대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 4, 763 ~ 782. Dec 2014

예비교사의 원의 넓이에 대한 내용지식 분석

최 은 아* · 강 향 임**

본 연구의 목적은 원의 넓이에 대한 초등예비교사들의 내용지식을 조사하는 것이다. 이를 위해 문헌분석을 토대로 원의 넓이의 측정에 관련된 기본 개념들을 추출하였으며, 이를 반영한 검사지를 개발, 53명의 초등예비교사들에게 적용하여 그 반응을 분석하였다. 분석 결과, 예비교사들은 원의 넓이의 의미를 단위넓이의 개수보다는 원의 정의나 넓이 공식으로 기술하고 있었다. 또한 분할과 단위반복에 비해 보존과 배열구조에서 불완전한 이해를 보였고, 어림을 무시하는 경향이 컸으며 실무한의 수용에 어려움을 보였다. 이러한 결과는 예비교사 양성프로그램에서 원의 넓이에 대한 내용지식을 좀 더 명시적으로 지도할 필요가 있음을 시사한다.

Ⅰ. 서 론

교사는 수학 지식과 교수법 지식을 통합한 가르치기 위한 수학을 알고 활용할 필요가 있으며, 미지의 수학영역에 대한 정보제공자, 설계자, 상담자, 탐구자이어야 한다(NCTM, 2000, p.491). 가르치기 위해 필요한 교사지식에 대한 연구는 교사의 교수활동을 뒷받침하는 고유한 지식기반의 존재를 논한 Shulman(1986)에 의해 본격화되었다. 교사지식에 대한 Shulman의 분류, 즉 교과내용지식(subject matter knowledge, SMK), 내용교수지식(pedagogical content knowledge, PCK), 교육과정지식(curriculum knowledge)으로의 분류는 이후 여러 학자에 따라 다양하게 변형되었으며, 수학교육 분야에서는 Ball, Thames & Phelps(2008)에 의해 교수를 위한 수학지식(mathematical knowledge for teaching, MKT)으로 개념화되었다.

교과내용지식이 교수에 있어서 의미 있는 변수라고 여기는 교사지식에 대한 연구들은 교사가 지닌 내용지식과 그 내용이 가르쳐지는 방식이 수업의 질에 결정적인 영향을 미친다고 보아, 교사들의 SMK를 조사하거나 PCK와 SMK의 상호관련성을 조사하였다(Ball, 1991; Even, 1993; Ma, 1999). 수학에 대한 SMK, 즉 수학내용지식(Mathematics content knowledge, MCK)이 부족한 교사는 수학적 개념을 개별적인 사실과 절차의 모임으로 가르치게 됨으로써 수학의 본질을 잘못 표현하고 학생들의 유의미한 이해를 방해한다(Ball & McDiarmid, 1990). 이는 수학내용지식(MCK)이 내용교수지식(PCK)에 직접적인 영향을 미친다는 것을 의미하는 것으로, 수학내용지식은 교사지식의 기본이 된다고 할 수 있다.

1999년부터 2012년까지 국내 수학교육 학술지에 게재된 교사지식에 대한 연구 동향을 분석한 송근영, 방정숙(2013b)에 따르면, 전체 79편 중에서 PCK 연구는 40.5%, 교사지식 연구 29.1%, SMK 연구 8.9%, MKT 연구는 5.1%에 해당되었

* 영등포여자고등학교, silverah90@naver.com (제1 저자)
** 공주교육대학교 강사, hikang2002@hanmail.net (교신저자)

다. 이 중에서 수학내용지식에만 초점을 맞춘 SMK 연구의 비율이 그다지 높지 않음을 알 수 있다. 대표적인 수학내용지식 연구로는 중등 수학교사의 이차곡선에 대한 내용지식과 예비교사들의 미분에 대한 내용지식을 살펴본 조완영(2011, 2012)의 연구를 들 수 있다. 초등 예비교사들을 대상으로 한 연구 또한 찾아볼 수 있는데, 승수와 제수가 소수인 연산의 의미에 대한 이해가 미흡함을 밝힌 송근영, 방정숙(2013a)의 연구, 분수와 소수 연산의 개념과 수학적 용어에 대한 이해 수준이 낮음을 밝힌 김현미, 류희수(2012)의 연구, 수와 연산 영역에서의 내용지식을 조사한 김해규(2012)의 연구가 해당된다. 그런데 이들 연구들은 수와 연산이라는 특정 주제에 집중되어 있어, 좀 더 다양한 내용영역에 대한 예비교사들의 내용지식을 분석한 연구들이 요구된다고 할 수 있다.

본 연구가 초등예비교사들을 대상으로 살펴보고자 하는 수학내용지식은 원의 넓이이다. 현재 6학년 1학기에서 지도되는 원의 넓이 단원은 다른 단원에 비해 상당한 수준의 수학내용지식을 필요로 한다고 말할 수 있다. 평면도형의 넓이에 대한 기본적인 개념뿐 아니라 단위넓이를 사용한 어림, 내접사각형과 외접사각형을 비교한 어림, 원의 넓이 공식을 유도하기 위해 '무한소'의 부채꼴 분할과 직사각형으로의 재구성, 이 과정에서의 실무한에 대한 지식 등을 요구한다. 원의 넓이에 대한 복합적인 내용지식은 다른 평면도형과 달리 곡선으로 이루어진 도형이라는 원의 고유한 속성에 기인한다. Baturo & Nason(1998)은 예비교사 대부분이 원의 넓이 공식의 의미를 제대로 이해하지 못함을 지적한 바 있다(p.262). 그러나 원의 넓이에 대한 교사지식을 살펴본 국내 연구는 지금까지 이루어지지 않았다.

본 연구의 목적은 초등예비교사들의 원의 넓이 개념과 원의 넓이 측정에 관한 내용지식을 조사하는 것이다. 본 연구 결과는 원의 넓이와 관련한 내용지식의 추출과 교사교육 프로그램 개선에 시사점을 제공할 것이다. 예비교사들에게 제시할 과제 개발과 분석틀 설정의 이론적 토대를 위해 원의 넓이에 대한 역사 발생적 분석과 우리나라 교육과정 및 교과서 분석을 수행하고, 평면도형의 측정에 대한 기본 개념을 적용한 원의 넓이 측정의 기본 개념을 다음과 같이 살펴보았다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 원의 넓이의 역사 발생적 분석

원의 넓이에 관한 최초의 기록은 이집트의 Ahmes 파피루스이다. 50번 문제에서 지름이 9인 원의 넓이가 한 변이 8인 정사각형의 넓이와 같다는 전제를 찾아볼 수 있다(Boyer & Merzbach, 1968, p.28). Smith(1925)는 이러한 원과 정사각형의 관계를 고대 기하문제 중의 하나인 '원의 넓이와 같은 넓이를 갖는 정사각형의 작도' 문제의 첫 시도라고 말한다(p.302). Boyer & Merzbach는 이집트인들이 팔각형을 원에 근사시키는 과정을 통해 이와 같은 계산법을 얻었을 것이라고 추정하고 있다. 그렇지만 이집트인들이 원의 넓이와 그 근삿값을 구분하였을 것이라는 증거는 없다(pp.27-28).

이집트인들이 근삿값에 대한 인식조차 없었다고 한다면, 그리스 수학자들은 적극적으로 근삿값의 오차를 줄이기 위한 시도를 했다고 말할 수 있다. 특히 Antiphon은 원의 내접 정다각형의 변의 개수를 계속 늘려 가면 결국 원과 정다각형의 넓이가 같아진다고 주장하였다(Eves, 2005, p.346). 이 주장은 Eudoxus의 실진법(method of exhaustion)에 의해 공식적으로 증명되었으며, 실

진법은 Euclid의《원론》제 10권 1번 명제로 제시되어 있다(Boyer & Merzbach, 1968, p.146). 이후 Archimedes는 《원의 측정》에서 '원의 넓이는 원주를 한 변으로 하고 반지름을 한 변으로 하는 직각삼각형의 넓이와 같다'라는 명제를 실진법으로 증명하였다(Boyer & Merzbach, 1968, p.204).

17세기 초의 Kepler는 원을 부채꼴로 무한 분할하여 높이가 반지름이고 밑변이 무한소인 이등변삼각형들의 넓이의 합을 원의 넓이로 구하였다. 이 때, 밑변들의 합이 바로 원주의 길이 C, 높이가 반지름 r이므로 원의 넓이 $\frac{1}{2}rC$ 가 얻어진다. 이러한 Kepler의 증명은 Archimedes의 증명과 대략적으로 일치한다(정동권, 1998, pp.222-223). 한편 Cavalieri는 Archimedes, Kepler와 동일한 정리인 '원은 반지름이 직각을 낀 한 변이고, 원주의 길이가 밑변인 직각삼각형과 같다'는 정리를 불가분량의 개념을 이용하여 증명하였다. Kepler가 원을 무한소 도형으로 분할하고 다시 무한소 도형의 총합을 취했다면, Cavalieri는 원보다 한 차원 낮은 무수히 많은 불가분량의 합을 생각했다고 말할 수 있다(정동권, 1998, p.224). 17세가 후반에 Newton과 Leibniz에 의해서 미적분학이 확립되면서 원의 넓이를 구분구적법으로 구하게 되었다. 적분 개념에 의해 원의 넓이는 원을 무한히 작은 정사각형으로 세분하여 얻은 넓이의 합의 근삿값에 대한 극한값이라는 의미를 가지게 된 것이다.

요컨대 원의 넓이에 대한 측정의 역사에서 내접다각형과 외접다각형을 이용하여 근삿값의 오차를 소진하려는 노력이 실진법, 무한소, 불가분량이라는 무한에 관한 개념들로 이어졌고, 그 결과 구분구적법으로 발전되었다고 할 수 있다. 특히 이 과정에서 원을 부채꼴로 분할하여 재배열하거나 좀 더 작은 단위넓이로 세분한다는 아이디어가 지속적으로 사용되었음을 확인할 수 있다.

2. 교육과정 및 교과서 분석

원의 넓이는 1차 교육과정부터 현재 교육과정에 이르기까지 초등학교에서 지속적으로 지도되어왔다. 그러나 <표 Ⅱ-1>에서 알 수 있듯이, 원의 넓이를 학습하는 학년이나 학습계열, 성취기준, 교수·학습상의 유의점에서 몇 가지 변화와 특징을 찾아볼 수 있다.

첫째, 원의 넓이의 학습 학년이 현재와 같이 6학년으로 고정된 것은 4차 교육과정 이후이다. 2차와 3차 교육과정에서는 원의 넓이를 학습하는 시기를 앞당겨 5학년에 편성한 대신, 6학년에서는 부정형과 닮은 도형의 넓이를 지도하기도 하였다. 둘째, 원의 넓이는 평면도형의 넓이와 부채꼴의 넓이와 관련하여 학습계열의 변화를 보였다. 대체적으로 평면도형의 넓이는 직사각형의 넓이를 시작으로 여러 가지 사각형, 삼각형, 원의 넓이에 이르기까지 4학년에서 6학년에 걸쳐 점진적으로 지도되어왔다. 그러던 것이 최근의 7차와 2009 개정 교육과정에서 5학년부터 지도하는 것으로 개정하였다. 반면에 부채꼴의 넓이는 3차 교육과정부터 6차 교육과정까지 원의 넓이를 학습한 직후에 연계해서 학습하도록 하였으나, 7차 교육과정 이후에는 중학교로 이동하였다. 셋째, 초등학교에 편성된 원의 넓이는 문자를 사용한 넓이 공식의 일반화 차원에서 중학교에서 다시 지도되었다. 부채꼴의 넓이와 원기둥, 원뿔의 겉넓이, 원기둥의 부피 등도 마찬가지였다. 넷째, 교육과정에서 제시하고 있는 내용 및 성취기준의 초점이 원의 넓이의 계산에서 측정방법의 이해와 계산으로 변화하였다. 2007 개정 교육과정과 2009 개정 교육과정은 '원의 넓이를 구하는 방법을 이해하고 이를 구할 수 있다'는 성취기준을 제시함으로써, '원의 넓이를 구할 수

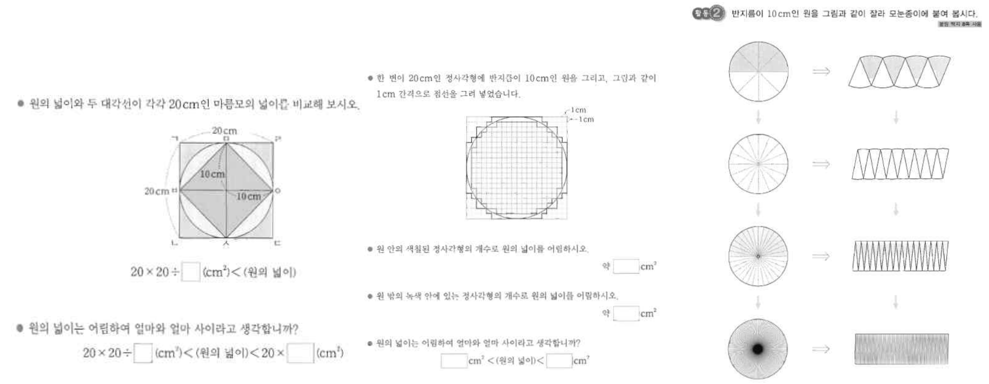
<표 Ⅱ-1> 원의 넓이 학습계열의 변천 및 특징

교육과정	영역	학습학년	학습계열				특징
			4학년	5학년	6학년	중학교	
1차	측정	6학년 1학기	간단한 도형에 대하여 계산으로 넓이 구하기	다각형과 사다리꼴 넓이 구하기	원주율과 원주, 원의 넓이	도형의 계산 (둘레, 넓이, 부피)	원의 넓이 계산 강조
2차	양과 측정	5학년 1학기	삼각형과 사각형 넓이	평행사변형, 사다리꼴, 원주율과 원의 넓이	정다각형 부정형의 넓이, 줄인 그림을 이용한 실지 넓이, 입체도형의 겉넓이, 원기둥 부피	도형의 구적 (평면도형의 넓이, 공간도형의 겉넓이, 부피)	5학년으로 이동, 부정형과 닮음의 활용 추가
3차	측도	5학년 2학기	직(정)사각형, 삼각형 넓이	원주율과 원주, 원의 넓이, 부채꼴의 넓이	정다각형 넓이 구하기, 기본 입체도형의 겉넓이, 직원기둥 부피	평면도형의 면적, 입체도형의 표면적과 체적	부채꼴 넓이 추가
4차	측도	6학년 1학기	직(정)사각형, 삼각형 넓이	사각형, 둔각삼각형, 정다각형 넓이	원주율과 원주, 원의 넓이, 부채꼴의 넓이,원기둥 겉넓이, 부피, 원뿔 겉넓이	평면도형의 면적, 입체도형의 표면적과 체적	6학년으로 이동, 정다각형 넓이 5학년으로 이동
5차	측도	6학년 1학기	직(정)사각형, 직각삼각형, 삼각형 넓이	사각형, 둔각삼각형, 정다각형 넓이	원주율과 원주, 원의 넓이, 부채꼴의 넓이,원기둥 겉넓이, 부피, 원뿔 겉넓이	부채꼴 넓이, 호의 길이, 원기둥, 원뿔, 구의 겉넓이, 부피	4차와 거의 동일
6차	측도	6학년 1학기	직(정)사각형, 직각삼각형, 삼각형 넓이	둔각삼각형, 여러 가지 사각형의 넓이	원주율과 원주, 원의 넓이, 부채꼴의 넓이, 원기둥 겉넓이, 부피, 원뿔 겉넓이	부채꼴 넓이, 호의 길이, 원기둥, 원뿔, 구의 겉넓이, 부피	정다각형 넓이 삭제
7차	측정	6학년 2학기		(가)직(정)사각형, 평행사변형, 삼각형 넓이 (나)사다리꼴, 마름모 넓이	원주율과 원주, 원의 넓이	부채꼴 넓이, 호의 길이, 원기둥, 원뿔, 구의 겉넓이, 부피	5학년부터 평면도형의 넓이 편성, 부채꼴 삭제
2007 개정	측정	6학년 1학기	직(정)사각형 넓이	평면도형의 넓이	원주율과 원주, 원의 넓이, 원기둥 겉넓이, 부피	부채꼴 넓이, 호의 길이, 원기둥, 원뿔, 구의 겉넓이, 부피	4학년부터 평면도형의 넓이 편성
2009 개정	측정	5~6 학년군		평면도형의 넓이	원주율과 원주, 원의 넓이, 원기둥 겉넓이, 부피	부채꼴 넓이, 호의 길이, 원기둥, 원뿔, 구의 겉넓이, 부피	5학년부터 평면도형의 넓이 편성

있다'로 제시한 기존의 교육과정에 비해 측정 방법의 이해를 강조하고 있다고 말할 수 있다. 다섯째, 7차 교육과정 이후에는 원의 넓이를 구체적인 조작활동을 통하여 여러 가지 방법으로 구하는 것을 교수·학습상의 유의점으로 제시하고 있다.

다음으로 1차 교육과정부터 2007 개정 교육과정에 따른 교과서를 원의 넓이의 측정방법에 집중하여 살펴보았다. 현재 6학년 학생들이 학습한 2007 개정 교과서는 원의 넓이를 구하는 방법을 내접·외접 정사각형을 이용하여 어림하기, 단위 넓이를 사용하여 어림하기, 부채꼴로 등분할하여 직사각형으로 등적변형하기로 제시하고 있다.

<표 Ⅱ-2>에서 알 수 있듯이, 이 세 가지 방법이 모두 제시되기 시작한 것은 7차 교육과정 이후임을 알 수 있다. 그 이전에는 내접·외접 정사각형과 비교하여 어림하는 방법은 소개되지 않았다. 한편 단위넓이를 이용한 어림 방법은 5차



[그림 Ⅱ-1] 2007 개정 교과서의 원의 넓이를 구하는 방법(교육과학기술부, 2011)

와 6차 교육과정에는 생략되기도 하였으며, 2차와 4차 교육과정에서는 단위넓이를 1㎠ 뿐만 아니라, 한 변의 길이가 0.5㎝인 정사각형의 넓이, 즉 0.25㎠로 하여 어림하기도 하였다.

직사각형으로 등적변형하기는 1차 교과서부터 2007 개정 교과서까지 빠짐없이 다루어진 방법이다. 1차 교과서는 원을 16등분하여 재배열한 그림만을 제시한 반면에, 2차 교과서부터는 좀 더 상세한 그림과 설명, 즉 원을 8등분, 16등분, 32등분하여 재배열하는 그림을 제시한 다음, 원을 한없이 잘게 자르면 직사각형으로 변형된다는 설명과 그림을 제시하여 원의 넓이 공식을 유도하고 있다. 다만 7차와 2007 개정 교과서에서는 '반지름이 10㎝인 원을 그린 후, 그림과 같이 잘라 모눈종이에 붙여봅시다'라는 활동을 제시하고 있다.

지금까지 살펴본 교육과정 및 교과서의 특징으로부터 원의 넓이 지도와 관련하여 몇 가지 시사점을 얻을 수 있다. 첫째, 원의 넓이의 학습은 단위넓이 개념과 등적변형 등 평면도형의 넓이 측정의 기본 개념에 대한 학습이 충분히 이루어진 이후에 가능하다. 물론 원의 넓이에 대한 이해는 중학교 학습내용인 부채꼴의 넓이를 이해하는 데 필수적인 선행지식이다.

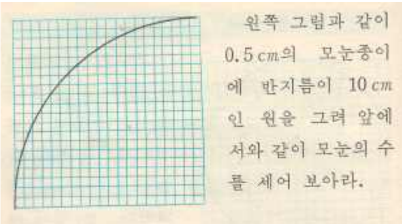
둘째, 그동안의 교육과정은 원의 넓이 계산을 강조하는 것으로부터 원의 넓이를 측정하는 방법에 대한 이해를 강조하는 방향으로 변화해왔다. 이는 원의 넓이 공식을 형식적으로 적용하는 것에 그치는 것이 아니라, 공식의 원리에 대한 관계적 이해를 도모하고 여러 가지 측정 방법에 따른 구체적인 조작활동을 강조한다는 점에서 긍정적이라고 볼 수 있다.

셋째, 원의 넓이의 측정방법과 관련해서는 0.25㎠의 단위넓이를 사용하여 어림한 2차와 4차

<표 Ⅱ-2> 교과서에 제시된 원의 넓이 측정방법의 변화

	1차	2차	3차	4차	5차	6차	7차	2007개정
내접외접 정사각형 비교어림	없음	없음	없음	없음	없음	없음	내접·외접정사각형 비교	내접·외접정사각형 비교
단위넓이 어림	1㎠ 모눈 세기	0.25㎠ 모눈 세기	1㎠ 모눈 세기	1㎠, 0.25㎠ 모눈 세기	없음	없음	1㎠ 정사각형 개수 세기	1㎠ 정사각형 개수 세기
직사각형 등적변형	간략한 그림과 설명	그림과 설명	그림과 설명	그림과 설명	그림과 설명	그림과 설명	활동으로 제시	활동으로 제시

교과서를 재검토할 필요가 있다([그림 Ⅱ-2] 참조). 이는 학생들에게 단위넓이가 1㎠로 고정된 것이 아니라, 기존의 단위넓이를 세분화한 작은 단위넓이를 이용하여 보다 정밀한 원의 넓이의 근삿값을 구할 수 있다는 사실을 인식하게 한다는 점에서 교수학적으로 의미 있는 구성이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅱ-2] 0.25㎠의 단위넓이를
사용한 어림(문교부, 1989)

넷째, 직사각형으로 등적변형하기 방법을 지도하는 구체적인 방안의 모색이 요구된다. 이 방법은 우리나라 교육과정에서 지속적으로 지도되어 온 방법이지만, 부채꼴의 무한분할과 직사각형으로의 등적변형의 과정에서 실무한에 대한 이해를 전제로 한다는 점에서 결코 쉽지 않은 내용이다. 교수·학습과정에서 학생들의 인지적 부담을 해소할 좀 더 구체적인 교수학적 방안이 필요하다.

3. 넓이 측정의 기본 개념과 원의 넓이

평면도형인 원의 넓이의 측정은 다른 평면도형의 넓이 측정과 기본 개념들을 공유한다. Reynolds & Wheatley(1996)는 넓이와 같은 평면 영역의 측도를 그 영역을 보다 작은 단위(보통은 정사각형 단위)와 비교하는 것으로 설명한다. 따라서 넓이 측정이란 2차원의 단위로 해당 영역을 분할 또는 덮는 것이라고 할 수 있다. 그동안 Stephan & Clements(2003)를 비롯한 다수의 연구들이 학생들이 측정의 절차뿐 아니라 측정의 의미에 대해 이해해야 함을 강조하며, 측정의 기본 개념들을 명료화하는 시도를 하였다. 대표적으로 넓이 측정의 기본 지식을 구체적 지식, 계산적 지식, 원리개념적 지식으로 분류하고 개념화한 Baturo & Nason(1996)의 연구와 단위에 대한 개념들과 척도(scale)에 대한 개념으로 분류한 Lehrer, Jaslow & Curtis(2003)의 연구, 넓이 측정의 기본 개념을 분할, 단위 반복, 보존, 배열구조로 설명한 Stephan & Clements(2003)의 연구를 들 수 있다.

먼저 Baturo & Nason(1996)은 넓이 측정에 대한 구체적 지식을 단위에 대한 이해와 단위넓이로 덮기, 변형을 통한 넓이의 보존 등에 대한 지식으로 설명하였으며, 공식을 사용하여 넓이를 구하는 방법에 대한 계산적 지식과 넓이 공식의 원리를 이해하고 하위 단위로 세분화될 수 있는 넓이의 연속적 성질을 이해하는 원리개념적 지식을 개념화하였다. Lehrer et al.(2003)은 길이 측정의 중심 개념들을 그대로 2차원 평면으로 확장하여 넓이 측정의 중심 아이디어를 얻고 있다. 단위 반복, 단위의 확인, 단위로 덮기, 단위의 분할, 단위의 가법성 등 단위에 대한 개념들 대부분이 Baturo & Nason가 설명한 구체적 지식과 일치함을 알 수 있다. 반면에 영점 확인과 측정의 정확성에 대한 인식 등 척도(scale)에 대한 개념을 추가한 것이 특징이다. 특히 이들이 길이 측정과 비교하여 넓이 측정에서 강조하는 것은 평면의 재구성으로서의 배열이다. 이들은 배열을 구조화하는 것이 넓이를 각 길이들의 곱으로 인식하는 핵심적인 활동으로 설명한다. 그럼에도 불구하고 많은 학생들이 넓이 공식과 배열의 관계를 이해하지 못하고 있으며, 측정하려는 도형의 모양과 닮은 단위를 선택하는 경향이 있음을 지적하고 있다(Lehrer et al., 2003, pp.109-110).

Stephan & Clements(2003)는 넓이 측정 개념을 분할, 단위 반복, 보존, 배열구조 등 4가지 기본

개념으로 분류하여 좀 더 명료화하여 설명한다. 분할은 2차원 공간을 똑같은 크기의 2차원 단위로 나누는 것으로, 어떤 대상을 측정하기 위해서는 그보다 작은 단위로 나누는 분할이 선행되어야 한다. 단위 반복은 단위넓이로 빈틈없이, 겹침 없이 도형을 반복적으로 덮는다는 것을 의미하며, 보존은 어떤 영역을 잘라서 다른 모양으로 재배열해도 그 넓이는 변화하지 않는다는 것을 의미한다. 배열구조는 단위반복을 바탕으로 도형을 재인식함으로써 배열의 구조를 파악하는 것으로 넓이 공식의 유도와 연결된다. 이들이 제시한 기본 개념은 모두 Lehrer et al.(2003)의 중심 개념에서도 찾아볼 수 있다.

이와 같이 넓이 측정의 기본 개념들이 연구자들에 따라 조금씩 차이를 보이고 있기는 하지만, 공통적인 요소를 추출하는 것은 그리 어렵지 않다. 이들이 공통적으로 강조하고 있는 것은 단위의 의미에 대한 이해와 단위로 영역을 덮는 활동, 분할에 대한 아이디어, 배열 구조의 인식 등이다. 이러한 기본 개념들은 원의 넓이 측정에도 반드시 적용되어야 할 개념들이다.

그러나 곡선으로 이루어진 원의 넓이는 직사각형이나 삼각형 등 직선으로 이루어진 도형의 넓이 측정과는 다른 요소를 추가적으로 고려해야 한다. 이와 관련하여 Stephan & Clements (2003)가 소개한 비정형적인 도형의 넓이를 측정하는 과정에서 학생들이 사용한 전략을 고려할 수 있다. 학생들은 정사각형 단위로 셀 수 없는 작은 부분들을 합해서 정사각형 하나를 근사적으로 만드는 전략을 사용하였다(p.13). 이와 같은 전략은 원의 넓이를 구하는 과정에서 동일하게 사용될 수 있다. 원의 경계 부근에는 정사각형 단위넓이로 온전하게 채워질 수 없는 다수의 부분들이 존재하며, 이를 처리하는 수학적 방법은 어림이다. 이 과정에서 좀 더 정밀한 근삿값을 얻기 위해서는 보다 작은 단위넓이를 사용해야 함을 인식하는 것도 중요하다. 또한 원에 내접 또는 외접하는 정다각형의 변의 개수를 무한히 늘리거나, 원을 부채꼴 모양으로 무한분할 후 직사각형 모양으로 재배열하는 과정에서 실무한의 개념이 요구된다. 요컨대 원의 넓이 측정은 단위반복과 분할, 보존, 배열 등의 넓이 측정의 기본 개념 이외에 곡선이라는 원 자체의 속성을 반영한 어림과 실무한이라는 측정 개념을 추가로 고려하여 이루어져야 할 것이다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

본 연구는 지방 소재의 교육대학 3학년에 재학 중인 초등예비교사 53명을 대상으로 수행되었다. 전체 학생 중 24명은 수학교육을 심화과정으로 전공하고 3학년 1학기에 수학교재연구 및 지도법과 초등교사를 위한 대수·기하 과목을 이수한 학생이고, 나머지 29명은 또 다른 지방 소재의 교육대학에서 실과교육을 전공으로 하는 학생으로, 조사가 이루어지는 시점에 수학교재연구 및 지도법 과목을 수강 중이었으나 원의 넓이 단원은 수강하지 않은 상태였다. 두 집단 모두 원의 넓이에 대한 예비교사들의 수학내용지식을 확인하기 위해 선정하였으나, 측정 영역의 내용지식을 이미 학습한 집단인 전자의 경우는 관련 강의 수강의 결과로 형성된 원의 넓이에 대한 내용지식의 정도를, 후자의 경우는 초등수학을 포함한 학교수학의 개인적 경험이 예비교사들의 내용지식에 미치는 영향을 좀 더 명확히 드러낼 것이라고 판단하였다.

2. 검사문항

본 연구에서는 Ⅱ장에서 살펴본 원의 넓이에 대한 역사발생적 분석결과와 교육과정 및 교과서 분석 결과를 반영하고, Baturo & Nason(1996), Lehrer et al.(2003) 그리고 Stephan & Clements (2003)가 제안한 측정 영역의 기본 개념을 수정·보완하여 다음과 같은 4개 문항을 개발하였다. 예비실험을 거쳐 확정된 검사문항은 원의 넓이를 탐구하는 학생들의 사고과정을 보다 상세히 확인할 수 있도록 하위문항을 포함하였다. 1번은 원의 넓이를 어떻게 이해하고 있는지를 확인하기 위한 문항이고, 2번은 연속성을 갖는 양의 어림 전략을 확인하기 위한 문항, 3번은 단위넓이로 양을 분할할 수 있는지를 확인하기 위한 문항, 4번 문항은 단위넓이로 분할된 양을 원하는 모양으로 재배열할 수 있는지를 확인하기 위한 문항이다. 검사문항을 요약하면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

3. 자료수집 및 분석방법

2014년 8월에 35명의 예비교사를 대상으로 예비검사를 실시하였고, 2014년 10월에 55명의 본 검사를 실시하여 지각으로 인해 일부 과제에 답하지 못한 2명을 제외하고 모든 문항에 답한 53명의 검사지를 자료로 수집하였다. 본 연구의 전반적인 자료 분석 방법은 문항에 대한 예비교사들의 답변에 포함된 핵심 키워드와 표현에서 유형을 범주화하는 것이다. 이 범주들은 Denzin & Lincoln(1994)의 제안에 따라, 기존의 틀을 사용한 것이 아니라 학생들의 반응을 토대로 귀납적으로 얻어진 결과이다. 구체적으로 모든 문항의 반응에 대한 유형별 빈도수를 중심으로 각 문항의 반응을 분석하였으며 필요한 경우 백분율을 제시하였다.

분석항목은 Ⅱ장 3절에서 살펴본 Lehrer et al.(2003)과 Stephan & Clements(2003)이 공통적으로 제시한 넓이 측정의 기본 개념인 분할, 단위반복, 보존, 배열구조와 연구자들이 추가한 어림과 실무한의 개념을 기준으로 하였다. 분할은 문항 3-1과 4-1을 도구로 동일한 크기의 단위로 분할하는가를 기준으로 분석하였고, 단위반복은 문항 1과 문항 3-1, 3-2를 도구로 세기전략이 나타났는가를 확인하여 분석하였으며, 보존은 문항

<표 Ⅲ-1> 검사문항

문항		
1	원의 넓이의 의미를 써 봅시다.	
2	원에 외접·내접하는 다각형을 이용하여 원의 넓이를 탐구해 봅시다.	
	2-1	반지름이 1인 원의 넓이를 구하는 방법을 설명하시오.
	2-2	이 방법을 이용하여 원의 넓이를 정확하게 구할 수 있는가? 그 이유를 쓰시오
	2-3	원의 넓이가 정확하지 않다면 정확하게 하는 방법을 쓰시오.
3	단위넓이를 이용하여 원의 넓이를 구하는 방법을 탐구해 봅시다.	
	3-1	원의 넓이를 구하는 방법을 그림으로 나타내고 설명하시오.
	3-2	이 방법을 이용하여 원의 넓이를 정확하게 구할 수 있는가? 그 이유를 쓰시오
	3-3	원의 넓이가 정확하지 않다면 정확하게 하는 방법을 쓰시오.
4	원을 적당히 나누어 재배열하여 원의 넓이를 탐구해 봅시다.	
	4-1	직사각형 모양으로 재배열하고 가로·세로에 해당하는 값을 쓰시오.
	4-2	이 방법을 이용하여 원의 넓이를 정확하게 구할 수 있는가? 그 이유를 쓰시오
	4-3	원의 넓이가 정확하지 않다면 정확하게 하는 방법을 쓰시오.

<표 Ⅲ-2> 분석항목과 분석기준

<table>
<tr><th>번호</th><th>분석항목</th><th>분석도구</th><th colspan="2">분석기준</th></tr>
<tr><td>1</td><td>원의 넓이의 의미</td><td>문항 1</td><td colspan="2">단위의 개수</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">분할</td><td>문항 3-1</td><td rowspan="2">동일한 크기의</td><td>단위넓이</td></tr>
<tr><td>문항 4-1</td><td>부채꼴</td></tr>
<tr><td>3</td><td>단위반복</td><td>문항1, 문항 3-1, 3-2</td><td colspan="2">세기전략</td></tr>
<tr><td>4</td><td>보존(등적변형 또는 재배열)</td><td>문항 4-1</td><td colspan="2">직사각형 모양으로 재배열</td></tr>
<tr><td>5</td><td>배열구조</td><td>문항 4-1</td><td colspan="2">가로: 원주의 반, 세로: 반지름</td></tr>
<tr><td>6</td><td>어림</td><td>문항 2-1, 3-1</td><td colspan="2">어림전략</td></tr>
<tr><td>7</td><td>실무한</td><td>2-2, 2-3, 3-2, 3-3, 4-2, 4-3</td><td colspan="2">극한, 수렴</td></tr>
</table>

4-1을 통해 직사각형 모양으로 원을 재배열할 수 있는가를 확인하는 형태로 분석하였다. 그리고 배열구조는 문항 4-1을 도구로 재배열된 직사각형의 가로와 세로의 길이를 정확하게 알고 있는가를 기준으로 분석하였다. 특별히 문항 1을 통해 원의 넓이의 의미를 분석하였고, 문항 2-1과 3-1의 반응을 통해 어림에 대한 반응을 분석하였으며, 문항 2-2, 2-3, 3-2, 3-3, 4-2, 4-3을 통해 원의 넓이를 실무한의 범주에서 인식할 수 있는가를 추가하여 분석하였다.

검사지의 분석은 2명의 연구자가 공동으로 분석하였으며 해석이 다른 경우에는 논의를 통해 합의하여 처리하였다. 결과분석에서 수학교재연구 및 지도법을 이수한 수학교육과를 A로 이수중인 실과교육과를 B로 표기하고 A집단과 B집단의 학생 ID는 A1, A2, ⋯ ,B1, B2, ⋯로 표기하였다.

Ⅳ. 결과분석

1. 원의 넓이의 의미

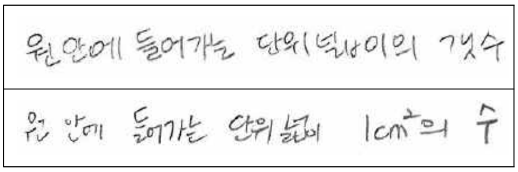
1번은 학생들이 원의 넓이를 어떻게 이해하고 있는지를 묻는 문항으로, 학생들의 다양한 반응과 경향성을 살펴보고자 하였다. 이 문항의 반응에 대한 유형과 빈도수를 집단 A(수학교육과 이수), 집단 B(실과교육과 이수 중), 전체로 나누어 살펴보면, 원 안에 들어가는 단위넓이의 개수 3명, 원 안에 들어가는 고정된 단위넓이($1cm^2$)의 개수 6명, 원의 정의와 그 안의 크기 9명, 원의 넓이 공식(πr^2) 11명, 원 내부의 넓이(면적, 크기, 공간, 양) 18명, 지름의 개수와 원 안의 점의 합 2명, 무응답 4명으로 나타났다.

<표 Ⅳ-1> 원의 넓이의 의미에 대한 예비교사 53명의 반응

반응	A(24)	B(29)	전체(53)
단위의 개수	3	0	3
고정된 단위($1cm^2$)의 개수	6	0	6
원의 정의와 그 안의 크기	6	3	9
원의 넓이 공식	0	11	11
원 내부의 넓이, 크기, 공간, 양	6	12	18
지름의 개수, 원 안의 점의 합	0	2	2
무응답	3	1	4
합계	24	29	53

원의 넓이의 의미를 단위의 개수로 언급한 학생들은 집단 A에서만 나타났고 특히 이들은 원 안에 들어가는 단위의 수에 집중하여 진술하였다([그림 Ⅳ-1] 참조). 집단 B의 경우 대체로 원의 넓이 공식이나 원 내부의 넓이, 크기, 공간,

양 등의 반응이 나타났다. 이러한 결과는 교재연구 강의 수강이 관련 지식을 형성하는데 긍정적인 영향을 미쳤음을 설명한다.

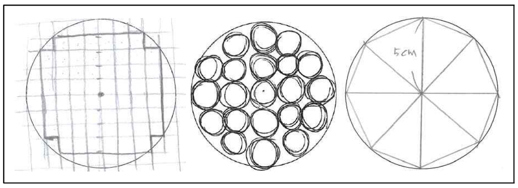


[그림 Ⅳ-1] 원의 넓이의 의미를 단위의 수로 답한 반응(A19와 A18의 사례)

원의 넓이를 원 내부의 넓이, 크기, 공간, 양으로 기술한 학생들은 비록 단위 넓이를 언급하지는 않았지만, 양의 크기라는 측정의 기본적 측면에 주목했다는 점에서 의미가 있다. 이 반응은 두 집단 모두에서 상당히 높은 비율로 관찰되었다. 반면에 원의 넓이의 의미를 넓이 공식으로 기술한 학생들은 집단 B에서만 나타났다. 이로부터 원의 넓이를 대수적 공식과 동일시한 학교수학의 개인적 경험이 예비교사들의 내용지식에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 원의 넓이에 관한 특이한 반응으로는 원의 넓이가 지름의 개수라고 답한 사례(B21)를 들 수 있다. 그러나 이 학생은 2-1문항에서 단위넓이를 사각형으로 사용하고 있기 때문에 지름을 단위로 생각했다고 판단하기는 어렵다. 결과적으로 원의 넓이의 의미를 단위의 개수로 정확히 기술한 비율이 그다지 높지 않았다는 점은 원의 넓이 개념 이해에 대한 내용 지식을 좀 더 보완할 필요가 있음을 말해준다.

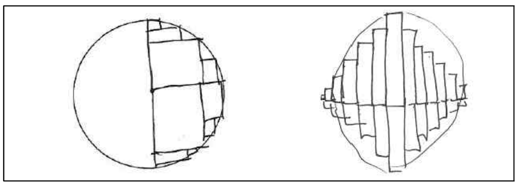
2. 분할

문항 3-1과 문항 4-1은 원의 넓이를 구하기 위해 원을 단위넓이로 분할하는 문항으로, 학생들이 넓이를 측정하기 위해 도형을 동일한 크기의 단위로 분할한다는 개념을 알고 있는지를 확인할 수 있다. 문항 3-1의 반응에서 A집단 15명의 학생과 B집단 21명이 동일한 크기의 단위넓이를 사용하여 원을 분할하였고 이들의 대부분이 사각형 모양을 선택하였다. 사각형을 단위넓이로 사용한 사례가 많은 이유는 초등수학 교과서에서 모눈종이 위의 사각형을 활용하여 단위넓이를 이용한 어림을 했던 경험과 관련이 있다고 볼 수 있다. 사각형을 단위넓이로 사용하지 않고 원(A7, B5)이나 삼각형(B8, B20, B22)을 사용한 학생들도 있었다([그림 Ⅳ-2] 참조). 특히, 원을 단위로 사용한 사례는 학생들이 측정하려는 도형의 형태와 동일하거나 닮은 단위를 사용하여 측정하려는 성향이 있다는 Lehrer, Jenkins & Osana(1998)의 연구결과와 일치한다.



[그림 Ⅳ-2] 동일 단위 분할(B26, A7, B22의 사례)

문항 4-1의 반응에서 학생들은 원을 적당히 나누어 직사각형으로 재배열하기 위해 원을 분할하는 과정에서 A집단 15명과 B집단 19명이 동일한 크기의 단위를 사용하였다. 크기가 다르게 분할한 학생들은 모두 사각형을 사용하는 것으로 나타났다([그림 Ⅳ-3] 참조).



[그림 Ⅳ-3] 크기가 다른 분할(A22, B10의 사례)

동일한 크기의 단위로 원을 분할한 A집단 15

명은 모두 부채꼴 모양을 선택하였다. 이와는 다르게 동일한 크기 분할에 성공한 B집단 19명의 학생 중 4명은 정사각형을 이용하여 원을 분할하였다. 이 4명의 학생들은 문항 3-1과 문항 4-1에서도 같은 모양으로 원을 분할하는 일관적인 반응을 보였다.

문항 3-1과 4-1을 통해 약 35명(문항 3-1 67%, 문항 4-1 64%)이 분할에 관한 기본 개념을 가지고 있는 것으로 확인되었고, 이 수치는 집단 A에서 15명(62.5%), 집단 B에서 약 20명(65.5%, 53.8%)에 해당하였다(<표 Ⅳ-2> 참조). 따라서 분할에 관한 기본 개념에서는 두 집단 A와 B 간의 두드러진 차이는 나타나지 않았다고 볼 수 있다.

전체 응답자 중 약 35%의 학생들이 원을 단위넓이로 적절하게 분할하지 못한 결과는 학생들이 넓이에 대한 분할 과제에서 어려움을 느낀다는 Outhred, Mitchelmore, PcPhail & Could(2003)의 주장과 상통한다. 이들은 학생들이 넓이 분할에 실패하는 원인으로 교사들의 교수 성향을 지적한 바 있다. Outhred & Mitchelmore(2000)에 따르면, 교사들은 넓이 측정을 영역을 하위 영역(단위)으로 분할하도록 지도하기보다는 도형을 덮고 있는 단위넓이의 개수를 세는 활동위주로 가르치고 있었다. 단지 세는 활동을 강조하는 경우는 1차원 길이 측정과 2차원 넓이 측정의 차이점이 드러나지 않음으로서 넓이 측정의 기본 개념 중의 하나인 배열구조의 파악이 어려워진다는 단점이 있다. 따라서 예비교사교육에서도 예비교사들이 특정 도형을 실제로 분할하는 그림을 그려보는 경험을 강조할 필요가 있다.

3. 단위반복

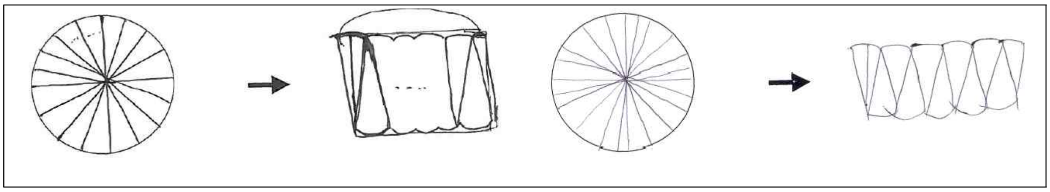
단위반복의 사례는 문항 3-1에서 분할에 성공한 학생들을 대상으로 원의 넓이를 구하기 위해 '세기' 전략이 포함된 반응을 확인해 보았다. 그 결과 A집단 4명의 학생(A12, A13, A18, A23)이 '센다', '개수를 구한다', '몇 개인지 확인한다' 등을 언급했고, B집단 3명의 학생(B7, B12, B18)이 '개수를 구한다', '개수의 합을 구한다' 등을 언급했음을 확인하였다. 그런데 문항 3-1에서 분할에 성공했지만 '세기' 전략을 직접 언급하지 않은 사례에 주목할 필요가 있다. 예를 들어, 원의 넓이와 단위의 개수를 연결한 학생(A집단 8명)과 3-2에서 단위넓이의 개수를 언급한 학생(A집단 2명, B집단 3명)은 단위반복의 개념을 이해하고 표현할 수 있다고 판단 가능하다. 이외에도 동일한 크기의 단위를 사용하여 분할에 성공한 학생 대부분은 비록 '센다'는 표현을 명시적으로 기술하지 않았다 하더라도, 실제로는 세기 전략을 사용할 확률이 높다. 왜냐하면 넓이 측정을 도형의 크기에 하나의 수치를 부여하는 활동으로 이해했다면, 본인들이 분할한 그림을 수치화할 수 있는 방법으로 단위를 세는 활동을 선택할 것이기 때문이다. 따라서 단위반복의 사례는 명시적으로 세기 전략을 표현한 사례 이상이며, 분할의 사례와 유사한 비율을 보였다고 판단할 수 있다.

<표 Ⅳ-2> 원의 분할에 관한 53명의 반응

구분 / 문항 / 집단	동일한 크기		다른 크기		부적절		무응답		계	
	3-1	4-1	3-1	4-1	3-1	4-1	3-1	4-1	3-1	4-1
A(24)	15	15	2	2	4	2	3	5	24	24
B(29)	21	19	3	2	4	1	1	7	29	29
계	36	34	5	4	8	3	4	12	53	53

<표 Ⅳ-3> 분할 가능한 34명 중 직사각형 모양으로의 재배열에 관한 반응

구분 / 집단	성공	불완전	실패	무응답	계
A(15/24)	10	4	1	0	15
B(19/29)	9	6	3	1	19
계	19	10	4	1	34



[그림 Ⅳ-4] 불완전한 재배열로 분류된 반응(A16, B26의 사례)

4. 보존

보존은 문항 4-1에서 분할에 성공한 학생들을 대상으로 분석하였고 동일한 크기로 원을 분할한 학생들이 분할된 조각을 직사각형으로 재배열할 수 있는가를 통해 분석하였다. 분할 가능한 A집단 15명의 학생 중 재배열에 성공한 학생은 10명, 불완전한 재배열을 보인 학생이 4명, 실패한 학생이 1명이었다. 그리고 분할 가능한 B집단 19명의 학생 중 사각형으로 분할한 3명의 학생이 재배열에 실패하였으며 1명의 학생이 재배열을 시도하지 못했고 6명의 학생이 불완전한 재배열의 반응을 나타냈다. 분할의 기본 개념이 있고 원을 분할하는 단위를 부채꼴로 선택한 34명 중 19명만이 재배열에 성공하였음을 확인할 수 있었다(<표 Ⅳ-3> 참조). 재배열에 성공한 19명 중에서 집단 A의 10명은 분할 가능한 학생의 66.7%에 해당하고 집단 B의 9명은 분할 가능한 47.3%에 해당하는 비율이다. 두 집단에서 나타나는 재배열 가능 여부에 관한 차이는 집단 A의 학생들이 최근에 교재연구를 이수했기 때문으로 추측할 수 있다.

특히 원을 부채꼴로 분할하여 재배열한 학생들 중 반지름을 이용하여 원을 분할한 2명의 학생을 제외하면 대부분이 지름을 이용하여 원을 분할하였다. 그런데 지름으로 원을 분할한 학생들 중 부채꼴의 짝을 맞추지 않고 배열한 학생들이 있었다. 이러한 경우를 불완전한 재배열로 판단하였는데 34명 중 약 29.4%에 해당하는 10명의 사례가 있었음을 확인하였다([그림 Ⅳ-4] 참조]. 이 학생들의 경우에는 Baturo & Nason(1996)가 말한 구체적 지식, 즉 자르고 붙이기를 이용하여 다른 형태로 변형함으로써 도형의 넓이의 보존, 등적변형을 하였다고 판단되지만 직사각형 모양으로의 재배열에 성공하였다고는 할 수 없다. 직사각형 모양으로 재배열하기 위해서는 부채꼴로 등분할 된 조각이 짝수 개일 때 가능하기 때문이다. 따라서 완전하지 못한 재배열 전략을 사용한 학생들의 경우 보존 개념이 미흡한 상태라 할 수 있다.

5. 배열구조

배열구조는 문항 4-1을 통해 분석하였고 문항 4-1은 원을 적당히 나누어 재배열한 직사각형 모양의 배열구조를 파악하는 문항이다. 배열구조의

<표 Ⅳ-4> 재배열 가능한 29명에 대한 배열구조의 반응

집단 \ 구분	재배열	옳은 반응	오답	무응답	계
A(14/24)	성공(10)	9	1	0	10
	불완전(4)	0	4	0	4
B(15/29)	성공(9)	5	3	1	9
	불완전(6)	2	3	1	6
계		16	11	2	29

이해는 재배열에 성공한 학생과 불완전한 재배열을 나타낸 학생 29명을 대상으로 분석하였다. A집단 14명의 학생에서 재배열에 성공한 10명의 학생 중 1명의 학생과 불완전한 재배열을 나타낸 4명의 학생이 배열구조를 파악하지 못하였다. B집단 15명에서 재배열에 성공한 학생 4명과 불완전한 재배열을 나타낸 3명의 학생이 배열구조를 파악하지 못하였다(<표 Ⅳ-4> 참조). 배열구조를 옳게 반응한 학생들은 직사각형 모양의 가로를 원주의 반, 세로를 반지름이라 기술했다.

특이한 사례로 재배열에 성공하고 배열구조를 바르게 답하지 못한 A14 학생과 불완전한 재배열을 나타내고 배열구조를 바르게 답한 B22 학생과 B19 학생을 꼽을 수 있다. 학생들의 반응으로부터 재배열에 성공 여부가 배열구조를 파악하는데 결정적인 요인이라고 단언할 수는 없지만, 중요한 요인으로 작용하고 있다고 판단할 수 있을 것이다. 즉 재배열 가능이 배열구조의 이해를 보장하지는 않지만 불완전한 재배열은 바른 배열구조를 파악하는데 장애가 된다는 것을 알 수 있다.

6. 어림

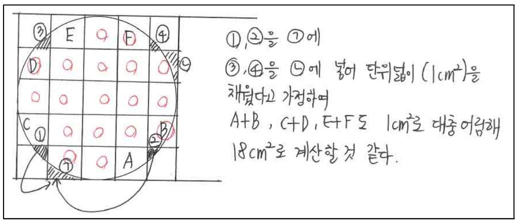
문항 2-1은 교과서에 제시된 원의 외접, 내접 정사각형과 비교하여 원의 넓이를 어림하는 활동을, 문항 3-1은 정사각형 모양의 단위넓이를 이용하여 원의 넓이를 어림하는 활동을 토대로 개발된 문항이다. 두 문항을 통해 곡선에 의해 발생하는 오차에 대한 인식과 오차 처리 전략의 유형을 살펴보았다. 문항 2-1의 반응에서 어림을 처리하거나 언급한 학생은 35명, 오차를 무시하거나 인식하지 못한 것으로 판단되는 학생 4명, 설명을 해석할 수 없거나 부적절한 풀이를 포함하는 학생 1명, 무응답 13명이 확인되었다. 문항 3-1의 반응에서는 어림을 처리하거나 언급한 학생 10명, 오차를 무시하거나 인식하지 못한 것으로 판단되는 학생 30명, 풀이 해석이 불가능하거

<표 Ⅳ-5> 어림에 대한 예비교사 53명의 문항 2-1, 3-1에 대한 반응 유형

반응 \ 문항/빈도수	2-1		3-1		전체	
	A(24)	B(29)	A(24)	B(29)	2-1	3-1
오차 처리 및 언급	16	19	4	6	35	10
오차 무시(무지)	1	3	13	17	4	30
해석불가능 및 부적절	0	1	4	5	1	9
무반응	7	6	3	1	13	4
합계	24	29	24	29	53	53

나 부적절한 학생 9명, 무응답 4명으로 확인되었다. 오차를 인식하여 처리하는 상황은 집단 간의 차이보다 문항간의 차이가 두드러지게 나타났다.

[그림 Ⅳ-5]의 사례는 단위넓이로 온전하게 채울 수 없는 원의 경계 부분의 넓이를 근사적으로 처리하고 있는 경우이다. 이 학생은 경계 부분에 있는 원 내부의 두 부분을 합성한 후(①+② 또는 ③+④), 그 크기가 대략적으로 비슷한 원 외부의 부분(㉠ 또는 ㉡)을 찾아내어 다시 원 내부의 부분과 합성하는 방식으로 정사각형 한 개를 만들고 있다. 물론 이 과정에서 어림 전략이 사용되고 있다.

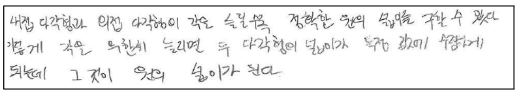


[그림 Ⅳ-5] 단위넓이를 이용하여 원의 넓이를 어림한 반응(B2의 사례)

예비교사들의 어림에 대한 이해정도가 낮게 조사된 것은 열린 질문 형태로 문항을 제시했기 때문이라고 판단된다. 현 교과서에서 문항 2-1과 3-1은 어림 활동을 이미 전제한 상태로 제시되고 있다. 이러한 제시방식은 학생들로 하여금 어림의 필요성을 학생 스스로 느끼고 그 전략을 찾아보게 하는 것이 아니라, 단지 단위넓이의 개수를 센다거나 외접·내접 정사각형의 넓이를 계산하도록 하는 수동적인 방식이다. 반면에 예비교사들에게 제시한 문항은 오차에 대해서 인식하고 있는지와 오차 처리의 필요성과 전략을 이해하고 발견할 수 있는지를 파악할 수 있는 문항이다. 결과적으로 상당수의 예비교사들은 곡선이라는 원 고유의 속성에 의해 필연적으로 발생하는 오차 부분을 처리하는 적절한 해결전략을 세우지 못하였다. 한편 예비교사들은 문항 3-1보다 문항 2-1에서 더 높은 성공률을 보였다. 이는 정다각형의 변의 개수를 늘려 원과의 오차를 줄인다는 아이디어가 기존 단위보다 더 작은 단위로 분할하여 단위넓이를 센다는 아이디어보다 더 친숙하기 때문으로 추측할 수 있다. 특히 1㎠만이 단위넓이라는 고정된 단위개념을 가지고 있는 학생들에게 단위의 세분화 전략은 접근하기가 더 어려웠을 것이라고 판단된다.

7. 실무한

실무한의 이해는 문항 2-2, 2-3, 3-2, 3-3, 4-2, 4-3를 통해 분석하였으며, 특히 문항 2-2, 3-2, 4-2에 대한 반응으로 '정확한 원의 넓이를 구할 수 있다'를 선택하고 그 이유를 바르게 진술한 경우와 '정확하지 않다'를 선택하고 문항 2-3, 3-3, 4-3에서 정확하게 구할 수 있는 방법을 바르게 진술한 반응에 중점을 두어 분석하였다. 문항 2-2의 반응에서 외접/내접 다각형을 이용하여 원의 넓이를 정확하게 구할 수 있다는 학생은 7명이었다. 이 학생들 중 3명(A3, A4, B11)은 '변의 수를 무한히 증가시키면 원의 넓이로 수렴한다'고 답했다([그림 Ⅳ-6] 참조).



[그림 Ⅳ-6] 실무한을 이해한 것으로 판단되는 반응(A4의 사례)

그 외에 '원의 넓이를 정확하게 구할 수 없다'를 선택한 27명의 학생 중에서 9명의 학생이 문항 2-3에 대한 반응으로 '정다각형의 변을 무한으로 하면 원으로 수렴한다' 또는 '변의 수를 계속 늘리면 내접 다각형과 외접 다각형이 원과 같게 된다'고 답했다. 이상의 12명에 대한 반응

은 원의 넓이에 대한 역사 발생적 분석에서 살펴본 Eudoxus로부터 시작되어 Archimedes로 이어진 실진법의 아이디어와 유사하며, 더 나아가 극한값으로서 원의 넓이를 고려할 수 있다는 점에서 실무한을 인식하고 있다고 판단할 수 있다. 한편 많은 학생들이 원에 접하는 다각형으로는 원의 넓이를 정확히 구할 수 없다고 판단한 이유로 오차가 항상 존재한다는 것이었다([그림 Ⅳ-7 참조]). 기타의 사례로 '사람이 아닌 컴퓨터가 있어야 정확하게 계산할 수 있다'고 답한 학생이 있었다.

꼭들이 맞는다고 해도 정'다각형'이므로 각이 있다. 때문에 각이 없는 원과는 그 틈에서 작은 오차가 발견될 수 있기 때문이다.

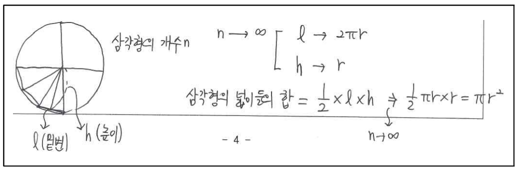
[그림Ⅳ-7] 실무한을 이해하지 못하는 것으로 판단되는 반응(B10의 사례)

문항 3-2의 반응에서 4명(B3, B5, B8, B10)의 학생이 단위넓이를 이용하여 원의 넓이를 정확히 구할 수 있다고 답했지만, 이들 중 그 이유를 실무한의 관점을 포함하여 설명한 학생은 없었다. 또한 문항 3-3에서도 소수의 학생들이 원의 넓이 공식을 이용하거나 적분 또는 컴퓨터를 이용한다면 정확한 원의 넓이를 구할 수 있다고 답하였을 뿐, 실무한의 관점은 나타나지 않았다고 볼 수 있다.

문항 4-2는 부채꼴로 재배열된 직사각형 모양으로 원의 넓이를 정확하게 구할 수 있는가를 판단하는 문항이다. 이 문항의 반응으로는 부채꼴의 개수를 '무수히', '무한', '한 없이', '무한대'로 하면 원이 직사각형으로 등적변형 된다고 답한 학생이 11명(A3, A4, A6, A8, A9, A13, A18, A19, B8, B12, B28)이었다([그림 Ⅳ-8] 참조). 그리고 문항 4-3에서 삼각형의 개수를 무한대로 보내고 삼각형의 합으로 원의 넓이를 해결한 학생도 1명(B2) 있었다([그림 Ⅳ-9] 참조).

원을 무한히 등분할하여 붙이면 직사각형 모양과 같아진다. 직사각형의 넓이를 통해 원의 넓이를 구할 수 있다.

[그림 Ⅳ-8] 무한개의 부채꼴로 원의 넓이를 고려한 반응(A4의 사례)



[그림 Ⅳ-9] 무한개의 삼각형으로 원의 넓이를 고려한 반응(B2의 사례)

문항 2-2, 2-3, 3-2, 3-3, 4-2, 4-3의 반응을 분석해 본 결과, 원을 부채꼴로 재배열하여 원의 넓이를 탐구하는 4번 문항과 내접다각형과 외접다각형을 이용하여 원의 넓이를 탐구하는 2번 문항에서 각각 12명의 학생이 실무한의 관점에서 원을 고려하였으며, 단위넓이를 이용하여 원의 넓이를 탐구하는 3번 문항에서는 재배열을 통한 전략을 제외하면 대부분의 학생들이 실무한의 관점으로 확장을 시도조차 하지 않은 것을 확인할 수 있었다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 초등예비교사들의 원의 넓이에 대한 내용지식을 조사하였다. 이를 위해 원의 넓이에 대한 역사 발생적 분석과 교육과정 및 교과서 분석 그리고 선행연구들에 대한 분석을 종합적으로 고려하여 원의 넓이를 가르치기 위해 필요한 내용지식으로 분할, 단위반복, 재배열, 배열구조라는 평면도형의 넓이 측정의 기본 개념뿐 아니라 곡선이라는 원 고유의 속성을 반영한 어림과 실무한 개념을 추출하였다. 추가로 원의

넓이의 의미를 포함하여 검사지를 개발하고, 이를 토대로 조사를 실시하여 예비교사 53명의 원의 넓이에 관한 기본 개념에 대한 반응을 분석하였다. 본 연구에서 얻은 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 원의 넓이의 의미에 대한 이해에서는 교재연구 강좌 이수 여부에 따라 반응 유형의 차이가 나타났다. 실제로 교재연구 강좌를 이수한 A집단은 단위의 개수를 사용하여 원의 넓이의 의미를 기술한 비율이 높았으며, 이수하지 않은 집단 B는 원의 넓이 공식이나 크기, 양 등에 반응이 집중되는 양상을 보였다. 특히 원의 넓이를 대수적 공식과 동일시한 11명의 사례는 학교수학의 개인적 경험이 예비교사들의 내용지식에 영향을 미치고 있음을 보여준다.

둘째, 예비교사들은 분할, 단위반복, 보존, 배열구조라는 평면도형의 넓이 측정의 기본 개념에 대해서 불완전한 이해를 보였다. 물론 교재연구 강좌를 이수한 집단의 이해 정도가 높았으나, 그 차이가 두드러지지는 않았다. 두 집단 모두 분할과 단위반복에 대한 개념이 다른 개념에 비해 상대적으로 잘 형성된 것으로 조사되었다. 그러나 분할에 성공한 34명의 학생 중에서 19명의 학생만이 재배열에 성공하고, 그 중 16명만이 배열 구조를 옳게 파악한 것으로 보아, 재배열과 배열구조 개념에 대한 이해가 좀 더 미흡한 것으로 판단할 수 있다.

셋째, 예비교사들은 곡선이라는 원 고유의 속성을 반영한 어림과 실무한 개념에 대한 내용지식이 많이 부족한 것으로 조사되었다. 어림 문항에서 10명(18.8%)만이 오차를 인식하였고 실무한의 관점에서 원의 넓이를 인식한 학생이 12명(22.6%)에 불과한 것으로 판단할 때, 원의 넓이 측정의 고유 개념인 어림과 실무한에 대한 예비교사들의 내용지식이 취약함을 알 수 있다. 특히 77.3%이상이 실무한을 수용하지 않았으며, 그 이유로 정다각형의 변의 수를 무한대로 증가시켜도 원과 다각형 사이에는 오차가 존재한다거나, 부채꼴을 한없이 분할한다 해도 직사각형 모양이 될 뿐 직사각형은 아니라고 답했다. 물론 초등학생들이 실무한의 관점을 수용하는 것은 쉽지 않은 일이다. 그러나 원을 직사각형으로 등적변형하는 과정을 지도해야 하는 예비교사들에게 실무한은 필수적인 수학내용지식이다. 그럼에도 불구하고 상당수의 예비교사들조차도 실무한의 수용에 어려움을 겪고 있음을 확인한 것은 이 내용을 초등학교 교과서에서 어떻게 다루는 것이 타당한 것인가에 대한 사려 깊은 논의가 필요함을 의미한다.

본 연구의 결과는 초등예비교사 양성 프로그램에서 원의 넓이에 대한 지도에 대한 시사점을 제공한다. 교재연구 강좌를 이수한 집단이 이수하지 않은 집단에 비해 원의 넓이에 대한 내용지식이 잘 형성된 것은 사실이나 그 차이가 크지 않았다는 점은 이 주제에 대한 예비교사들의 학습경험이 충분치 못함을 의미한다. 실제로 강의 교재를 비롯한 문헌들에서 원의 넓이 측정에 관한 내용이 다른 평면도형의 넓이 측정에 관한 내용에 비해 상대적으로 적음을 확인할 수 있다. 예비교사들이 원의 넓이를 가르치기 위한 적절한 내용지식을 습득하기 위해서는 수학과 교재연구 및 지도법 시간에 원의 넓이 측정의 기본 개념들을 명시적으로 다루는 것이 필요하다. 본 연구를 통해 얻은 시사점을 논의해보면 다음과 같다.

첫째, 원의 넓이를 측정의 관점에서 이해하도록 지도할 필요가 있다. 원의 넓이를 원을 덮을 수 있는 단위의 개수로 이해하지 못한 학생들은 넓이를 크기나 면적과 같이 유사한 의미로 재진술하거나 원의 넓이 공식을 언급하는 등 적절한 답을 하지 못하였다. 이러한 결과는 수학적 지식의 개념적인 이해보다 알고리즘에 의존함으로써

형식적 고착이 형성되고 넓이 개념의 본질이 간과된 사례라 할 수 있다. 따라서 원의 넓이 개념을 바르게 이해할 수 있도록 하기 위해서는 측정의 본질이 잘 드러나도록 원의 넓이를 지도할 필요가 있다.

둘째, 예비교사들의 단위 개념에 대한 불완전한 이해를 보완할 수 있는 방안을 모색해야 한다. 대부분의 학생들에게 단위는 고정된 것으로 인식되고 있었으며, 이들에게 넓이의 고정단위는 1㎠였다. 이는 우리나라 교과서의 단위넓이 정의 방식에 익숙해져 있기 때문으로 보인다. 그러나 상황에 따라 좀 더 효율적인 단위를 선택할 수 있다는 구체적인 경험을 제공하는 것이 필요하다. 이와 관련하여 0.25㎠의 단위넓이를 사용하여 어림한 2차와 4차 교과서는 좋은 사례가 될 수 있다. 특히 어림전략이 필수적인 원의 넓이의 경우에는 세분화한 단위를 사용하여 보다 정밀한 근삿값을 구할 수 있다는 사실을 인식하는 것이 중요하다.

셋째, 예비교사들에게 원을 직접 분할하고 재배열하는 경험을 제공할 필요가 있다. 정사각형 모양의 단위넓이로 이미 분할되어 제시되는 방식에 익숙한 예비교사들은 직접 원을 분할하는 과제에서 실패하는 모습을 보였다. 또한 부채꼴 모양으로 분할하는 과제에서도 예비교사들은 등분할 조건과 짝수개 분할 조건을 무시한다거나 재배열하는 과정에서 짝을 맞추지 못하는 등의 분할과 재배열에 대한 부족한 이해를 드러내었다. 따라서 분할과 재배열의 과정을 직접 그려보게 함으로써 평면도형의 넓이의 기본 개념의 이해를 도모해야 할 것이다.

넷째, 예비교사들로 하여금 좀 더 정밀한 원의 넓이의 측정값을 얻도록 격려해야 한다. 즉 근삿값으로서의 원이 넓이에 대한 오차를 줄이는 전략을 모색할 기회를 제공해야 한다. 초등학교에서 다루는 다른 평면도형과 비교하여, 원은 좀 더 큰 오차가 발생할 수밖에 없는 구조적 특성을 가진다. 이 때 발생한 오차를 인식하지 못하거나 무시하는 것이 아니라, 이 오차를 줄여 나가는 방안을 고민하는 과정에서 새로운 수학적 발견의 경험을 할 수 있다. 기존 단위를 보다 작은 단위로 세분화하는 방안, 내접·외접 다각형의 변의 개수를 늘려가는 방안, 부채꼴을 더욱 세밀하게 분할하는 방안을 생각하여 원과의 오차를 줄여나가으로써 좀 더 정밀한 원 넓이의 근삿값을 얻을 수 있다는 것과 결국은 원의 넓이에 수렴하는 극한값을 구할 수 있다는 사실을 이해하는 것이 필요하다.

다섯째, 측정 상황에서 컴퓨터가 유한만을 다룰 수 있다는 공학의 제한점을 인식하도록 해야 한다. 일부 예비교사들은 컴퓨터를 이용하여 정다각형의 변의 수를 증가시키면 원과 같은 모양이 나타난다고 답하거나 무수히 얇은 부채꼴로 분할하면 직사각형으로 재배열가능하다고 답함으로써 컴퓨터의 한계를 인식하지 못하는 모습을 보여주었다. 이러한 결과는 예비교사교육에서 공학 사용에 관한 주의 깊은 지도가 요구된다는 것을 보여준다.

앞으로 원의 넓이에 대한 교사지식 차원뿐 아니라 초등학생들의 이해 정도를 살펴보는 연구가 이루어질 필요가 있으며, 초등수학의 다양한 내용에 대한 예비교사들의 수학내용지식을 살펴보는 연구가 요구된다.

참고문헌

교육과학기술부(2011). **수학 6-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2012). 교육과학기술부 고시 제 2011-361호(별책 8) **수학과 교육과정**.

교육부(1996). **수학 6-1**. 서울: 국정교과서주식회사.

교육부(2000). **초·중·고등학교 수학과 교육과정**

기준(1946~1997).
교육인적자원부(2001). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서주식회사.
교육인적자원부(2007). 교육인적자원부 고시 제 2007-79호(별책 8) **수학과 교육과정**.
김해규(2012). 수와 연산 영역에 대한 초등 예비교사들의 수학을 가르치는데 필요한 지식(MKT). **수학교육논문집, 26**(1), 71-85.
김현미, 류희수(2012). 분수와 소수 관련 초등 예비교사들의 PCK 실태 분석. **교과교육학연구, 16**(1), 197-229.
문교부(1955). **산수 6-1**. 서울: 대한문교서적주식회사.
문교부(1965). **산수 5-1**. 서울: 국정교과서주식회사.
문교부(1979). **산수 5-2**. 서울: 국정교과서주식회사.
문교부(1983). **산수 6-1**. 서울: 국정교과서주식회사.
문교부(1989). **산수 6-1**. 서울: 국정교과서주식회사.
송근영, 방정숙(2013a). 소수연산에 관한 예비초등교사의 교수내용지식 분석. **한국초등수학교육학회지, 12**(1), 1-25.
송근영, 방정숙(2013b). 수학과 교사지식에 관한 국내 연구의 동향 분석. **한국학교수학회논문집, 16**(1). 265-287.
조완영(2011). 중등 수학교교사의 수학내용 지식. **학교수학, 13**(2), 347-364.
조완영(2012). 예비교사의 미분영역에 관한 내용지식의 분석. **학교수학, 14**(2), 233-253.
정동권(1998). **교사를 위한 수학사개론**, 인천교육대학교(수학문화사 강좌 자체 교재).
Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching*, Vol. 2 (pp. 1-48). Greenwich, CT: JAI Press.
Ball, D. L., & McDiarmid, L. (1990). The subject-matter preparation of teachers. In W. R. Houston, & J. Sikula (Eds.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 437-449). NY: Macmillan.
Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.
Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235-268.
Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). **수학의 역사(하)**. (양영오·조윤동, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1968년 출판).
Burke, M. (2003). Measuring the unmeasurable: Using technology to study the irrational. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 122-142). Reston, VA: NCTM.
Eves, H. (2005). **수학사**. (이우영·신항균 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1953년 출판).
Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.
Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 100-121). Reston, VA: NCTM.
Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning

about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: LEA.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: LEA.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Principles and standards for school mathematics. Reston*, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. 서울: 경문사.

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C.(2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 144-167.

Outhred, L., Mitchelmore, D., PcPhail, D., & Could, P. (2003). Count me into measurement: A program for the early elementary school. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 yearbook* (pp. 81-99). Reston, VA: NCTM.

Reynolds, A. & Wheatley, G. H. (1996). Elementary students construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education 27*, 564-581.

Shulmann, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research, 15*, pp.4-14.

Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics vol. 2 special topics of elementary mathematics*, NY: Dover Publications.

Stephan, M., & Clements, D.(2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp.3-16). Reston, VA: NCTM.

An Analysis of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge about the Area of a Circle

Choi, Eun Ah (Yeongdeungpo Girls' High School)
Kang, Hyangim (Gongju National University of Education)

The purpose of this study is to investigate mathematics content knowledge(MCK) of pre-service teachers about the area of a circle. 53 pre-service teachers were asked to perform four tasks based on the central ideas of measurement for the area of a circle.

The results of this study are as follows. First, pre-service teachers had some difficulty in describing the meaning of the area of a circle. Quite a few of them didn't recognize the necessity of counting the number of area units. Secondly, pre-service teachers had insufficient content knowledge about the central ideas of measurement for the area of a circle such as partitioning, unit iteration, rearranging, structuring an array and approximation.

Lastly, few pre-service teachers understood the concept of actual infinity. Most students regarded the rectangle as the figure having the approximation error instead of the limitation from rearranging the parts of a circle.

* Key Words : the area of a circle(원의 넓이), pre-service teachers(예비교사), MCK(mathematical content knowledge: 수학 내용 지식), central ideas of measurement(측정의 기본 개념)

논문접수 : 2014. 11. 10
논문수정 : 2014. 11. 30
심사완료 : 2014. 12. 12