East Asian Mathematical Journal
Vol. 30 (2014), No. 2, pp. 223-248
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.014

기하 증명에서 중학생들의 시각의존적 비약 인식에 대한 연구

A Study on Secondary School Student's Recognition of Vision-dependent Jump in the Geometry Proof

강 정 기

ABSTRACT. Although a figure expression has a role of mediator in the geometry proof, it is not admitted to prove based on a vision-dependent feature. This study starts from the problem that although a figure expression has an important role in the geometry proof, a lot of students don't understand the limit of vision-dependent feature in the figure expression. We will investigate this problem to understand cognitive characteristic of students. Moreover, we try to get the didactical implications. To do this, we investigate the cognitive ability for a limit of vision-dependent feature, targeting a class of middle school seniors And we will have a personal interview with four students who show a lack of sense of limit of vision-dependent feature in the figure expression and two students for who it is difficult to judge that they don't understand the limit of vision-dependent feature in the figure expression. We will observe and analyzed the cognitive characteristic of six students. Based on the analysis, we will finally discuss on the didactical implications to help students understand the limit of vision-dependent feature in the figure expression.

Ⅰ. 서 론

기하 증명은 그리스 시대의 공리적 사고가 그 원류이며, 오늘날 수학은 그 전통을 계승 발전시킨 것이다. 따라서 수학 학습에서 기하 증명은 수학의 본질적 특성 파악의 중요한 소재이자 기회가 될 수 있다. 하지만 많은 학생들이 기하 증

2014년 2월 4일 투고, 2014년 2월 28일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97C30
Key Word and phrases: 기하 증명, 시각의존성, 시각의존적 비약 인식

명 이해에 어려움을 겪고 있는 실정이다([3], [8], [10], [13]).

그 어려움의 원인 중 한 가지는 기하 증명이 함의한 다양한 구성 요소 때문임을 부인하기 어려울 것이다. 즉, 기하 증명을 올바르게 이해하기 위해서는 그것이 함의한 여러 구성 요소를 숙지할 수 있어야 한다. 이를테면, Dreyfus & Hadars([6])는 기하 증명의 4가지 구성 요소로 정리는 예외가 없다는 것, 명백한 명제에 대한 증명의 필요성, 증명의 일반성, 복잡한 도형의 해석 및 증명에의 이용을 들고 있으며, 기하 증명의 올바른 이해를 위해서는 이들 모두를 이해할 수 있어야 한다.

기하 증명은 그림으로 제시되는 도형 표현에 의존하며, 이는 대수 증명과 대별되는 측면이다. 기하 증명에서 도형 표현은 매개 도구로써 작용하며, 도형 표현을 어떤 식으로 표상하는가는 기하 증명 이해의 관건이 된다. 특히 國宗進은 기하 증명에 사용되는 도형 표현이 대표성 띈 것임을 지적하였는데([4]), 대표성은 도형 표현에 표면적으로 드러나는 특성이 아니다. 즉, 주어진 특수한 도형 표현 자체만으로 그것의 대표성에 대한 증거를 찾기는 어렵다.

이에 대해 Mesquita([11])는 기하 개념은 일반적이고 추상적인 대상인 반면, 그 표현은 구체적이고 특정한 대상으로 나타나므로, 공간적 유한성과 물리적 제약성을 지닌 것으로 묘사한다. 따라서 도형 표현을 매개로 이루어지는 기하 증명의 어려움이 예상되며, 연구 결과에 의하면, 학생들은 시각적으로 두드러진 특징에 주목하여 도형을 구체적이며 특정한 대상으로 표상하는 것으로 보고되고 있다([9, [12]).

시각에 의존하여 도형 표현을 표상하게 되면, 자명한 명제의 증명의 필요성을 이해하기 어려우며, 심지어 기하 증명의 의의 이해가 요원하게 된다. 따라서 시각의존성은 기하 증명 교수 학습에 큰 방해 요소가 될 수 있다.

결국 기하 증명의 올바른 이해를 돕기 위해서는 시각의존성 탈피가 요구된다. 즉, 도형 표현이 비록 시각적으로 두드러진 어떤 특성을 드러낼지라도 그것을 심리적으로 용인하지 않는 대상 인식이 필요한 것이다.

이에 본 연구에서는 기하 증명에서 학생들의 시각의존성을 살펴볼 것이며, 교수학적 시사점을 얻는 것을 목적으로 한다. 특히, 중등 기하 증명에 대한 충분한 학습 경험을 갖춘 중학교 3학년 학생을 대상으로 삼으며, 다음을 연구 문제로 설정하였다.

연구 문제 1: 중학교 3학년 학생들은 기하 증명 과정에서 시각의존적 비약을 인식할 수 있는가?

연구 문제 2: 기하 증명에서 시각의존적 비약 인식이 결여된 학생들의 인지적 특성은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 고찰

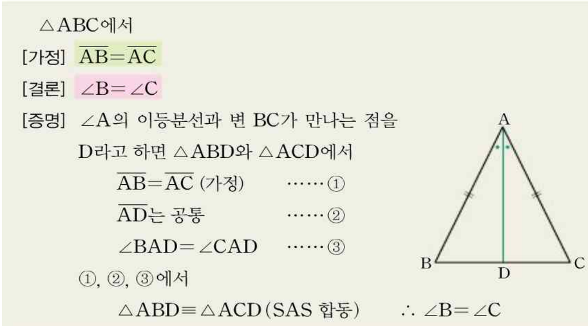
본 장에서는 기하 증명에서 도형의 역할을 살펴볼 것이며, 초등과 중등의 시각의존성을 살펴봄으로써, 본 논문의 이해를 돕고자 한다.

1. 기하 증명에서 도형의 역할

기하 증명이 대수 증명과 대별되는 특징 중 한 가지는 도형 표현의 등장이다. 도형 표현은 기하 증명에서 매개로서의 역할을 가지며 작용하게 된다. Dreyfus & Hadars([6])는 증명 구성 요소 중 한 가지로 '복잡한 도형의 해석 및 증명에의 이용'을 들고 있다. 이는 기하 증명에서 도형 표현의 해석과 이용이 중요한 요소임을 시사하는 것이다. 마찬가지로 서동엽([4])은 기하 증명의 구성 요소 20가지를 들고 있으며, 그 중 한 가지로 도형의 해석 및 증명에의 이용을 들고 있다. 그는 주어진 명제의 가정과 결론을 그림으로 표현하는 것이 증명에 많은 도움이 되므로, 중학교에서 제시되는 대부분의 명제와 증명에는 보조 그림이 제시된다고 말하였다. '보조 그림'이라는 용어에서 알 수 있듯, 기하 증명에 도형 표현의 작용은 불가피한 것이지만, 그것이 증명의 주요 수단이 되는 것은 아니다.

이는 도형의 시각화 과정과 무관하지 않다. Duval([7])에 의하면 기하 도형의 시각화 과정에서 도형을 해석하는 관점에 따라 차원의 변화, 도형의 변화, 기저의 변화가 나타난다. 차원의 변화는 도형 표현 차원의 변화로써, 대표적인 예는 공간 도형을 평면에 표현함으로써 발생하는 3차원에서 2차원으로의 변화이다. 또한 도형의 변화는 주어진 대상을 변화시켜 조작적으로 이해할 때 발생하는 것으로, 여기서 조작적으로 이해한다는 것은 초기 도형의 성질을 유지한 체 기하 도형을 다른 것으로 변화시킬 수 있음을 이해하는 것이다. 기저의 변화는 담론적 이해 과정에서 찾아볼 수 있는 것으로, 이를테면, 'ABCD를 평행사변형이라 하자'라는 명제는 담론적인 명제로부터 시각적 대상으로의 기저 이동을 의미한다. 이처럼 도형은 시각화되는 과정에서 차원, 도형, 기저의 변화가 발생하므로, 기하 증명에서 도형 표현이 갖는 역할을 올바르게 이해하기 위해서는 그것에 함의된 변화 요인을 해석해낼 수 있어야 한다.

구체적으로, 중학교 2학년 교과서([5])에서 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같음'을 보이는 과정에 도형 표현이 등장하며, 이는 변화를 함의한 개념으로 이해될 수 있다. 즉, 제시된 도형 표현은 외현적으로 드러난 모양 이상의 것을 함의한 개념이다. $\overline{AB}=\overline{AC}$라는 조건이 유지된 다른 도형으로의 변화가 가능하며, 주어진 삼각형은 이등변삼각형이므로 담론적 명제를 시각적 대상으로 기저를 변화시켜 이해할 수 있어야 한다. 그러나 표현 그 자체만 본다면, 구체적이며 특정 표현으로 나타날 뿐이므로 도형 표현의 함의 이해는 쉽지 않은 인지적 과제로 생각된다.

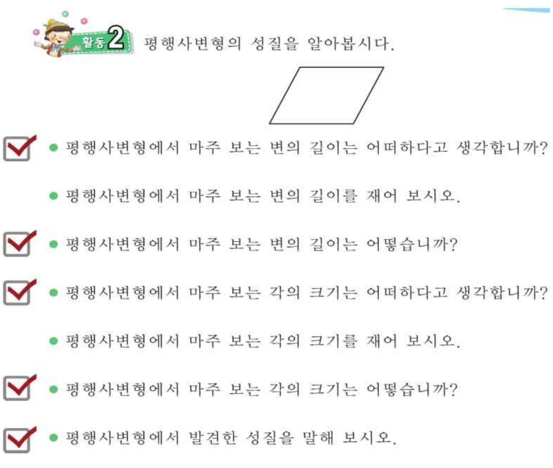


[그림 1] 교과서 증명의 도형 표현

실제로 다수의 학생들은 보조 수단으로서의 도형 표현의 함의를 이해하지 못하여 오류를 범하는 것으로 보고된다. 류성림([2])은 중학교 3학년 학생 210명을 대상으로 기하 증명 과정에서 범하는 오류 유형을 연구하여 9가지 오류를 제시하였으며, 그 중 한 가지로 도형에 집착하여 발생하는 오류가 있다. 그의 연구에서 이 오류는 10.5%로 연산자의 잘못된 적용과 연산자의 잘못된 실행, 기술적인 오류 다음으로 많이 나타났다. 이는 기하 증명에서 도형의 역할에 대한 학생 이해의 어려움을 보여주는 결과이며, 기하 증명에서 도형을 올바르게 해석할 수 있도록 돕는 교수학적 노력이 수반되어야 함을 시사한다.

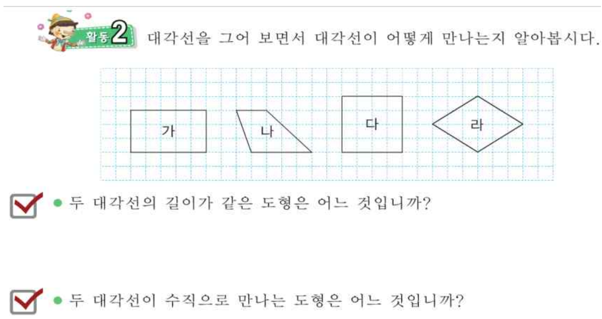
2. 초등과 중등의 시각의존성

초등의 정당화는 관찰 및 실험에 기반한 특징을 지니고 있다. 이는 증명 발달 수준을 고려한 교수학적 변환의 취지를 지닌다. 이를테면, 초등학교 4학년 교과서([1])에 등장하는 평행사변형의 성질을 탐색하는 과정은 측정 활동에 기반한 것이다.



[그림 2] 측정 활동에 기반한 정당화

초등의 정당화는 관찰 및 실험에 기반한 양식을 취함으로써, 시각의존성이 두드러진다. 측정 활동의 경우 역시 시각의존성이 두드러지는데, 이는 측정 그 자체가 시각의존적이기 때문이다. 이외에도 초등에서 시각에 기반한 정당화를 요구하는 활동이 많이 등장하며, 심지어 시각적 정당화를 돕기 위하여 모눈 종이를 이용한 경우(그림 3)도 있다.



[그림 3] 모눈 종이를 이용한 시각적 정당화([1])

이처럼 초등의 정당화는 증명 발달 수준을 고려한 교수학적 변환에 의하여, 시각의존성이 두드러진 특징을 지닌다. 그러나 이러한 양상은 중등학교에 접어들게 되면서 바뀌게 된다. 중등의 증명은 시각의존적인 경향은 배제하고, 논리에 의거한 증명 방식이 주류를 이룬다. 시각의존성은 더 이상 증명의 주요 수단이 될 수 없게 된다.

그런데 초등의 정당화에서 중등 증명으로의 이행 과정에서 시각 탈피의 과정이 필요함에도 불구하고, 급진적 인식 변화를 요구함으로써 증명 이해의 어려움을 낳고 있는 것으로 생각된다. 따라서 초등에서 중등으로의 점진적이며 원활한 이행을 돕는 교수 활동, 즉, 시각의존적 정당화의 한계 인식을 위한 별도의 기회가 제공되어야 하는 것이다. 즉, 시각에서 논리로의 진행이 곧 바로 이루어질 것이 아니라, 시각의존을 탈피하여 논리로 옮겨가는 노력이 요구된다.

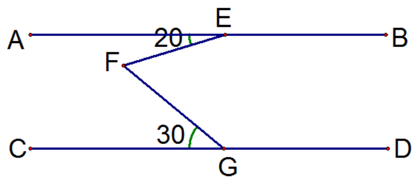
중등 증명에서도 어느 정도 시각의존성은 필요하다. 그러나 시각에 지나치게 사로잡히는 것은 안 된다. 즉, 중등에서 시각의존성은 일정 수준 이상을 지나쳐서는 안 된다. 그러나 학생의 측면에서 시각의존성을 얼마만큼 요하는지를 알기란 쉽지 않다. 또한 교수자의 측면에서도 일정 수준이 얼마만큼을 말하는지 명확히 규정하여 지도하는 것도 쉽지 않다. 그렇지만 교수자로서 논증에서 얼마만큼의 시각의존이 가능한지를 규정하고 지도할 수 있어야 한다. 이에 본 연구에서 명확한 규정이 어려운 시각의존성의 적정선을 다음과 같이 조작적으로 정의하여 다루고자 한다.

시각의존성의 적정선 : 기하 증명에서 증명의 매개로서 작용하지만, 그 상황에서 나타나는 주요 성질은 시각에 의한 정당화가 불가하다. 따라서 기하 증명에서

시각의존성의 적정선은 증명 매개로서만 작용할 뿐, 논증에 개입하지 않는 것을 의미한다.

이를테면, 다음 문제에서 비록 선분 EG는 선분 CD와 수직인 것처럼 보이지만, 그것을 알 수 있는 단서는 찾아보기 어렵다. 따라서 이 사실은 알 수 없는 것으로 이해하는 것이 필요하다. 즉, 도형 표현이 증명의 매개로 작용하지만, 주요 성질은 시각에 의해 증명될 수 없으며, 오직 논증에 의해 증명 가능함을 인식하는 것이 증명에서 시각의존성의 적정선이 된다. 여기서 도형 표현은 증명의 매개로써 작용하지만, 논증에 개입하지 않게 된다.

문제. 선분 AB와 선분 CD는 서로 평행이다. $\angle EFG$의 크기는?

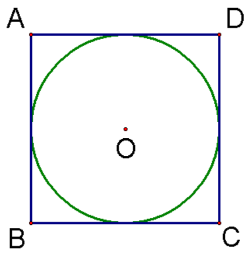


결국 기하 증명에서 시각의존성 탈피를 위해서는 도형 표현이 매개로써 작용할 뿐, 논증에 실질적 개입이 불가한 적정선을 이해할 수 있어야 하는 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 검사 문항

다음은 사각형이 원에 외접하고 직사각형이면 이 사각형은 정사각형임을 보이는 한 학생의 증명 과정이다. 물음에 답하시오.



학생의 증명) 원 O에 외접하는 직사각형 ABCD에 대해
직선 BOD를 그으면
△ABD는 AB=AD인 직각이등변삼각형이 된다.
그런데 □ABCD는 직사각형이므로 □ABCD는 평행사변형이다. 평행사변형의 마주보는 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같고, $\overline{AB}=\overline{AD}$이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$가 된다.

따라서 직사각형 ABCD는 정사각형이 된다.

(1) 이 학생의 증명은 옳은가 잘못된 것인가?

(2) 그 이유는?

우리는 연구대상자들이 주어진 기하 증명에서 시각의존성을 탈피할 수 있는지를 살펴보고자, 시각의존적 비약이 등장하는 검사 문항을 개발하였다. '증명하여라'와 같은 열린 문항일 경우, 학생들이 범하는 오류가 시각의존적 성격을 갖는 것인지를 명확히 파악하기 어렵다. 따라서 시각의존적 비약이 나타난 증명을 제시하고 이 증명이 옳은지 그른지를 판단하게 함으로써, 학생들이 시각의존성을 탈피할 수 있는가를 살피고자 하였다. 특히 관련 그림을 삽입함으로써, 시각적 특징을 두드러지게 나타나도록 하였다. 검사 문항에서 주어진 도형 표현의 사각형 ABCD는 정사각형으로 보이지만, 이것을 심리적으로 직사각형으로 간주할 수 있는 능력을 파악해 보고자 하였다.

검사 문항의 증명에는 두 가지 시각의존적 비약이 나타나고 있다. 한 가지는 '직선 BOD를 그으면'이라는 부분에서 나타나는데, 세 점 B, O, D가 일직선상에 위치해야 가능한 이야기 이므로, 직선 BOD라는 용어 사용을 위해서는 이에 대한 별도의 증명이 필요하다. 그러나 검사 문항에서는 증명 없이 도형 표현에 나타난 시각적 특징을 기반으로 직선 BOD를 그을 수 있는 것으로 가정하고 있다. 다른 한 가지는 '$\triangle$ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 직각이등변삼각형이 된다'는 부분에서 나타나는데, 여기서 $\overline{AB}=\overline{AD}$은 연역적 증명이 필요한 부분이다. 정사각형임을 보이기 위해서는 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 성립함을 보여야 하는데, 도형 표현에서 시각적으로 이 특징이 두드러짐으로써 증명 없이 당연히 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 성립할 것이라고 간주하는 비약이 나타날 수 있다.

따라서 시각의존성 탈피를 위해서는 먼저, 점 B, O, D가 세 점이기 때문에 직선이 될 수 있는지에 대한 의구심을 가질 수 있어야 한다. 또한 사각형 ABCD는 직사각형이므로 이웃한 두 변이 같을지 다를지는 모른다는 생각을 가질 수 있어야 하며, $\overline{AB}=\overline{AD}$가 성립함을 보이는 별도의 증명 과정이 필요함을 인식할 수 있어야 한다.

한편, 명제는 가정과 결론을 명확히 구분할 수 있도록 '~이면 ~이다'의 조건문 형식의 기술을 취하였다. 이는 명제 이해에서 빚어지는 어려움을 배제하기 위함이었다. Zazkis & Gunn([14])는 '공집합이 모든 집합의 부분 집합이다'에 대한 이유를 얼마나 잘 알고 있는지를 집합론을 수강한 46명의 예비 초등 교사를 대상으로 조사한 결과, 아무도 그 이유를 명확히 제시하지 못하였다. 그들의 원인 분석 중 하나는 '공집합은 모든 집합의 부분집합이다'라는 서술이 '~이면 ~이다'와 같은 조건문에서 '가정'에 해당하는 문장이 서술되지 않은 것에 기인한다고 보고

하였다. 이처럼 명제 기술이 조건문에 해당하지 않을 경우, 명제 증명의 어려움이 나타날 수 있음에 주목하여, 본 연구에서는 명제 이해의 어려움이 발생하지 않도록 조건문 형식의 기술을 취하였다. 또한 증명을 '학생의 증명'으로 제시함으로써, 증명의 타당성에 대한 근거를 권위에서 벗어나 내용에 집중해서 찾을 수 있도록 조치하였다.

2. 연구 참여자

연구 참여자는 경남 창원의 N중학교 3학년 학생들에서 선정하였다. 검사 문항은 기하 증명에 관한 내용이므로 이들에 관한 기초 지식이 확립된 중학교 3학년 학생들이 적정하다는 판단 때문이다. 즉, 중학교 2학년에서부터 시작되는 본격적 증명 학습으로 인해 중학교 3학년 학생들은 기하 증명을 다룬 충분한 경험을 갖추고 있다. 남학생으로 이루어진 한 학급 28명의 학생을 선정하여 조사하고자 하였다. 이들에게 1차적으로 검사 문항을 투입하여 증명에서 나타난 비약에 대한 인식 여부를 조사하였으며, 연구 문제 1에 대한 답을 얻고자 하였다.

1차 검사 문항을 투입한 결과, 옳다는 반응, 옳지 않다는 반응, 모른다는 반응으로 대별되며, 이들은 이유별로 보다 세분화되었다. 옳다는 반응은 증명 내용을 인정한 그룹(G1), 증명에 나타나지 않은 이유 제시한 그룹(G2), 명백히 시각의존적 성향을 보여준 그룹(G3)으로 대별되었다. 또한 옳지 않다는 반응은 비약을 인식한 그룹(G4)과 잘못된 이유 제시 그룹(G5)으로 대별되었다.

연구 문제 2에 답하기 위하여 명백히 시각의존적 비약 인식이 결여된 G1에서 4명의 대상 S1, S3, S4, S6를, 또한 시각의존적 비약 인식에 대한 판단이 애매한 G2에서 2명의 대상 S2, S5를 임의 추출하여 면담 대상을 선정하였다. S1은 수학 학업성취도가 상위권이며, S2, S5는 중상위권, S3, S4, S6은 중위권인 학생이었다. 이들은 자신의 생각을 솔직하게 전달할 수 있는 의사소통 능력이 우수한 대상이었다.

구체적으로 S1과 S6은 '틀린 것이 없으니까 옳다'로, S2와 S5는 '점 O에서부터 4등분하면 네 사각형은 모두 정사각형이다. 원의 반지름의 길이는 다 같고 수직이등분선이기 때문에 원의 지름과 사각형의 길이는 일치한다. 그러므로 저 사각형은 정사각형이다'로 이유를 제시한 사례이다. 또 S3은 '삼각형 ABD와 삼각형 ACD는 직각이등변삼각형이고 AB와 AD가 같으니 BC와 DC도 같다. 그러므로 이것은 정사각형이다'로, S4는 '정사각형이 되려면 네 변의 길이가 같고 내각의 크기가 같아야 하므로'로 이유를 제시한 사례이다.

3. 연구 방법

전술하였듯, 시각의존성의 적정선은 교수자의 측면에서도 그것을 명확히 규정

하기란 쉽지 않다. 그러나 연구 객관성 확보를 위해서는 이에 대한 조작적 정의가 요구된다. 이에 본 연구에서는 검사 문항에 국한하여 시각의존성의 적정선을 다음과 같이 정의하여 사용하고자 한다. 논증에서 어느 정도의 시각적 요소 반영이 필요하지만, 논증에 시각적 특징이 지나치게 개입하게 되어서는 안 된다. 검사 문항에서는 도형 표현을 직사각형으로 간주할 수 있어야 하는데, 이를 정사각형으로 보고 증명에 그것이 반영될 경우 '시각의존적'이라고 정의하여 사용하고자 한다.

검사 문항에서 직선 BOD와 $\overline{AB}=\overline{AD}$는 주어진 사각형 ABCD를 정사각형으로 보았을 때 자명한 특징으로, 시각적 특징이 논증에 지나치게 개입한 부분이다. 따라서 시각의존적 특성이 두드러진 이 두 부분에 초점을 두고 학생 인식을 조사하고자 한다.

1차적으로 28명의 연구 대상자에게 2013년 9월 3일 아침 자율학습시간을 이용하여 검사 문항 투입함으로써 학생들의 반응을 조사하였다. 연구 문제 1에 답하기 위하여 수집된 자료를 제시된 이유별로 분류하였으며, 각 반응 유형에 대한 도수와 비율을 구함으로써 기하 증명에서 시각의존적 비약에 대한 학생들의 인식을 파악하고자 하였다.

또한 연구 문제 2에 답하기 위하여 시각의존적 비약 인식의 결여가 명백한 네 사례와 판단이 애매한 두 사례를 선정하여 개별 면담을 실시하였다. 구체적으로 2013년 9월 5일과 9월 16일 각각 한 차례의 면담, 9월 10일과 9월 17일 각각 두 차례의 면담을 실시하였다. 면담 시간의 제한은 없었으며, 여섯 차례의 관찰에서 매회 약 40분 정도의 시간이 소요되었다. 기록지의 학생 반응에 대하여 열린 발문을 함으로써, 학생의 생각을 이해하고자 하였으며, 학생과의 모든 대화는 필드노트에 기록하였다. 이러한 관찰 기록은 학생들의 인지적 특성 파악을 위한 기초자료로 이용되었다.

개별면담은 기록지의 반응에 대한 이유를 묻는 것으로 시작되었으며, 연구 대상자들이 기하 증명에서 시각의존적 비약이 확연한 부분을 어떻게 인식하는지를 살피고자 하였다. 다음 텍스트의 줄별로 하나씩 묻는 과정을 통해 증명을 어떻게 이해하는지를 구체적으로 파악해 보고자 하였다. 특히, 잘못된 부분만을 묻는다는 의심을 배제하기 위해, '증명을 한 줄 한 줄 살펴보자'라는 말로 질문을 시작하였다. 즉, 증명 전체에서 한 줄 한 줄을 검토한다는 느낌을 줌으로써, 특정 부분만을 묻는다는 느낌을 주지 않으려고 하였다. 이 과정에서 시각의존성이 돋보이는 반응에 대해서는 더 자세히 물음으로써, 시각의존적 비약에 대한 연구 대상자의 인지적 특성을 파악하고자 하였다.

개별 면담에 대한 자료 분석은 잠정적 항목 추출로써 특징 지워진다. 잠정적 항목 추출은 최초 기록지로부터 해석적 방법으로 시작되며, 이는 그 다음 사례 분석의 초점이 된다. 이전 사례에서 추출된 항목은 그 다음 사례 분석의 주요 초점이 되며, 추출된 항목에 나타나지 않는 특징은 추가적 잠정적 항목으로 추출된

다. 이러한 방식을 취함으로써 추출된 항목을 점차 늘려갔으며, 논의에서 이를 정리하였다. 특히, 각 사례에서 추출된 핵심 항목을 사례 제목으로 기술함으로써, 각 사례의 주요 특징을 명료화하고자 하였다.

Ⅳ. 결과 및 분석

1. 연구 문제 1

검사 문항 (1)에 대한 학생들의 반응은 옳다는 반응, 옳지 않다는 반응, 모르겠다는 반응으로 대별되며, 그 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> 검사 문항 (1)에 대한 결과

반응	학생 수(명)	비율(%)
옳다	20	71.43
옳지 않다	6	21.43
모름	2	7.14

검사 문항 (1)에 대한 결과에서 옳다는 반응이 71.43%로, 옳지 않다는 반응이 21.43%로 나타났다. 각 반응에 대한 다양한 이유 제시가 있었으며, 그 결과를 정리하면 다음과 같다. 옳다는 반응은 증명 내용을 인정한 그룹(G1), 증명에 나타나지 않은 이유 제시한 그룹(G2), 명백히 시각의존적 성향을 보여준 그룹(G3)으로 구분되었다. 또한 옳지 않다는 반응은 비약을 인식한 그룹(G4)과 잘못된 이유 제시 그룹(G5)으로 구분되었다. 이들 그룹 각각에 대한 도수와 비율은 <표 2>와 같다.

시각의존적 비약 인식의 결여가 명백한 G1, G3이 42.85%로 나타났으며, 이는 약 40%의 연구 대상자들이 시각의존적 비약 인식에 실패하고 있음을 보여준다. 한편, 반지름의 길이를 이용한 증명에 나타나지 않은 이유를 제시한 G2가 28.57%로 나타났는데, 이들의 경우 시각의존적 비약 인식이 결여되었다고 판단하기는 어렵다. 왜냐하면 그들이 제시한 이유를 통한 증명 보충으로 시각의존적 비약 극복이 가능하기 때문이다.

한편, G5는 옳지 않다는 반응에서도 타당한 이유만 제시된 것이 아님을 보여준다. 시각의존적 비약 인식에 성공한 그룹 G4는 14.29%로 적게 나타났으며, 심지어 그들의 반응에서 직선 BOD에 의심을 가진 사례는 단 한 사례도 나타나지 않았다. 즉, G4의 모든 사례는 사각형 ABCD는 직사각형이므로, $\overline{AB}=\overline{AD}$라는 사실에 대한 의구심을 가졌을 뿐이다. 이는 기하 증명에서 시각의존적 비약 인식이 쉽지 않음을 시사하는 것이다. 이에 본 연구에서는 학생 인식을 보다 자세히

살펴봄으로써, 기하에서 시각의존적 비약 인식을 돕기 위한 교수 학습의 기초를 마련하고자 한다.

<표 2> 검사 문항 (2)에 대한 결과

반응	반응 범주	이유	학생 수(명)	비율 (%)
옳다	증명 내용 인정 (G1)	□ABCD는 직사각형인데, 직사각형은 평행사변형이고 평행사변형은 마주보는 대변의 길이가 같고, $\overline{AB}=\overline{AD}$이니까 정사각형이다.	1	35.71
		삼각형 ABD와 삼각형 ACD는 직각이등변삼각형이고 AB와 AD가 같으니 BC와 DC도 같다. 그러므로 이것은 정사각형이다.	1	
		마주보는 두 쌍의 대변의 길이가 같아서	1	
		직사각형은 평행사변형이고 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로 정사각형임.	1	
		정사각형이 되려면 네 변의 길이가 같고 네 내각의 크기가 같아야 하기 때문에 증명은 옳다.	1	
		위 증명 과정처럼 하면 정사각형이 되기 때문에	1	
		직사각형 ABCD가 원에 외접한다면 항상 $\overline{AB}=\overline{AD}$이므로 위 증명은 옳다.	1	
		틀린 것이 없으니까	3	
	증명에 나타나지 않은 이유 제시 (G2)	점 O에서부터 4등분하면 네 사각형은 모두 정사각형이다. 원의 반지름의 길이는 다 같고 수직이등분선이기 때문에 원의 지름과 사각형의 길이는 일치한다. 그러므로 저 사각형은 정사각형이다.	4	28.57
		원의 지름의 길이가 AB와 DC로 같기 때문이다.	1	
		왜냐하면 점 O를 통해 아무렇게나 직선을 그으면 그 길이가 서로 같다. 서로 마주보는 네 변의 길이가 같다.	1	
		원의 반지름의 길이가 같으니까 사각형 ABCD는 정사각형이다.	1	
		삼각형 ABD, 삼각형 BCD랑 같아서 ABCD는 정사각형이다.	1	
	시각의존 (G3)	딱 보아도 정사각형이라는 감이 온다.	2	7.14
옳지 않다	비약 인식 (G4)	□ABCD는 직사각형이라고 했는데, 직선 BOD를 그어도 AB와 AD가 같지 않을 수 있으므로	3	14.29
		AB와 AD의 길이가 같은데 그리되면 직사각형이 될 수 없으므로	1	
	잘못된 이유 제시 (G5)	평행사변형은 직사각형이 될 수 없으므로	1	7.14
		모든 변의 길이는 같지만, 한 내각의 크기가 직각이라는 조건이 나와 있지 않으므로 사각형 ABCD는 정사각형이 될 수 없다.	1	

모름	모름 (G6)	처음부터 정사각형이라고 하지. 잘 모르겠다.	1	7.14
		잘 모르겠다.	1	

2. 연구 문제 2

1) 시각의존 비약 인식 : S1의 사례

면담은 기록지 제공으로 시작되었으며, S1의 기록지에는 (1)에 대해 '옳다', (2)에 대해 '틀린게 없으니까 옳다고 생각한다'고 쓰여 있었다.

RS: 너의 기록을 설명해 주겠니?
S1: 이게 맞는 것 같으니까 맞다고 생각하는데요.

S1의 설명은 기록과 차이가 없어, 우리는 그의 보다 자세한 생각을 이끌어보고자 하였다.

RS: 증명의 한 줄 한 줄을 살펴보자. 첫 번째 줄은 이상 없니?
S1: 예.
RS: 왜?
S1: 여기까지 하는 것은 뭐가 어떻다고 말한게 없고 선만 그은 거잖아요.

S1은 직선 BOD에 대해 전혀 의구심을 가지지 못하고 있음을 알 수 있으며, 특히 그는 단순히 증명을 위한 단순한 조작으로 이해하고 있었다. 즉, 증명을 위해 선을 그은 것이니 이상한 점을 발견할 수 없다는 논리였다. 이에 연구자는 이 부분에 대한 의구심을 제기해 보았다.

RS: 점 B, O, D 세 개잖아. 그래도 이상 없니?
S1: 예.
RS: 왜?
S1: 직사각형이라 했으니까 직선 안에 있겠죠.
RS: 왜?
S1: (그림 표현을 가리키며) 이 직사각형이 정사각형이잖아요.
RS: 왜?
S1: $\overline{AB}=\overline{AD}$잖아요.
RS: 왜 그런거니?
S1: 둘 다 원의 지름이니까요. 아! 잠시만요. 이것은 정사각형임을 보이는 과정이네요. (생각하더니) 뭔가 이상해요.
RS: 뭐가 이상하니?
S1: 그러니까 이게 정사각형임을 증명하는데 어떤 이유가 있어요. 그런데 이 학생은 이것을 증명하는데 그걸 안 사용하고, 다른 이유를 사용하고 있어요. A이니까 B가 맞다고 하고 있어요.
RS: 그게 무슨 말인지 보다 자세히 설명해 줄 수 있겠니?

S1: 그러니까 A라는 이유가 있고 A는 완전한 이유이고, B는 이 학생이 증명하는 건데요, A가 맞으니까 B도 맞다는 거예요. 그러니까 이 학생이 증명하는 과정 중에 이게 정사각형임을 말하는 과정이 들어가 있어요.

RS: 왜?

S1: $\overline{AB}=\overline{AD}$ 라고 했으니까요.

RS: $\overline{AB}=\overline{AD}$ 라고 하면 안 되는 거니?

S1: 이걸 끌어내기 위해 증명하는 거잖아요.

S1은 연구자가 제기한 직선 BOD에 대한 의구심 제기에 답하는 과정에서 스스로 시각의존적 비약을 인식하기에 이르렀다. 특히, 그는 증명하는 과정에 '정사각형임을 말하는 과정이 들어가 있음'을 언급하면서 이 점을 보다 분명히 하였다. 우리는 그가 인식 전환 이전에는 어떻게 생각하는지를 알고자 하였다.

RS: 앞에서는 왜 이 생각 못한거니?

S1: 이게 맞는 말이라 생각했으니까요. 이게 틀린 말은 아니잖아요.

S1은 비약 인식의 어려움의 원인은 다름 아닌 틀린 진술이 아니라는데 있다는 것이다. 즉, 명제 자체가 참임으로 인한 것임을 밝히고 있다.

RS: 지금도 첫 줄은 이상 없다고 생각하니?

S1: (생각하더니) 원에 외접하는 직사각형이라 했잖아요. 이건 그냥 이게 정사각형이란 걸 안 쓰고는 이게 맞다고 말 못하겠는데요.

RS: 이상 있다는 거니 없다는 거니 분명히 이야기 해 줄 수 있겠니?

S1: 이상 있어요.

RS: 왜?

S1: 정사각형인 걸 모르는 상태에서 증명해야 하니까요.

이상에서 S1은 검사 문항 증명에서 직선 BOD에 함의된 시각의존적 비약 인식에 성공하였음을 분명히 알 수 있다. 우리는 그의 인식 변화의 원인을 알아보고자 하였다.

RS: 처음에는 왜 이 생각 못했니?

S1: 증명 보기도 전부터 (그림 가리키며) 이게 정사각형이란 걸 알고 있잖아요.

RS: 어떻게 그걸 알았지?

S1: 그냥 당연한 거잖아요.

RS: 왜 당연한 거니?

S1: 정사각형이 아닌 직사각형이 원에 외접할 수는 없으니까요.

S1은 당연한 사실이기 때문에 처음에는 시각의존적 비약 인식에 어려움을 겪었음을 언급하였다. 즉, 당연한 사실이기 때문에 증명 자체의 논리를 파악하지 못한 것이다.

RS: 그럼 어떻게 생각을 바꿀 수 있었니?
S1: 선생님이 물어봐서요.
RS: 어떤 것을 물어봤는데?
S1: 직선 BOD가 맞냐고 물었잖아요.
RS: 이 물음으로 어떻게 알았어?
S1: BOD가 직선이 아닌가 하고 생각했고, 제가 생각하는 BOD가 직선인 이유가 사각형 ABCD가 정사각형이기 때문에 BOD가 직선이었어요. 그러니까 이것 말한 것에 정사각형이 들어가 있다는 것을 알았어요.
RS: 그 전에는 이 생각 전혀 못했니?
S1: 예.
RS: 왜?
S1: 앞에서 말했듯이, 이게 그냥 보면 틀린 말은 아니잖아요.

S1은 연구자가 제기한 직선 BOD에 대한 의구심으로부터 인식 개선의 단초를 마련할 수 있었음을 알 수 있다. 직선 BOD에 대한 의구심으로 직선 BOD에 사각형 ABCD가 정사각형이라는 사실이 함의되어 있음을 인식하게 된 것이다. 또한 그는 그 이전에는 전혀 이러한 사실을 알지 못했으며, 그 이유는 그런 말이 전혀 틀리지 않았기 때문임을 알 수 있다. 이는 기하 증명에서 각 단계를 전체 문맥의 논리에 의거해 판단하지 않고, 그 자체의 진위 여부에 의해 판단할 여지가 있음을 보여주는 것이다.

2) 설명 부족일 뿐, 문장 자체는 타당한 것으로 인식 : S2의 사례

면담은 기록지 제공으로 시작되었으며, S2의 기록지에는 (1)에 대해 ‘옳다’, (2)에 대해 ‘원의 지름의 길이가 AB와 DC로 같기 때문이다.’고 쓰여 있었다.

RS: 너의 기록을 설명해 주겠니?
S2: (기록지를 가리키며) 여기서 AB와 DC가 반지름의 길이로 같으니까요.

S2의 설명은 기록과 별반 차이가 없어, 우리는 그의 보다 자세한 생각을 이끌어보고자 하였다.

RS: 증명의 한 줄 한 줄을 살펴보자. 첫 번째 줄은 이상 없니?
S2: 예.
RS: 왜?
S2: (생각해 보더니) 점 O는 사각형 ABCD의 외접원의 중심이니까 사각형의 중심도 되잖아요. 그래서 BOD를 그으면 그 직사각형의 대각선이 만들어지니까 이상 없어요.

S2는 점 O는 곧 원의 중심이면서 동시에 사각형 ABCD의 중심이기 때문에, BOD를 그으면 직사각형의 대각선이 만들어진다고 생각하고 있었다. 우리는 그의 생각을 보다 자세히 알아보고자 BOD에 대한 의구심을 제기해 보았다.

RS: BOD가 직선이 된다는 것을 증명해야 되지 않을까?
S2: 굳이 증명을 할 필요는 없다고 생각해요.
RS: 왜?
S2: 이 원의 중심이 O니까 직사각형의 대각선 가운데 점을 지나잖아요. O점이 사각형 ABCD의 가운데 점이니까 대각선이 만들어져요.
RS: 네가 말하는 가운데 점은 뭐니?
S2: 사각형의 중점요.

이상의 대화로부터 S2는 원의 중심이 곧 직사각형의 대각선의 중점이므로, 이를 증명할 필요가 없다고 인식하고 있음을 알 수 있다. 즉, 그는 직선 BOD에 대한 의구심을 전혀 갖지 못하였으며, 그것은 당연하므로 별도의 증명이 필요하다고 생각하지 못하고 있었다.

RS: ($\overline{AB}=\overline{AD}$를 가리키며) 두 번째 줄은 이상없니?
S2: 예.
RS: 왜?
S2: 제가 이것 타당하다고 설명할 때요 $\overline{AB}=\overline{AD}$라고 했고, 직사각형이니까 ∠BAD는 직각이니까 직각이등변삼각형이 되요.
RS: $\overline{AB}=\overline{AD}$는 왜 성립해?
S2: 아까 말했잖아요. 반지름과 같으니까 같죠.

S2는 선분 AB와 AD가 원의 반지름으로서 같다는 논리로 두 번째 줄이 옳음을 설명하였다. 우리는 그가 이에 대한 별도의 증명이 필요한지에 대해 어떻게 생각하는지 알고 싶었다.

RS: 그럼 이것을 증명에 써야하지 않니?
S2: 굳이 필요하다면 써야겠죠.
RS: 그럼 안 써도 상관없니?
S2: 써도 되고, 안 써도 된다고 생각해요.
RS: 왜 안 써도 상관없니?
S2: 그건 딱히 말하기 어렵네요.

S2는 선분 AB와 AD가 원의 반지름으로서 같다는 것을 굳이 기술하지 않아도 상관없는 것으로 생각하고 있음을 알 수 있다. 우리는 동일 질문을 재차 물음으로써, S2의 인식을 명료화하고자 하였다.

RS: (증명의 $\overline{AB}=\overline{AD}$를 가리키며) 두 번째 줄은 이상없니?
S2: 예.
RS: 왜?
S2: 제가 이것 타당하다고 설명할 때, $\overline{AB}=\overline{AD}$라고 했고 사각형 ABCD가 직사각형이니까 ∠

BAD는 직각이니까 직각이등변삼각형이 되요.

RS: $\overline{AB}=\overline{AD}$가 성립한 이유가 그 앞에 기술되어야 되지 않을까?
S2: 예. 저도 그것 때문에 헷갈렸어요.
RS: 이것 잘못된 것 아니니? 이유 설명이 없으니까.
S2: 그러니까 설명이 부족한거지 이 문장에는 문제가 없어요.

S2는 $\overline{AB}=\overline{AD}$의 성립 이유가 제시되지 않아도, 설명의 부족일 뿐 문장 자체는 문제가 없다고 인식하고 있었다. 그는 전체 맥락 속에서 판단하기보다, 문장 자체로 판단하는 듯 경향을 지니고 있었다.

RS: 그 한 문장만 문제 없으면 이상 없는거니?
S2: (생각하더니) 굳이 문제 삼자면 문제가 될 수도 있겠네요.
RS: 어떻게?
S2: 그러니까 여기서 △ABD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$에 대해 좀 더 설명이 필요하니까 문제가 될 수 있을 것 같아요.
RS: 그럼 이건 이상이 있다는 것이니? 없다는 것이니?
S2: 증명 자체는 이상이 없어요.
RS: 왜?
S2: 설명이 빠진 거지 증명에서 타당하지 않은 문장은 없어요.

이상에서 S2는 제시된 비약에 대해 설명이 빠진 것이지, 타당하지 않은 문장은 아니므로 주어진 증명을 비약으로 인식하지 않고 있음을 알 수 있다. 이러한 판단의 기저에는 전체 맥락보다, 문장 자체의 진위 여부가 중요하게 작용하고 있음을 알 수 있다. 그의 설명에서 '설명이 빠진 거지 증명에서 타당하지 않은 문장은 없어요'라는 대목은 이러한 점을 분명히 보여준다.

3) 시각에 의존한 역행적 논리 : S3의 사례

면담은 기록지 제공으로 시작되었으며, S3의 기록지에는 (1)에 대해 '옳다', (2)에 대해 '삼각형 ABD와 삼각형 ACD는 직각이등변삼각형이고 AB와 AD가 같으니 BC와 DC도 같다. 그러므로 이것은 정사각형이다.'고 쓰여 있었다.

RS: 너의 기록을 설명해 주겠니?
S3: 일단 △ABD가 직각이등변삼각형이 되요. 그리고 △BCD도 직각이등변삼각형이 되요. (기록지 기록을 가리키며) 여기는 잘못 적었네요. 여기서 AB와 AD가 같아요. 그리고 BC와 DC도 같아요. 그러니까 △ABD와 △BCD가 합동이 되요. 그래서 정사각형이 되는거에요.

그의 설명은 기록지와 조금 다른 점이 있긴 하지만, 시각적 비약 인식이 결여된 모습을 보여주었다.

RS: 한줄 씩 한줄 씩 보도록 하자. '직선 BOD를 그으면'이란 이 부분은 이상없니?
S3: 예.

RS: 왜?
S3: 왜냐하면 BOD를 그어야 △ABD와 △BCD가 같아져요.
RS: 혹시 BOD가 직선이 아닌, 꺽인 선이 될 수도 있지 않을까?
S3: 그럴 수는 없죠.
RS: 왜?
S3: (검사지 그림을 가리키며) 그림이 이렇게 되어 있잖아요.

S3은 직선 BOD에 대한 의구심을 제기했음에도, 시각의존적 비약을 전혀 인식하지 못하였으며, 그 원인은 그림 표현 때문이었다. '그림이 이렇게 되어 있잖아요'라는 그의 표현에서 알 수 있듯, S3은 시각의존성이 뚜렷한 사례에 해당한다.

RS: (두 번째 줄 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 부분을 가리키며) 여기는 이상 없니?
S3: 예.
RS: 왜?
S3: ∠A=90°이고 $\overline{AB}=\overline{AD}$이니까 직각이등변삼각형이 되요.
RS: 왜 ∠A=90°이니?
S3: (검사지를 가리키며) 여기 직사각형이라 했잖아요.
RS: 그러면 왜 $\overline{AB}=\overline{AD}$이니?
S3: 그거는 정사각형이 직사각형이 되기 때문이에요. 그래서 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 같은거에요.
RS: 무슨 소리인지 좀 더 자세히 이야기 해 줄 수 있겠니?
S3: 이게 직사각형인데 정사각형은 직사각형도 되니까 이걸 정사각형으로 푼 거죠.
RS: 네 말은 사각형 ABCD가 정사각형이란 말이니?
S3: 예.

S3은 $\overline{AB}=\overline{AD}$임을 보임으로써, 직사각형 ABCD가 정사각형임을 보여야 하는 과제임에도 불구하고, 역으로 사각형 ABCD가 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 된다는 논리를 펼쳤다. 이는 그가 시각의존적 경향을 지녔음을 보여주는 것이다. 즉, 그는 시각적으로 두드러진 정사각형 도형 표현을 인정함으로써, 역행적으로 증명해야 할 것을 이용하여 $\overline{AB}=\overline{AD}$라는 결과가 성립함을 언급하게 된 것이다. 따라서 S3는 시각의존적 전형의 대푯격이라 할 수 있으며, 이런 경우 증명의 의의 자체에 대한 이해 결여로 이어짐을 알 수 있다.

4) 시각의존적 논리 : S4의 사례

면담은 기록지 제공으로 시작되었으며, S4의 기록지에는 (1)에 대해 '옳다', (2)에 대해 '정사각형이 되려면 네 변의 길이가 같고 네 내각의 크기가 같아야 하기 때문에 증명은 옳다.'고 쓰여 있었다.

RS: 너의 기록을 설명해 주겠니?
S4: 그러니까 이게 직사각형이잖아요. 그러니까 모든 각이 90°잖아요. 직사각형에다가 서로 마주보고 있으니까 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$가 되요. 그리고 또 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{CD}=\overline{AD}$가 같아요. 그래서 네 변의

길이가 다 같으니까 정사각형이 되요.

RS: $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{CD}=\overline{AD}$ 은 왜 성립하는거니?

S4: 대각선을 그으면, 나눠진 이등변삼각형은 두 변의 길이가 같게 되잖아요. 그러니까 같죠.

RS: 왜 나눠진 것은 이등변삼각형이 되니?

S4: 이게 지금 직사각형이잖아요. 직사각형에서 대각선을 그으면 나눠진 삼각형이 이등변삼각형이 되요.

S4는 직사각형에서 대각선을 그으면 나눠진 삼각형이 이등변삼각형이 된다는 논리를 펼쳤으면, 이는 검사지의 도형 표현과 무관하지 않은 것이다. 즉, 그는 시각의존적 경향을 지닌 사례임을 알 수 있다.

RS: 한 줄 한 줄씩 다시 보도록 하자. (직선 BOD 부분을 가리키며) 첫 번째 줄은 이상없니?

S4: 예.

RS: 왜?

S4: 직각사각형에서 원이 외접하고 있잖아요. 그기서 BOD를 그으면 이건 나눠져서 이등변삼각형이 되요.

RS: BOD를 연결하면 꺽인 선이 될 수 있지도 않을까?

S4: (검사지의 그림을 보며 손으로 허공에 그어 보더니) 그게 되요? 안 되는데!

RS: 왜 그렇게 생각하니?

S4: (다시 손으로 그어 보더니) 이게 서로 일직선에 있잖아요.

RS: 그걸 어떻게 알 수 있지?

S4: (다시 손으로 그어 보더니) 그러니까 서로 나란히 놓여 있잖아요.

이상에서 S4는 직선 BOD에 대한 의구심을 제기하였음에도, 그에 대해 전혀 의심을 갖지 못하고 있음을 알 수 있으며, 이는 그가 도형 표현에 의존하고 있기 때문임을 알 수 있다. 그가 세 차례에 걸쳐 허공에 손으로 그어본 행동이 이를 분명히 보여준다.

RS: ($\overline{AB}=\overline{AD}$ 부분을 가리키며) 두 번째 줄은 이상없니?

S4: 예. 이건 아까 제가 설명한 거잖아요. 직사각형에서 대각선을 그으면 이등변삼각형이 되요.

S4는 직사각형에서 대각선을 그으면 이등변삼각형이 된다는 잘못된 논지를 펼치고 있어, 연구자는 다음의 문제 제기를 하였다.

RS: (가로가 세로보다 긴 직사각형을 그리며) 여기서 대각선을 그으면 이등변삼각형이 아니지 않니?

S4: 아니죠. 그런데 원이 안에 외접하고 있으니까 이건 이등변삼각형이 되는거에요.

RS: 좀 더 자세히 설명해 주겠니?

S4: 그러니까 직사각형이 있잖아요. 직사각형 안에 원이 외접하고 있으니까 외접한 변은 비율이 맞아요.

RS: 그걸 어떻게 알 수 있지?

S4: (그림 표현을 가리키며) 그러니까 원이 들어가면 이게 맞는데!

RS: 좀 더 자세히 설명해 줄 수 있겠니?
S4: (그림 표현 가리키며) 이 모양이잖아요. 그기에 크기에 맞게 원을 넣었기 때문에 변은 비율이 맞게 되는 거에요.
RS: 이 증명 보면서 (가로가 세로보다 긴 직사각형을 가리키며) 이런 사각형 생각해 봤니?
S4: 아니오. (검사지 그림을 가리키며) 보기가 나와져 있잖아요. 그러니까 이 그림에 맞춰서 푼거에요.

이상에서 S4는 그림 표현 의존성이 두드러진 사례임을 알 수 있으며, 때문에 그는 직사각형에서 대각선을 그으면 이등변삼각형이 된다는 잘못된 논지를 펼쳤음을 알 수 있다. 또한 그에게 가로가 세로보다 긴 직사각형을 제시하자, 그 동안 언급하지 않고 있던 원에 외접한 조건을 말하였다. 그러나 그의 논지는 언제나 검사지에 제시된 표현에 의존해 있었으며, ‘그림에 맞춰서 푼거에요’라는 말은 이를 단적으로 보여주는 대목이다.

5) 개념 이미지에 의한 판단 : S5의 사례

면담은 기록지 제공으로 시작되었으며, S5의 기록지에는 (1)에 대해 ‘옳다’, (2)에 대해 ‘원의 반지름의 길이가 같으니까 사각형 ABCD는 정사각형이다.’고 쓰여 있었다.

RS: 너의 기록을 설명해 주겠니?
S5: (검사지를 가리키며) 이 그림을 보면요 정사각형은 네 변의 길이가 같고요 대각선의 길이가 같잖아요. 여기서 이 원에서 원의 중심을 지나도록 가로 세로로 선을 그으면 이 지름이랑 사각형의 변의 길이와 같기 때문에 모든 변의 길이가 같아져 정사각형이 되는 거죠.

S5의 설명은 논리적인 설명이지만, 이는 기록지의 증명과는 무관한 면이 있었다. 우리는 그가 제시된 증명에 대해 어떻게 이해하는지를 알아보고자 하였다.

RS: 이 증명을 한 줄씩 검토해 보도록 하자. (직선 BOD를 가리키며) 이 첫 번째 줄은 이상 없니?
S5: 이상한 거라면요 직선 BOD를 그었잖아요. 그런데 그 밑을 보면요 AB랑 AD가 같다고 되어 있어요. 그런데 AB랑 AD의 길이를 확실히 모른다는 거죠.
RS: 그럼 이 부분이 옳다는거니 잘못되었다는거니?
S5: 잘못된 것 같아요.
RS: 왜?
S5: 전 이것을 직사각형으로 보고 있어요. 그래서 AB랑 AD의 길이가 같은지 아닌지 확실히 몰라요.

S5는 제시된 사각형이 직사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$라는 것에 대한 의구심을 가지기 시작했다.

RS: 옳다고 했는데, 지금은 생각이 바뀐거니?
S5: 예. 앞에서 말했듯이 전 이것을 직사각형으로 보고 있어요. 그래서 AB랑 AD의 길이가 같은지

아닌지 확실히 몰라요.
RS: 그럼 그 전에는 왜 옳다고 한거니?
S5: 제 방식대로 생각하다보니 그렇게 되었어요.
RS: 그럼 지금은 어떻게 생각이 바뀐 거야?
S5: 제가 첫 번째 줄이랑, 마지막 줄을 주의 깊게 보다 보니 그렇게 되었어요.

이상에서 S5는 최초의 생각을 바꾸어 사각형 ABCD가 직사각형이므로 $\overline{AB} = \overline{AD}$라는 사실에 비약이 나타남을 인지하기 시작했음을 알 수 있다. 우리는 그가 직선 BOD에 대해서도 의구심을 가질 수 있는지 알아보고자 하였다.

RS: (직선 BOD 부분을 가리키며) 이 부분은 이상 없니?
S5: 이 방식으로 하면 맞는 거죠.
RS: 세 점 B, O, D잖아. 그런데 이게 왜 직선이 되니?
S5: 원을 기준으로 했잖아요. 점 O가 한 가운데라는 뜻이거든요. 그래서 점 D랑 점 B랑 이으면 한 가운데에서 이은 거니까 직선이 되는 거죠.
RS: 세 점인데 직선이 아니고 꺽인 선이 될 수도 있지 않을까?
S5: 그렇게 될 수는 없어요.
RS: 왜?
S5: 점 O는 한 가운데 점이잖아요. 그러니까 세 점을 이으면 직선이 되요. 한 가운데 점이니까 B, O, D를 이으면 대각선이 되요.
RS: 무슨 말인지 좀 더 자세히 이야기해줄 수 있겠니?
S5: 중요한 건 이 점이 사각형의 한 가운데 여야 한다는 거죠. 그러니까 정사각형이든 직사각형이든 대각선을 그어보면 두 개가 만나는 부분이 한 가운데니까, 세 점을 이으면 직선이 되는 거죠.
RS: 점 O는 사각형의 중심이 아니라, 원의 중심 아니니?
S5: 사각형은 원의 중심으로부터 만들어진 거잖아요. 그래서 점 O도 사각형의 중심이 되는 거죠.

S5는 직선 BOD에 대해 의구심을 갖지 못하였으며, 이는 중심이라는 개념 이미지에서 비롯된 것임을 알 수 있다. 즉, 원 O는 원의 중심임에도 불구하고, 그는 원의 중심은 곧 사각형의 중심이라는 개념 이미지 때문에 이를 당연히 성립하는 것으로 인정한 것이다. ‘한 가운데’라는 그의 표현은 이러한 개념 이미지가 작용하고 있음을 분명히 보여준다. 우리는 그가 모든 원에 외접하는 사각형에 대해서도 동일한 생각을 갖는지를 알아보고자 하였다.

RS: (정사각형이 아닌 원에 외접한 사각형을 그려주며) 그러면 원에 외접하는 어떠한 사각형도 그 중심은 원의 중심이랑 일치하니?
S5: 예.
RS: 왜?
S5: (대각선 두 개를 그어보더니) 선을 그어보면요 이것도 중심을 지나요.
RS: 왜?
S5: 이것도 원의 영향을 받기 때문에 원의 중심과 사각형의 중심이 같게 되는 거죠.

사실 원에 외접한 사각형의 중심이 원의 중심과 항상 일치하는 것은 아니다.

그러나 S5는 '중심'이라는 개념 이미지에서 비롯된 오개념으로 인해, 원에 외접한 모든 사각형에 대해서도 사각형의 중심과 원의 중심이 항상 일치하는 것으로 판단하였던 것이다.

6) 단어에 집착 : S6의 사례

면담은 기록지 제공으로 시작되었으며, S6의 기록지에는 (1)에 대해 '옳다', (2)에 대해 '틀린 것이 없으니까'고 쓰여 있었다.

RS: 너의 기록을 설명해 주겠니?
S6: (검사지를 가리키며) 이 학생의 증명이 틀린게 없어요.

S6의 설명은 기록과 차이가 없어, 우리는 그의 보다 자세한 생각을 이끌어보고자 하였다.

RS: 증명의 한 줄 한 줄을 살펴보자. 첫 번째 줄은 이상 없니?
S6: 예.
RS: 왜?
S6: 여기서 줄을 긋는다고 했는데 달라질게 없잖아요. BOD만 제대로 긋는다면 이상 없어요.

S6은 직선 BOD에 대해 전혀 의구심을 갖고 있지 않아, 다음의 의문을 제기해 보았다.

RS: BOD가 직선이 안 될 수도 있지 않을까?
S6: (검사지를 가리키며) 여기 '직선 BOD'라고 나와 있잖아요.
RS: 그러니까 BOD가 직선이 안 될 수도 있지 않을까?
S6: 문제에 (다음을 강조하며) '직선 BOD'라고 나와 있잖아요.
RS: 이것이 직선이 안 되고, 꺽인 선이 될 수도 있지 않을까?
S6: 아니, 직선이라고 적혀 있잖아요. 유치원생에게 그려 라고 해도 그릴 수 있겠어요.

S6은 검사지에 제시된 '직선 BOD'에서 BOD의 수식어 '직선'이라는 단어에 지나치게 몰입되어, 직선 BOD에 대해 전혀 의구심을 갖지 못하였다. 따라서 연구자가 세 차례에 걸쳐 의문을 제기하였지만, 그는 번번히 '직선이라고 적혀 있잖아요'라는 논지를 굽히지 않았다.

RS: ($\overline{AB}=\overline{AD}$ 부분을 가리키며) 두 번째 줄은 이상 없니?
S6: 예. 이상 없어요.
RS: 왜?
S6: 삼각형 ABD가 직각이등변삼각형이 맞는 것 같아요.
RS: 왜?
S6: 그러니까 반지름이 다 같으니까 이 사각형의 가로 세로가 모두 지름과 같으니까 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되요.

S6은 $\overline{AB}=\overline{AD}$의 진위여부에 집중하고 있으며, 이를 기록지가 아닌 자신의 논지로 설명하고 있었다.

RS: 그럼 이와 같은 네 설명이 여기 나와야 하지 않을까?
S6: 음...그럴 것 같네요.
RS: 그럼 두 번째 줄은 이상 있는 거니 없는 거니?
S6: 두 번째 줄은 이상 없어요. 그러나 설명이 없기 때문에 두 번째 줄은 이상 없지만, 전체는 이상 있어요.
RS: 왜 전체가 이상이 있다고 생각하니?
S6: 지금 생각해보니, 삼각형이 직각이등변삼각형이 되는 것을 설명하려면 이런 설명이 필요할 것 같아요. AB=AD가 성립하는 것을 앞에서 미리 설명해야 직각이등변삼각형이 되니까요.

S6은 최초에 $\overline{AB}=\overline{AD}$에 대해 의구심을 갖지 못하였으며, 자신의 논지로써 진위를 설명하였다. 그러나 연구자가 제기한 문제로 인해 드디어 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 그 자체는 문제가 있는 것은 아니지만, 전체 논지가 이상함을 인식하게 되었다. 따라서 그는 자신의 설명이 추가되어 논지가 보충되어야 한다고 말하게 된 것이다.

Ⅴ. 논의

기하 증명을 올바르게 이해하기 위해서는 주어진 도형 표현이 비록 시각적으로 두드러진 몇 가지 특징을 명시적으로 나타내 보일지라도, 심리적으로는 그렇지 않다는 대상 인식이 필요하다. 즉, 시각보다 논리에 입각한 사고가 요구된다. 본 연구에서는 시각적 특성에 의존적인 증명을 제시하여 그 문제점을 파악할 수 있는지를 확인해 봄으로써, 학생들의 시각의존성을 살펴보았다. 아울러 시각의존성이 두드러진 몇몇 학생들과의 개별 면담을 통해 이들의 시각의존적인 성향을 구체적으로 파악해 보았다. 그 결과 다음과 같은 몇 가지 특징을 파악할 수 있었다.

첫째, 명백히 시각의존적 성향을 가진 학생들이 전체의 71.43%로 상당히 높은 것으로 나타났으며, 시각의존적 비약에 대한 의구심을 가진 학생일지라도 ‘직선 BOD’에 대한 의구심을 갖는 경우는 한 사례도 찾아볼 수 없었다. 이는 논증에서 다수의 학생들이 시각의존적 경향을 탈피하지 못하고 있음을 보여주며, 결국 이에 대한 별도의 교수학적 노력이 요구됨을 시사한다.

둘째, 시각의존적 비약에 대한 의구심 제기가 도움이 될 수 있음을 S1의 사례에서 확인해 볼 수 있었다. S1은 비약에 대한 문제 제기가 도움이 된 대표적 사례로, 그는 이로부터 시각의존적 비약 인식에 성공하였다. 또한 S5 역시도 의구심 제기로부터 $\overline{AB}=\overline{AD}$에 대한 비약 인식에 성공하였다. 이는 의구심 제기가 시각의존적 비약 인식에 도움이 될 수 있음을 보여준다. 그러나 S3, S4의 경우에

는 의구심 제기에도 불구하고 비약 인식에 실패하였는데, 이는 의구심 제기와 더불어 별도의 세심한 교수 설계가 필요함을 시사한다.

셋째, 증명이라는 하나의 텍스트의 전체 맥락을 고려하기보다, 문장 자체의 진위 여부에 집중하는 경향이 발견되었다. S2는 대표적 사례로 텍스트 전체를 보기보다 문장 자체에 집중하였기 때문에, 문장에 대한 증명에 나타나지 않은 논리를 펼침으로써 문장의 진위 여부를 확인하였다. 이는 S5, S6에게서도 동일하게 나타난 특징으로, 결국 다수의 학생들은 증명 전체의 맥락보다 문장의 진위 여부에 집착하고 있음을 보여준다. 인식 전환에 성공한 대표 사례인 S1이 '진술 자체만 놓고 보면, 틀린 것이 아니라는 것이 어려움의 원인이 된다.'고 말한 것은 이러한 특징을 보다 명확히 보여준다.

넷째, 시각의존성은 증명의 의의 이해에 방해가 되며, 심지어 증명해야 할 것을 도리어 증명에 이용하는 역행적 사고의 원인이 될 수 있음을 S3의 사례로부터 확인할 수 있었다. S3는 시각의존적 경향의 대표적 사례이며, 그는 증명해야 할 사각형 ABCD가 정사각형이라는 사실을 도리어 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 라는 사실의 증명에 이용하였다. 이는 증명의 의의를 명확히 이해하기 위해서는 시각의존성 탈피가 우선적으로 요구됨을 보여주는 결과이다.

다섯째, 개념 이미지에 의한 판단이 시각의존적 경향으로 연결될 수 있음을 S5의 사례를 통해 확인할 수 있었다. 중심이라는 개념 이미지가 사각형의 중심으로 직결됨으로써, S5는 원의 중심이 사각형의 중심과 일치하지 않을지도 모른다는 의구심을 전혀 갖지 못하였다. 이는 개념 이미지의 작용이 시각의존적 경향의 원인이 될 수 있음을 보여준다.

여섯째, 수식하는 단어에 집착하여 수식 단어가 갖는 의미를 의구심 없이 당연시할 수 있음을 S6의 사례로부터 확인할 수 있었다. S6은 '직선 BOD'에서 수식어 직선이라는 단어에 집착하여 수식 단어의 의미는 의구심의 대상이 될 수 없는 것으로 인식하였다. 이는 증명해야 할 명제의 단어가 어디에 위치하는가에 따라 학생들이 영향을 받을 수도 있음을 보여주는 예이다.

이상의 논의로부터 우리는 기하 증명에서 시각의존성에 대한 다음의 교수학적 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, 시각의존적 비약이 드러난 오류인 증명을 교수에 적극 활용할 필요가 있다. 학생들이 오류 없는 완벽한 증명만을 접한다면, 어떤 것이 오류가 될 수 있는지를 파악하기 어려울 것이다. S1, S5의 사례에서 의구심 제기가 도움이 될 수 있음을 확인한 만큼, 시각의존적 비약이 드러난 증명과 그에 대한 의구심 제기를 시각의존적 오류에 대한 인식 전환의 교수 도구로 활용할 필요가 있다. 그러나 S3, S4는 의구심 제기에도 불구하고, 인식 전환에 실패한 만큼, 이를 교수 도구로 활용할 때, 세심한 교수 설계가 요구된다. 이를테면, 만약 의구심 제기에도 불구하고 인식 전환에 실패한다면, 시각의존적 비약이 극명하지만 쉬운 다른 사례 제공이 그 하나의 방편이 될 것이다.

둘째, 문장 자체의 진위 여부에 집중하지 않고, 문맥 전체를 고려한 인식 전환을 돕는 것이 필요하다. S2, S5, S6에게서 문장의 진위 여부에 집중된 모습이 감지되었던 만큼, 이는 시각의존성 탈피를 위해 반드시 요구되는 사항이라 할 것이다. 이를 위해 증명 역시 하나의 글이므로 앞뒤의 전개가 논리적으로 타당한지를 검증하는 별도의 교수가 제공되어야 할 것이다.

셋째, 시각의존성이 증명해야 할 것을 도리어 증명의 근거로서 사용하는 오류의 원인으로 작용할 수 있음을 확인한 만큼, 역행적 증명 사례가 파악되는 학생에 대한 시각의존성을 확인해 볼 필요가 있다. 역행적 증명이 나타나는 사례에서 시각의존성을 의심할 필요가 있으며, 이를 통해 시각의존적 경향이 파악된다면 이에 대한 별도의 처방이 제공되어야 할 것이다.

넷째, 개념 이미지가 시각의존적 경향에 작용할 수 있음이 확인된 만큼, 개념 이미지에 기반한 논증 역시 오류로 파악될 수 있음을 보이는 것이 필요하다. 이를 위해서는 풍부한 예시의 제공이 수반되어야 한다. 개념 이미지 작용으로 대표되는 S5는 원의 중심과 사각형의 중심이 중심이라는 개념 이미지로 동일할 것이라고 인식하였다. 이러한 인식 개선을 위해서는 풍부한 반례 제시를 통해 원의 중심이 사각형의 중심과 일치하지 않을 수 있음을 인식할 수 있도록 도와야 할 것이다.

다섯째, 단어의 위치에도 영향을 받는다는 점을 고려할 때, 명제 이해력을 높이는 별도의 교수가 수반되어야 할 것이다. 단어의 위치가 변하더라도 동일한 의미를 갖는 명제를 제시함으로써, 명제 이해도 상승을 도모할 필요가 있다. 이를테면, '직선 BOD를 그으면'과 '점 B, O, D를 연결하면 직선이 된다. 따라서 이들을 연결하여 직선을 그으면'이라는 표현을 비교하게 함으로써, '직선 BOD'라는 함축적 표현이 갖는 분명한 의미를 이해하도록 돕는 것이 필요하다.

2009 개정 교육 과정에서 '증명'이 '정당화' 개념으로 교체된 것은 기하 증명 지도의 여러 가지 어려움을 감안한 것이며, 시각의존성 역시 그 중 하나의 축을 담당하고 있다. 기하 증명에서 시각의존성 파악은 쉽지 않지만, 이것이 극복되지 않는다면 기하 증명의 진정한 의미 이해는 어려울 것이다. 따라서 수학 교육자들은 기하 증명에서 시각의존성 탈피를 돕는 교수 방안 마련을 위해 보다 노력해야 할 것이며, 이를 극복하지 못한다면 '증명' 개념으로의 환원은 쉽지 않아 보인다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부(2010). **초등학교 수학 4-2**. 서울: 두산동아.

[2] 류성림(1993). **중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

[3] 류성림(1998). 수학교육에서 '증명의 의의'에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 37**(1), 73-85.

[4] 서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 - 중학교 수학을 중심으로 -**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

[5] 이준열·최부림·김동재·송영준·윤상호·황선미(2009). **중학교 수학 2**. 서울: 천재교육.

[6] Dreyfus, T. & Hadas, N.(1987). "Euclid May Stay – and Even Be Taught", In Mary Montgomery Lindquist & Albert P. Shulte(Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K – 12 – NCTM 1987 Yearbook*, Reston: NCTM.

[7] Duval, R.(1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana and V. Villani(Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21th Century*. Dordrecht: Kluwer.

[8] Fischbein, E. & Kedem, I.(1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In Vermandel(Ed). *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education,* 128-136. Antwerp: PME.

[9] Hershkowitz, R. & Vinner, S.(1984). Children's Concept in Elementary Geometry – a reflection of teacher's concepts?, *8th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,* 63-70.

[10] Martin, W. G. & Harel, G.(1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

[11] Mesquita, A. L.(1994). On the Utilization of Non-standard Representations in Geometrical Problems, *18th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,* 271-278.

[12] Parzysz, B.(1991). Representation of Space and Students' Conceptions at High School Level, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 575-593.

[13] Williams, E.(1990). An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(3), 165-176.

[14] Zazkis, R. & Gunn, C.(1997). Sets, Subsets and the Empty set: Students' Constructions and Mathematical Convertions. *JI of Computers in*

Mathematics and Science Teaching, 16(1), 133-169.

Kang, JeongGi
Namsan Middle School
Chang-Won 642-110, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com