Journal for History of Mathematics
Vol. 27 No. 1 (Feb. 2014), 67–79
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2014.27.1.067

The Role of Principle of Continuity in the Development of Mathematical Knowledge

수학적 지식의 발달에서 연속성 원리의 역할

Lee Dong Hwan 이동환

When imaginary numbers were first encountered in the 16th century, mathematicians were able to calculate the imaginary numbers the same as they are today. However, it required 200 years to mathematically acknowledge the existence of imaginary numbers. The new mathematical situation that arose with a development in mathematics required a harmony of real numbers and imaginary numbers. As a result, the concept of complex number became clear. A history behind the development of complex numbers involved a process of determining a comprehensive perspective that ties real numbers and imaginary numbers in a single category, complex numbers. This came after a resolution of conflict between real numbers and imaginary numbers. This study identified the new perspective and way of mathematical thinking emerging from resolving the conflicts. Also educational implications of the analysis were discussed.

Keywords: Principle of Continuity, Heuristic, method of ideal elements; 연속성 원리, 발견술, 이상적 원소의 방법.

MSC: 01A99 ZDM: A30

1 서론

19세기는 수학사의 분수령이었다. Stein [10, p. 238]은 수학이 이 기간 동안 “제2의 탄생이라 부를 정도의 근본적인 변화”를 겪었다고 보았다.[1)] 그러한 근본적인 변화는 과거와 전혀 다른 새로운 수학적 대상의 등장을 뜻하는 것이다.

> 19세기 수학자들은, 그 이전 세기에서 물려받은 문제를 분석하면서 그 문제들의 진정한 본질을 발견했고, 그것을 풀이하는 길을 열었다. 이 때 지불해야 할 비용은 고전적인 수학적 대상이 지닌 ‘반-구체적’ 특성의 포기였다. 수학적 대상의 본질은 이들이 가지고 있는 특별한 속성이 아니라 이들 사이의 관계임을 인식하기 시작했

Lee Dong Hwan: Busan National Univ. of Edu. E-mail: dhdhdh@bnue.ac.kr
Receiveded on Sep. 30. 2013, revised on Feb. 6. 2014, accepted on Feb. 12. 2014.
1) 덧붙여, 첫 번째 탄생은 고대 그리스시대라고 말했다.

> 다. [...] 새로운 수학적 대상은 우리의 감각으로 접근할 수 있는 '그림' 으로는 더 이상 표상되지 않는다는 점에서 고전적인 수학적 대상과 차이가 있었다. 19세기 내내 다양한 수학영역에서 새로운 아이디어들이 등장하기 시작했다. 이 시기는 '고전' 수학과 현재의 수학 사이를 연결하는 과도기적 변혁의 시대이며, 놀라운 창조의 시대였다 [2, 103–104].

Dieudonne가 19세기에 등장한 새로운 수학적 대상의 특징을 언급했다면, Wilson [13]은 그러한 대상이 등장하게 된 배경을 다음과 같이 설명하였다.

> 수학적 형식을 보다 확장된 상황에서 보았을 때, 우리는 비로소 그 형식의 본모습을 정확하게 이해하게 된다. 바로 이점을 인식했다는 것이 19세기 수학의 결정적인 특징이다 [13, p. 174].

Wilson은 19세기에, 수 개념의 확장뿐만 아니라 다른 영역에서도 개념의 확장이 활발하게 일어났으며 그것이 19세기 수학의 근본적인 변화임을 지적하였다. 여러 수학적 개념과 대상이 새로운 영역으로 확장되고 재해석되면서 수학이 급격하게 형식화되고 발전하기 시작한 것이다. 이러한 변화의 기저에는 연속성 원리 (Principle of Continuity) 가 자리 잡고 있었다. 연속성 원리는 17～19세기에 걸쳐 널리 중요하게 사용된 수학의 발견술이다. 일반적으로 말하자면, 연속성 원리는 특정 경우나 대상에서 성립하는 성질이 그와 비슷해 보이는 다른 경우나 대상에서도 성립한다는 주장이다 [4]. 예를 들어, 당시 수학자들은 연속성 원리에 근거하여 실수에서 성립하는 성질이 복소수의 경우도 성립한다거나, 유한에 대해 성립하면 무한소나 무한대의 경우에도 성립할 것이라는 추측을 하였다. 연속성 원리는 수학자들에게 새로운 영감을 제공하는 효과적인 발견술이었으며, 실제로 수많은 수학적 개념과 이론을 탄생시킨 원동력이었다.

본 논문은 가장 먼저 연속성 원리를 명시적으로 언급한 Leibniz부터 시작하여 수학사에 나타난 연속성 원리의 역할과 살펴보고, Hilbert가 제시한 이상적 원소의 방법 (method of ideal elements) 과 연속성 원리의 관계를 살펴봄으로서 연속성 원리의 의미와 역할을 정교화하겠다.

2 연속성 원리를 최초로 규정한 **Leibniz**

Leibniz는 스스로 자신이 연속성 원리를 최초로 규정하였다고 주장하였다 (Johannes Witt-Hansen [14], 1967, p. 226; Weyl [12], 1949, p. 160). Leibniz 보다 앞서서 케플러, 갈릴레이 등이 자연과학의 새로운 법칙을 발견하면서 암묵적으로 연속성 원리를 사용한 흔적이 있지

만[2)] 이를 명시적으로 규정한 것은 Leibniz가 최초였다. Leibniz [7]는 “자연의 모든 변화는 건너뛰어 일어나지 않는다.”(p. 447)는 연속성 원리를 자연의 ‘보편적인 질서의 원리’(p. 351) 라고 주장했다. 그동안 연속성 원리가 자연과학에서 암묵적으로 사용되어 왔지만 Leibniz가 보기에 연속성 원리가 완벽하게 실현되는 곳은 수학이었다. 특히, “기하학은 연속성 원리로 가득 차 있었다.”(p. 398) 이러한 이유로 Leibniz는 “최상의 지혜이자 모든 사물의 근원인 신은 완벽한 기하학자처럼 행동하며 더할 나위없는 조화를 추구한다.(p. 351)” 는 주장까지 한 것이다. Leibniz는 연속성 원리를 다음과 같이 여러 차례 부연하여 규정했다.

> 두 경우 사이의 차이가 임의의 크기보다 작아질 수 있다면, 그러한 경우에 대응하는 결과의 차이도 임의로 주어진 크기보다 작아지거나 사라질 수 있다. 보다 상식적으로 말하자면, 두 개의 가설적 조건이나 서로 다른 두 자료가 연속적으로 서로에게 접근하여 결국 다른 쪽과 일치한다면, 우리가 찾는 그 결과 역시 반드시 그렇게 될 것이다. 이것은 보다 일반적인 원리 즉, 자료에 질서가 있다면, 그 자료의 영향을 받는 미지의 결과에도 반드시 질서가 있다는 원리에 근거하고 있다 [7, p. 351].

첫 번째 규정을 보면, Leibniz의 연속성 원리가 연속함수의 아이디어와 매우 유사함을 알 수 있다. 연속함수의 경우 우리는 정의역의 변화로부터 어느 정도 그 함수 값의 변화를 예상할 수 있다. Leibniz는 연속성 원리를 설명하는 전형적인 예로서 타원에서 포물선으로의 연속적인 변화를 제시하였다.

> 타원과 포물선의 차이를 임의대로 줄일 수 있다. 타원의 한 초점이 고정되어 있을 때, 다른 초점이 그 초점에서 점점 멀어지면서 생기는 타원은 점점 포물선에 다가가고 이와 같이 우리는 그 차이를 임의대로 줄일 수 있다. 다시 말해, 포물선은 두 초점 사이의 거리가 무한히 커진 타원의 극한이다. 따라서 타원의 성질들도 점점 포물선의 성질에 다가가야 한다. 일반적으로 포물선을 타원의 극한으로 보면, 타원의 모든 성질을 그러한 포물선에 적용할 수 있다. 기하학은 이러한 예로 가득하다. 자연도 마찬가지이다. 그렇지 않다면 자연은 질서 있게 발전할 수 없다 [7, p. 398].

겉보기에 타원과 포물선은 다르지만, 무한히 멀리 떨어져 있는 초점을 생각하면 타원과 포물선의 차이는 점점 사라진다. 따라서 “한 대상의 본질적인 결정조건이 다른 대상으로 근접해간다면, 전자의 모든 성질 역시 점차 후자의 성질로 근접해 간다.” 는 연속성 원리에 의해

---

2) Mach(1919 [8, p. 140])는 Galileo가 관성의 법칙을 발견한 것에 대해 논평을 하면서 연속성 원리를 언급하였다. “Galileo는 연속성 원리에 의존했다. 우리가 일단 특수한 경우에 성립하는 이론을 얻게 되면, 우리는 머릿속에서 그 경우의 조건들을 이리 저리 수정하기 시작하는데, 그러면서도 우리는 원래의 이론을 유지하려고 노력한다. 자연현상을 이해하는 방법으로 연속성 원리만큼 간결하고 효과적인 방법은 없다.”

타원의 성질로부터 포물선의 성질을 발견할 수 있는 것이다. 타원의 점들은 두 초점으로부터의 길이의 합이 일정하다는 질서가 있을 때, 포물선 위의 미지의 점들에도, 비록 한 초점이 무한히 멀리 떨어져 있지만, 타원과 동일한 질서가 존재한다. 따라서 타원에서 성립하는 규칙이나 성질들도 포물선으로 연속적으로 확장되어 그대로 성립하는 것이다. Leibniz도 부연해서 설명했듯이, 연속성 원리는 우리가 찾는 미지의 결과를 어느 정도 예상할 수 있음을 보장한다. 이러한 이유로 연속성 원리는 "어떤 규칙이나 이론의 오류를 밝히는 검증수단 내지는 기준의 역할을 한다." [7, p. 351]

> 점점 사라지는 운동은 마침내 정지로 사라지고 점점 작아지는 부등식은 등식이 된다. 정지를 무한히 작은 운동이나 무한히 작은 느림으로 생각할 수 있고 등식은 무한히 작은 부등식으로 생각할 수 있다. 이러한 해석이 옳다면, 일반적으로 운동에 대해 증명된 사실과 부등식에 관해 증명된 사실은 정지와 등식에 관해서도 입증될 수 있다. 따라서 정지와 등식에 대한 규칙을 운동과 부등식에 대한 규칙의 특별한 경우로 생각할 수 있다. 만약 이것이 성립하지 않다면, 그 규칙은 일관성을 잃은 것이며 잘못된 것이다 [7, p. 398].

기존의 확정된 규칙이나 이론이 특수한 경우나 새로운 상황에서도 그대로 유지돼야 한다는 '형식불역' 의 측면이 강하게 드러나고 있다. 만약, 주어진 이론에서, 극한의 경우가 전형적인 경우에 적용되는 추론에 종속되지 않는다면, 우리는 그 이론을 거부할 수 있다. 연속성 원리는 "잘못 인식된 의견의 오류를 밝히는 기준 내지는 검증의 수단" 으로서 역할을 한다.

운동과 정지, 등식과 부등식의 사례는 그 연속적인 변화를 쉽게 감지할 수 있다. 그러나 겉보기에 확연히 다른 타원과 포물선 사이의 연속적인 변화를 Leibniz는 어떻게 파악했을까? 원뿔에서 포물선과 타원이 만들어지는 과정에서 그가 연속적인 변화를 감지했음을 추측할 수 있다. 아쉽게도 Leibniz는 이러한 연속성을 착안하는 과정에 대해선 자세히 논의하지 않았다. Leibniz가 중요하게 생각한 것은, 우리 마음이 그러한 연속적인 변화를 설명할 수 있는 추론을 할 수 있다는 사실이고, 바로 연속성 원리가 이를 보장한다는 점이다.

> 변화가 일어나면 (그 극한이 무엇이든), 우리는 그 극한까지 포함하는 일반적인 추론을 세울 수 있다 [7, p. 350].

어떤 상황의 연속성은 그 상황과 이 상황의 한계에 적용되는 추론의 연속성을 보장한다. 앞서 말했듯이, 포물선을 한 초점이 다른 초점에서 무한히 멀리 떨어져 있는 타원이라고 생각한다면, 타원에서 증명한 모든 기하학의 정리는 포물선에도 적용될 수 있다. 그 결과 연속적인 변화가 일어나는 상황은 그 상황에 적용되는 법칙을 간결하게 만들어준다. 왜냐하면 한계를 그저 특수한 경우로 생각할 수 있기 때문이다. 우리는 연속성 원리에 따라 타원과 포물선 등의 수학적 대상의 여러 유형 사이의 개념적인 관련성을 부여할 수 있기 때문에, 유형의 다양성을

허용하면서도 법칙의 간결성을 이루는 것이다.[3] 연속성 원리는 이러한 방식으로 학문에 대한 우리의 이해를 심화시키고 발전시킨다. 단순히 기존의 규칙을 유지하는 것으로 끝나는 것이 아니라 그렇게 규칙을 유지함으로서 우리의 이해가 심화되고 지식이 발달할 수 있다는 점이 중요하다. 운동과 정지는 서로를 통해 인식될 수 있기 때문에, 한 경우에 적용되는 법칙은 반드시 다른 경우에도 (적절한 방식으로) 적용되어야 하고 그렇게 함으로서 우리의 이해가 깊어질 수 있다. 연속성 원리는 효과적인 '발견의 원리' 로서 개념발달에 기여를 한다 [7, p. 484].

> 나의 이론은 이렇다. 우리의 범위 내에서 볼 수 있는 것과 비슷한 것을, 우리의 시각과 관찰의 범위를 넘어서는 곳에서도 인식하게 된다 [7, p. 484].

극한의 경우를 일반적인 사례의 특수한 경우로 생각할 수 있기 때문에, 우리는 일반적인 사례에서 관찰한 것으로부터 그것의 극한에서 관찰되지 않은 것을(관찰할 수 없는 것) 추론할 수 있다. 예를 들어, 연속성 원리는 원과 정다각형이 동일함을 주장하는 것이 아니라 정다각형의 성질로부터 원의 성질을 추론해내는 것을 목표로 한다. 연속성 원리는 인간이 '원을 무한히 많은 변을 가진 정다각형' 으로 추론할 수 있는 힘을 지니고 있음을 보여주며, 이러한 추론의 힘을 장려하고 있다.

> 정지가 운동의 한 유형이고, 등식이 부등식의 한 유형이라는 것은 원이 정다각형의 한 유형이라는 것처럼 엄밀하게 말해 참은 아니지만, 우리는 정지와 등식, 원을 운동과 부등식, 다각형의 연속적인 변화가 도달하는 한계라고 말할 수 있다. 이러한 한계는 배제되지만 즉, 엄밀하게 말해 극한으로 가는 수열의 항에 포함되지 않지만, 이들은 마치 그 수열에 포함되는 것처럼 동일한 성질을 가진다. 예를 들어, 원을 무한히 많은 변을 가진 정다각형으로 볼 수 있다. 그렇지 않으면 연속성 원리를 위배하게 된다. 즉, 우리는 다각형에서 원으로 건너뜀 없이 연속적인 변화를 이룰 수 있기 때문에, 다각형의 성질에서 원으로 성질로 옮겨갈 때도 건너뛸 필요가 없다 [7, p. 546].

규칙과 이론을 '검증하는' 기준이자 효과적인 '발견술' 로서 Leibniz는 연속성 원리의 방법론적인 장점을 강조하였고, 이러한 장점은 개념적인 연속성에 근거하여 미지의 성질과 개념을 발견하는데서 그 효과를 발휘하였다. 그러나 여기에는 보다 근본적인 질문이 남아있다. 연속성 원리가 그러한 장점을 발휘하려면, 자연이 그 원리를 따른다는 보장이 있어야 한다. 물론 Leibniz는 그렇다고 여러 차례 언급하였지만, 과연 자연이 연속성 원리의 지배를 받는다는 것을 증명할 수 있을까? Leibniz에 따르면, 이 질문은 증명과 반박의 문제가 아니라 선택의

3) Hankel과 Poncelet가 이상적인 대상(ideal object)을 도입한 이유이며, Hilbert가 연속성 원리에 가치를 부여한 이유이다.

문제이다. 그는 이 질문을 신의 존재와 결부시킨다.

> 변화는 건너뛰며 이루어진다는 가설은 연속성 원리로만 반박할 수 있다. 가장 완벽한 방식으로 모든 일을 하는 궁극의 이성(신)의 도움을 받아야 반박할 수 있다 [7, p. 521].

Leibniz는 연속성 원리를 구조적(architectonic) 판단의 명제라고 설명한다. 기하학적 판단이 절대적인 필연성을 추구하며 기하학적 판단의 반대는 모순을 함의한다면, 구조적 판단은 선택의 필연성을 추구하며, 이러한 판단의 반대는 불완전함을 뜻한다. 연속성 원리는 선택의 문제이지만, 이를 부정하는 것은 불완전함을 뜻하며 신의 존재를 부정하는 것이다. 신은 모든 사물을 연속적으로 창조했다 [7, p. 521]. 따라서 우리는

> 연속성 원리에서 신의 모습을 본다. 그래서 연속성 원리는 신의 지혜를 증명하고 존경하는데 매우 효과적이다 [7, p. 484].
>
> 자연의 실제 현상은 연속성 원리를 위배하지 않는 방식으로 정렬되고 되어야 한다. 우리는 오로지 연속성 원리에 의해 사물을 이해할 수 있게 된다. 왜냐하면, 연속성 원리만이 (조화와 완벽의 원리와 함께) 우리를 신의 이성과 의도로 인도해줄 수 있기 때문이다 [7, p. 584].

이러한 상황에서 Leibniz가 연속성 원리로 가득한 수학 특히 기하학을 강조한 것은 자연스러운 귀결이었다. 우리는 연속성 원리의 안내를 받아 실재를 볼 수 있는 것이다.

> 수학적 사고는 이상적이지만 유용성을 잃지 않는다. 왜냐하면 실제 사물들이 연속성 원리를 벗어나지 않기 때문이다. 사실 우리가 현상의 실재를 꿈과 구별할 수 있는 것은 바로 이 사실 때문이다 [7, p. 584].

그래서 "신은 기하학을 사용하였다. 따라서 수학에 적합할수록 우리는 실재에 점점 다가가는 것이다." [7, p. 585] 우리가 연속성 원리를 사용하여 규칙을 검증하고 발견하는 과정에서, 우리는 연속성 원리에 확신을 가지게 되고, 이는 곧 궁극의 이성(신)이 창조한 예정된 조화(pre-established harmony)를 경험하는 일이다. 따라서 연속성 원리로 가득한 기하학의 탐구는 곧 예정된 조화를 경험하는 가장 효과적인 방법인 셈이다. 수학교육의 맥락에서, Leibniz가 언급한 신의 존재와 예정된 조화의 존재여부는 중요하지 않다. 수학이 연속성 원리로 가득 차 있으며, 우리가 연속성 원리를 따를 때 비로소 수학을 올바르게 이해할 수 있다는 점이 중요하다. 앞으로 Hankel과 Poncelet의 논의로부터 수학의 실제에서 연속성 원리가 어떻게 수학에 대한 이해를 심화시켰고 수학의 발전에 영향을 미쳤는가를 살펴보도록 하겠다.

3 연속성 원리를 활용한 Euler와 Poncelet

Euler는 $x^2+2=y^3$를 만족하는 자연수 해는 $x=5, y=3$뿐이라는 정수론의 문제를 해결을 위해 '낯선 대상' 인 복소수를 처음으로 적용하였다. 정수 범위에서 잘 알려진 성질을 복소수 영역으로 확장시켜 사용했다. Euler가 사용한 성질은 다음과 같다 [4].

정수 a, b, c가 $ab=c^3$을 만족하고, a, b가 서로 소이면, $a=u^3$, $b=v^3$을 만족하는 정수 u, v가 존재한다.

Euler는 위 성질이 복소수 정수 영역에서도 성립한다고 가정하고 다음과 같이 진행하였다.

$(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2})=y^3$.

그러면, 정수 a, b에 대하여 $x+\sqrt{-2}=(a+b\sqrt{-2})^3$가 성립해야 한다.

정리하면 $x+\sqrt{-2}=a^3-6ab^2+(3a^2b-2b^3)\sqrt{-2}$.

허수부분이 같아야 하므로, $1=3a^2b-2b^3=b(3a^2-2b^2)$.

따라서 $a=-1$, $b=1$ 그러면 자연수 $x=5$이고, $5+\sqrt{-2}=(-1+\sqrt{-2})^3$ 이다.

마찬가지로 $5-\sqrt{-2}=(-1-\sqrt{-2})^3$ 임을 알 수 있다.

유일인수분해정역 $a+b\sqrt{-2}$ 집합에서 $-1\pm\sqrt{-2}$는 소수이므로, 27은 다음과 같이 유일하게 소인수분해 된다.

$27=(5+\sqrt{-2})(5-\sqrt{-2})=(-1+\sqrt{-2})^3(-1-\sqrt{-2})^3$.[4)]

그러므로 $x^2+2=y^3$를 만족하는 자연수 해는 $x=5, y=3$뿐임을 알 수 있다.

위의 증명에서 Euler는 $(x+\sqrt{-2})$와 $(x-\sqrt{-2})$ 서로 소[5)]로 보고, 정수에서 성립하는 성질을 그대로 적용하여 $(x+\sqrt{-2})$, $(x-\sqrt{-2})$ 각각도 세제곱식이 되어야 한다고 가정했다. 즉, 정수에서 성립하는 유일인수분해 성질이 복소수가 포함된 정수($a+b\sqrt{-2}$꼴) 영역에서도 그대로 성립할 것이라는 연속성 원리를 적용한 것이다.

또한 Euler가 $1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{3})^2+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ 임을 발견하는 과정에서 연속성 원리를 사용했음을 알 수 있다 (Kleiner [4, p. 200]). 이 공식의 발견 과정은 다음과 같다. $\sin x$의 근은 0, $\pm\pi$, $\pm2\pi$, $\pm3\pi$, $\cdots$ 이다. Euler는 이러한 근이 $\sin x$의 멱급수 전개식 $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots=0$의 근이라고 생각했다. Euler는 유한다항식에서 성립하는 성질이 무한다항식에서도 성립한다고 가정하고 계속해서 진행하였다.

---

4) $3=(-1-\sqrt{-2})(-1+\sqrt{-2})$이므로 $27=3^3$은 소인수분해가 아니다.

5) Euler가 도입한 복소수 꼴의 정수도 실제 정수와 같은 그러한 성질을 만족한다는 것은 1832년 Gauss가 $a+b\sqrt{-1}$ (a, b는 정수)라는 가우스 정수 개념을 도입하면서 명확히 밝힌 것이다. 실제로 Euler의 증명에서 등장하는 $a+b\sqrt{-2}$는 유일인수분해정역(UFD)이므로 아래의 증명을 계속 진행할 수 있다.

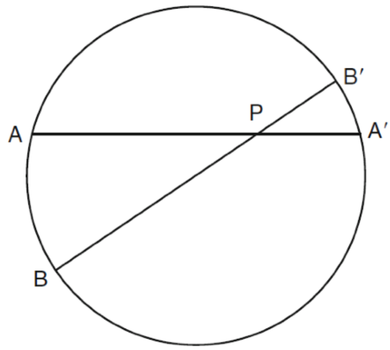

Figure 1. 원의 현에 대한 정리

$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots = 0$ 에서 양변을 x로 나눈 방정식 $1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \cdots = 0$ 의 근은 $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\cdots$ 이다. 따라서 $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\cdots$ 를 근으로 가지는 다항식 $\left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$ 은 $1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \cdots$ 과 근도 동일하고 상수항도 동일하게 되어 서로 같은 다항식이라고 볼 수 있다.

즉, $1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \cdots = \left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$ 이다.

두 식에서 x^2 의 계수를 비교하면 $-\dfrac{1}{3!} = -\left(\dfrac{1}{\pi^2} + \dfrac{1}{(2\pi)^2} + \dfrac{1}{(3\pi)^2} + \cdots\right)$ 이고, 이를 간단히 하면, $1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ 라는 결과를 얻게 된다.

이와 같은 과정은 수학적으로 엄밀한 방식이 아니며, 나중에 다른 방식으로 증명이 되었다. 그러나 Euler가 이러한 결과를 얻게 되는 과정에서 가장 결정적인 단계는 다항식에서 성립하는 성질과 규칙이 무한다항식인 멱급수에서도 성립한다는 가정이었다. 즉, Euler는 특정 상황에서 성립하는 성질이 그와 비슷한 상황에서도 역시 성립할 것이라는 연속성 원리에 의존하여 이러한 결과를 발견한 것이다.

Poncelet [1, p. 136]는 '특정 도형에서 성립하는 일반적인 성질은 그 도형의 위치를 연속적으로 변화시켜서 얻은 도형에서도 역시 성립한다.' 는 연속성 원리에 근거하여 여러 가지 기하학의 정리를 설명하였다. Poncelet는 이러한 원리가 적용된 사례로서 원의 현에 대한 정리 $PA \times PA' = PB \times PB'$ 를 소개하였다⟨Figure 1⟩.

Poncelet는 서로 교차하는 원의 두 현에 대해 성립하는 $PA \times PA' = PB \times PB'$ 라는 성질을 근거로 하여, 두 현의 위치를 연속적으로 변화시켜 얻게 된 ⟨Figure 2⟩의 경우에 대해서도 이와 동일한 성질이 성립한다고 설명하였다. ⟨Figure 2⟩의 경우, 현을 연장하여 두 현이 원의 외부에서 만나는데, 이 때 만나는 점을 P 라 하고, P 에서 시작하는 반직선이 원과 만나는 점을 각각 A, A', B, B' 라 하여 ⟨Figure 1⟩에서처럼 $PA \times PA' = PB \times PB'$ 가 성립할 것으로 추측할 수 있다는 것이다.

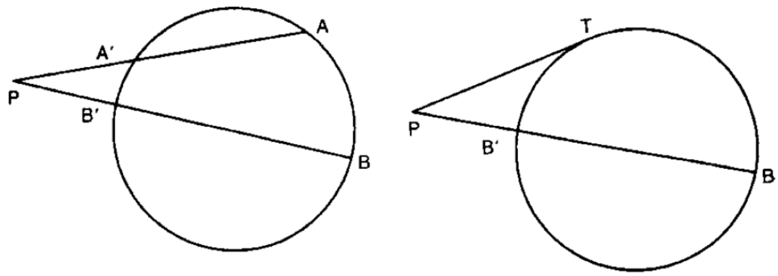

Figure 2. 연속성 원리를 활용하여 발견한 정리

Poncelet는 〈Figure 1〉에서 두 현이 만나는 점 P와 두 현이 원과 만나는 점 A, A', B, B' 사이에서 성립하는 관계가 두 현이 움직이더라도 그대로 유지된다고 생각하였고 이를 연속성 원리로 규정하여 자신의 기하학 연구에서 유용하게 활용하였다.

4 연속성 원리의 현대적 변형 : Hilbert의 이상적 원소의 방법

Hilbert([3]) 에 따르면, 수학자들은 수학연구를 개선하기 위해 매우 효과적인 "이상적 원소의 방법 (method of ideal elements)" 을 사용해왔다.

> 이상적 원소의 방법은 초등평면기하에서도 사용된다. ... 이상적인 원소 즉, 무한직선과 무한원점을 사용하여, 우리는 두 직선이 항상 한 점에서 만난다는 정리를 참이 되도록 만들 수 있다. 이러한 이상적 '무한의' 원소는 연결법칙의 체계를 가능한 간결하고 명쾌하게 (perspicuous) 만들어준다. 또 다른 이상적 원소 사용의 예로 복소수를 생각할 수 있다. 복소수는 방정식의 근의 존재와 근의 개수에 관한 정리들을 간결하게 만들어 준다 [3, p. 187].

Hilbert는 자신의 방법이 이미 과거 수학자들이 수학연구방법으로 사용했던 것임을 언급하였다. 그 방법이 연속성 원리임을 알 수 있다. Hilbert는 이상적 원소의 대표적인 예로, 무한원점, 허수, 음수, 이상적 공약수 등을 언급하였다. 이러한 대상들은 기존의 특정 영역에서 성립하는 성질과 법칙이 다른 영역 또는 확장된 영역에서도 성립하도록 만들기 위해 도입된 것이다. 즉, 연속성 원리에 따라 도입된 원소가 이상적 원소이고 이러한 이상적 원소를 도입하는 과정이나 발견술을 이상적 원소의 방법이라고 부른 것이다. 그런데 이러한 '이상적' 원소가 과연 우리의 수학이해에 어떤 도움을 줄 수 있을까? 다른 방법보다 이상적 원소의 방법이 더욱 효과적인 이유는 무엇인가? Hilbert는 이상적 원소의 역할을 명쾌하게 설명하였다.

> 우리가 수학자임을 기억하자. 그리고 수학자로서 우리는 종종 불확실한 상황에 빠지지만 독창적인 이상적 원소 (ideal elements) 의 방법에 의해 그 상황에서

> 벗어났다는 사실을 기억하자. $i = \sqrt{-1}$가 대수의 법칙을 가장 간단한 형태로 보존하기 위해 도입되었듯이 (예를 들어, 방정식의 근의 개수와 존재성에 관한 법칙); 대수적 정수의 간단한 나누기가능성 법칙을 보존하기 위해 이상인수(ideal factor)가 도입되었듯이; 마찬가지로 아리스토텔레스 논리의 간단한 형식적 규칙을 보존하기 위해, 우리는 유한명제를 이상명제로 보완해야 한다. [3, p. 195]

이상적 원소는 수학적 개념들의 법칙과 체계를 "가능한 한 간결하고 명쾌하게" 만듦으로서 수학체계의 간결성과 통일성을 완성시키고 있다. 다시 말해, 이상적 원소는 수학적 개념들의 통합을 이루는 역할을 수행하는 것이다. Hilbert에게 수학의 발달은 곧 통합을 이루어가는 길이었고 그 길에서 이상적 원소가 안내자 역할을 하고 있는 것이다.

5 논의 및 결론

지금까지 살펴 본 연속성 원리는 엄밀한 수학적 방법이라고 볼 수 없다. 연속성 원리가 성공적으로 작용한 사례만 주로 살펴보았으나 그렇지 않은 경우도 많이 존재한다. 예를 들어, 연산의 교환법칙은 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수 범위까지 계속해서 성립하였으나 사원수 또는 행렬 등의 연산에서는 성립하지 않는다. 연속성 원리에 의존하여 자신의 주장을 정당화하는 것은 매우 위험한 일인 것이다. 그럼에도 불구하고 수학사에서 많은 수학자들이 연속성 원리를 적극적으로 활용한 이유는 무엇인가? 연속성 원리가 수학을 이해하는 매우 효과적인 방법이기 때문이다. 이것이 사실이라면 수학교육에 상당한 시사점을 제공할 수 있으며, 본 절에서는 이에 대해 자세히 살펴보도록 하겠다.

Sierpinska([9])는 "언제 우리가 수학을 이해했다고 느끼는가?" 라는 질문에 다음과 같이 답하였다.

> 사고에 있어서 질서와 조화 즉, '잘 맞는다' 는 느낌이 가장 확실한 기준일 것이다.
> 우리는 자기반성을 통해서 이런 느낌을 얻게 된다 [9, p. 32].

우리가 이해하려는 대상들의 기초를 이루는 관계 즉, '통합하는 원리를 발견한다' 는 기준은 모든 이해행위에 적용되지는 않을 것이다. 그러나 추상적인 개념, 정리, 이론에 대해서는 이 기준이 분명 중요한 역할을 한다 [9, p. 33].

우리는 수학지식들이 이루는 '조화와 질서' 를 느낄 때 이해했다는 느낌을 받는다. Sierpinska가 지적했듯이, 추상적인 개념, 정리, 이론으로 이루어진 수학의 경우는 '조화와 질서' 를 학생들이 쉽게 느낄 수 없기 때문에, 학생들은 적극적으로 수학지식의 이면에 있는 '통합하는 원리' 를 찾아내야 한다. 그래야 비로소 수학지식을 이해하는 것이다. 수학지식을 통합하는 원리를 스스로 발견하는 일이 어렵기 때문에, 학생들은 교사의 설명으로부터 그동안 별개로 보이던 수학지식들 사이의 조화와 질서를 구성하는 것이다. 따라서 교사의 설명은 학생들이

'통합하는 원리를 발견하는' 경험을 하도록 도와주는 것이다. Kitcher [5] 역시 이해와 통합의 관계를 역설하였다.

> 현상을 이해한다는 것은 단지 '근본적으로 이해할 수 없는 것' 을 줄여나가는 일이 아니라 처음엔 서로 다르게 보이던 것들 사이의 연결관계(connection)와 공통된 패턴을 발견하는 일이다 [5, p. 432].

Kitcher에 따르면, 수학적 설명은 세계에 대한 우리의 이해를 증대시켜야 한다. 어떻게 설명이 이해를 도와주고 강화하는가? Kitcher에게 설명이란 현상을 통합해가는 과정이다. 숨겨진 연결관계를 발견하여 이러한 통합을 이루었을 때, 우리는 이해를 하게 되는 것이다. 어떻게 이러한 통합을 이루어갈 수 있을까?

> 수학은 동일한 유형의 사고방식을 반복 사용하여 수많은 현상에 대한 설명을 도출하는(derivation) 방법을 우리에게 보여줌으로서 자연에 대한 우리의 이해를 발전시킨다. 이러한 과정에서 수학은 우리가 설명 없이 받아들여야 하는 사실들의 개수를 줄여나가는 법을 알려준다 [5, p. 432].[6)]

Kitcher는 수학에서 통합을 이루는 방법이 '동일한 유형의 사고방식' 을 사용하여 최대한 많은 수학지식을 연역하고 추론하는 일이라고 지적한다. 앞으로 언급하겠지만, 우리는 연속성의 원리가 이러한 '동일한 유형의 사고방식' 가운데 가장 효과적이고 자연스러운 수학적 사고방식임을 주장한다.

수학자들 역시 수학의 이해와 발전을 수학지식의 통합과 관련시켜 설명하고 있다.

> 수리과학이란 학문은 분리될 수 없는 전체이고 각 분야의 연결이 단단할수록 전체적으로 더 잘 발전하는 유기체라고 생각합니다. [...] 우리는 또 어떤 수학이론이 발전할수록, 그 이론은 더 조화로워지고 통일성을 더해가며 지금까지는 아무 관계가 없어 보이던 분야와의 관계를 발견하게 됩니다. 따라서 수학이 확장되면 그 유기적인 성격을 상실하는 것이 아니라 오히려 더 명백하게 그것을 드러내게 됩니다 [3, p. 83].

Hilbert 역시 통합을 이루는 과정에서 '지금까지 아무 관계가 없어 보이던 분야' 사이의 숨겨진 관계를 찾아내는 일이 중요함을 지적하고 있다. 연속성의 원리가 수학에서 통합을 이루어가는 방법으로 작동하려면 바로 그러한 숨겨진 관계를 찾아내는 체계적인 방법을 제시할 수 있어야 한다. Hilbert는 통합을 이루는 과정에서 등장하는 수학적 도구들의 역할에 주목했다.

6) [5]의 원문에서 science를 mathematics로 변경하였다. 왜냐하면 Kitcher는 통합의 관점을 수학과 과학 모두를 포함하는 모델로 사용하였기 때문이다. "통합의 관점은 수학적 설명에도 적용되며, 수학에서도 설명의 비대칭성이 존재한다." [5, p. 437]

> 수학에서 진정한 발전이 있을 때마다 앞선 이론의 이해에 도움이 되고, 옛날의 복잡한 이론을 필요 없게 만드는 더 예리한 도구와 간단한 방법이 발명되었습니다. 따라서 이 더 예리한 도구와 간단한 방법을 체득한 사람은 다른 과학에서보다 더 용이하게 수학의 여러 분야를 이해할 수 있을 것입니다 [3, p. 83].

이러한 수학적 개념과 방법들이 있기에 우리는 점점 넓어지고 복잡해지는 수학을 이해할 수 있게 된다. 대표적인 예로 복소수를 생각할 수 있다. 그러나 이러한 숨겨진 관계를 밝히는 일은 수학 자체의 논리적 엄밀성만으로는 한계가 있다.

> 새로운 문제제기와 새로운 정리를 예상하는 일이 찬란한 생산성의 원동력이다. 새로운 관점이 등장하지 않고 새로운 목표가 설정되지 않는다면, 수학은 곧 논리적 증명의 엄밀성에서 자신의 전부를 소진할 것이고 점점 연구할 대상도 사라지게 될 것이다. 수학은 엄밀한 증명이 아니라 뛰어난 직관을 가진 수학자에 의해 발전하는 것이다 [6].

Klein은 적극적으로 새로운 관점과 발견적 추측을 제기하는 수학자의 역할을 지적하였다. 우리는 수학지식의 통합이 저절로 주어지는 것이 아니라 인간의 적극적인 노력의 결과임에 주목해야 한다.

> 수학은 사회적-역사적 발달을 거치면서, 다른 기타 과학지식과 달리, 수학지식의 독특한 통일성과 보편성을 이루어 왔다. 그러나 이러한 통일성(uniformity)을 수학의 절대적인 객관성의 표현으로 오해해서는 안 된다. 이러한 통일성은 수학자들이 노력하여 이룬 연구의 결실이다. 다시 말해, 수학의 통일성은 미리 결정되어 객관적으로 존재하던 것이 아니라 수학자의 전문적인 활동으로부터 창발된 것이다 [11, p. 7].

이러한 Steinbring의 주장은 수학교육에 다음을 시사한다고 볼 수 있다. 교사는 학생들에게 통일성을 이룬 수학을 제시하기 보다는 그러한 통일성을 이루어 가는 수학자의 활동을 학생들이 경험하도록 해야 한다. 통일성은 수학자들이 적극적으로 수학지식들을 통합하려는 노력의 결과이다. 연속성의 원리가 바로 수학자들에 새로운 관점과 발견적 추측을 제공하여 이러한 노력을 적극적으로 뒷받침하고 있다.

지금까지 우리는 수학의 이해를 수학지식들 사이의 통합을 이루어가는 과정으로 살펴보았다. 추상적인 개념을 특성으로 하는 수학지식이기에 더욱 통합이 필요하고, 그러한 통합은 실제로 수학자들의 목표가 되어 왔으며 수학의 발전을 이끌었다. 본 연구는 수학자들이 수학의 통합을 이루어가는 과정에서 연속성의 원리가 중요한 사고방식으로 사용되었음을 밝혔다. 이는 곧 연속성의 원리가 수학을 이해하는 매우 효과적인 방법임을 밝히는 일이기도 하다. 궁극적으로

연속성의 원리가 수학교육에서 건전한 교수-학습의 원리가 될 수 있는 가능성을 지니고 있음을 말해 주는 것이다.

참고 문헌

1. E. Brieskorn and H. Knorrer, *Plane Algebraic Curves, Birkhauser*, 1986.
2. J. Dieudonne, *Mathematics—The Music of Reason*, Translated by H. G. Dales, J. C. Dales, NY: Springer, 1992.
3. D. Hilbert, Über das Unendliche [On the infinite], *Mathematische Annalen* 95 (1926). Lecture given in Münster, 4 June 1925. English translation in van Heijenoort, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (1967), 367–392.
4. Israel Kleiner, *Excursions in the History of Mathematics*, Boston: Birkhäuser, 2012.
5. P. Kitcher, *Explanatory Unification and the Causal Structure of the World*, in Scientific Explanation, ed. P. Kitcher and W. Salmon, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1989, 410–505.
6. F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic · Algebra · Analysis*, NY: Dover Publications, 1968.
7. G. W. Leibniz, *Philosophical Papers and Letters*, translated by Leroy E. Loemker, 2nd ed. Dordrecht: D. Reidel, 1970.
8. Ernst Mach, *The Science of Mechanics: a critical and historical account of its development*, Chicago: Open Court, 1919.
9. A. Sierpinska, *Understanding in mathematics*, Washington, D.C.: Falmer, 1994.
10. H. Stein, *Logos, Logic, and Logistike: Some Philosophical Remarks on the 19th century Transformation of Mathematics*, History and Philosophy of Modern Mathematics, edited by W. Aspray & P Kitcher, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XI; University of Minnesota Press, 1988, 238–259.
11. H. Steinbring, *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*, Springer, 2005.
12. Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, 1960.
13. Mark Wilson, Frege: The Royal Road from Geometry, *Noûs* 26(2) (1992), 149–180.
14. Johannes Witt-Hansen, Leibniz and Contemporary Science, *Orbis Litterarum* 22(1) (1967), 222–240.