예는 유사한 반례들을 구성하기 위한 메커니즘에 대한 아이디어는 제공하지만, 반례의 전체 공간을 포괄하지 못한다. 일반적 예는 전체 반례 공간을 일반화할 수 있는 방식을 제안할 수 있는 예이며, 반례 그 자체나 반례가 제시되는 방법에 따라 일반화되기보다는 학생들에게 어떻게 인식되는가에 따라 일반화 가능성이 결정된다. 여기서 반례 생성을 위한 아이디어와 설명은 반-일반적 예와 일반적 예를 통해서 가능하다. 이러한 반례 연구의 함의점은 반례가 논리적 의미에서 거짓명제로 반박하는 역할뿐만 아니라, 명제의 구조와 의미에 통찰을 제공하는 설명을 위한 교육학적 도구란 것이다(Peled & Zaslavsky, 1997).

Zaslavsky와 Ron(1998)은 명제가 거짓임을 밝히는데 불충분한 반례를 '부정확한 반례(an incorrect counter-examples)'라고 하였으며, 명제가 거짓을 밝히는데 충분한 반례를 '정확한 반례(a correct counterexamples)'라고 하였다. Zaslavsky와 Ron은 Peled와 Zaslavsky(1997)가 반례를 분류한 용어와 비슷한 용어를 사용했지만, 명제가 거짓임을 밝히는 여부에 따라서 반례를 구분하였다.

Lin(2005)은 거짓 추측에 대한 학생들의 논증을 분석하여 '수사적 논증(rhetorical arguments)', '발견적 논증(heuristic arguments)', '반례 생성(generating counter-examples)'의 세 종류로 분류하였다. 여기서 수사적 논증은 대화상대와 관련된 이유를 기반으로 한 논증을 뜻하며, 발견적 논증은 과제에서 제한된 조건을 고려한 논증을 뜻하며, 반례 생성은 반례를 제기함으로써 참인 명제를 생성해내는 수학적 증명으로 향하는 논증을 뜻한다. Lin(2005)의 연구에서 반례 생성에 해당하는 코딩은 항상 참이라고 믿지 않는 것, 반례의 가능성을 제시하는 것, 반례를 생성하는 방법을 제시하는 것, 명백하고 분명한 반례를 제시하는 것이었다. 이처럼 Lin(2005)은 거짓 명제를 반박하는 학생들의 논증을 분석함으로써 반례에 의해 추측이 거짓임을 확인하는데 그치지 않고 수학적 정당화로 발전될 수 있는 가능성을 제시하였으며, 반례가 교수학습 전략으로 작용함으로써 명제에 대한 반박과 명제 생성 사이에 연속성을 확보할 수 있음을 시사하였다.

Zazkis와 Chernoff(2008)는 반례가 인지적 갈등을 일으키고 해결하는 역할에 따라, '중추적 예(pivotal examples)'와 '교량적 예(bridging examples)'로 분류하였다. 학습자가 개념적 변화를 일으키는데 도움이 되는 예가 중추적 예이며, 이러한 중추적 예가 인지적 갈등을 해결하는데 도움이 되는 예가 교량적 예이다. 반례를 중추적 예와 교량적 예로 분류한 것은 수학적 명제의 조건은 만족하지만 결론은 만족하지 못하는 반례의 수학적 의미를 교육학적 의미로 확대시켜 반례의 역할에 초점을 맞춘 것이다. 이는 반례는 수학적으로 불완전한 특수한 예에서 일반적 예로 확대될 수 있는 잠재된 가능성이 있음을 뜻한다.

Ko(2010)는 반례가 타당한지 점검하는 것과 반례를 생성하는 것은 다르다고 보고, 주어진 명제에 대한 반례의 타당화 및 반례 생성의 전략을 분석하였다. 반례의 타당화 전략은 명제와 관련된 수학적 대상(기호, 정의, 성질, 정리)을 회상하거나, 반례의 논리적 구조를 발견하거나, 반례 서술에 대한 행간을 검토하거나, 반례의 익숙함에 초점을 맞추거나, 반례에 있는 수학적 기호 표현에 집중하는 6가지 전략으로 제시하였다. 반면, 반례 생성의 전략은 명제를 이해하거나, 명제의 조건을 조작하거나, 개념적 이해를 찾아보거나, 과거 기억을 더듬거나, 아이디어에 연결된 예에 의존하는 5가지 전략으로 제시하였다.

앞서 언급한 연구들에서는 반례를 분류하는 기준이 반례의 정확성, 설명적 성질, 거짓 추측에 대한 논증 수준, 인지적 갈등, 반례 타당화 및 생성 등으로 다양하였

으며, 이를 연구자별로 반례의 분류 기준과 그 기준을 정리하면 [표 2]와 같다.

[표 2] 반례의 분류와 그 기준
[Table 2] The classification of counter-examples and their criteria

<table>
<tr><th>연구자</th><th colspan="2">Peled와 Zaslavsky(1997)</th><th>Zaslavsky와 Ron(1998)</th></tr>
<tr><td>분류 기준</td><td colspan="2">반례의 정확성 및 반례의 설명적 성질</td><td>반례의 정확성</td></tr>
<tr><td rowspan="4">분류</td><td>부적절한 반례</td><td></td><td>부정확한 반례</td></tr>
<tr><td rowspan="3">적절한 반례</td><td>특수한 예</td><td rowspan="3">정확한 반례</td></tr>
<tr><td>반-일반적 예</td></tr>
<tr><td>일반적 예</td></tr>
<tr><th>연구자</th><th>Lin(2005)</th><th>Zaskis와 Chernoff(2008)</th><th>Ko(2010)</th></tr>
<tr><td>분류 기준</td><td>거짓 추측에 대한 논증</td><td>인지적 갈등의 발생 및 해결</td><td>반례의 타당성 및 생성 전략</td></tr>
<tr><td rowspan="3">분류</td><td>수사적 논증</td><td rowspan="2">중추적 예</td><td rowspan="2">반례의 타당화 전략 6가지</td></tr>
<tr><td>발견적 논증</td></tr>
<tr><td>반례 생성</td><td>교량적 예</td><td>반례의 생성 전략 5가지</td></tr>
</table>

이러한 반례의 다양한 분류와 그 기준을 바탕으로, 2007 개정 수학과 교육과정 고등학교 수학 교과서에서 반례에 대한 학습가능성을 제고할 수 있을 것이다. 나아가 이러한 반례에 대한 학습가능성 분석을 바탕으로 2009 개정 수학과 교육과정 및 교과서의 학교 현장 실행과 수학교육연구에 함의점을 제시할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 명제의 참과 거짓을 판별하고 증명을 다루게 되는 고등학교 수학 교과서에서의 반례에 대한 학습가능성을 탐색하기 위해, 반례에 대한 선행연구를 국내・외 문헌을 중심으로 분석한 후, 이를 바탕으로 고등학교 수학 교과서에서의 반례에 대한 학습가능성을 제안하는 문헌 연구이다.

반례에 대한 국내・외 선행연구를 분석하고자, 증명, 예, 반례에 대한 문헌을 수집하여 정리하였으며, 수집된 문헌의 내용은 명제에 대한 접근방식에 따른 반례에 대한 관점, 각 연구에서 제시한 반례의 분류와 그 기준으로 나누어 분석하였다. 이후, 반례에 대한 선행연구를 바탕으로 반례에 대한 학습가능성을 2007 개정 교육과정의 수학 교과서 15종(김수환 외, 2009; 김해경 외, 2009; 양승갑 외, 2009; 우무하 외, 2009; 우정호 외, 2009; 유희찬 외, 2009; 윤재한 외, 2009; 이강섭 외, 2009; 이동원 외, 2009; 이만근 외, 2009; 이준열 외, 2009; 정상권 외, 2009; 최용준 외, 2009; 황석근 외, 2009; 황선욱 외, 2009)을 살펴보았다. 각 교과서에서 반례를 다루거나 다룰 수 있는 내용 중심으로 반례에 대한 학습가능성을 제안하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

학교 수학에서 학습자가 수학적 개념을 접할 뿐만 아니라 학교 수학의 주요 매체는 교과서이므로 본 연구에서는 교과서에서 반례가 도입되거나 생성되는 등의 반례에 대한 여러 가지 형태의 학습이 가능한 사례를 살펴볼 필요가 있다. 이 장에서는 현재 고등학생들이 사용하고 있는 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 수학 교과서 15종 내용을 바탕으로, 반례에 대한 학습가능성을 제안하려고 한다. 즉, 명제에 대한 접근 방식에 따른 반례에 대한 관점, 반례의 역할에 따른 반례 분류체계를 바탕으로 반례에 대한 학습가능성을 수학 교과서의 몇 가지 내용을 중심으로 가늠해보고자 한다. 단, 본 연구에서는 반례에 대한 학습가능성을 제안하는데 의의가 있으므로 모든 교과서를 언급하기보다는 학습가능성을 제안하기 위한 몇 개의 교과서를 표본으로 다룰 것이다.

1. 행렬 단원에서의 반례에 대한 학습가능성

행렬 단원에서 살펴본 반례에 대한 학습가능성은 두 가지로 제안될 수 있다. 모든 교과서의 행렬곱셈 내용에서 영인자에 관련된 내용이 존재 명제의 형태로 서술되어 있었다. 예를 들어, [그림 1]과 같이 김해경 외(2009)의 고등학교 수학 I 교과서 행렬 단원의 본문 내용 중

‘두 행렬 A, B에 대하여 $A \neq O$이고 $B \neq O$이지만, $AB = O$인 경우가 있다.’라고 기술되어 있다.

명제 ‘두 실수 a, b에 대하여 $a\neq 0$이고 $b\neq 0$이면 $ab\neq 0$이다.’는 항상 참이지만 행렬에서는 두 행렬 A, B에 대하여 $A\neq O$이고 $B\neq O$이지만 $AB=O$인 경우가 있다.

예를 들어, 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

또, 명제 ‘세 실수 a, b, c에 대하여 $a\neq 0$이고 $ab=ac$이면 $b=c$이다.’는 항상 참이지만 행렬에서는 세 행렬 A, B, C에 대하여 $A\neq O$이고 $AB=AC$이지만 $B\neq C$인 경우가 있다.

[그림 1] 수학 I (김해경 외, 2009, 24)
[Fig. 1] Mathematics I (Kim Hae Kyung et al., 2009, 24)

이 교과서에서는 행렬곱셈에서의 영인자에 대하여 존재 한정사(어떤, 적당한)가 포함된 존재명제로 기술되어 있어 학습자들이 영행렬이 아닌 두 행렬 사이에서 성립하는 하나의 예를 통해 두 실수에서의 곱셈과 비교하여 행렬 곱셈에서의 영인자를 이해할 수 있게 제시되어 있다. 이는 Peled와 Zaslavsky(1997), Zalavsky와 Ron(1998)의 반례의 정확성 및 설명적 성질을 탐구할 수 있을 것이다. 즉, 영행렬이 아닌 두 행렬의 곱이 영행렬이 되는 두 행렬의 일반적인 형태를 유도할 수 있을 것이다. 또한, Zazkis와 Chernoff(2008)가 언급했듯이 반례는 학습자의 인지적 갈등을 해결하는 교육학적 기능이 있으므로, 교과서에서 행렬 곱셈에서 영인자에 대한 명제가 명제의 진위 여부를 판단할 수 있는 명제로 진술된다면, 학생들은 주어진 명제를 만족시키는 예를 다양하게 찾는 활동이 가능할 것이다. [그림 2]와 같이 현재 교과서를 바탕으로 명제의 형태로 기술되어 참이나 거짓을 판별하고, 판별에 대한 이유를 탐구함으로써, 그러한 탐구를 바탕으로 명제를 만족하는 예가 하나의 특수한 예가 아닌 일반화되고 확장될 수 있는 내용으로 학습가능하다.

임의의 정사각행렬 A에 대하여 같은 꼴의 영행렬을 O라 하면

$$AO=OA=O$$

가 성립한다.

한편, 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$일 때,

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이지만 $A\neq O$, $B\neq O$이다.

문제 7 행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=O$가 되도록 하는 이차정사각행렬 B를 2개 이상 구하여라.

[그림 2] 수학 I (이만근 외, 2009, 26)
[Fig. 2] Mathematics I (Lee Man Geun et al., 2009, 26)

또한, 대학과정에서 학습하게 되는 식 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$가 성립하므로, 두 행렬 A, B중 적어도 한 행렬의 행렬식이 0이면 반례가 무수히 많이 생성될 수 있다. 이는 가능한 변화의 차원[1]의 예가 될 수 있는데, 가능한 변화의 차원에 대한 인식은 학습자 스스로 자각하기는 어렵고 교사에 의해서 유도될 수 있으므로(Watson & Mason, 2005), 반례의 교수 방법에 대한 고민도 함께 필요할 것이다.

이와 같이 교과서 진술에 있어서도 학습자가 명제의 거짓을 판단할 수 있는 명제의 형태로 제시되고 이에 대한 이해를 바탕으로 학생들이 명제의 참, 거짓을 판별을 시도할 수 있는 기회를 제공함과 동시에 명제를 탐구함으로써 다양한 반례 생성의 기회를 제공할 수 있을 것이다. 학습자는 학습자 자신이 생성한 반례에 대하여 적절성과 정확성을 탐색하고, 거짓 추측에 대한 다양한 논증을 제안하고, 반례 생성 전략을 발달시킬 수 있을 것이다.

2. 수열 단원에서의 반례에 대한 학습가능성

[그림 3]과 같이 우무하 외(2009)의 고등학교 수학 I 교과서 수열의 극한 단원의 본문 내용 중 ‘두 수열

[1] Watson & Mason(2005)는 예의 특색을 잃지 않고 수학적 아이디어를 전달하는 예의 특징을 ‘가능한 변화의 차원(dimension of possible variations)’이라고 하였다.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면, $\alpha \le \beta$이다.'란 참인 명제가 제시되어 있다.

> 수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여
>
> ❶ $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.
>
> ❷ $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이다.

[그림 3] 수학 I (우무하 외, 2009, 183)
[Fig. 3] Mathematics I (Woo Moo Ha et al., 2009, 183)

더불어 교과서에서는 이 명제의 가정 부분의 일부가 $a_n < b_n$으로 변형된 명제를 성립시키는 예를 [그림 4]와 같이 제시하고 있다.

> **주의** 앞의 ❶에서 $a_n<b_n$이더라도 $\alpha=\beta$인 경우도 있다.
>
> 예 $a_n=-\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

[그림 4] 수학 I (우무하 외, 2009, 183)
[Fig. 4] Mathematics I (Woo Moo Ha et al., 2009, 183)

다른 교과서에서도 이와 동일한 명제 "두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이면, $\alpha=\beta$인 경우가 있다.'가 성립하는 하나의 예를 [그림 5], [그림 6]과 같이 제시하고 있다.

이와 같이 각 교과서에서 수열의 극한에 대하여 성립하는 참인 명제를 제시하고 이러한 명제의 가정 부분이 변형되었을 때도 성립하는 하나의 특수한 예를 제시하고 있다. 여기서 '두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴할 때 $a_n > b_n$이면, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$이다.'란 거짓 명제를 제시하고 반례를 찾는 활동을 전개할 수 있을 것이다. 이런 활동을 통해 학습자들은 거짓 명제에 대한 다양한 반례를 생성하는 학습과정을 거칠 수 있으며 생성한 반례의 정확성을 검토함으로써, 다양한 반례들에 포함된 서로 다른 수학 개념을 바탕으로 반례 형태의 일반화를 시도할 수 있을 것이다.

> ❶에서 $a_n<b_n$이면서도 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$인 경우가 있다. 예를 들어 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$이라 하면 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

[그림 5] 수학 I (이만근 외, 2009, 164)
[Fig. 5] Mathematics I (Lee Man Geun et al., 2009, 164)

> ❶에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이어도 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$일 수 있다. 예를 들어, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{3}{n}$은 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

[그림 6] 수학 I (김해경 외, 2009, 175)
[Fig. 6] Mathematics I (Kim Hae Kyung et al., 2009, 175)

예를 들어, 수열의 항들이 다양한 함수의 그래프 위의 값이 될 수 있기 때문에, 다양한 반례에 포함된 서로 다른 수학 개념으로 인해 학습자들은 다양한 반례를 생성할 수 있으며, 나아가 반례들의 일반화된 형태도 제시할 수 있을 것이다. 예를 들어, 교과서에서 제시된 예시인 두 수열 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{3}{n}$은 각각 분수함수 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}$의 그래프 위의 점이고, 두 수열 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$은 각각 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 위의 점이 될 수 있다. 학습자들은 이러한 반례 생성이 가능한 함수들은 0으로 수렴하는 감소함수 형태라는 반례의 특색을 유도할 수 있다. 또한, 학습자는 거짓인 명제의 반례를 구성하고 반례의 타당성을 탐구함으로써, 수열의 극한이라는 수학적 개념으로부

터 수학적 개념에 대한 이해가 확장될 수 있다. 나아가, 이러한 다양한 반례의 구성과 생성한 반례에 대한 학생들의 타당성 점검은 수학의 여러 영역 간의 수학적 개념을 발전시킬 수 있다(Komatsu, 2010).

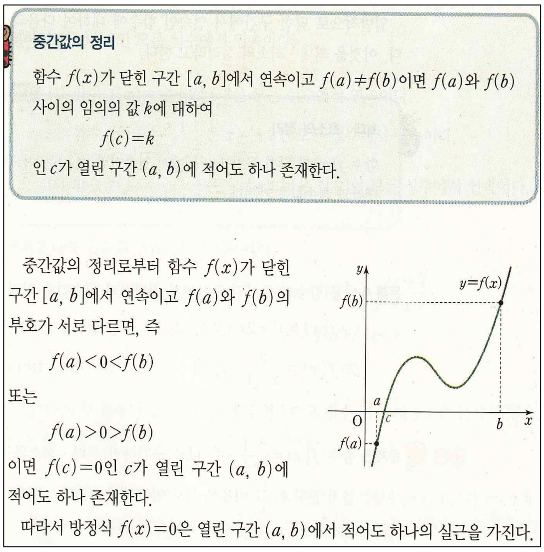
따라서 교과서 본문에 거짓 명제인 '두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴할 때 $a_n > b_n$이면, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$이다'처럼 거짓 명제 형태로 제시된다면, 학습자는 거짓 명제의 다양한 반례를 생성하고 생성한 반례의 적절성 및 정확성을 탐구함으로써, Ko(2010)가 지적한 반례의 타당성 점검과 반례 생성의 두 가지 활동을 구분하여 경험할 수 있을 것이며, 반례의 정확성, 설명적 성질, 수학적 개념에 대한 인지적 갈등이 해결될 수도 있을 것이다(Peled & Zaslavsky, 1997; Zaslavsky & Ron, 1998, Zaskis & Chernoff, 2008). 또한, 학습자는 반례가 명제가 거짓인 이유를 설명할 수 있으며, 다른 학습자가 생성한 반례를 통해 수학적 의사소통의 산물임을 깨달을 수 있을 것이다.

3. 함수의 연속 단원에서의 반례에 대한 학습가능성

교과서 수학 II(최용준 외, 2009)의 함수의 연속 단원 중 중간값의 정리를 살펴보면, '함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에서 적어도 하나 존재한다.'라고 제시되어 있다. 교과서에서는 중간값의 정리를 구성하는 가정과 결론 부분에 대한 탐구보다는 중간값의 정리를 만족하는 예를 [그림 7]과 같이 $f(a)$와 $f(b)$의 부호에 따라 $f(a)<0<f(b)$ 또는 $f(b)<0<f(a)$인 두 가지 경우로 제시하고 있다.

교과서에서는 부호가 다른 두 경우를 제시함으로써 학생들이 제시된 증명이 성립하는 함수의 그래프를 예로 생각할 수 있도록 제시하고 있다.

교과서에 제시된 정리의 가정 부분을 변형하면 거짓 명제가 되고, 이 거짓명제가 성립하지 않음을 보일 수 있는 반례를 탐구할 수 있을 것이다. 예를 들어, 중간값의 정리에서 가정 부분을 변화시키면 거짓인 명제가 되는 것처럼, 거짓인 명제를 만드는 방법은 매우 다양하며, 다양한 거짓 명제에 따라 반례를 생성하고 생성한 반례의 정확성을 검토하는 등의 다양한 교수학습 활동이 가능할 것이다. 이러한 다양한 수학적 사고는 학습자에게 인지적 갈등을 야기시키게 되며, 인지적 갈등은 반례를 통하여 수학적 개념이 학생들에게 더욱 명확해질 것이다(Zaskis & Chernoff, 2008). 나아가 학생들은 자신들의 생각을 문제시하며, 이러한 갈등을 통해 사고의 의미를 발달시키고, 적어도 갈등을 해결하려고 시도하게 될 것이다.


중간값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

중간값의 정리로부터 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉

$$f(a)<0<f(b)$$

또는

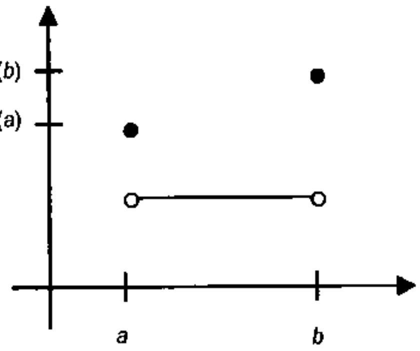
$$f(a)>0>f(b)$$

이면 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

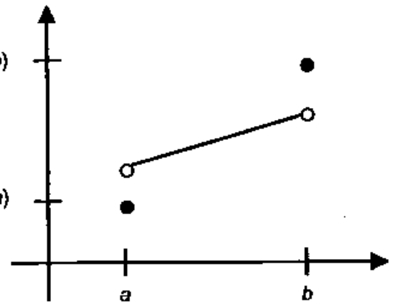
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

[그림 7] 수학 II (최용준 외, 2009, 98)
[Fig. 7] Mathematics II(Choi Yong Jun et al., 2009, 98)

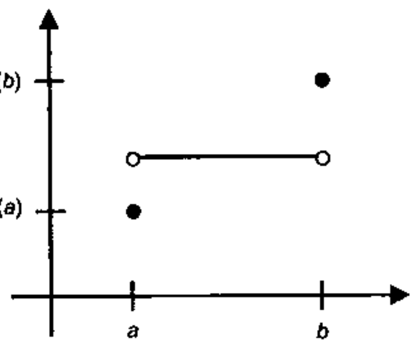
중간값의 정리에서 인지적 갈등을 야기시키기 위한 반례 생성의 방법은 가정 부분의 닫힌 구간 $[a,b]$을 열린 구간 (a,b)로 변형하거나, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 k의 값의 개수를 0개, 1개, 여러 개로 설정하는 등의 중간값의 정리를 변형하는 것이다(Mason & Klymchuk, 2009). [그림 8], [그림 9], [그림 10]은 중간값의 정리의 가정 부분 중 연속인 닫힌 구간 $[a,b]$를 열린 구간 (a,b)로 변형한 후, 각각 k의 값의 개수를 0개, 1개, 여러 개인 경우의 함수 $f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다.



[그림 8] 열린 구간 (a,b)에서 k의 값의 개수가 0인 경우(Mason & Klymchuk, 2009)
[Fig. 8] The number of value of k on open interval (a,b) is 0(Mason & Klymchuk, 2009)



[그림 10] 열린 구간 (a,b)에서 k의 값의 개수가 여러 개인 경우(Mason & Klymchuk, 2009)
[Fig. 8] The value of k on open interval (a,b) is uncountable(Mason & Klymchuk, 2009)



[그림 9] 열린 구간 (a,b)에서 k의 값의 개수가 1인 경우(Mason & Klymchuk, 2009)
[Fig. 9] The number of value of k on open interval (a,b) is 1(Mason & Klymchuk, 2009)

이와 같이 수학적 정리의 가정 부분을 변형함으로써, 학습자는 다양한 반례를 생성하고 생성한 반례의 타당성을 검토하고 반례의 특색으로부터, 중간값의 정리가 성립할 수 있는 조건에 대하여 깊이있는 학습이 가능해질 것이다.

4. 미분법 단원에서의 반례에 대한 학습가능성

교과서 수학 Ⅱ(황선욱 외, 2009)의 미분법 단원에서 살펴보면, 앞서 언급한 것처럼 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수로 $f(x)=|x|$를 제시하고 있다. 이러한 특정한 함수는 예 공간의 하나의 원소가 되지 못하고 학생들의 사고를 고착화시키는 예로 작용할 수 있다(Watson & Mason, 2005). 따라서 반례에 대한 관점 중 하나인 반례가 수학하는 사람들 사이의 의사소통의 산출물이 되기 위한 하나의 방법은 여러 명제의 거짓을 타당화할 수 있는 하나의 특정한 반례에 대한 탐구가 될 수 있을 것이다. 즉, 거짓 명제가 제시된 후, 반례를 생성하는 과정을 거꾸로 하는 과정이라고 볼 수 있는데, 여러 거짓 명제들의 공통된 반례로써의 대표성을 탐구할 수 있을 것이다. 예를 들어, 교과서 수학 Ⅱ(우정호 외, 2009)에서 살펴보면, 함수 $f(x)=|x|$는 '미분 계수와 도함수' 단원에서 명제 '$x=0$에서 연속이면 미분가능하다.'의 반례이지만, '함수의 극대와 극소' 단원에서 명제 '함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지면, $f'(0)=0$이다'의 반례도 된다. 즉, 함수 $f(x)=|x|$는 $x>0$에서 $f'(x)=1$이고, $x<0$에서 $f'(x)=-1$이므로 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 그래프가 감소하다가 증가하게 되므로 $x=0$에서 극값을 가지지만, $f'(0)$의 값은 존재하지

않는다. 이와 같이 하나의 반례가 서로 다른 수학 내용을 포함한 명제들의 공통된 반례가 될 수 있다.

또한, 명제 '$x=0$에서 연속이면 미분가능하다.'의 반례인 함수 $f(x)=|x|$가 학생들의 사고를 고착화시키는 반례 역할을 극복할 수 있도록 명제 자체를 다양화 시켜서 반례를 중심으로 교수학습이 가능할 것이다. 예를 들어, 명제 '$x=1$에서 연속이지만 미분 불가능하다'의 반례는 함수 $f(x)=|x|$를 변형하여 $f(x)=|x-1|$도 가능하지만, 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 1) \\ -x+2 & (x<1) \end{cases}$이나, 함수 $f(x)=\left|\dfrac{x^3-x}{x}\right|$도 $x=1$에서 연속이지만 미분불가능한 함수이다. 이러한 반례 생성의 핵심 아이디어는 $\lim_{\triangle x \to +0} \dfrac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x}$, $\lim_{\triangle x \to -0} \dfrac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x}$의 값이 같지 않은 함수의 예를 어떻게 찾느냐에 따라 달라진다. 마지막 두 반례는 동일한 명제를 반박하는 반례일지라도, 학습자에게는 동일한 영향을 미치지 않을 수 있다. 왜냐하면 함수 $f(x)=\left|\dfrac{x^3-x}{x}\right|$는 $f(0)$의 값은 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이면서 미분불가능하기 때문이다.

또한, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} |x^2-1| = 0 = f(1)$이고,

$$\lim_{\triangle x \to +0} \frac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to +0} (2+\triangle x) = 2,$$

$$\lim_{\triangle x \to -0} \frac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to -0} -(2+\triangle x) = -2$$

이므로 $x=1$에서 연속이고 미분불가능하다. 마찬가지로 $x=-1$에서도 연속이고 미분불가능하다.

이와 같이, 반례는 수학적 대상의 본질에 대하여 학습자의 인식을 재조정하는데 도움이 된다(Klymchuk, 2001). 따라서 교과서에서도 하나의 명제에 대하여 수학적 대상의 본질을 다양하게 인식될 수 있는 반례 생성 과제가 제시될 수 있을 것이다. 이를 통해 하나의 명제에 대하여 하나의 반례가 고착화되기보다는 다양한 명제를 반박하는 하나의 반례에 대한 사고를 통해 사고의 유연성을 기를 수 있을 것이다. 이는 Zaskis와 Chernoff(2008)가 언급한 학습자의 인지적 갈등의 발생과 해결을 가능하게 하며, Ko(2010)가 언급한 반례의 타당화 전략 중 반례의 익숙함에 초점을 맞추거나, 반례 생성 전략 중 명제의 조건을 조작하거나 아이디어에 연결된 예에 의존하는 전략을 활용하는 기회를 학습자에게 제공할 수 있을 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 선행연구를 중심으로 수학교육연구자들의 반례에 대한 관점, 반례의 분류와 그 기준을 분석하였다. 이를 바탕으로 현행 고등학교 교과서에서 반례에 대한 학습가능성을 분석하여 제안하였다. 본 논문에서 제안된 반례 학습 과정이 가능한 교과서 내용으로는 (1) 반례 탐구가 가능한 명제 형태로 교과서 본문의 진술이 변형될 수 있으며, 이에 따른 하나의 명제를 반박하는 하나의 반례가 아니라 다양한 반례에 대한 탐구를 통해 일반화 가능성을 내포할 수 있었다. (2) 다양한 반례를 통하여 수학적 개념 및 표현이 가능한 교과서의 내용을 분석하였고 이를 통하여 수학 내적 영역간의 연결이 가능하였다. (3) 참인 명제의 형태를 지닌 수학적 정리의 조건 부분을 변형함으로써 거짓 명제를 만들고 이를 성립시키는 다양한 반례를 탐구할 수 있었다. (4) 하나의 명제에 대한 강력한 대표성을 띄게 되는 하나의 반례는 정당화와의 연관성은 부족하지만(이종희, 이지현, 2009), 여러 명제의 공통된 하나의 반례에 대한 탐구는 수학적 대상에 대한 고착화된 사고보다는 유연한 사고를 가질 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것이다.

교과서에서 반례에 대한 다양한 내용을 도입함으로써, 학습자는 수학적 개념을 깊게 이해하고 다듬을 수 있으며, 특정한 반례를 일반적인 경우로 확대할 수 있을 것이다. 또한, 교과서에서 참인 명제만을 제시하여 학습자로 하여금 교과서의 명제는 모두 참이라고 믿는 결과를 초래하지 않도록, 교과서를 바탕으로 명제 및 정리를 다양한 형태로 변형하여 제시하고, 반례를 이용하여 명제를 다양하게 반박할 수 있는 기회를 제공해야 할 것이다.

2009 개정 수학과 교육과정의 고등학교 과정에서 증명이 강조되었다. 증명의 한 과정으로써 반례가 축소되지 않고, 주어진 명제에 대한 반박이자 수학적 개념을 다양하게 탐구할 수 있는 기회로써의 반례에 대한 학습

가능성을 기대해볼 수 있을 것이다. 이러한 교과서의 재구성 및 활용이 가능하려면 여러 연구에서 언급하였듯이 예비교사 및 현직교사의 수학적 내용에 대한 깊이 있는 이해와 더불어, 예와 반례의 타당화와 구성에 대한 역량을 함양해야 할 것이다. 또한 반례를 구성하는 범위가 예 공간을 벗어나지 못함을 상기할 때(Mason, 2005), 교사는 폭넓고 풍부한 반례집합을 사용하거나 설명해야 한다(Ko & Knuth, 2009). 궁극적으로 고등학교 수학교사와 학생들을 위해 다양한 수학적 예의 타당성 확인 및 구성을 위한 교과서 본문 구성 및 문제가 제시되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]. 교육과학기술부.

Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Mathematics Curriculum: MEST announcement 2011-361 [Separate version 8].* Seoul: MEST.

김수미, 정은숙 (2005). 범례 제시를 통한 도형 개념 지도 방안. 수학교육학연구, 15, 401-417.

Kim, S. M. & Jung, E. S. (2005). Building Geometrical Concepts by Using both Examples and Nonexamples. *The Journal of Education Research in Mathematics, 15,* 401-417.

김수환 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 교학사.

Kim, S.H. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Kyohaksa.

김수환 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 교학사.

Kim, S.H. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: Kyohaksa.

김해경 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 더 텍스트.

Kim, H.K. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: The text.

김해경 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 더 텍스트.

Kim, H.K. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: The text.

양승갑 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 금성출판사.

Yang, S.K. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Kumsung.

양승갑 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 금성출판사.

Yang, S.K. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: Kumsung.

우무하 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 박영사.

Woo, M.H. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Pakyoungsa.

우무하 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 박영사.

Woo, M.H. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: Pakyoungsa.

우정호 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 두산동아.

Woo, J.H. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Doosandonga.

우정호 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 두산동아.

Woo, M.H. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: Pakyoungsa.

류희찬 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 미래엔컬처그룹.

Lew, H.C. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Mirae N Culture.

류희찬 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 미래엔컬처그룹.

Lew, H.C. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: Mirae N Culture.

윤재한 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 더 텍스트.

Yoon, J.H. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: The text.

윤재한 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 더 텍스트.

Yoon, J.H. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: The text.

이강섭 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 지학사.

Lee, G.S. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Jihaksa

이강섭 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 지학사.

Lee, G.S. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Jihaksa

이동원 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 법문사.

Lee, D.S. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Bobmunsa.

이동원 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 법문사.

Lee, D.S. et al. (2009). *High school mathematics II.* Seoul: Bobmunsa.

이만근 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 고려출판.

Lee, M.G. et al. (2009). *High school mathematics I*. Seoul: Koryobook.

이만근 외 (2009). 고등학교 수학 II. 서울: 고려출판.

Lee, M.G. et al. (2009). *High school mathematics Ⅱ.* Seoul: Koryobook.

이정곤, 류희찬 (2011). 예비교사들을 대상으로 한 증명활동과 반례생성 수행결과 분석 : 수열의 극한을 중심으로. 수학교육학연구, 21, 379-398.

Lee, J.G. & Lew, H.C. (2005). Preservice Teachers' Writing Performance Producing Proofs and Counterexamples about Limit of Sequence. *The Journal of Education Research in Mathematics, 21*, 379-398.

이종희, 이지현 (2009). 상위권 고등학생들의 수학적 정당화와 반증의 유형에 대한 사례연구. 교과교육학연구, 13, 633-652.

Lee, C.H. & Lee, J.H. (2009). A Case Study Regarding High-ranking Highschool Students' Mathematical Justification and Disproof. *Subject Pedagogical Research, 13*(3), 757-776.

이준열 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y. et al. (2009). *High school mathematics Ⅰ.* Seoul: Chunjae Education.

이준열 외 (2009). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y. et al. (2009). *High school mathematics Ⅱ.* Seoul: Chunjae Education.

정상권 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 금성출판사.

Jung, S.K. et al. (2009). *High school mathematics Ⅰ.* Seoul: Kumsung.

정상권 외 (2009). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: 금성출판사.

Jung, S.K. et al. (2009). *High school mathematics Ⅱ.* Seoul: Kumsung.

최용준 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 천재교육.

Choi, Y.J. et al. (2009). *High school mathematics Ⅰ.* Seoul: Chunjae Education.

최용준 외 (2009). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: 천재교육.

Choi, Y.J. et al. (2009). *High school mathematics Ⅱ.* Seoul: Chunjae Education.

황석근 외 (2009). 고등학교 수학 I. 서울: 교학사.

Hwang, S.G. et al. (2009). *High school mathematics Ⅰ.* Seoul: Kyohaksa.

황석근 외 (2009). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: 교학사.

Hwang, S.G. et al. (2009). *High school mathematics Ⅱ.* Seoul: Kyohaksa.

황선욱 외 (2009). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: 좋은책신사고.

Hwang, S.W. et al. (2009). *High school mathematics Ⅰ.* Seoul: Sinsago.

황선욱 외 (2009). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: 좋은책신사고.

Hwang, S.W. et al. (2009). *High school mathematics Ⅱ.* Seoul: Sinsago.

Alcock, L. & Weber, K. (2005). Using warranted implications to read and understand proofs. *For the Learning of Mathematics, 25*(1), 34-38.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *Paper presented at the International Congress of Mathematicians*, Beijing, China. Volume Ⅲ, 1-3, 907 - 920.

Carpenter, T., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth International Commission on Mathematical Instruction* (Vol. 1, pp. 155-162). Melbourne: University of Melbourne.

Council of Chief State School Officers and National Governors Association. (2011). *Common core state standards initiative* [CCSSI] : Preparing America's students for college and career [Data file]. Retrieved from http://www.corestandards.org.

Epp, S. (1998). A unified framework for proof and disproof. *Mathematics Teacher, 91*(8), 708-713.

Hanna, G. (1991). Matheamtical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Ko, Y. (2010). *Proofs and Counterexamples: undergraduate students' strategies for validating arguments, evaluating statements, and constructing productions*. Doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison, Wisconsin.

Ko, Y., & Knuth, E. J. (2013) Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematic majors. *Journal for Mathematical Behavior, 32,* 20-35.

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 29,* 1-10.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Lin, F. L. (2005). Modeling students' learning on mathematical proof and refutation. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-18). Melbourne: University of Melbourne.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbooks exercises. *The Journal of Mathematical Behavior, 23,* 405-427.

Mason, J., & Klymchuk, S. (2009). *Using counter-examples in calculus.* Imperial College Press: London.

Mesa, V. (2010). Strategies for controlling the work in mathematics textbooks for introductory calculus. *Research in Collegiate Mathematics Education, 16,* 235-265.

Mesa, V., & Griffiths, B. (2012). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational Studies in Mathematics, 79* (1), 85-107.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also)explain. *FOCUS on Learning Problems in Mathematics, 19*(3), 49-61.

Polya, G. (1973). *How to solve it.* Princeton University Press. Princeton, NJ.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G., Houang, R. T., & Wiley, D. E. (1996). *Many visions, many aims, 1: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's forward: The souk of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp.xii-xvi). New York, NY: Routledge.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), 29-37.

Travers, K. J., & Westbury, I. (1989). *The IEA Study* *of mathematics I: Analusis of mathematics curricula*. Oxford: Pergamon Press.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples.* Lawrence Erlbaum Associates

Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning, 12,* 306-336.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In A. Olivier, &K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education,* (Vol. 4, pp. 225-232). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Zazkis, R., & Chernoff, J. E. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 195-208.

An investigation in learnability of counter-examples in secondary school mathematics textbooks

Hye Mi Oh
BoPyung High School
E-mail : nepscent@hanmail.net

Oh Nam Kwon
Seoul National University
E-mail : onkwon@snu.ac.kr

In recent years, there has been increasing interest in the pedagogical importance of counter-examples that contradict statements about mathematics education research and the curriculum revision process for high school mathematics courses. Using a literature research method, this study analyzed views about counter-examples according to a method of approach to statements and the classification of counter-examples and their criteria. The study also described the learnability of the content of counter-examples presented in Korean secondary school mathematics textbooks. The results showed that generating many counter-examples enables learners to understand mathematical concepts exactly, construct links between mathematical contents, and have flexible thoughts about mathematical objects. Considering the learnability of counter-examples, the contents of counter-examples in school mathematics textbooks are needed for mathematics teachers and students to generate numerous counter-examples and verify the justification of generating counter-examples in various manners.

* ZDM Classification : U24
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key words : counter-examples, statements, secondary school mathematics textbooks