East Asian Mathematical Journal
Vol. 30 (2014), No. 2, pp. 093-121
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.009

기본대칭다항식으로의 매개를 통한 부등식의 생성 및 증명에 대한 연구

A Study on Generating and Proving Inequalities using Parameterization to Elementary Symmetric Polynomials

고 대 현 · 박 정 민 · 백 은 하 · 김 문 섭 · 한 인 기[1)]

ABSTRACT. In this paper we study generating and proving methods of symmetric inequalities. We analyze various literatures related with proofs of symmetric inequalities. As a result, we can describe generating method of symmetric inequalities, and suggest some symmetric inequalities that are generated by using parameterization to elementary symmetric polynomials. And we are able to classify some proving methods, and show proofs of symmetric inequalities.

1. 서론

수학의 역사에서 보면, 수학의 탐구는 크게 도형 영역을 주제로 연구를 수행하는 기하학, 수와 식에 대한 연구를 수행하는 대수학을 바탕으로 하고 있다. 중등학교에서 배우는 수학교육의 내용도 기하학과 대수가 중심을 이루며, 여기에 17세기 이후에 새롭게 발전한 수학 영역의 내용들이 추가된 것으로 이해될 수 있다.

러시아의 수학자 Kolmogorov는 복잡한 문자식을 변형하고 일반적인 방법으로 접근할 수 없는 방정식의 풀이를 위해 성공적인 방법을 찾아내는 것과 같은 대수적인 조작의 수행 능력은 수학자의 진지한 학문 탐구에 요구되는 재능에 상당히 접근해 있다고 주장했다([12]). 실제로 중등 수학교육에서 문자식을 원하는 형태로 변형시키는 인수분해, 전개, 방정식, 부등식 등은 수학의 다른 주제들을 탐

---

1) 교신저자
2014년 1월 21일 투고, 2014년 2월 25일 심사완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key Words: symmetric inequality, elementary symmetric polynomial, proof

구하는 도구일 뿐 아니라, 그 자체로도 중요한 문제가 된다. 특히 부등식은 역사적으로 많은 수학자들이 수학 연구의 주제로 삼았으며, 산술-기하-조화 평균에 대한 부등식, Cauchy 부등식, Bernoulli 부등식, Jensen 부등식, Schur 부등식 등 다양한 부등식이 연구되었으며, 지금도 활발하게 연구되고 있는 수학 분야이다.

중등학교 수준에서 다룰 수 있는 부등식에 대한 연구들은 대부분 다양한 증명 방법에 대한 것이며([8], [11], [13], [17]), 수학 경시대회에서 다루어질 수 있는 부등식들의 다양한 증명이 제시되어 있는 연구들([3], [7], [10], [14])도 있다. 그러나 중등학교 수준에서 부등식을 어떻게 생성하는가에 대해 체계적으로 기술된 연구는 많지 않다. 본 연구에서는 중등학교 수준에서 논의될 수 있는 부등식의 한 생성 방법을 살펴보고, 이에 관련된 부등식들의 증명 방법을 체계적으로 분석, 정리한다.

최근 들어 국내에서 대칭에 관련된 다양한 책들(대칭, 아름다움은 왜 진리인가?, 대칭과 아름다운 우주, 우주의 탄생과 대칭 등)이 출판되었다. 대칭에 대한 연구는 역사가 오래되었지만, 국내에서 수학이나 과학 분야의 대칭에 관련된 책들은 그리 많이 소개되지는 못했다. 대칭은 수학적 탐구의 방향을 제시할 뿐만 아니라, 수학적 아름다움의 원천이 되기도 한다([15], [16]). '대칭'하면 '기하학적 대칭'만을 생각하는 경우가 있지만, 대칭식, 대칭함수, 대칭군(symmetric group) 등의 용어에서 알 수 있듯이, 대칭은 수학의 모든 영역과 관련된다고 할 수 있다.

본 연구에서는 대칭형태의 다항식(대칭다항식)으로 만들어진 부등식의 생성 방법 및 증명 방법을 탐구할 것이다. 즉 본 연구에서는 첫째, 부등식들로부터 기본 대칭다항식 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$에 대한 부등식을 만들고, 얻어진 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식을 바탕으로 다양한 부등식을 생성할 것이며, 둘째 대칭다항식으로 된 부등식을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 증명하고, 이를 바탕으로 기본대칭다항식을 이용한 증명방법들을 체계화시킬 것이다. 본 연구의 결과는 중등학교 수준의 수학 심화학습 자료로, 그리고 수학교사의 전문성을 향상시킬 수 있는 기초 자료로도 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

2. 이론적 배경

(1) 대칭다항식의 매개

수학을 비롯한 학문의 탐구에서 매개(媒介)는 중요한 역할을 한다. 포털사이트를 검색해 보면, '매개'라는 단어를 포함하는 다양한 단어결합을 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 수학에서는 잘 알려진 '매개변수'가 있으며, 다른 학문 영역에서는 '매

개모음', '매개체', '동물매개', '매개효과', '매개변인', '매개이론' 등과 같은 다양한 단어결합이 사용되고 있다.

국어사전([2])에서 '매개'는 '둘 사이에서 양편의 관계를 맺어 줌', '[논리] 서로 떨어져 있는 두 명사 사이에서 두 명사의 관계를 맺어 주는 중간 항의 명사를 부여하는 작용', '[철학] 헤겔의 변증법에서, 어떤 사물이 존재할 조건이 되는 일. 모든 사물이 따로 독립하여 존재하는 것이 아니고 타자(他者)와의 관계 속에서 존재한다고 보았다.'고 기술되어 있다. 즉 '매개'는 두 개념 사이의 관계를 맺어주는 작용을 하는 것, 개념들 사이의 관련성을 표현한 것으로 생각할 수 있다. 한편 수학([4])에서 매개변수는 '몇 개의 변수 사이에 함수관계를 정하기 위해서 사용되는 또 다른 하나의 변수로 … $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 t를 소거한 식을 만들면 되며, t를 매개로 하여 x와 t의 함수관계가 정해진다. 이 t를 매개변수라고 한다.'고 기술되어 있다.

고등학교 수준의 수학에서도 매개변수를 활용한 수학 문제들, 문제해결의 사례들을 어렵지 않게 접할 수 있다. 예를 들어 미분 단원에서 '$x=2t+1$, $y=t^2+4t+3$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라'와 같이 매개변수로 표시된 함수에 대한 문제가 제시되며, 연립방정식의 해결에서 매개변수를 이용한 치환으로 문제를 해결하는 사례들을 종종 접할 수 있다. 식 $x=2t+1$, $y=t^2+4t+3$에서 x, y는 t로 매개되어 있으며, 본 연구에서는 이러한 의미로 '매개시킨다', '매개되다' 등의 표현을 사용할 것이다.

다양한 형태의 대수적인 식들이 있는데, 본 연구에서는 대칭다항식을 기본대칭다항식인 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$으로 매개시켜 부등식의 생성, 증명을 탐구할 것이다. 즉 본 연구에서는 주어진 부등식을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3으로 치환하여 부등식을 증명하는 것뿐만 아니라, 얻어진 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식을 기반으로 새로운 다항식을 생성하는 것까지를 다룰 것이다. 그러므로 본 연구에서는 '부등식을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3으로 치환'한다는 표현보다는 '부등식을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3으로 매개'한다는 표현을 사용할 것이다.

[5]에 의하면, 대칭다항식은 두 개 이상의 문자를 포함하는 식에서 그 중의 어떤 두 문자를 교환하여도 항상 본래의 식과 항등적(恒等的)으로 같은 식을 의미한다. 예를 들어 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$는 a, b, c에 관한 대칭식이다.

기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용한 대칭다항식인 부등식을 매개시키는 것을 살펴보기 위해, 부등식 1, 부등식 2를 예로 살펴보자.

부등식 1. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
부등식 2. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$.

부등식 1, 부등식 2는 변수 a, b, c로 표현된 서로 다른 형태의 부등식이다. 외형적으로 보면, 부등식 1은 세 식 $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+a)$의 곱과 $8abc$의 대소 관계를 표현하고 있으며, 부등식 2는 세 항 $ab(a+b)$, $bc(b+c)$, $ca(c+a)$의 합과 $6abc$의 대소 관계를 표현하고 있다. 즉 외형적으로 부등식 1과 부등식 2는 모두 변수 a, b, c로 표현되었으며, 3차식이라는 것, 그리고 부등식의 우변에 abc 항이 있다는 것 이외에는 어떤 공통점도 찾아보기 어렵다.

이제 부등식 1과 부등식 2를 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3로 매개시켜보자. 즉 부등식 1과 부등식 2의 식을 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$를 이용하여 변형시키자.

부등식 1에서 $8abc$를 좌변으로 넘기면, $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc \geq 0$이며, $a+b=a+b+c-c=\sigma_1-c$, $c+a=\sigma_1-b$, $b+c=\sigma_1-a$이므로, 부등식 $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc \geq 0$을 $(\sigma_1-a)(\sigma_1-b)(\sigma_1-c)-8abc \geq 0$로 변형시킬 수 있다. 이제 부등식의 좌변을 전개하여 정리하면, $\sigma_1^3-(a+b+c)\sigma_1^2+(ab+bc+ca)\sigma_1-abc-8abc$이 된다. 이제 여기에 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$을 다시 대입하여 정리하면, $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \geq 0$이 얻어진다. 결국 부등식 1을 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 매개시키면, $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \geq 0$가 된다는 것을 알 수 있다. 특히 부등식 1은 3차식이었지만, σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 매개된 부등식 $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \geq 0$은 2차식으로 차수가 줄어들었다.

한편 부등식 2도 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 다음과 같이 매개시킬 수 있다.

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$,
$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc \geq 0$,
$ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+b+c)-6abc-3abc \geq 0$,
$(ab+bc+ca)(a+b+c)-9abc \geq 0$, $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \geq 0$.

결국, 부등식 2를 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 매개시키면, $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \geq 0$이 된다. 즉 부등식 1과 부등식 2는 같은 식 $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \geq 0$으로 매개된다는 것을 알 수 있다. 변수 a, b, c로 표현되었을 때에 부등식 1과 부등식 2는 비슷한 점이 별로 없는 다른 부등식이었지만, σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 매개시키니 같은 부등식임을 알 수 있었다.

부등식 1과 부등식 2가 σ_1, σ_2, σ_3로의 매개 측면에서 같은 부등식이므로, 이 두 부등식의 타당성을 각각 증명할 필요가 없이, 이들 중에서 한 부등식이 성립

하면 나머지 부등식은 당연히 성립한다는 것을 알 수 있다.

(2) 기본대칭다항식을 이용한 대칭다항식의 표현

대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하는 것은 그 자체로 흥미로운 문제일 뿐만 아니라, 수학적 문제해결의 도구가 될 수 있다. [1]에는 대칭다항식 $s_n = a^n + b^n + c^n$을 σ_1, σ_2, σ_3으로 표현하면 $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$, $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$(이때 $n \geq 4$)이 된다는 것이 소개되었다.

본 연구에서는 $s_n = a^n + b^n + c^n$인 꼴의 대칭다항식, $a^4b^3c^2 + a^4b^2c^3 + a^3b^4c^2 + a^3b^2c^4 + a^2b^4c^3 + a^2b^3c^4$과 같은 형태의 대칭다항식들을 다루고 있다. 이들 대칭다항식에 관련된 성질들을 살펴보자. [9]에서 대칭다항식 $a^4b^3c^2 + a^4b^2c^3 + a^3b^4c^2 + a^3b^2c^4 + a^2b^4c^3 + a^2b^3c^4$를 $O(a^4b^3c^2)$로 나타내었다. 이때 a, b, c에 대한 대칭다항식 $O(a^kb^lc^m)$는 $a^kb^lc^m + a^kb^mc^l + a^lb^kc^m + a^lb^mc^k + a^mb^kc^l + a^mb^lc^k$이 된다. 한편 a, b, c에 대한 대칭다항식에서 $O(a^kb^l)$는 $a^kb^l + a^lb^k + b^kc^l + b^lc^k + c^ka^l + c^la^k$이 된다. 이제 [9]에 제시된 a, b, c에 대한 대칭다항식 $O(a^kb^lc^m)$의 몇 가지 성질을 살펴보자.

성질 1. $k \neq l$에 대하여, $O(a^kb^l) = O(a^k)O(a^l) - O(a^{k+l})$이 성립한다.

증명. $O(a^kb^l) = a^kb^l + a^lb^k + b^kc^l + b^lc^k + c^ka^l + c^la^k$이다. 한편 $O(a^k)O(a^l) - O(a^{k+l})$를 정리하면, $(a^k + b^k + c^k)(a^l + b^l + c^l) - (a^{k+l} + b^{k+l} + c^{k+l}) = a^kb^l + a^lb^k + b^kc^l + b^lc^k + c^ka^l + c^la^k$이 된다. 이로부터 $O(a^kb^l) = O(a^k)O(a^l) - O(a^{k+l})$이 증명된다. □

성질 2. $O(a^kb^k) = \dfrac{1}{2}\left[\{O(a^k)\}^2 - O(a^{2k})\right]$이 성립한다.

증명. $O(a^kb^k) = a^kb^k + b^kc^k + c^ka^k$이다. 한편 $\dfrac{1}{2}\left[\{O(a^k)\}^2 - O(a^{2k})\right] = \dfrac{1}{2}\{(a^k + b^k + c^k)^2 - (a^{2k} + b^{2k} + c^{2k})\} = a^kb^k + b^kc^k + c^ka^k$이 된다. □

성질 3. $k \geq m, l \geq m$에 대하여, $O(a^kb^lc^m) = (abc)^m O(a^{k-m}b^{l-m})$이 성립한다.

증명. $O(a^kb^lc^m) = a^kb^lc^m + a^kb^mc^l + a^lb^kc^m + a^lb^mc^k + a^mb^kc^l + a^mb^lc^k$이다. 등식의 우변에서 $(abc)^m$을 꺼내면, 다음을 얻을 수 있다.

$(abc)^m(a^{k-m}b^{l-m} + a^{k-m}c^{l-m} + a^{l-m}b^{k-m} + a^{l-m}c^{k-m} + b^{k-m}c^{l-m} + b^{l-m}c^{k-m})$

$$= (abc)^m O(a^{k-m} b^{l-m}).$$

이로부터 성질이 증명된다. □

증명한 성질 1, 2, 3을 이용하면, $O(a^k b^l c^m)$ 꼴의 대칭다항식은 σ_3와 s_n을 이용하여 표현할 수 있다. 예를 들면 $k > l > m$에 대하여, 다음이 성립한다.

$$O(a^k b^l c^m) = (abc)^m O(a^{k-m} b^{l-m}) = (abc)^m \{O(a^{k-m}) O(a^{l-m}) - O(a^{k+l-2m})\}$$
$$= \sigma_3^m (s_{k-m} s_{l-m} - s_{k+l-2m}).$$

한편 [1]과 [9]에 의하면, $n \geq 4$에 대해 $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$이 성립하므로, 결국 대칭다항식 $O(x^k y^l z^m)$은 σ_1, σ_2, σ_3와 s_n을 이용하여 표현될 수 있다. 그리고 $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$임을 감안하면, $O(x^k y^l z^m)$으로 표현되는 모든 대칭다항식은 σ_1, σ_2, σ_3으로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

대칭다항식 $O(x^k y^l z^m)$을 σ_1, σ_2, σ_3로 표현하는데 중요한 역할을 하는 등식 $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$에 대해 [1]과 [9]에 제시된 것과는 다른 증명을 살펴보자.

성질 4. $n \geq 4$과 $s_n = x^n + y^n + z^n$에 대하여, $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$이 성립한다.

증명. x, y, z를 근으로 하는 t에 관한 삼차방정식은 $(t-x)(t-y)(t-z) = 0$이며, 이를 전개하면 $t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0$이 된다. 이 방정식이 x를 근으로 가지므로 $x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$이다. 양변에 x^{n-3}을 곱하면 $x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \sigma_3 x^{n-3} = 0$이 되며, $x^n = \sigma_1 x^{n-1} - \sigma_2 x^{n-2} + \sigma_3 x^{n-3}$이 성립한다. 마찬가지로, y, z에 대하여 다음이 성립한다.

$$y^n = \sigma_1 y^{n-1} - \sigma_2 y^{n-2} + \sigma_3 y^{n-3},\ z^n = \sigma_1 z^{n-1} - \sigma_2 z^{n-2} + \sigma_3 z^{n-3}.$$

이제 얻어진 세 식을 더하면, $s_n = x^n + y^n + z^n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$이 성립함을 알 수 있다. □

성질 4를 이용하면, $s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_1\sigma_3$이 되며, 이를 정리하면 $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$이 됨을 알 수 있다. 같은 방법으로 $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$와 같이 나타낼 수 있다.

(3) 기본대칭다항식을 이용한 대칭다항식의 탐구

[1]에는 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3을 이용하여 몇몇 인수분해, 방정식 문제를 탐구한 예들이 제시되어 있다. 예를 들어, 다음 문제를 살펴보자([1], pp.599-600).

예제 1. $\alpha=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ 가 방정식 $x^3+\sqrt[3]{6}\,x^2-1=0$의 해가 된다는 것을 보여라.

풀이. 대칭다항식을 이용해서 α가 방정식의 해임을 보이기 위해, a, b, c를 각각 $a=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $b=\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}$, $c=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ 라고 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$a^3+b^3+c^3=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{3},\ abc=\sqrt[3]{\frac{1}{9}\left(-\frac{2}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right)}=-\frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= \sqrt[3]{-\frac{2}{81}}+\sqrt[3]{-\frac{8}{81}}+\sqrt[3]{\frac{4}{81}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{2}{9}}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)=\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}\cdot\alpha \end{aligned}$$

$a^3+b^3+c^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$이므로, $\frac{1}{3}=\alpha^3-3\alpha\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}\,\alpha-\frac{2}{3}$이 얻어진다. 이 식을 정리하면 $\alpha^3+\sqrt[3]{6}\,\alpha^2-1=0$이므로 α는 주어진 방정식의 근이다. □

살펴본 예제 1에서 $\alpha=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$가 주어진 방정식의 근이 된다는 것을 보이기 위해, $\alpha=a+b+c$가 되도록 적당히 a, b, c를 잡아, abc, $ab+bc+ca$, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하고, 등식 $a^3+b^3+c^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$을 이용하여 α를 포함하는 등식 $\alpha^3+\sqrt[3]{6}\,\alpha^2-1=0$을 유도하여 문제를 해결하였다.

기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3을 이용한 수학탐구의 다른 예로 [6]에서는 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$가 근이 a, b, c인 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 나타낸다는 것에 착안하여, a, b, c를 포함하는 대칭다항식을 인수분해 하는 방법을 제시하였다.

한편 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 부등식을 증명하는 예들이 최근에 전문 서적들에 소개되기 시작하였다([9], [11], [17]). 여기에 제시된 한 예를 하나 살펴보자([11], p.125).

예제 2. a, b, c는 합이 3인 실수이다. 다음 부등식을 증명하여라.

$$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2) \ge 9(ab+bc+ca).$$

증명. $x=a+b+c$, $y=ab+bc+ca$, $z=abc$라 놓자. 가정에 의해 $x=3$이며, 주어진 부등식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z^2+z+1+\sum_{sym}(a+a^2)+\sum_{sym}ab+\sum_{sym}a^2b^2+abc\left(\sum_{sym}a+\sum_{sym}ab\right)+\sum_{sym}a^2(b+c) \ge 9y$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2+z+1+x+(x^2-2y)+y+(y^2-2xz)+z(x+y)+xy-3z \ge 9y$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2-2z+1+(x-y)-z(x-y)+(x-y)^2+3xy \ge 9y$$

$$\Leftrightarrow \quad (z-1)^2-(z-1)(x-y)+(x-y)^2 \ge 0.$$

얻어진 마지막 부등식은 자명하다. 등호는 $z=1$, $x=y$ 또는 $a=b=c=1$인 경우에 성립한다. □

예제 2에서는 a, b, c에 대한 주어진 부등식을 간단하게 정리하기 위해 기본대칭다항식을 $x=a+b+c$, $y=ab+bc+ca$, $z=abc$와 같이 놓았다. 그 결과 a, b, c에 대한 부등식이 x, y, z에 대한 부등식으로 변형되었으며, 이로부터 쉽게 부등식이 증명되었다.

대칭다항식으로 된 부등식이 기본대칭다항식으로 치환한다고 하여, 예제 2와 같이 모든 부등식이 쉽게 해결될 수는 없다. 그러나 예제 1과 예제 2의 탐구를 통해, 대칭다항식을 기본대칭다항식으로 치환하는 것이 문제해결을 위한 새로운 탐구 방향은 될 수 있음을 알 수 있다.

3. 기본대칭다항식으로의 매개에 통한 부등식들의 생성

a, b, c에 대한 부등식 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 나타내자. 이를 위해, 주어진 부등식의 좌변을 전개하면, $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \ge 0$, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0$이 성립한다. 이로부터 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ge 3ab+3bc+3ca$이 유도된다. 이제 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$라 놓자. 그러면 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식 $\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$이 얻어진다.

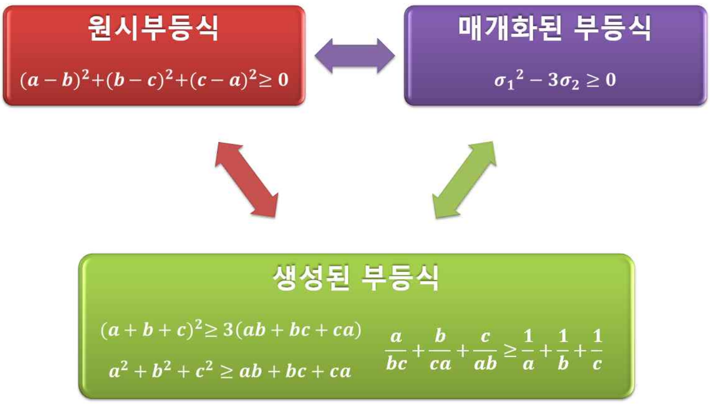
부등식 3. $\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$.

이제 기본대칭다항식에 대한 부등식 $\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$로부터 부등식을 만들어 보자. 부등식 $\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$에 $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$를 대입하자. 그러면, a, b, c에

대한 부등식 $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$가 생성된다. 이 부등식의 양변을 전개하여 정리하면, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$이며, 양변을 abc로 나누면 $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$이 얻어진다. 결국 부등식 3으로부터 다음 부등식 3-1, 3-2, 3-3이 생성된다.

부등식 3-1. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여, $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.
부등식 3-2. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.
부등식 3-3. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여, $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

처음의 원시부등식 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$을 부등식 3으로 매개하여, 몇몇 부등식을 생성하는 과정을 정리하면, [그림 1]과 같다.



[그림 1] 매개화를 통한 부등식의 생성

[그림 1]에서 생성된 부등식 $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$에서 $a=xy,\ b=yz,\ c=zx$를 대입하자. 그러면 부등식 $(xy+yz+zx)^2 \geq 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$, $(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$가 얻어진다. 이것을 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$로 표현하면, $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$가 얻어진다.

부등식 4. $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$.

이제 $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$에서 $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$를 대입하면, $(ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) \geq 0$, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)-3abc(a+b+c) \geq 0$이며, 정리하면 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$이 생성된다. 이제 양변을 abc로 나누면, 부등식 $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$이 생성된다. 결국, [그림 1]의 매개화를 통한 부등식 생성의 순환을 계속 수행하면서, 다양한 부등식들이 생성될 수 있다.

부등식 4-1. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여, $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c.$

부등식 3, 4를 이용하여, σ_1, σ_2, σ_3에 대한 새로운 부등식 5를 얻을 수 있다.

부등식 5. $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$.

증명. 부등식 3, 4에서 $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$, $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$이 성립한다. 이 부등식들을 서로 곱하면, $\sigma_1^2\sigma_2^2 \geq 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3$이 된다. 이제 부등식의 양변을 $\sigma_1\sigma_2$로 나누면, 구하는 부등식 $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$이 얻어진다. □

이제 $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$에서 $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$를 대입하면, $(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc \geq 0$, $a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a-9abc \geq 0$이 되며, 이 부등식을 정리하면 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geq 6abc$가 생성된다.

부등식 5-1. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geq 6abc.$

부등식 5-1은 σ_1, σ_2, σ_3로 표현된 부등식 3, 4를 적당히 대수적으로 변형시켜 부등식 5를 얻고, 이것을 a, b, c에 대한 부등식으로 표현하여 얻어진 식이다. 이러한 방법을 통해 a, b, c에 대한 다양한 부등식들을 얻을 수 있다.

부등식 6. $\sigma_1^3 \geq 27\sigma_3$.

증명. 부등식 3에서 $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$가 성립한다. 양변에 σ_1을 곱하면, $\sigma_1^3 \geq 3\sigma_1\sigma_2$이 된다. 한편, 부등식 5의 양변에 3을 곱하면, $3\sigma_1\sigma_2 \geq 27\sigma_3$이 성립한다. 얻어진 두 부등식을 연립하면, 부등식 $\sigma_1^3 \geq 27\sigma_3$가 얻어진다. □

이제 $\sigma_1^3 \geq 27\sigma_3$에 $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_3 = abc$를 대입하면, $(a+b+c)^3 - 27abc \geq 0$이 얻어진다. 이 부등식을 전개하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$a^3+b^3+c^3+a^2b+ca^2+ab^2+b^2c+c^2a+bc^2+2a^2b+2ab^2+2abc+2abc+2b^2c+ 2bc^2+2ca^2+2abc+2c^2a-27abc \geq 0.$$

이제 부등식을 정리하면, $a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b) \geq 21abc$가 생성된다.

부등식 6-1. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여, $a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a) +3c^2(a+b) \geq 21abc.$

부등식 7. $\sigma_2^3 \geq 27\sigma_3^2$.

증명. 부등식 6에서 $\sigma_1^3 \geq 27\sigma_3$가 성립한다. 여기에 σ_1, σ_3를 a, b, c로 표현하면, $(a+b+c)^3 \geq 27abc$가 된다. 이제 이 부등식에서 $a=xy$, $b=yz$, $c=zx$로 치환하면$(xy+yz+zx)^3 \geq 27(xyz)^2$이 된다. 다시 $xy+yz+zx=\sigma_2$, $xyz=\sigma_3$를 대입하여, $\sigma_2^3 \geq 27\sigma_3^2$을 얻을 수 있다. □

이제 $\sigma_2^3 \geq 27\sigma_3^2$에 $\sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$를 대입하여 정리하자. 그러면, 부등식 $(ab+bc+ca)^3 - 27a^2b^2c^2 \geq 0$으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+a^2b^3c+a^3b^2c+ab^3c^2+ab^2c^3+2a^3b^2c+2a^2b^2c^2+2a^2b^3c+2ab^3c^2 +2a^2b^2c^2+2a^2b^2c^2+2ab^2c^3+2a^2bc^3-27a^2b^2c^2 \geq 0\ .$$

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3abc(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2) \geq 21a^2b^2c^2.$$

부등식 7-1. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여, $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3abc(a^2b+ab^2+b^2c +bc^2+c^2a+ca^2) \geq 21a^2b^2c^2.$

부등식 8. $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geq 0$.

증명. 부등식 1에서 $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$이며, 이것을 σ_1, σ_2, σ_3로 나타내면 $\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3 \geq 0$가 된다. 그런데 이 부등식은 부등식 5에서 증명되었다.

부등식 1을 변형시키기 위해, $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$라 놓으면, $a=\dfrac{z+x-y}{2}$, $b=\dfrac{x+y-z}{2}$, $c=\dfrac{y+z-x}{2}$가 된다. $x+y+z=\rho_1$, $xy+yz+$

$zx = \rho_2$, $xyz = \rho_3$라 하면 $\sigma_1 = \frac{1}{2}\rho_1$, $\sigma_2 = \frac{-\rho_1^2 + 4\rho_2}{4}$, $\sigma_3 = \frac{-\rho_1^3 + 4\rho_1\rho_2 - 8\rho_3}{8}$가 된다. 이를 부등식 5에 대입하면, $\left(\frac{1}{2}\rho_1\right)\left(\frac{-\rho_1^2 + 4\rho_2}{4}\right) - 9\left(\frac{-\rho_1^3 + 4\rho_1\rho_2 - 8\rho_3}{8}\right) \geq 0$이 되고, 이 부등식을 σ_1, σ_2, σ_3로 표현하여 정리하면, $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geq 0$이 얻어진다. □

부등식 8은 부등식 18에서 $n = 1$인 경우의 Schur 부등식이다. 이제 증명된 부등식 $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geq 0$을 a, b, c로 나타내면, 다음을 얻을 수 있다.

$$(a+b+c)^3 - 4(a+b+c)(ab+bc+ca) + 9abc \geq 0,$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca) + 9abc \geq 0,$$
$$a^3+b^3+c^3-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+3abc \geq 0.$$

결국, 부등식 8로부터 $a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$가 생성된다.

부등식 8-1. a, b, $c \geq 0$에 대하여, $a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

부등식 9. $\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 \geq 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

증명. 부등식 8의 $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geq 0$로부터 $(a+b+c)^3 - 4(a+b+c)(ab+bc+ca) + 9abc \geq 0$이 얻어진다. 이제 $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$로 치환하면 $(xy+yz+zx)^3 - 4(xy+yz+zx)xyz(x+y+z) + 9x^2y^2z^2 \geq 0$이 된다. 이제 $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+yz+zx$, $\sigma_3 = xyz$로 치환하면, 부등식 $\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 \geq 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3$이 얻어진다. □

부등식 7-1, 8-1을 얻는 방법과 유사하게 다음 부등식을 생성할 수 있다.

부등식 9-1. a, b, $c \geq 0$에 대하여, $(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+9a^2b^2c^2 \geq 2abc(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

부등식 10. $\sigma_1\sigma_2^2 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3$.

증명. 부등식 4의 $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$에서 양변에 σ_1를 곱하면, $\sigma_1\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1^2\sigma_3$이 된다.

그리고 부등식 3의 $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$에서 양변에 σ_3를 곱하고 $2\sigma_1^2\sigma_3$를 더하면 $3\sigma_1^2\sigma_3 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3$이 성립한다. 이제 두 부등식을 연립하면, $\sigma_1\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1^2\sigma_3 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3$가 되므로, 부등식 $\sigma_1\sigma_2^2 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3$이 얻어진다. □

이제 $\sigma_1\sigma_2^2 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3$에 $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$를 대입하면, 다음이 얻어진다.

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)^2 - 3abc(ab+bc+ca) - 2abc(a+b+c)^2 \geq 0,$$

$$(a+b+c)\{(ab+bc+ca)^2 - 2(a+b+c)abc\} \geq 3abc(ab+bc+ca).$$

이로부터 $(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 3abc(ab+bc+ca)$이 얻어진다.

부등식 10-1. a, b, $c \geq 0$에 대하여, $(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 3abc(ab+bc+ca)$.

한편, 부등식 10의 $\sigma_1\sigma_2^2 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3$에 '만약 $\sigma_3 = abc = 1$'이라는 조건을 추가하면, 부등식 $\sigma_1\sigma_2^2 \geq 2\sigma_1^2 + 3\sigma_2$를 얻을 수 있다. 그러면 σ_1, σ_2를 a, b, c로 바꾸면, 다음을 얻을 수 있다.

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)^2 - 2(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \geq 0,$$

$$(a+b+c)\{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\} - 2(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 3(ab+bc+ca),$$

$$a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a) \geq 2(ab+bc+ca).$$

부등식 10-2. a, b, $c \geq 0$에 대하여, $abc = 1$일 때,

$$a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a) \geq 2(ab+bc+ca).$$

부등식 10-2의 모든 항을 좌변으로 넘겨 abc로 나눈 후 정리하면, 다음이 얻어진다.

$$\frac{ab(a+b)-2}{c} + \frac{bc(b+c)-2}{a} + \frac{ca(c+a)-2}{b} \geq 0,$$

$$\frac{a+b-2c}{c^2} + \frac{b+c-2a}{a^2} + \frac{c+a-2b}{b^2} \geq 0,$$

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

부등식 10-3. $a,\ b,\ c>0$에 대하여, $abc=1$일 때,

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

부등식 11. $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ \ge 0$.

증명. 부등식 8의 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ \ge 0$에서 양변에 2를 곱하면, $2\sigma_1^3-8\sigma_1\sigma_2+18\sigma_3\ge 0$가 된다. 다시 양변에 $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3$를 더하면 $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ \ge \sigma_1\sigma_2-9\sigma_3$가 된다. 이제 부등식 5의 $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3\ \ge 0$를 생각하면, 부등식 $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ \ge 0$이 얻어진다. □

이제, 부등식 $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ \ge 0$을 $a,\ b,\ c$에 대한 부등식으로 바꾸자.

$$2(a+b+c)^3-7(a+b+c)(ab+bc+ca)+9abc\ge 0,$$
$$(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-3ab-3bc-3ca)+9abc\ge 0,$$
$$2a^3+2b^3+2c^3+2ab^2+2c^2a+2a^2b+2bc^2+2ca^2+2b^2c-3a^2b$$
$$-3ab^2-3b^2c-3bc^2-3c^2a-3ca^2\ \ge 0,$$
$$2(a^3+b^3+c^3)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

이제 부등식의 양변을 abc로 나누면 $2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\ge \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$ 가 생성된다.

부등식 11-1. $a,\ b,\ c>0$에 대하여, $2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\ge \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$.

부등식 12. $\sigma_1^4+3\sigma_2^2\ \ge 4\sigma_1^2\sigma_2$.

증명. 부등식 8에서 부등식 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ \ge 0$의 양변에 σ_1을 곱하자. 그러면 $\sigma_1^4\ge 4\sigma_1^2\sigma_2-9\sigma_1\sigma_3$가 되며, 이 부등식의 양변에 $3\sigma_2^2$을 더하면 $\sigma_1^4+3\sigma_2^2\ \ge 4\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_2^2-9\sigma_1\sigma_3$이 된다. 부등식 4에서 $\sigma_2^2\ \ge 3\sigma_1\sigma_3$이므로 $3\sigma_2^2-9\sigma_1\sigma_3\ \ge 0$이다. 이들 두 부등식으로부터 $4\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_2^2-9\sigma_1\sigma_3\ \ge 4\sigma_1^2\sigma_2$이 성립하며 $\sigma_1^4+3\sigma_2^2\ \ge 4\sigma_1^2\sigma_2$가 얻어진다. □

이제 부등식 12의 $\sigma_1^4+3\sigma_2^2\ \ge 4\sigma_1^2\sigma_2$를 $a,\ b,\ c$로 나타내면, 다음과 같다.

$$(a+b+c)^4-4(a+b+c)^2(ab+bc+ca)+3(ab+bc+ca)^2\ \ge 0,$$

$$(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)+3(ab+bc+ca)^2 \ge 0$$
$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(ab+bc+ca)^2 \ge 0,$$
$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 2abc(a+b+c).$$

부등식 12-1. $a,\ b,\ c \ge 0$에 대하여, $a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 2abc(a+b+c)$.

부등식 13. $\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3 \ge 4\sigma_2^2$.

증명. 부등식 8의 $\sigma_1^3 \ge 4\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3$에서 양변에 σ_2를 곱하고, $3\sigma_1^2\sigma_3$를 더하자. 그러면 $\sigma_1^3\sigma_2+3\sigma_1^2\sigma_3 \ge \sigma_2(4\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3)+3\sigma_1^2\sigma_3$가 된다. 부등식의 우변을 전개하면 $4\sigma_1\sigma_2^2-9\sigma_2\sigma_3+3\sigma_1^2\sigma_3$이 되고, $3\sigma_1^2\sigma_3-9\sigma_2\sigma_3=3\sigma_3(\sigma_1^2-3\sigma_2)\ge 0$이므로 $4\sigma_1\sigma_2^2-9\sigma_2\sigma_3+3\sigma_1^2\sigma_3 \ge 4\sigma_1\sigma_2^2$이 성립한다. 이로부터 부등식 $\sigma_1^3\sigma_2+3\sigma_1^2\sigma_3 \ge 4\sigma_1\sigma_2^2$을 얻을 수 있다. 이제 $\sigma_1>0$이므로 양변을 σ_1으로 나누면, $\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3 \ge 4\sigma_2^2$이 증명된다. □

부등식 13의 $\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3 \ge 4\sigma_2^2$을 $a,\ b,\ c$로 나타내면, 다음과 같다.

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)-4(ab+bc+ca)^2+3abc(a+b+c)\ge 0,$$
$$(a+b+c)(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+6abc)-4(ab+bc+ca)^2 \ge 0,$$
$$(a+b+c)(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)-4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)\ge 0,$$
$$a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)-4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)\ge 0,$$
$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

양변에 $a^4+b^4+c^4$을 더하여 정리하면, $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\ge (a^2+b^2+c^2)^2$

부등식 13-1. $a,\ b,\ c \ge 0$에 대하여, $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\ge (a^2+b^2+c^2)^2$.

한편, $\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3 \ge 4\sigma_2^2$에서 $\sigma_1=a+b+c=1$이라는 조건을 추가하면, $\sigma_2+3\sigma_3-4\sigma_2^2 \ge 0$이 된다. 이제 $a,\ b,\ c$로 나타내면, $ab+bc+ca-4a^2b^2-4b^2c^2-c^2a^2-5abc \ge 0$이며, 양변을 abc로 나누어 $\dfrac{1-4bc}{a}+\dfrac{1-4ac}{b}+$

$\dfrac{1-4ab}{c} \geq 5$를 얻을 수 있다.

부등식 13-2. a, b, $c>0$에 대하여, $a+b+c=1$일 때,

$$\frac{1-4bc}{a}+\frac{1-4ac}{b}+\frac{1-4ab}{c} \geq 5.$$

$\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3 \geq 4\sigma_2^2$에서 $\sigma_2=ab+bc+ca=2$라는 조건을 추가하면, $2\sigma_1^2+3\sigma_1\sigma_3 \geq 16$을 얻을 수 있다. 이것을 a, b, c로 나타내면, $2(a+b+c)^2+3(a+b+c)abc-16 \geq 0$가 되며, 이로부터 $2a^2+2b^2+2c^2+4ab+4bc+4ca+3a^2bc+3ab^2c+3abc^2-16 \geq 0$가 된다. 이제 $ab+bc+ca=2$를 이용하면, $2a^2+2b^2+2c^2+3a^2bc+3ab^2c+3abc^2-8 \geq 0$가 얻어진다.

부등식 13-3. a, b, $c \geq 0$에 대하여, $ab+bc+ca=2$ 일 때,

$$2a^2+2b^2+2c^2+3abc(a+b+c) \geq 8.$$

부등식 13-2, 13-3에서 보았듯이, σ_1, σ_2에 대한 조건을 첨가하면, 쉽게 새로운 부등식들을 얻을 수 있다. 이러한 부등식의 생성도 본 연구에서 다루는 방법의 한 장점이라고 할 수 있다.

부등식 14. $\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2+6\sigma_1\sigma_3 \geq 0.$

증명. 부등식 4에서 $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$가 성립한다. a, b, c에 관한 식으로 표현하면, $(ab+bc+ca)^2 \geq (a+b+c)abc$이고, 부등식 1을 변형시키기 위해, $a+b=x$, $b+c=y$, $a+c=z$라 놓으면, $a=\dfrac{x+z-y}{2}$, $b=\dfrac{x+y-z}{2}$, $c=\dfrac{y+z-x}{2}$가 된다. $x+y+z=\rho_1$, $xy+yz+zx=\rho_2$, $xyz=\rho_3$라 하면 $\sigma_1=\dfrac{1}{2}\rho_1$, $\sigma_2=\dfrac{-\rho_1^2+4\rho_2}{4}$, $\sigma_3=\dfrac{-\rho_1^3+4\rho_1\rho_2-8\rho_3}{8}$ 가 된다. 이들을 부등식 4에 대입하면, $\left(\dfrac{-\rho_1^2+4\rho_2}{4}\right)^2 \geq \left(\dfrac{1}{2}\rho_1\right)\left(\dfrac{-\rho_1^3+4\rho_1\rho_2-8\rho_3}{8}\right)$ 가 되고, 이 부등식을 σ_1, σ_2, σ_3로 표현하여 정리하면, $\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2+6\sigma_1\sigma_3 \geq 0$가 얻어진다. □

이제 $\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2+6\sigma_1\sigma_3 \geq 0$를 이용한 부등식의 생성을 알아보자.

$x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) \le x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)$에서 양변에 $x^4+y^4+z^4$을 더하여 정리하면, $2s_4-\sigma_1 s_3+\sigma_3 s_1 \ge 0$을 얻을 수 있고, $\sigma_3=abc=1$이라는 조건을 추가하여 부등식 $2s_4-\sigma_1 s_3+\sigma_3 s_1 \ge 0$을 a, b, c로 나타내어 정리하면, 다음과 같다.

$$2a^4+2b^4+2c^4-(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)+abc(a+b+c) \ge 0,$$
$$a^4+b^4+c^4-a^3b-ab^3-b^3c-bc^3-c^3a-ca^3+a^2bc+ab^2c+abc^2 \ge 0,$$
$$a^2(a^2+bc)+b^2(b^2+ca)+c^2(c^2+ab) \ge ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2),$$
$$a^4+b^4+c^4+(a+b+c) \ge \frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b},$$
$$\frac{a^3+1}{bc}+\frac{b^3+1}{ca}+\frac{c^3+1}{ab} \ge \frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}.$$

부등식 14-1. a, b, $c>0$에 대하여, $abc=1$일 때,
$$\frac{a^3+1}{bc}+\frac{b^3+1}{ca}+\frac{c^3+1}{ab} \ge \frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}.$$

a, b, c에 대한 부등식을 σ_1, σ_2, σ_3로 매개시켜 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식을 만들었다. 그런 다음, σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식들을 대수적 조작을 통해 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 새로운 부등식들을 얻었으며, 이들을 a, b, c로 나타내 원래의 부등식들과 같은 a, b, c에 대한 부등식들을 생성하였다. 이 과정에서 변수들의 치환, 변수를 적당한 값으로 제한하는 등의 방법들이 사용되었다.

4. 기본대칭다항식으로 표현된 부등식의 증명방법

기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3으로의 매개화가 새로운 부등식의 생성을 위한 의미있는 도구가 될 수 있다는 것을 기술하였다. 이제 부등식의 증명 도구로써 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3의 활용에 대해 살펴보자. 본 연구에서는 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 활용한 부등식의 증명 방법을 다섯 가지로 나누었다.

(1) σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식의 직접 적용을 통한 방법

증명해야 할 부등식을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3로 표현한다. 그런 다음, 앞에서 생성한 σ_1, σ_2, σ_3로 표현된 다양한 부등식들을 이용하여, σ_1, σ_2, σ_3로 표현된 부등식을 증명하는 방법이다. 이 방법은 σ_1, σ_2, σ_3를 이용한 부등식 증명의

가장 전형적인 방법이라고 할 수 있으며, 다양하게 이용할 수 있는 방법이기도 하다. 이미 이 방법으로 많은 부등식을 증명하였다. 한 예를 더 살펴보자.

부등식 15. $a, b, c \geq 0$에 대하여, $\dfrac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$.

증명. 증명할 부등식을 σ_1, σ_2, σ_3을 이용하여 표현하여 정리하면, $\dfrac{27\sigma_3^3}{\sigma_2^3} \leq \sigma_3 \leq \dfrac{\sigma_1^3}{27}$이 된다. 즉 주어진 부등식을 증명하기 위해, $\dfrac{27\sigma_3^3}{\sigma_2^3} \leq \sigma_3 \leq \dfrac{\sigma_1^3}{27}$을 증명하면 된다. 부등식 6에서 $\sigma_1^3 \geq 27\sigma_3$이 성립하며, 양변을 27로 나누면 $\sigma_3 \leq \dfrac{\sigma_1^3}{27}$가 얻어진다. 한편 부등식 7에서 $\sigma_2^3 \geq 27\sigma_3^2$이 성립하며, 양변에 σ_3를 곱한 후 σ_2^3을 나누면 $\dfrac{27\sigma_3^3}{\sigma_2^3} \leq \sigma_3$이 얻어진다. 이로부터 증명하려는 부등식 $\dfrac{27\sigma_3^3}{\sigma_2^3} \leq \sigma_3 \leq \dfrac{\sigma_1^3}{27}$이 유도된다. □

부등식 15에서 $\sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$는 $n=3$인 경우의 Cauchy 부등식이다. 부등식의 증명에 관련된 다양한 문헌들([7], [9], [10], [11], [13], [14], [17])을 조사했지만, 기술한 것과 같은 방법으로 $n=3$인 경우의 Cauchy 부등식을 증명한 사례는 찾지 못했다.

부등식 16. $a, b, c \geq 0$에 대하여, $abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

부등식 15의 증명에서 했던 것과 유사한 방법으로, 부등식 16을 σ_1, σ_2, σ_3을 이용하여 정리하자. 이를 위해, 부등식 16의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$abc-(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a),\ \sigma_3-(\sigma_1-2a)(\sigma_1-2b)(\sigma_1-2c),$$

$$\sigma_3-\sigma_1^3+2(a+b+c)\sigma_1^2-4(ab+bc+ca)\sigma_1+8abc,\ \sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3.$$

결국 부등식 16을 증명하려면, $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \geq 0$을 증명하면 된다. 부등식 3에서 $\sigma_1^2-3\sigma_2 \geq 0$의 양변에 σ_1을 곱하면, $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 \geq 0$가 얻어진다. 그리고 부등식 5에 의해 $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$, $-\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \leq 0$가 성립한다. 이제 $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 \geq 0$,

$-\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \le 0$를 서로 더하면, 좌변에 구하는 부등식의 좌변인 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3$가 얻어진다. 그러나 부등식 $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 \ge 0$, $-\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \le 0$의 부등호의 방향은 같지 않아서 부등식 15와 같은 방법을 사용할 수 없다. 부등식 16과 같은 경우에 어떻게 부등식을 증명할지 다음 방법을 통해 알아보자.

(2) 문자의 치환을 이용한 방법

부등식에 제시된 문자들을 다른 문자들로 치환하면, 주어진 부등식이 다른 모습으로 변형되며, 이를 증명하여 문제를 해결하는 방법이다. 앞에서 $a=xy$, $b=yz$, $c=zx$와 같은 치환을 이용하여 부등식을 변형시키는 예를 살펴보았다. 여기서는 $a+b=x, b+c=y, c+a=z$와 같은 치환을 이용하여 부등식을 증명하는 예들을 살펴보자.

부등식 16. a, b, $c \ge 0$에 대하여, $abc \ge (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

증명. 이 부등식을 증명하기 위해, 우선 부등식 $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$를 증명하자. $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$를 σ_1, σ_2, σ_3로 나타내면, $(\sigma_1-a)(\sigma_1-b)(\sigma_1-c) \ge 8\sigma_3$가 된다. 이 부등식의 좌변을 전개하여 정리하면, $\sigma_1^3-(a+b+c)\sigma_1^2+(ab+bc+ca)\sigma_1-abc \ge 8\sigma_3$, $\sigma_1^3-\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3 \ge 8\sigma_3$가 되며, 결국 $\sigma_1\sigma_2 \ge 9\sigma_3$를 얻게 된다. 결국 이 부등식은 부등식 5이므로, 그 타당성이 증명되었다.

이제 $a+b=x, b+c=y, c+a=z$라고 치환하면, $a=\dfrac{z+x-y}{2}$, $b=\dfrac{x+y-z}{2}$, $c=\dfrac{y+z-x}{2}$가 된다. 이것을 부등식 $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$에 대입하면, 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$xyz \ge 8\left(\frac{z+x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y-z}{2}\right)\left(\frac{y+z-x}{2}\right),$$
$$xyz \ge (z+x-y)(x+y-z)(y+z-x).$$

증명하고자 하였던 부등식이 성립하는 부등식으로부터 유도되었으므로 성립한다. □

부등식 17. 삼각형의 세 변 a, b, c에 대하여,
$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^3+b^3+c^3+3abc).$$

부등식 17의 모든 항을 좌변으로 넘겨, σ_1, σ_2, σ_3로 표현하여 정리하면, 부등

식의 좌변은 다음과 같다.

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3(a^3+b^3+c^3+3abc),$$
$$2\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-3(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_3),\ -\sigma_1^3+5\sigma_1\sigma_2-18\sigma_3.$$

결국 부등식 17을 증명하기 위해, $-\sigma_1^3+5\sigma_1\sigma_2-18\sigma_3 \ge 0$을 보이면 된다. 부등식 $-\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \le 0$와 $\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \ge 0$의 좌변들을 더하면 $-\sigma_1^3+5\sigma_1\sigma_2-18\sigma_3$이 얻어지지만, 이 두 부등식의 부등호 방향이 일치하지 않아 $-\sigma_1^3+5\sigma_1\sigma_2-18\sigma_3 \ge 0$을 증명할 수 없다. 이제 적당한 치환을 이용하여 부등식 17을 증명하자.

부등식 17의 증명. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 의미하므로, 삼각부등식에 의해 $a+b-c>0$, $b+c-a>0$, $c+a-b>0$가 성립한다. 이제 $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$로 치환하면, $x=\dfrac{a-b+c}{2}>0$, $y=\dfrac{a+b-c}{2}>0$, $z=\dfrac{b+c-a}{2}>0$가 되어, x, y, z에 대한 기본대칭다항식을 이용할 수 있다. 증명하려는 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여, $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$로 치환하여 정리하면, 부등식의 좌변에서 다음을 얻을 수 있다.

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3(a^3+b^3+c^3+3abc),$$
$$\begin{aligned}&2(2x+2y+2z)(2x^2+2y^2+2z^2+\\&\qquad +2xy+2yz+2zx)-3\{2x^3+2y^3+2z^3+3x^2y+3xy^2+\\&\qquad +3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+3(x+y)(y+z)(z+x)\}.\end{aligned}$$
$$8\sigma_1(\sigma_1^2-\sigma_2)-3\{2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+3O(x^2y)+3\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3\}.$$

이제 식을 정리하면, $2\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3-9\{O(x^2)O(x)-O(x^3)\}$, $2\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3-9\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+9(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)$, $2\sigma_1^3-8\sigma_1\sigma_2+18\sigma_3$를 얻을 수 있다. 그런데 부등식 8에서 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \ge 0$의 타당성을 증명하였으므로, 부등식 17이 증명된다. □

부등식 17의 증명과정에 복잡한 식들의 연산이 포함되어 있지만, 이들은 적당한 치환을 이용하여 문제해결의 실마리를 찾은 후에 식의 정리 과정에서 나타나므로, 증명과정의 큰 장애물이라고 할 수는 없을 것이다.

(3) Schur 부등식을 이용한 방법

Schur 부등식은 그 자체로도 중요하지만, 다양한 부등식을 증명하는 과정에서

도 자주 사용된다. Schur 부등식에서 유도되는 기본대칭다항식으로 표현된 식들을 이용하면 많은 부등식을 증명할 수 있다.

부등식 18 [Schur 부등식]. $a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-a)(b-c)+c^n(c-a)(c-b)\geq 0$.

증명. 일반성을 잃지 않고 $a\geq b\geq c$라고 가정하면, $a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-a)(b-c)+c^n(c-a)(c-b)=(a-b)\{a^n(a-c)-b^n(b-c)\}+c^n(c-a)(c-b)$이다. 이때 $a-b\geq 0$, $a^n\geq b^n$, $a-c\geq b-c$, $c^n(c-a)(c-b)\geq 0$이므로 부등식 18이 성립함을 알 수 있다. □

한편, Schur 부등식을 기본대칭다항식으로 표현해 보면, 다음과 같다.

$$a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-a)(b-c)+c^n(c-a)(c-b)$$
$$=a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}-(b+c)a^{n+1}-(c+a)b^{n+1}-(a+b)c^{n+1}+a^nbc+ab^nc+abc^n$$
$$=s_{n+2}-(\sigma_1-a)a^{n+1}-(\sigma_1-b)b^{n+1}-(\sigma_1-c)c^{n+1}+$$
$$+abc(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})=2s_{n+2}-\sigma_1 s_{n+1}+\sigma_3 s_{n-1}.$$

성질 4에 의하여 $s_{n+2}=\sigma_1 s_{n+1}-\sigma_2 s_n+\sigma_n s_{n-1}$이므로, $2s_{n+2}-\sigma_1 s_{n+1}+\sigma_3 s_{n-1}=\sigma_1 s_{n+1}-2\sigma_2 s_n+3\sigma_3 s_{n-1}$이 된다. 결국 Schur 부등식을 기본대칭다항식으로 표현하면, $\sigma_1 s_{n+1}-2\sigma_2 s_n+3\sigma_3 s_{n-1}\geq 0$이다.

부등식 18-1. $\sigma_1 s_{n+1}-2\sigma_2 s_n+3\sigma_3 s_{n-1}\geq 0$.

앞에서 이미 Shcur 부등식의 특수한 경우에 대해서 증명하였다. 예를 들면, 부등식 18-1에서 $n=1$을 대입하면 $\sigma_1 s_2-2\sigma_2 s_1+3\sigma_3 s_0\geq 0$, $\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-2\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\geq 0$이며, $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\geq 0$가 된다. 이 부등식은 이미 부등식 8에서 증명하였다. 부등식 18-1에서 $n=2$를 대입하면 $\sigma_1 s_3-2\sigma_2 s_2+3\sigma_3 s_1\geq 0$이며, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-2\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+3\sigma_1\sigma_3\geq 0,$$
$$\sigma_1^4-3\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3-2\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_3\geq 0.$$

이로부터 $\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2+6\sigma_1\sigma_3\geq 0$이 성립한다. 이 부등식은 이미 부등식 14에서 증명하였다. 결국 본 연구에서는 $n=1$, $n=2$인 경우의 Schur 부등식을 매개된 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 새롭게 증명하였다. 부등식 8과 부등식 14를 이용

하여, 부등식들을 증명하자.

부등식 19. $a, b, c \geq 0$에 대하여, $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leq a^3+b^3+c^3+3abc$.

증명. 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$로 표현하여 정리하면, $a^3+b^3+c^3+6abc-(a+b+c)(ab+bc+ca)$, $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3-\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3$가 된다. 결국 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \geq 0$을 증명하면 된다. 이것은 부등식 8의 부등식이므로, 부등식이 증명되었다. □

부등식 20 [1964년도 IMO 문제]. 삼각형의 세 변 a, b, c에 대하여,

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

증명. 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$으로 표현하여 정리하면,

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-3abc,$$

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-a^3-b^3-c^3-3abc,$$

$$O(a^2b)-s_3-3\sigma_3,\ s_1s_2-2s_3-3\sigma_3,$$

$$\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-3\sigma_3,\ -\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3$$

가 된다. 결국 $-\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3 \leq 0$을 증명하면 된다. 이 부등식은 부등식 8에 의해 성립하므로, 부등식이 증명되었다. □

부등식 21. $a, b, c \geq 0$에 대하여, $2(a^3+b^3+c^3) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$.

증명. 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$으로 표현하여 정리하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$2(a^3+b^3+c^3)-\{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\},$$

$$2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-O(a^2b),\ 2\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2+6\sigma_3-O(a^2)O(a)+O(a^3)$$

$$2\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2+6\sigma_3-(\sigma_1^2-2\sigma_2)\sigma_1+\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,\ 2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3.$$

결국 $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \geq 0$을 증명하면 된다. 부등식 8에서 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \geq 0$이 성립하고, 부등식 5에서 $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$가 성립하며, 이들을 연립하면 부등식이 증명된다. □

부등식 22 [Nesbitt 부등식]. $a, b, c \geq 0$에 대해 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

증명. 부등식의 양변에 $2(a+b)(b+c)(c+a)$를 곱하면, $2a(a+b)(c+a)+2b(a+b)(b+c)+2c(b+c)(c+a) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$가 된다. 우변을 좌변으로 이항하여, σ_1, σ_2, σ_3으로 표현하여 정리하면, 부등식의 좌변은 다음과 같이 된다.

$$2a(a+b)(c+a)+2b(a+b)(b+c)+2c(b+c)(c+a)-3(a+b)(b+c)(c+a),$$
$$2\{a^3+b^3+c^3+(b+c)a^2+(c+a)b^2+(a+b)c^2+3abc\}-3(a+b)(b+c)(c+a),$$
$$2\{s_3+(\sigma_1-a)a^2+(\sigma_1-b)b^2+(\sigma_1-c)c^2+3\sigma_3\}-3(\sigma_1-a)(\sigma_1-b)(\sigma_1-c)$$
$$2\sigma_1(a^2+b^2+c^2)+6\sigma_3-3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3),\ 2\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-3\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3,$$
$$2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3.$$

결국 $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \geq 0$을 증명하면 된다. 이것은 부등식 11에서 증명되었다. □

(4) 항들을 적당히 변형시켜 묶음(grouping)을 만드는 방법

이 방법에서는 식을 하나의 전체로 보지 말고, 몇몇 항들을 변형시켜 이미 증명된 부등식들을 이용할 수 있도록 괄호를 이용하여 묶음을 만든다. 이제, 증명된 부등식을 순차적으로 적용하면 원하는 부등식을 증명할 수 있다.

부등식 23. $a,\ b,\ c \geq 0$에 대하여,
$$(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3 \geq 8a^2b^2c^2(2a+b+c)(a+2b+c)\ (a+b+2c).$$

증명. 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여, σ_1, σ_2, σ_3으로 표현하여 정리하면, 다음 식이 얻어진다.

$$(\sigma_1-a)^3(\sigma_1-b)^3(\sigma_1-c)^3-8\sigma_3^2(\sigma_1+a)(\sigma_1+b)(\sigma_1+c),$$
$$\{\sigma_1^3-(a+b+c)\sigma_1^2+(ab+bc+ca)\sigma_1-abc\}^3$$
$$-8\sigma_3^2(\sigma_1^3+(a+b+c)\sigma_1^2+(ab+bc+ca)\sigma_1+abc),$$
$$(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^3-8\sigma_3^2(2\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2+\sigma_3),$$
$$\sigma_1^3\sigma_2^3-3\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3+3\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2-\sigma_3^3-16\sigma_1^3\sigma_3^2-8\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2-8\sigma_3^3\ ,$$
$$\sigma_1^3\sigma_2^3-3\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3-16\sigma_1^3\sigma_3^2-5\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2-9\sigma_3^3.$$

이제 얻어진 식의 항들을 다음과 같이 증명된 부등식 항들로 묶어서 정리하자.

$$\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3)+6\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3-16\sigma_1^3\sigma_3^2-5\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2-9\sigma_3^3$$
$$=\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3)+6\sigma_1^2\sigma_3(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)+2\sigma_1^3\sigma_3^2-5\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2-9\sigma_3^3$$
$$=\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3)+6\sigma_1^2\sigma_3(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)+2\sigma_1\sigma_3^2(\sigma_1^2-3\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2-9\sigma_3^3$$

$=\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3)+6\sigma_1^2\sigma_3(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)+2\sigma_1\sigma_3^2(\sigma_1^2-3\sigma_2)+\sigma_3^2(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3).$

그러면 부등식 3, 부등식 4, 부등식 5에서 $\sigma_1^2\ge 3\sigma_2$, $\sigma_2^2\ge 3\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_2\ge 9\sigma_3$이 성립하므로, 부등식 23이 증명된다. □

부등식 24. $a,\ b,\ c\ge 0$에 대하여,

$$\frac{abc(a+b+c)^3}{27}\ge\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{64}.$$

주어진 부등식에서 우변을 좌변으로 이항하여, σ_1, σ_2, σ_3으로 표현하여 정리하면, $64\sigma_1^3\sigma_3-27(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2\ge 0$이 된다. 이제 부등식 23의 증명과 유사한 방법으로, 증명된 부등식들을 괄호로 묶어 정리하면, 다음과 같다.

$64\sigma_1^3\sigma_3-27(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2=-27\sigma_1^2\sigma_2^2+54\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2+64\sigma_1^3\sigma_3$

$=-27\sigma_1^2(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)-17\sigma_1^3\sigma_3+54\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$

$=-27\sigma_1^2(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)-17\sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2-3\sigma_2)+3\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$

$=-27\sigma_1^2(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)-17\sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2-3\sigma_2)+3\sigma_3(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3).$

이제, 부등식 3, 부등식 4, 부등식 5에 의하여, 부등식 $\sigma_1^2\ge 3\sigma_2$, $\sigma_1\sigma_2\ge 9\sigma_3$, $\sigma_2^2\ge 3\sigma_1\sigma_3$가 성립하며, 이로부터 부등식 $3\sigma_3(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3)\ge 0$을 얻을 수 있지만, $-27\sigma_1^2(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)-17\sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2-3\sigma_2)\le 0$이 되고, 부등식 24의 증명이 유도되지 않는다. 그러나 주어진 식을 증명된 부등식들을 중심으로 괄호로 묶는 방법이 유일하지 않으므로, 다른 방법으로 묶으면 부등식 24의 증명을 얻을 수 있다.

부등식 24의 증명. 항들을 증명된 부등식 항들로 묶어서 정리하자.

$27\sigma_1^2\sigma_2^2-54\sigma_1\sigma_2\sigma_3+27\sigma_3^2-64\sigma_1^3\sigma_3$

$=3\sigma_3(\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3)+27\sigma_1^2\sigma_2^2-42\sigma_1\sigma_2\sigma_3-67\sigma_1^3\sigma_3$

$=3\sigma_3(\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3)+27\sigma_1^2(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)+14\sigma_1^3\sigma_3-42\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

$=3\sigma_3(\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3)+27\sigma_1^2(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)+14\sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2-3\sigma_2).$

이제, 부등식 2, 부등식 4, 부등식 8에 의해, $\sigma_1^2\ge 3\sigma_2$, $\sigma_2^2\ge 3\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ge 0$이므로, 이로부터 부등식 24가 증명된다. □

살펴본 증명에서 항들을 적당히 묶어서 이미 증명된 부등식들을 이용할 수 있도록 변형시키는 것은 바로 알아내기는 힘들다. 하지만 부등식을 대칭다항식으로

표현한 뒤, 이웃한 항끼리 공통인수들이 많이 보이거나, Schur 부등식의 형태가 보인다면 이 방법을 활용할 가능성이 많다. 특히 σ_1, σ_2, σ_3의 내림차순으로 식을 정리하면, 주어진 부등식을 체계적으로 정리할 수 있다.

(5) 항들의 차수를 일치시키는 방법

부등식에 가끔씩 차수가 같지 않는 다항식이 포함되는 경우가 있다. 이때 조건에서 특정한 값이 주어지는 경우가 있는데, 이를 이용하면 부등식을 효과적으로 증명할 수 있다. 즉 다항식의 낮은 차수에서 주어진 조건을 이용하여 높은 차수로 맞추거나, 높은 차수에서 주어진 조건을 이용하여 낮은 차수로 맞춘 다음, 부등식을 증명해 나갈 수 있다.

부등식 25 [1984년도 IMO 문제]. 음이 아닌 실수 a, b, c에 대하여, $a+b+c=1$일 때, $0 \le ab+bc+ca-2abc \le \frac{7}{27}$.

증명. $0 \le ab+bc+ca-2abc$를 σ_1, σ_2, σ_3으로 표현하여 정리하면, $\sigma_2 - 2\sigma_3 \ge 0$이 된다. 이때 $\sigma_2 = ab+bc+ca$이므로 차수가 2이며, $\sigma_3 = abc$는 차수가 3이다. 즉 두 항의 차수가 일치하지 않으므로, 주어진 조건을 이용하여 차수를 맞추자. $\sigma_1 = a+b+c=1$이므로 $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2$이지만, σ_2의 차수는 2차이고 $\sigma_1\sigma_2$의 차수는 3차가 된다. σ_3의 차수가 3차이므로, $\sigma_2 - 2\sigma_3$에서 각 항의 차수는 서로 다르지만 $\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_3$에서 각 항의 차수는 서로 같게 된다. 이제 $\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_3$를 $(\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3) + 7\sigma_3$로 변형시키자. 그러면 부등식 5에 의하여 부등식 $\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3 \ge 0$이 성립하며, $7\sigma_3 \ge 0$이 성립하므로, $(\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3) + 7\sigma_3 \ge 0$, $\sigma_2 - 2\sigma_3 \ge 0$이 증명된다.

이제 $ab+bc+ca-2abc \le \frac{7}{27}$의 우변을 좌변으로 이항하여 σ_1, σ_2, σ_3로 표현하여 정리하자. 그러면 부등식의 좌변은 $27(ab+bc+ca-2abc)-7$, $-7+27\sigma_2 - 54\sigma_3$가 된다. 이때 주어진 조건 $\sigma_1 = 1$을 이용하여 항들의 차수를 맞추자. 즉 $-7+27\sigma_2 - 54\sigma_3 = -7\sigma_1^3 + 27\sigma_1\sigma_2 - 54\sigma_3 = -7(\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3) - \sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 = -7(\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3) - (\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3)$가 된다. 부등식 5, 부등식 8에서 $-(\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3) \le 0$, $-7(\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3) \le 0$이므로, $ab+bc+ca-2abc \le \frac{7}{27}$이 증명된다. □

부등식 26. 음이 아닌 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=2$일 때,

$$a^4+b^4+c^4+abc \geq a^3+b^3+c^3.$$

부등식 26의 부등식에서 우변을 좌변으로 이항하여 σ_1, σ_2, σ_3로 표현하여 정리하면, $a^4+b^4+c^4+abc-(a^3+b^3+c^3)=s_4+\sigma_3-s_3=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3$가 된다. 가령, 부등식 8에서 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \geq 0$을 이용해 보자. 이 부등식의 양변에 σ_1을 곱하면 $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_1\sigma_3 \geq 0$이며 양변에 $2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_2-5\sigma_1\sigma_3-2\sigma_3-\sigma_1^3$를 더하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3 \geq 2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_2-5\sigma_1\sigma_3-2\sigma_3-\sigma_1^3.$$

이제, 부등식 4에서 $\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3 \geq 0$이므로, $2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_2-6\sigma_1\sigma_3-2\sigma_3-\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_3 \geq 3\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3-2\sigma_3-\sigma_1^3$이 성립한다. 이때 $\sigma_1=2$이므로, 조건을 이용하여 차수를 맞춰주면, $3\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3-2\sigma_3-\sigma_1^3=-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2$이다. 그런데 부등식 3에서 $-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2 \leq 0$이 성립하므로, 이 방법으로는 부등식 26이 증명되지 못한다.

한편, 부등식 14의 $\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+6\sigma_1\sigma_3+4\sigma_2^2 \geq 0$을 위에서와 같이 적당히 변형하여도 부등식 26에 대한 증명은 얻어지지 못한다. 이제 $\sigma_1=2$라는 조건을 이용하여, 주어진 부등식의 모든 항들의 차수를 같도록 변형시켜 문제를 해결해 보자.

부등식 26의 증명. 주어진 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면, $a^4+b^4+c^4+abc-a^3-b^3-c^3$, $s_4+\sigma_3-s_3$가 된다. 이제 얻어진 식을 σ_1, σ_2, σ_3로 표현하면, $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3+\sigma_3-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)$가 된다.

이 식을 $\sigma_1=2$를 이용하여 부등식의 모든 항의 차수를 같게 맞추어 정리하면,

$$\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3+\frac{1}{2}\sigma_1\sigma_3-\frac{1}{2}\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3),$$

$$\frac{1}{2}\sigma_1^4-\frac{5}{2}\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_3,$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2+6\sigma_1\sigma_3)$$

이 얻어진다. 이제 부등식 14에서 $\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2+6\sigma_1\sigma_3 \geq 0$이 성립하므로, 부등식 26이 증명된다. □

본 연구에서는 기본대칭다항식을 이용하여 부등식을 증명하는 방법으로 'σ_1,

σ_2, σ_3에 대한 부등식의 직접 적용을 통한 방법', '문자의 치환을 이용한 방법', 'Schur 부등식을 이용한 방법', '항들을 적당히 변형시켜 묶음(grouping)을 만드는 방법', '항들의 차수를 일치시키는 방법'을 체계화하였으며, 각 방법의 특징 및 예를 소개하였다.

5. 결론 및 논의

대수 영역에서 문자식을 원하는 형태로 변형시키는 인수분해, 전개, 방정식, 부등식 등은 수학 탐구의 도구일 뿐만 아니라, 그 자체로도 중요한 문제가 된다. 특히 부등식은 오래 전부터 많은 수학자들이 연구의 주제로 삼아왔으며, 산술-기하-조화 평균에 대한 부등식, Cauchy 부등식, Bernoulli 부등식, Jensen 부등식, Schur 부등식 등과 같은 많은 부등식들이 알려져 있고, 지금도 활발하게 연구되고 있다.

본 연구의 연구문제는 첫째 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식을 만들고, 얻어진 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식을 바탕으로 다양한 부등식들을 생성하며, 둘째 대칭다항식으로 된 부등식을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 증명하는 방법들을 체계적으로 정리하는 것이다.

첫 번째 연구문제와 관련하여, 본 연구에서는 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식 $\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$, $\sigma_2^2 \ge 3\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_2 \ge 9\sigma_3$, $\sigma_1^3 \ge 27\sigma_3$, $\sigma_2^3 \ge 27\sigma_3^2$, $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \ge 0$, $\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 \ge 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_2^2 \ge 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3$, $2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \ge 0$, $\sigma_1^4 + 3\sigma_2^2 \ge 4\sigma_1^2\sigma_2$, $\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 \ge 4\sigma_2^2$, $\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3 \ge 0$을 생성하여 증명하였고, 이로부터 18개의 다양한 부등식들을 생성하였고, 이에 관련된 수학적인 특징들을 자세히 기술하였다.

두 번째 연구문제와 관련하여, 대칭다항식으로 된 부등식을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 증명하는 방법들을 체계화하기 위해, IMO 출제 문제를 비롯한 다양한 비정형적인 부등식 문제들을 해결하였다. 그리하여 기본대칭다항식을 이용한 부등식 증명의 방법으로 (1) σ_1, σ_2, σ_3에 대한 부등식의 직접 적용을 통한 방법, (2) 문자의 치환을 이용한 방법, (3) Schur 부등식을 이용한 방법, (4) 항들을 적당히 변형시켜 묶음(grouping)을 만드는 방법, (5) 항들의 차수를 일치시키는 방법을 분류하여 제시하였으며, 이에 관련된 예들을 구체적으로 기술하였다.

본 연구를 통해 얻어진 기본대칭다항식을 이용한 부등식의 생성, 증명, 증명 방법의 체계화는 매우 큰 의미가 있다. 일반적으로 고난이도의 부등식을 풀기 위

해선 직관이나 통찰력이 필요하다. 물론 직관이나 통찰력 없이 비정형적인 고난도 문제에 접근하는 것은 어렵다. 본 연구의 결과는 중등학교 수준에서 새로운 부등식을 만드는 방향에 대한 시사점을 제공할 수 있으며, 비정형적인 고난도 부등식 문제의 해결을 위한 한 길잡이가 될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] 권영인, 신현국, 김문섭, 학교수학에 관련된 기본대칭다항식의 활용에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 20(4), 2006, 595-602.

[2] 네이버 국어사전(2013년 11월 10일 검색).

[3] 대한수학회 한국수학올림피아드 편집위원회, 한국수학 올림피아드 기출문제 풀이집, 2011, 경문사.

[4] 두산백과, 매개변수, 네이버 지식백과(2013년 11월 14일 검색).

[5] 두산백과, 대칭식, 네이버 지식백과(2013년 11월 14일 검색).

[6] 유익승, 신현용, 한인기, Viète 정리를 이용한 여러 문자 다항식의 인수분해에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 20(4), 2006, 587-594.

[7] 중국사천대학, 올림피아드 수학의 지름길 고급, 2009, 씨실과 날실(최승범 옮김).

[8] 한인기, Erdös-Mordell 부등식에 대한 연구들의 분석, 한국수학사학회지 20(4), 2007, 105-122.

[9] Boltyanskii V. G., Vilenkin N. Ya., Simmetriya v Algebre, 2002, Moscow: MTsNMO.

[10] Herman J., Kucera R., Simsa J., 방정식과 부등식, 2009, 도서출판 도비(박상민 옮김).

[11] Hung P. K., Secrets in Inequalities, 2007, Gil Publishing House.

[12] Kolmogorov A. N., O professii matematika, 1959, Moscow: Izdat. Moskovskogo Universiteta.

[13] Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Volenec V., Recent Advances in Geometric Inequalities, 1989, Kluwer Academic Publishers.

[14] Prasolov V. V., 평면기하학의 탐구문제들, 2009, 승산(한인기 옮김).

[15] Sautoy M., 대칭, 2011, 승산(안기연 옮김).

[16] Stewart I., 아름다움은 왜 진리인가, 2010, 승산(안재권, 안기연 옮김).

[17] Cvetkovski Z., Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems, 2012, Springer.

Ko Dea-hyeon, Park Jeong-min, Baek Eun-ha, Kim Moonsup
Changwon Science High School, Changwon, 641-500, Korea
E-mail address: gdhstar@naver.com, qkrclrl701@naver.com,
beagjo1@naver.com, subi3333@naver.com

Han Inki[2)]
Deptartment of Mathematics Education
Gyeongsang National University
Jinju, 660-701, Korea
E-mail address: inkiski@gnu.ac.kr

---

2) corresponding author