대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 4, 803 ~ 825. Dec 2014

일반화 수단으로서 매개변수의 인식과 오류에 대한 연구
-중학교 2학년 학생들과 예비교사들의 인식과 오류를 중심으로-

지 영 명* · 유 연 주**

대수학습의 초기부터 사용되고 있는 문자기호 중 한 문자내 부정성(변수)과 고정성(상수)을 동시에 내포하고 있는 매개변수개념은 그 모호성 때문에 소극적· 암묵적으로 다루어지고 있다. 본 연구의 목적은 우리나라 대수 학습에서 매개변수에 대한 학생들의 인식 및 오류 양상을 살펴봄으로써 매개변수개념의 지도에 대한 시사점을 살펴보고자한다. 이를 위해, 학생들이 매개변수에 대해 어떻게 인식하고 있는지를 초보적인 학습자와 예비교사들을 대상으로 설문지 조사로부터 수집된 자료를 분석함으로써 그 결과를 제시하고, 그 결과에 대한 논점을 바탕으로 현 대수교육에 시사점을 제공하고자 하였다. 실제로, 본 연구자는 A중학교 2학년 한 교실의 35명의 학생들과 B대학교 학부과정에 있는 예비교사 73명을 대상으로 문자기호에 관한 동일한 설문지를 실시하여 그 결과에 대해 혼합적 방법으로 분석하였다. 두 집단의 문자기호에 관한 인식양상을 분석한 결과, 매개변수개념의 이해에 관한 여러 가지 어려움이 확인되었다. 특히, 문자기호의 인식의 동질성에 관한 통계적 처리결과 두 집단 간의 문자기호의 인식양상은 뚜렷하게 변화되지 않는다는 것이 확인되었다.

Ⅰ. 서 론

학교대수에서 문자기호(literal symbols)는 맥락적 상황을 모델링하기 위해 어떤 수를 대신하는 자리(slots)로 간주하여 그 상황의 관계와 구조를 표현하는 수단으로 도입된다. 이후, 문자기호는 다양한 학습과정을 거치면서 미지수, 변수, 상수 등으로 명명되어 사용된다.

여러 선행연구자들은 다양한 맥락에 따라 다른 의미로 사용되고 있는 문자기호에 대해 학생들이 가지고 있는 어려움과 오류에 관한 연구를 실시해 왔다(Hashemi et al., 2011; Küchemann, 1981; MacGregor & Stacey, 1997; Phillip, 1992; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Usiskin, 1988; 김남희, 1997). Philip(1992)은 학교대수에서 사용되는 문자기호는 구문론적으로는 일관적인데 반해, 의미론적으로 그 다중성 때문에 학생들에게 어려움으로 작용하고 있다고 주장했다. 특히, 최근 여러 가지 문자기호 중 그 상징에 대한 의미의 모호성(ambiguity)을 특징으로 하는 매개변수(parameters)에 대해 학생들의 이해의 어려움 및 이에 대한 학습조건에 관한 여러 연구가 보고된 바있다(Bardini, Radford & Sabena, 2005; Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003; Furinghetti & Paola, 1994; Hashemi et al., 2011; Martinez & Castro Superfine 2012; Sfard, 1991, 1995; Ursini & Trigueros, 2004). 다양한 연구자들에 의해 연구되

* 서울대학교 대학원, ango7422@snu.ac.kr (제1 저자)
** 서울대학교, yyoo@snu.ac.kr (교신저자)

어온 매개변수는 대부분 동형의 구조와 관계를 갖는 상황을 일반화하기 위한 수단으로 사용되고 있고, 이 개념은 고등 대수적 추론과 함수개념의 학습을 위해 중요한 개념으로 최근 부각되고 있다. 우리나라 교육과정에서도 '매개변수'라는 용어는 기본적으로 학습해야할 <용어와 기호>로 명시되어 있지만, 대부분의 국외 연구자들이 사용하고 있는 그 용법과 달리 곡선이나 곡면을 표현하기 위한 수단으로 도입되고 있다. 게다가, 우리나라 교육과정에서는 일반화 수단으로서의 매개변수의 역할을 하는 문자기호를 '상수(常數, constant)'라는 용어와 그 용어로부터 수반되는 의미로 지도되고 있다.

일반적으로 수학에서 상수는 "그 값이 변하지 않는 불변량[1]" 혹은 "변수에 대하여 항상 일정한 값을 취하는 양[2]"으로 사용되고 있고, 이는 상수라는 용어가 기지수를 대신하는 문자기호를 의미하며 그 상징에 대한 변이성을 감추고 있다. 이에 대해, 국내 연구자들은 현재 우리나라 수학과 교육과정에서 매개변수에 대한 문자기호를 '상수'로 대체하여 그 의미를 제한적으로 사용하고 있다고 지적했다(김남희, 1997, 2004; 우정호, 1998). 우정호(1998)는 매개변수를 아직 정해지지 않은 상수를 일반적으로 나타내는 부정소로서의 변수로 취급해야 하며 현재의 '상수'라는 용어의 사용에 대한 부적절함을 지적하였다(p.253). 김남희(2004)는 원어 'parameters'를 번역하여 사용하고 있는 '매개변수'라는 용어가 고등학교 상위학년의 '기하와 벡터'영역에서 처음 등장하며, 그 용법은 오직 곡선과 곡면을 표현하기 위한 수단으로 제한하여 다루고 있다는 것을 언급하면서, 이 기본적인 용어에 대해 교육과정상의 재정립의 필요성을 주장했다. 또한, 김남희(1997)는 우리나라 수학과 교육과정에 기초하여 편찬된 교과서에서 대수를 지도하는 과정이 대부분 형식적이고 구조적인 접근을 취하고 있어 학생들이 변수에 적절한 의미를 연결시켜나가는 경험을 제공하지 못하고 있다고 주장했다. 실제로, 학교대수에서 문자기호와 대수식은 수치적인 관계를 갖는 맥락을 모델링하여 상징으로 나타내는 활동으로부터 도입된 이후, 대수식의 일반적인 형태를 표현하기 위해 몇 가지의 유사한 형태의 구체적인 대수식의 예시로부터 '상수'라는 문자기호를 이용하여 일반적인 식을 표현하게 된다. 이와 같은 문자기호의 도입은 그 기호에 대해 어떤 의미도 연결할 수 없는 자리지기(placeholder)로 도입되고 있고, 이후 다양한 문제해결을 바탕으로 그 의미를 깨달아 가기를 기대하고 있는 것처럼 보인다. Sfard(1995)는 형식적인 기호조작을 강조하는 전통적인 대수 지도방식을 구조적인 접근방식이라고 언급하고, 이러한 접근방식은 학생들이 문자기호에 대해 의미 있는 이해로 나아가지 못하게 한다고 주장했다. 또한, 학교대수에서 구조적인 접근방식을 통해 지도되고 있더라도, 학생들이 해석하는 문자기호의 특징은 조작적이라는 것이 여러 선행연구물에서 보고되어왔다(김남희, 1997; Sfard, 1991, 1995, 2008; Sfard & Linchevski, 1994; Tall, 2013). 이에 대해 Sfard(1995)는 현재의 대수지도방식은 학생들의 자연스러운 성향을 무시하는 방식으로 지도되고 있다고 지적하면서 문자기호의 의미 있는 이해를 위해 조작적인 방식으로 도입할 필요성을 언급하였다.

우리나라 초기 대수 학습에서부터 사용되고 있는 문자기호 중 한 문자 내에 부정성(변수)과 고정성(상수)을 동시에 내포하고 있는 매개변수는 그 모호성(ambiguity) 때문에 그 용어와 의미가 소극적 · 암묵적으로 다루어지고 있다(김남희,

1) http://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%88%98%ED%95%99_%EC%83%81%EC%88%98
2) http://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000700498

2004). 이에 대해 본 연구의 목적은 우리나라 대수 학습에서 매개변수에 대한 학생들의 인식의 양상을 살펴봄으로써 매개변수개념의 교수에 관한 시사점을 살펴보고자 한다. 이를 위해 먼저, 매개변수에 대한 교과서 및 정의 분석을 통해 현재 우리나라 교과서에서 매개변수를 다루는 방식, 그리고 그 개념에 대한 정의로부터 이끌어 낼 수 있는 본질적인 요소를 살펴본다. 그리고 실증적으로 학생들이 매개변수를 인식하는 양상은 어떤지를 살펴보고자 한다. 또한, 매개변수에 대한 초기 학습자의 인식양상이 고등적인 학습을 거친 이후에 유의미하게 변화하는지를 살펴보고자 한다. 실제로, 학생들이 이 개념에 대해 어떻게 인식하고 있는지를 초보적인 학습자와 예비교사들을 대상으로 설문조사를 통해 수집된 자료를 분석함으로써 그 결과에 대한 논점을 바탕으로 현 대수교육에 시사점을 도출하고자 하였다. 이에 본 연구자는 대전 지역의 중학교 2학년 한 교실의 35명의 학생들과 A대학교 학부과정에 있는 예비교사 73명을 대상으로 문자기호에 관한 동일한 설문조사를 실시하여 그 결과에 대해 혼합적으로 분석하는 연구를 실시하였다.

Ⅱ. 문헌검토

이 장에서는 여러 문헌을 바탕으로 매개변수에 대한 교과서 및 정의 분석을 통해 현재 우리나라 교과서에서 매개변수를 다루는 방식과 그 개념에 대한 정의로부터 이끌어 낼 수 있는 본질적인 요소를 살펴본다. 그래서 먼저, 매개변수 개념에 대한 본질적인 요소를 추출하기 위해 여러 선행연구자들이 사용하고 있는 매개변수의 정의로부터 개념적 분석을 시도하였다. 다음으로 수학적 개념에 접근하는 상보적인 두 가지 접근 방식에 관한 문헌분석을 실시하였고, 마지막으로 현재 학교수학에서 실제로 지도되고 있는 문자기호 지도방식에 대한 교과서 분석을 통해 매개변수개념의 지도의 실제에 대해 고찰해보고자 하였다.

1. 매개변수

여러 선행연구자들에게 의하면, 매개변수는 “이차관계(second-relation)를 일반화하는 상징” (Furinghetti & Paola 1994; Küchemann, 1981) 또는 “이차관계의 함수(second-order function)를 표현하는 수단”(Bloedy-Vinner, 1994, 2001; Drijvers, 2003)이라고 명시하고 있다. 예를 들어, 현재 국내의 중학교 1학년 교과서에서 제시되는 일반적인 정비례함수 $y=kx(k\neq 0)$에 대한 화살표 표현은 $x\rightarrow kx$ 와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 x는 독립변수이고, kx는 독립변수 x에 대응되는 함수값이다. 일반적으로, 중학교 수준에서 다루어지는 함수에서 함수값은 수로 대응되므로, k는 구체적인 수와 동일하게 작용해야한다는 것을 강조하기 위해 상수라는 용어를 사용하고 있는 것이다. 이러한 해석은 $y=kx$라는 식을 수에서 수로 대응되는 일반적인 관계를 나타내는 일차관계의 함수로 다루어지고 있는 것이다. 한편, 일차관계의 함수 $x\rightarrow kx$ 자체를 하나의 대상으로 취급하여 다음 [그림Ⅱ-1]와 같은 화살표 표현은 문자 상징 k에 대한 다른 해석을 가능하게 한다.

$$k\rightarrow(\,x\rightarrow kx)$$

[그림 Ⅱ-1] 이차관계의 함수

위의 [그림Ⅱ-1]에서 이차관계의 함수를 표현하는 문자기호 k(왼쪽에 있는 k)는 일차관계의 함수를 표현하는 문자기호 k(오른쪽에 있는 k)

와 그 역할이 완전히 달라진다. 이차관계의 함수를 표현하는 문자기호 k는 문자기호 x와 마찬가지로 독립변수로 작용하고, 그에 대응하는 함수값은 수가 아닌 구체적인 함수로 결정된다. 이때 문자기호 x는 동적의미의 변수라기보다는 응고된(solidified) 대상으로 여겨져야 한다. 반대로, 문자기호 x가 독립변수로 작용하게 되는 경우 k는 상수로 작용하는 것이다. 이와 같이, 문자기호 k의 변이성은 x의 변이성과 완전히 독립적으로 작용할 수 있고, 두 문자기호 사이에 역동적인 역할 변화가 일어날 수 있다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 한 문자기호 k에 대해 한편으로, 일차관계의 함수에서의 고정된 수로, 다른 한편으로, 이차관계의 함수에서의 독립변수로 해석될 수 있다. 이에 대해, Sfard(1991)의 용어를 사용하면, 과정(독립변수)이면서 동시에 대상(고정된 수)으로서의 쌍대적인 개념이 서로 상보적으로 공존하고 있다고 말할 수 있다.

이와 같이 겉보기에는 양립할 수 없을 것 같은 두 성질을 갖는 매개변수는 학생들에게 인지적인 상충을 일으키기에 충분해 보인다. 이것은 Bardini, Radford & Sabena(2005)가 매개변수를 "아직 정해지지 않은 고정된 수"라고 규정하고 있는 데서도 찾아볼 수 있다. "아직 정해지지 않은"이라는 표현은 잠재적인 가능성으로서 부정(不定)을 의미하고, "고정된 수"라는 표현은 구체적인 수를 의미하는 것으로, 이러한 매개변수의 역설적인 두 가지 본질로 부터 인식론적 상충의 자연스러움을 설명하였다. 또한 그들은 이러한 매개변수개념의 이해는 다른 역할로 사용되는 여러 가지 문자기호와 상호작용하는 가운데 일어날 수 있다고 주장하였다. 또한, Bloedy-Vinner(2001)는 이러한 인지적인 상충을 해소할 만한 적절한 지도방법을 제시하였다. 그는 두 가지 논리 한정사인 전칭한정사와 존재한정사를 이용하여 이차관계의 일반화를 역동적으로 설명할 수 있다고 주장하였다. 즉, 예를 들어, 일반적인 정비례함수 $y = kx$에 대해, "임의의(전칭한정사) k 대입값에 대해 $y = kx$가 존재한다(존재한정사)"와 같은 순서화된 대입의 과정에 대해 이해할 수 있도록 지도함으로써, 인지적인 어려움에서 어느 정도 벗어날 수 있다고 주장하였다.

2. 과정-대상 쌍대적 개념

여러 선행연구자들은 수학을 한편으로는 조작, 과정, 계산, 절차, 알고리즘으로, 다른 한편으로는 대상, 개념, 구조, 관계로 대조시켰다 (Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1991, 1995; Sfard & Linchevskii, 1994; Tall, 2013). Sfard(1991)는 수학적 개념에 접근하는 방식의 두 가지 유형은 조작적(operational)인 접근방식과 구조적인 (structural) 접근방식이 있다고 주장하였다. 아래의 표<Ⅱ-1>는 Sfard(1991)가 기술한 조작적 개념과 구조적 개념에 대한 요약을 보여준다. 전자의 유형과 같은 접근방식을 기술하는 다른 표현으로 "수학적 개념을 과정(process)"으로 해석하는 것이다. 이는 수학적 개념을 실제적인 사물보다는 잠재적인 것으로 간주하고, 동적이고, 순차적이며, 또한 구체적이다. 후자의 유형과 같은 접근방식은 "수학적 개념을 대상(object)"으로 볼 수 있는 것으로 추상적인 실체를 실제적인 사물로서 즉, 특정한 시공간에 존재하는 정적인 구조로 생각할 수 있는 것이다. 또한, 한 번에 아이디어를 인지할 수 있는 능력과 그 세부 사항을 구체적으로 따져보지 않더라도 이를 하나의 총체로 인지할 수 있는 능력을 의미한다. 따라서 구조적인 접근방식은 정적이고, 순간적이며, 통합적이다.

Sfard(1991)는 동일한 수학적 개념을 해석하는 두 가지 유형은 매우 대조적이기 때문에 표면적으로는 양립할 수 없는 것처럼 보이지만, 실제로

<표 Ⅱ-1> 조작적 개념과 구조적 개념(Sfard, 1991, p.33)

	조작적 접근	구조적 접근
일반적인 특징	수학적 실체는 어떤 과정의 결과로 여겨지거나 과정 그자체로 식별된다	수학적 실체는 마치 실제적인 대상처럼 정적인 구조로 여겨진다
내적 표상	언어적 표현은 조작적인 접근을 지원한다	심상(mental image)은 구조적인 접근을 지원한다
개념 발달에서의 위치	개념 형성의 첫 번째 단계에서 발달	조작적 개념에서 진화
인지적 과정에서 역할	효과적인 문제해결과 학습과정에서 필요하지만 충분한 것은 아니다	모든 인지적 과정(학습, 문제해결)을 용이하게 한다

이들은 상보적이라고 주장했다. 이에 대해 Sfard(1995)는 수학적 개념을 과정이면서 동시에 대상으로서의 접근방식에 대해 과정-대상의 쌍대적 접근방식이라고 명명했다.

Tall(2013)은 어떤 상징에 대해 과정으로 바라보는 것에서 개념으로 바라보게 되는 사고의 전환을 조작적 추상화[3]에 해당된다고 언급했다. 예를 들어, $2x+6$과 같은 대수식은 값을 구하는 과정(어떤 수에 2배하고, 6을 더하라)으로, 또한 그 자체는 문제 해결을 위해 조작될 수 있는 사고 가능한 대수적 대상(혹은 개념)으로 해석될 수 있는데, 그는 이러한 과정에서 개념으로의 이행은 초심자들에게 자연스럽기 보다는 분명 학습되어야할 문제에 해당된다고 주장했다. 과정과 개념으로 동시에 작동되는 상징은 새로운 수학적 표현의 일부분이 되는데, Gray& Tall(1994)은 이러한 한 상징내에 과정(process)과 개념(concept)의 이중성을 강조하기 위해 '프로셉트(procept)'라는 새로운 용어를 조어했다.

3. 교과서 분석

3.1 학교대수의 구조적 접근

먼저, 우리나라 중학교 1학년 수학교과서『문자와 식』단원에서 도입되고 있는 문자기호와 대수식에 대해서 살펴본다. 아래[그림Ⅱ-2]은 현재 우리나라의 교과서에서 문자기호와 대수식이 실세계의 맥락과 수치적 관계를 모델링하는 것을 통해 도입되고 있다는 것을 보여준다.

학생들은 문자기호를 선택할 필요 없이 교과서에서 부여되고, 문자기호를 구해야 할 값(즉, 미지수)으로 다루기보다는 어떤 수가 주어졌다고 가정하고 맥락에 적절한 관계를 기술하면 된다. 따라서 학생들이 처음에 다루는 문자기호는 미지수(unkown number)라기 보다는 변수(variable)로서 작용한다. 이후 방정식은 대수식과는 다르지만 밀접하게 관련되어 있는 것으로 도입되고, 명제식으로서 간단한 예를 들어 소개된다. 이 일반적인 구조는 '문자 대신 수를 대입했을 때 명

3) Tall(2013)은 추상화에 대해 네 가지 유형으로 구분하였는데, 이는 Piaget가 제시한 경험적 추상화, 의사-경험적 추상화, 반영적 추상화에 플라토닉(platonic) 추상화를 추가시킨 것이다. 플라토닉 추상화는 물리적 대상의 성질에 대한 경험적 추상화를 일반화하여 마음속에서만 상상될 수 있는 정신적 대상을 개념화하는 것이다. Tall(2013)은 이 네 가지 추상화를 두 가지로 범주화했는데, 즉 경험적 추상화와 플라토닉 추상화는 대상이 가진 성질에 대한 추상화로 이것을 구조적 추상화(structural abstraction)라고 불렀다. 이와 달리, 의사-경험적 추상화와 반영적 추상화는 대상에 대한 행위(또는 조작)로부터 정신적 대상을 개념화하는 것으로 이를 조작적 추상화(operationl abstraction)라고 불렀다.

조각 케이크가 6개씩 들어 있는 상자가 있다. 상자의 수가 1, 2, 3, ……일 때, 조각 케이크의 개수는 각각

$6 \times 1 = 6$

$6 \times 2 = 12$

$6 \times 3 = 18$

$\vdots$

임을 알 수 있다.

상자의 수(상자)	조각 케이크의 개수(개)
1	6×1
2	6×2
3	6×3
$\vdots$	$\vdots$
x	$6 \times x$

이때, 상자의 수를 x라고 하면 조각 케이크의 개수는

$$6 \times x$$

라고 말할 수 있다.

이와 같이 구체적인 값이 주어지지 않은 수량 사이의 관계는 문자를 사용하여 간단히 나타낼 수 있다.

[그림 Ⅱ-2] 문자기호와 대수식의 도입(이준열외, 중1수학, 천재교육, p.89)

제로 변하는 기호의 조합(수, 문자, 연산, 등호, 괄호 등)'으로 정의된다. 이제 모든 명제식은 진리집합, 즉 대입했을 때 명제식을 참인 명제로 만드는 모든 수들의 집합을 갖는다. 임의의 두 명제식이 동일한 진리집합을 가지면 우리는 이를 '동치'라고 명명한다. 중학교 1학년에서 일차방정식을 푸는 것은 이러한 진리집합의 원소를 찾는 일이다. 이때, 방정식을 해결하기 위해 그 방정식과 동치인 가장 간단한 명제식($x = (수)$ 꼴)을 찾아야 하고, 동치인 명제식으로 변형시키는 기본적인 법칙들을 등식의 성질이라고 규정한다. 이러한 기본적인 개념과 일반적인 법칙들은 이후 좀 더 고차원적인 대수식을 학습해나가는 과정에서 일반적으로 적용되는 구조에 해당된다.

구조라는 용어에 대해 Bruner와 Van Hiele가 언급한 내용을 살펴보면, 먼저 Bruner는 「The process of Education」(1963)에서 수학적 구조의 의미를 대수법칙을 예로 들어 설명하였다.

대수법칙에 포함되어 있는 아이디어를 파악하면 현재 풀려고 하고 있는 새로운 방정식은 전혀 새로운 방정식이 아니라 자기가 늘 알고 있던 것의 한 가지 변형에 불과하다는 것을 쉽게 알 수 있을 것이다. 전이에 중요한 것은 이들 법칙의 이름을 아는 것이 아니라 그 법칙을 사용할 줄 아는 것이다(우정호, 1976, 재인용, p.423).

Bruner가 사용한 구조의 의미는 일반적인 아이디어, 즉 일반적 원리나 기본개념을 말하고, 구조를 파악한다는 것은 "어떤 상황을 보다 일반적인 경우의 한 특별한 사례로 이해한다는 것"(Bruner, 1963, p.25)을 의미한다. 또한, Van Heile(1986)에 의하면, "구조는 인간이 이전에 마주쳤던 것과 완전히 똑같지는 않은 상황에 대해 행동할 수 있게 해 준다"(p.26). 즉, 구조를 학습하는 것은 새롭고 특별한 경우에 관련시켜 나갈 수 있는 기본적인 개념, 원리, 법칙의 습득을 의미한다. Sfard(1991)는 현재 학교수학에서 문자기호와 대수식을 도입하는 방식은 추상적인 구조에 대한 형식적인 정의로부터 새로운 아이디어

가 생성될 수 있을 것이라는 가정 하에 완성된 대상의 형식으로 제시되고 있다고 주장하였다. 또한, Sfard(1995)는 학교대수에서 이러한 구조의 학습을 강조하여 기본적인 개념, 원리, 법칙에서 출발하는 대수지도방식을 구조적인 접근방식이라고 언급하였다.

요약하면, 우리나라 대수 학습에서 문자기호는 변수로 제시되고, 대수식은 이 변수에 대한 함수로 도입된다. 명제식들은 함수들을 비교하는 것으로 해석되고, 진리집합을 용이하게 구하기 위해 기본적인 연산 법칙을 통해 대수식을 조작하는 방식에 대해 학습한 후 이러한 기본적인 개념과 일반적인 법칙에 기반하여 새로운 내용을 확장해 나간다. 이와 같은 대수지도방식은 구조적접근에 해당된다.

3.2 상수로서의 문자기호의 의미와 그 위험

중학교 1학년 수학교과서 『함수』 단원에서 함수를 도입하기 전에 변수라는 용어가 소개된다. 아래[그림 Ⅱ-3]은 중학교 1학년에서 변수를 도입하는 우리나라 수학교과서 내용이다.

30개의 테니스공을 여러 개의 상자에 똑같이 나누어 담으려고 한다. 한 상자에 넣는 공의 개수와 상자의 개수를 표로 나타내면 다음과 같다.

한 상자에 넣는 공의 개수(개)	1	2	3	5	6	10	15	30
상자의 개수(개)	30	15	10	6	5	3	2	1

한 상자에 넣는 공의 개수를 x, 상자의 개수를 y라고 하면 x와 y는 여러 가지 값을 가질 수 있다. 이와 같이 여러 가지 값을 가질 수 있는 문자를 **변수**라고 한다.

위의 표에서 변수 x의 값이 1, 2, 3, 5, ……로 변함에 따라 변수 y의 값은 30, 15, 10, 6,……으로 정해진다. 즉, 각각의 x의 값에 따라 y의 값이 하나씩 정해진다.

[그림 Ⅱ-3] 변수의 도입(이준열외, 중1수학, 천재교육, p.153)

변수는 변하는 현상을 조직하는 수단으로서 도입되고, 여러 가지 값을 가질 수 있는 문자기호로 규정된다. 이러한 변수의 도입으로부터 함수 개념의 학습으로 나아간다.

아래[그림 Ⅱ-4]는 상수를 사용하여 일반적인 일차함수를 표현하고 있는 중학교 2학년 수학교과서 내용이다.

이와 같이 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 일차식

$$f(x)=ax+b \ (a,\ b\text{는 상수},\ a\neq 0)$$

로 나타날 때, 즉 $y=ax+b$일 때, 이 함수를 x에 대한 **일차함수**라고 한다.

|보기| ❶ 함수 $y=-3x+5$, $y=x-2$, $f(x)=\frac{2}{3}x$는 모두 일차함수이다.

❷ 함수 $y=\frac{6}{x}$, $f(x)=-\frac{8}{x}$은 모두 일차함수가 아니다.

[그림 Ⅱ-4] 상수의 도입(이준열외, 중2수학, 천재교육, p.154)

변수와 대조되는 상수로서의 문자기호는 중학교 2학년 수학교과서 『일차함수』 단원에서 일차함수의 일반적인 표현을 나타내기 위해 사용되고 있다. 변수라는 용어는 이전까지 사용해오던 문자기호의 사용방식과 일관성을 유지하고 있지만, 상수라는 용어는 변수와 대조되는 수나 고정된 값을 갖는 문자로 사용된다. 이로부터, 학생들은 사용되고 있는 문자기호에 대한 조정을 통해 그 용법을 분화시켜 나가야한다. 상수는 여러 가지 상징과 함께 대수식을 일반적으로 표현하는 수단으로 사용되는 문자기호에 대해 실제로 일반화하는 경험은 부재하고, 단지 몇 가지 예시를 통해 구체화하는 경험만 제공된다. 특히, 교과서에서 제시되는 상수로서의 문자기호는 변수와 독립적으로 작용할 수 없는 고정된 수로 가정된다.

이러한 일반화 수단으로서 상수의 용법 또한 학교대수에서 구조적인 사고방식을 반영한 결과이다. 상수를 이용한 일반적인 표현 자체는 학생들에게 조작적인 해석을 가리고 구조적인 측면을 부각시키는 즉, 그 자체를 하나의 정적인 대상으로 다룰 수 있도록 기대한다. 또한, 이것은

함수의 정의에서 기본적인 요소인 독립변수, 즉 고정된 상수는 무시하고 독립변수 x에 대한 변이성에 초점을 맞출 수 있도록 하여, 이로부터 함수값의 유일성을 보장하려는 의도가 내재되어 있다. 이와 같이 상수개념에 대한 지도방식은 학생들에게 일반적인 식을 구조적으로 볼 수 있도록 기대하고 있다. 하지만, 학생들이 이것을 조작적으로 해석할 수 있는 가능성은 상수의 의미를 난국에 처하게 한다.

여러 선행연구자들은 학생들이 매개변수를 변수로 해석해야 하는 상황에 유연하게 대처하지 못한다고 보고한 바 있다(김성준 & 박선용, 2002; Bloedy-Vinner, 2001; Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992; Sfard, 1995; Sfard & Linchevski, 1994). 특히, 우리나라 학교대수에서 상수로 도입되고 있는 매개변수는 이후의 학습과정에서 변수로 해석될 수 있는 여러 가지 상황이 있다. 예를 들어, $y = ax\,(a \neq 0)$와 같은 표현에서 문자기호 x는 형식적인 자리지기로 간주하고, 문자기호 a에 여러 가지 수를 대입하여 구체적인 함수식을 얻을 수 있다는 점에서 변수로 해석될 가능성을 내포하고 있다. 더욱이, 함수의 그래프 표현에서 a가 증가할 때, 그래프의 변화를 살펴보는 상황은 문자기호 a를 변수로 해석하도록 강화한다(Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992). 한편, 학생들이 다른 문자기호들을 포함하는 식에 관한 문제를 해결해 나가는데 있어 그 문자기호들의 역동적인 역할변화에 대처해야하는 상황이 편재해 있다(김성준, 2002). 이러한 상황에서 '상수'라는 용어는 그 정의에서 규정되는 의미에 가려 그 문자기호의 의미를 통찰할 수 있는 가능성을 차단할 수 있다. 즉, 현재 우리나라에서 사용되고 있는 상수로서의 문자기호는 매개변수 개념의 의미 있는 이해를 차단할 수 있다는 점에서 문자기호의 의미 충실한 학습이 이루어지기 어렵다(김남희, 1997).

Sfard(1991)는 새로운 개념이 구조적으로 도입되더라도 학생들은 그 개념을 조작적으로 해석하는 성향을 발견하였다. 이에 대해 그는 학생들이 대수의 핵심개념을 접하는 순서를 바꿀 필요가 있다고 주장하고, 특히 이미 세련된 대수적 대상이 아니라 조작적인 접근으로 출발함으로써 학생들의 자연스러운 성향을 활용할 수 있는 교육과정의 개정을 필요성을 언급했다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 방법: 혼합 연구

혼합연구는 연구자가 연구문제를 종합적으로 분석하기 위해 양적자료와 질적자료를 한데 모으거나 통합하는 연구방법이다. Creswell(2009)은 혼합연구방법론(mixed methodology)을 양적연구와 질적연구 간에 혼합하기를 통해 접근하는 방식으로 두 가지의 연구 자료의 혼합은 언제 그리고 어떻게 일어나는지에 대해 언급했다. 혼합하기가 언제 일어나는지에 대해서는 자료의 수집, 자료 분석, 자료해석 단계 각각이나 모든 단계에서 일어날 수 있다. 그는 혼합하는 방식을 6가지로 구별하여 제시하였는데, 이 중 "동시적 삼각화(concurrent triangulation) 전략"은 양적자료와 질적자료를 동시에 수집하여 두 자료 간에 비교할 것 들이 있는지 따져보는 연구 모델이다. Morgan(1998)은 이러한 비교를 구체적으로 확증(confirmation), 불확증(disconfirm), 교차확인(cross-validation), 보강(corroboration)이라고 언급하였다(Creswell, 2009, 재인용, p.254). Creswell(2009)은 동시적 삼각화 전략에서 자료의 혼합은 실제로 서로 다른 형태의 두 자료를 변형하거나 비교하여 발현되고 질적·양적으로 수집한 자료나 연구 결과를 비교하고 통합하면서 두 방법이

지니고 있는 장점을 상호 보완하여 활용하고자 하는 연구방법이라고 주장하였다.

본 연구는 초보적인 학습자와 고등적인 학습을 마친 예비교사들을 대상으로 각 집단이 매개변수 개념에 대해 어떻게 인식하고 있는지를 동일한 설문지조사를 통해 자료를 수집하여 분석을 시도하고, 동시에 정성적 자료를 수량화하여 정량적 자료에 대한 분석으로부터 두 집단간에 매개변수개념에 대한 인식의 양상이 유의미하게 변화하는지를 살펴봄으로써 교수학습에 관한 시사점을 제공하고자 한다. 이때, 질적 자료와 양적자료를 동시에 혼합하여 분석함으로써 타당하고 실증적인 연구결과를 도출하고자 하였다.

2. 연구 절차

가. 연구 참여자

본 연구에서는 우리나라 중등교육과정에서 여러 가지 유사한 모임을 일반적으로 표현하기 위해 매개변수를 대신하여 상수로 지도되고 있는 문자기호에 대해 일차함수에 대한 전반적인 기본개념학습을 충실하게 마친 중학교 2학년 학생들과 고등적인 학습을 마친 예비교사들을 대상으로 그 문자기호에 관한 인식의 양상을 혼합적 연구방법에 기반하여 분석하고자 하였다.

본 연구의 연구 참여자는 두 집단으로 선정되었다. 먼저, 하나는 대전지역 A중학교 2학년 35명으로 이루어진 한 교실이 선정되었다. 이 중학교는 대전지역의 중심지에서 약간 벗어나 있지만 주위에 도서관과 대학교가 가깝게 위치하고 있어 공부할 수 있는 여건이 잘 마련되어 있고, 대부분의 학생들은 방과 후에 수학학습을 심화·보충하기 위해 학원이나 과외를 받고 있었다. 수학수업은 전 학년에서 수준별 수업으로 이루어지고 있었고 본 연구에서 선정된 교실은 학업성취도가 높은 학생들로 이루어진 교실(수준 상반 교실)로, 이 교실을 담당하고 있는 선생님과의 면담을 통해 이 교실에 속한 학생들은 기본적인 개념이 잘 습득되어 있고, 문제해결력이 우수하며, 지적호기심과 탐구심이 높다는 것을 알 수 있었다. 이 중학생들은 2학년 1학기에 일차함수에 관한 전반적인 기본 개념 학습을 이미 마친 상태였고, 설문지 조사는 2학년 2학기 초반에 진행되었다. 이 교실을 맡고 있는 수학교사는 경력 10년의 노련한 교사로, 원활한 수업운영 능력을 지니고 있고, 특히 기본개념에 대한 충실한 학습을 중요하게 생각하고 있었다.

다른 집단은 B대학교 수학교육과 학부생 73명으로 이루어져 있다. 대부분 수학임용을 준비하는 예비교사들로, 본 연구자는 이들이 중·고등학교 학습에서 중상위의 성적을 거두었을 것이라고 판단했고, 또한 개념학습에 충실했을 것이라고 판단했다. 본 연구에서 중학교 2학년 집단과 비교하기 위해 선정된 이 집단은 고등 대수적 학습과 다양한 문제해결의 경험이 풍부하다고 판단되는 대표집단으로 선정되었다.

나. 과제 설계

본 연구에서 사용된 설문지의 양식은 <부록>에 제시하였다. 본 연구에서 학생들이 다룰 설문지는 '기울기가 2이고, y절편이 k인 일차함수식 $y=2x+k$ '에 대해 7가지의 물음에 답하는 형식으로 제시되었다. 여기서 대수식 $y=2x+k$에 대해 '기울기가 2이고, y절편이 k인 일차함수식'이라는 조건을 제시한 이유는 그 대수식에 대한 해석의 다의성을 막고, 문자기호에 대한 해석에 초점을 두려고 의도한데서 기인한다. 또한, 각 문항에 대해 자신이 생각한 답에 대해 그 이유를 구체적으로 기술하도록 유도하였고, 과제를 해결하는 시간에 대한 제약은 두지 않았다. 아래

<표 Ⅲ-1> 설문지 문항 설계

문항	문항 설명	연구자의 의도
문항1	변수로 사용된 문자기호 선택하기	다른 문자기호에 대한 변수와 상수로서의 인식 양상
문항2	상수로 사용된 문자기호 선택하기	
문항3	주어진 일차함수에 대한 개형 그리기	y절편이 구체적인 수가 아닌 문자기호로 제시된 경우의 그래프의 개형에 대한 학생들의 인식의 양상
문항4	문자기호 x에 의해 결정되는 요소	문자기호 x에 의한 함수값을 구체적인 수로 접근하는지 여부 살펴보기
문항5	문자기호 k에 의해 결정되는 요소	구체적인 함수식의 물화와 문자기호k의 변이성의 인식여부 살펴보기
문항6	문자기호 x,k를 비교하기	이전 문제에서 다룬 문자기호에 대한 메타-인지적 질문에 학생들의 반응 살펴보기
문항7	문자기호 x,k사이에 관계 설명하기	

의 <표 Ⅲ-1>는 본 연구에서 사용된 일련의 과제에 대해 개괄한다.

문항 1,2는 주어진 식에서 변수와 상수에 해당하는 것을 선택할 수 있도록 하고, 스스로 선택한 것에 대해 그 이유를 작성하도록 유도하였다. 이로부터 학생들이 다른 역할을 하는 문자기호에 대해 어떻게 인식하고 있는지를 살펴보고자 하였다. 문항3은 주어진 식에 대한 개형을 그리도록 유도했고, 눈금 없는 직교좌표 틀은 제시되었다. 이때, 문항 1,2의 답변에 따라 주어진 함수식의 개형을 어떻게 그리는지 살펴보고자 하였다. 문항4는 주어진 식에서 문자기호 x에 의해 결정되는 함수값을 어떻게 인식하고 있는지를 살펴보고자 하였고, 문항 5는 x와 대조하여 k가 함수자체를 결정하는 것으로 인식가능한지를 살펴보고자 하였다. 문항6은 문자기호 x,k를 비교하여 그 차이점을 인식할 수 있는지를 살펴보고자 하였고, 문항7은 두 문자기호 사이에 어떤 관계를 인식할 수 있는지를 살펴보고자 하였다. 특히, 본 연구자는 문항6,7은 이전 문항에서 스스로 생각한 문자기호 x,k에 대해 반성할 수 있도록 하는 메타-인지적 질문으로 작용할 것이라 생각했다.

3. 자료 수집 및 자료 분석

먼저, 중학교 2학년 집단은 2014년 8월 25일 정규수업시간에 설문지 조사가 실시되었다. 설문지를 작성하는 동안 학생들에게 모호한 용어나 표현은 담당교사에게 질문을 할 수 있도록 하고, 담당교사는 자신이 지도하는 방식대로 질문에 답할 수 있도록 하였다. 특히, 연구자는 문제 (4)~(7)은 학생들에게 생소한 질문으로 작용할 것이라고 판단하여, 담당교사가 학생들에게 적절한 안내를 제공하도록 권고했다. 이때, 시간상의 제약은 두지 않고, 설문지를 작성하는 순서나 속도도 스스로 판단하여 진행해 나가도록 하였다. 과제를 해결하는 전 과정에 녹음기를 설치하여 교사와 학생들로부터 자연스럽게 발화되는 담론을 녹음하였다.

본 연구의 초기의 연구문제는 중학교학생들의 문자기호에 관한 인식의 양상에 대해 조사하는 것이었다. 중학교 2학년 학생들로부터 작성된 설문지를 분석하는 동안 변수와 상수로서의 문자

기호에 관한 초기 학습자들의 공통된 인식의 양상을 살펴볼 수 있었다. 특히, 상수로서의 문자기호에 대한 그 의미가 변수가 아닌 구체적인 수로 인식하고 있다는 것이 드러났고, 이로부터 우리나라 교육과정상 고등적인 학습을 받은 학생들에 대해 문자기호에 관한 인식양상을 비교하여 어떤 변화가 일어나는지를 양적으로 파악하는 것은 질적 자료에 대한 설명을 강화할 수 있을 것이라 판단하였다. 이로부터 본 연구자의 초기의 연구문제를 수정하고, 이후 예비교사들을 대상으로 동일한 설문지에 대한 반응을 조사하고자 하였다. 이것은 동년 10월 1일에 예비교사들로부터 작성된 설문지가 수집되었다.

두 집단으로부터 수집된 문서자료로부터 문자기호 k에 관한 인식의 양상의 동질성을 살펴보기 위해 두 집단 간에 비율의 동질성에 관한 가설을 설정하여 SPSS를 이용한 χ^2 검정을 실시하였다. 또한, 두 집단에서 작성된 문서자료를 통해 범주화하여 학생들의 문자기호에 대한 인식의 양상과 어려움 및 오류의 양상에 대해 집단내의 대표사례를 추출하여 분석을 실시하였다. 자료를 분석하고 해석하는 가운데 양적 자료와 질적 자료를 통합하여 본 연구문제에 대한 결과를 뒷받침할 수 있는 근거를 마련하였다.

Ⅳ. 연구 결과

본 연구는 다른 역할의 문자기호를 포함하는 설문지문항에 대한 학생들의 반응을 통해 학생들이 문자기호를 인식하는 양상을 살펴보고자 하였다. 특히, 고등 대수적 추론과 함수개념의 학습에 기저를 이루는 매개변수개념에 대해 대수학습의 초기학습자들이 어떻게 인식하고 있는지 조사하고자 하였다. 본 연구의 초반부에 중학교 2학년들을 대상으로 설문지조사를 실시하여 분석을 시도하던 도중, 중학교 2학년 학생들의 문자기호에 대한 인식에서 상수라는 용어자체가 매개변수에 대한 의미를 제한적으로 사용하도록 유인하고 있다는 것을 인식하였다. 또한, 교과서 분석을 통해 초기에 상수라는 용어를 도입하여 이후에 고등학습을 통해 그 의미를 더욱 발전시켜 나가도록하는 암묵적인 기대가 내재되어있다는 것을 인식하였다. 이에 대해 본 연구자는 매개변수에 관한 현재의 소극적·암묵적인 도입방식은 그 개념에 대한 초기의 학습자와 고등학습을 마친 예비교사들 간에 인식양상의 동질성을 가정하고 실제로 예비교사들을 대상으로 동일한 설문지를 통해 얻은 자료와 중학생들로부터 얻은 자료를 양적으로 비교분석하였다. 본 연구자는 각 집단으로부터 얻은 질적자료와 양적자료의 분석을 혼합함으로써 본 연구의 결과에 적합한 근거를 마련할 수 있을 것이라 기대했다.

본 연구의 결과, 학생들이 매개변수에 대해 부정 또는 변이보다는 고정에 주목하고 있었다. 이러한 결과는 현재 매개변수를 대신하여 사용되고 있는 상수라는 용어가 어느 정도 영향을 미치는 것으로 분석되었다. 학생들은 매개변수가 독립변수, 즉 매개변수가 함수 그 자체를 결정한다는 것을 인식하지 못했고, 매개변수와 다른 문자기호사이에 역동적인 대입의 관계를 인식하지 못했다. 또한, 매개변수와 다른 문자기호사이에 변이의 독립성을 인식하지 못했고, 매개변수가 함수식을 일반적으로 표현하기 위한 수단으로서의 상징으로 인식하지 못했다. 마지막으로, 두 집단 간의 문자사용에 관한 인식양상의 동질성에 관한 통계적 분석결과 두 집단 간의 문자기호에 관한 인식양상에서 주목할 만한 변화가 일어나지 않았다는 결과가 도출되었다.

1. 문자기호에 관한 중학생과 예비교사의 인식양상

이 절에서는 본 연구에서 설계된 설문지문제 (1)~(5)에 대해 중학교 2학년 학생들과 예비교사들이 작성한 내용을 양적·질적으로 분석하여 각 집단 내 및 집단 간의 문자기호에 대해 인식하는 양상에 대한 연구결과를 제시하였다. 먼저, 두 집단으로부터 수집된 설문지를 바탕으로 집단 내 및 집단 간의 거시적인 양상을 살펴보기 위해 양적 분석을 실시하여 도출된 결과를 제시하였다. 특히, 본 연구에서 초점을 두는 매개변수로서 역할 하는 문자기호 k에 대해 두 집단 간의 인식의 양상을 살펴보기 위해 문제(1), (2)를 중심으로 통계적 방법을 통해 비교를 실시하였다. 또한, 정량적 연구결과를 보강하기 위해 각 문제(1)~(5)에 대한 두 집단의 대표적인 답변에 대해 질적으로 분석한 결과를 제시하였다.

중학교 2학년 집단과 예비교사 집단 간에 변수 및 상수에 관한 인식의 동질성 연구 결과

먼저, 두 집단 간에 문자기호에 대한 인식의 양상을 통계적 방법을 통해 비교해 보겠다. 아래 <표 Ⅳ-1>는 문제(1), (2)에서 여러 가지 상징에 관한 중학생들의 반응을 표로 정리한 것이다.

<표 Ⅳ-1>에서 대부분의 중학생들은 문자기호 x, y를 변수로, k는 상수로 인식하고 있다는 것을 보여준다. 또한, 변수로서의 문자기호에 대해 x는 y보다 더 높은 비율로 변수로서 취급되고 있고, k는 거의 변수로 취급되지 않는다는 것을 확인할 수 있다. 이러한 성향은 다음에 오는 <표 Ⅳ-2>에서 예비교사들의 여러 가지 상징에 대한 반응에서도 유사한 결과를 확인할 수 있다.

실제로, 중학생집단과 예비교사집단을 대상으로 k를 변수로 간주하는 비율에 대한 동질성을 살펴보기 위해 유의수준 .05에서 χ^2 검정을 실시하였다. 검정결과 유의확률(양측검증) .433으로, 문자기호 k를 변수로 취급하는 두 집단 간의 비율에서 차이가 없다는 것을 알 수 있다. 또한, 같은 방법으로 문자기호 k를 상수로 고려하는 비율에서 두 집단 간에 차이가 없다는 결과가 도출되었다(유의확률 p=.217).

문자기호 k에 대해 좀 더 초점을 두고 분석하기 위해 아래 <표 Ⅳ-3>는 문자기호 k에 대한 중학생들의 반응을 표로 정리한 것이다. 여기서, 문자기호 k에 대한 학생들의 반응은 네 가지 형태로 범주화되어, 그 각각은 k를 변수이면서 상수로 인식하는 경우(k는 변수, 상수), 오직 변수로만 인식하는 경우(k는 변수), 오직 상수로만 인식하는 경우(k는 상수), 상수도 변수도 아닌

<표 Ⅳ-1> 중학교 학생들의 상징에 대한 반응

	x를 변수로 인식	y를 변수로 인식	k를 변수로 인식	k를 상수로 인식	2를 상수로 인식
학생수(명)	33	25	5	33	3
퍼센트(%)	94	71	14	94	9

<표 Ⅳ-2> 예비교사들의 상징에 대한 반응

	x를 변수로 인식	y를 변수로 인식	k를 변수로 인식	k를 상수로 인식	2를 상수로 인식
학생수(명)	72	52	15	63	10
퍼센트(%)	99	71	21	86	14

<표 Ⅳ-3> 중학교들의 문자기호 k에 대한 반응

	k는 변수, 상수	k는 변수	k는 상수	k는 상수도 변수도 아니다	합계
학생수(명)	3	2	30	0	35
퍼센트(%)	8	6	86	0	100

<표 Ⅳ-4> 예비교사들의 문자기호 k에 대한 반응

	k는 변수, 상수	k는 변수	k는 상수	k는 상수도 변수도 아니다	합계
학생수(명)	7	8	56	2	73
퍼센트(%)	9	11	77	3	100

것으로 인식하는 경우(k는 상수도 변수도 아니다)로 나누어진다.

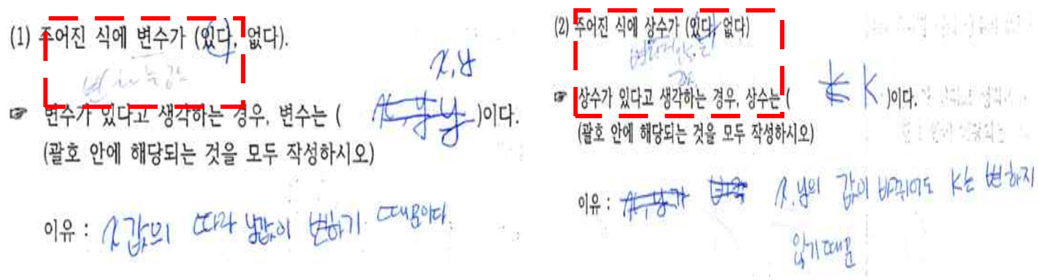
마찬가지로, 예비교사들을 대상으로 문자기호 k에 대한 반응은 <표 Ⅳ-4>에서 보여준다.

중학생 집단과 예비교사들의 집단사이에 문자기호 k에 대해 각각의 반응 유형의 비율에 관한 χ^2검정을 실시한 결과 유의 수준 .05에서 각각의 반응유형에 대해 두 집단 간의 비율에서 유의미한 차이는 나지 않는다는 것이 확인4)되었다. 위와 같은 결과로부터 초기 학습자들이 문자기호 k를 변수로 인식하는 비율은 고등적인 학습을 거친 이후에도 크게 증가하지 않았다는 것을 알 수 있다. 또한, 대부분의 학생들은 문자기호 k에 관하여 변수라기보다는 상수로 인식하고 있다는 것을 알 수 있고, 이것은 고등적인 학습을 거친 이후에도 크게 변하지 않는다는 것을 보여주는 것이다.

변수와 상수의 인식의 양상(문제(1),(2))

아래의 [그림 Ⅳ-1]은 문제(1), (2)에 대해 중학생A가 작성한 내용이다.

학생A는 변수를 '변하는 값'으로, 상수는 '변하지 않는 값'이라고 작성하고, 변수에 해당하는 상징은 x,y, 상수에 해당하는 상징은 k라고 작

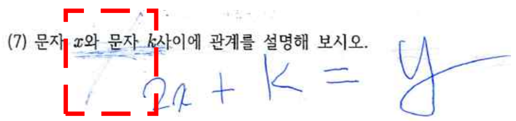


[그림 Ⅳ-1] 문제(1), (2)에 대해 중학생A가 작성한 내용

4) 네 가지 반응 유형에 대한 두 집단 간의 비율의 차이에 대한 χ^2 검정의 결과 유의확률 p 값(양측검정)이 각각 .864(k는 변수, 상수), .379(k는 오직 변수), .277(k는 오직 상수), .323(k는 변수도 상수도 아니다)로 유의수준 .05에서 두 집단 간에 차이가 없다는 것을 확인할 수 있다.

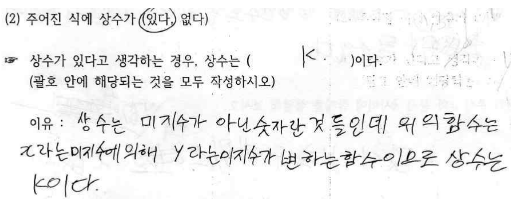
성하였다. 이것은 문자기호 x와 k에 대한 의미를 대조적으로 다루고 있고, 특히 변하는 값을 나타내는 변수의 의미 때문에 상수 k에 대한 고정성은 더욱 강화된다. 이러한 중학생들의 문자기호의 인식의 성향은 예비교사들의 집단에서도 마찬가지였다.

아래의 [그림 Ⅳ-2]에서 학생A가 문제(7)의 지문 속 “문자 k”에서 “문자”라는 단어를 대각선(⁄)으로 긋는 행동은 k는 문자가 아니라는 것을 표시하는 행동이다.



[그림 Ⅳ-2] 상징 k에 대해 문자라는 용어에 대한 학생A의 부정

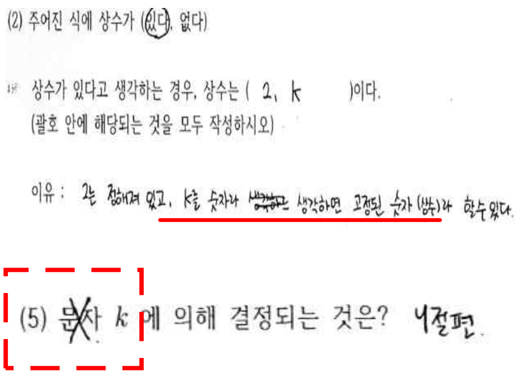
이는 이 학생이 문자를 변하는 수를 대신하는 자리로 인식하고 있고, k는 변하지 않는 수이기 때문에 문자가 아니라고 판단하였을 가능성을 암시한다. 이와 관련하여, 중학생들에게 나타난 문자기호에 대한 인식의 특징적인 성향은 [그림 Ⅳ-3]와 같이 문자기호 k가 상수가 되는 이유에 대해 작성한 글에서 미지수에 해당하는 문자기호는 x,y이고, k는 미지수가 아니므로 상수가 된다고 기술하고 있다.



[그림 Ⅳ-3] 미지수로서의 문자기호의 인식

이것은 특정한 문자기호에 특수한 의미를 연결시켜 고정적으로 다루고 있다는 것을 보여주는 것이고, 이러한 결과로부터 문자기호에 대한 역할의 고정성은 문자기호의 의미를 제한적으로 다루도록 유인하고 있다.

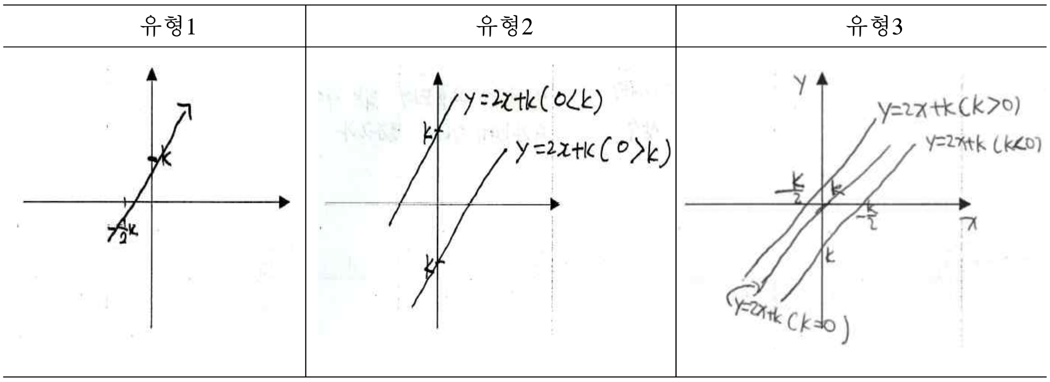
아래의 [그림 Ⅳ-4]는 문자기호 k에 대해 학생A와 동일한 방식으로 인식하고 있는 예비교사B의 문자 k에 대해 작성한 답변을 보여준다.



[그림 Ⅳ-4] 문자 k에 대해 예비교사B의 답변

위의 [그림 Ⅳ-4]에서 보여주듯이, 문제(5)의 지문 속에 “문자”라는 용어에 “×”를 표시하여 k가 문자가 아니라는 것을 강조하고 있다. 특히, 예비교사B는 k 뿐만 아니라 2도 상수로 인식하고 있었고, 문자기호 k 자체를 숫자 2와 동일한 의미에서 ‘고정된 숫자(상수)’로 인식하고 있다는 것을 보여주고 있다. 위의 두 집단에서 작성된 답변으로부터, 대수학습의 초기에 학습된 문자기호의 고정된 의미는 고등적인 학습을 거친 이후에도 변하지 않을 수 있다는 것을 보여주는 것이다.

이 절을 요약하면, 위와 같은 변수 및 상수로서의 문자기호의 인식에 대한 두 집단 간의 대표적인 사례로부터 현재의 다양한 문자기호 중 상수를 나타내는 문자기호에 대해 구체적인 수와 동일하게 취급하는 성향과 미지수가 아닌 문자기호에 대해 고정적인 의미로서 상수로 취급한다는 것을 확인할 수 있고, 이로부터 그 문자기호의 부정성 또는 변이성은 자발적으로 인식하거나 이해하기 어렵다는 것을 보여준다.



[그림 Ⅳ-5] 주어진 일차함수식의 그래프 개형에 대한 세 가지 유형

문자기호 k에 대한 다른 측면에서의 고정적인 의미(문제(3), 문제(5))

두 집단에서 주어진 일차함수식에 대한 개형을 그리는 문제(3)에 대한 답변은 위의 [그림 Ⅳ-5]와 같이 크게 세 가지 유형으로 구분되었다.

첫 번째는(유형1) 문자기호 k에 대해 양수인 경우에 대해 그 개형을 단일한 직선으로 나타내었다. 두 번째는(유형2) 문자기호 k에 대해 양수인 경우 또는 음수인 경우로 구별하여 두 개의 직선으로 나타내었다. 세 번째는(유형3) 문자기호 k에 대해 양수인 경우, 0인 경우, 음수인 경우로 구별하여 세 개의 직선으로 나타내었다. 세 가지 유형 중, 유형2와 유형3은 문자기호의 값을 경우에 따라 구별하여 대표적인 직선으로 나타낼 수는 있었지만, 문자기호 k의 동적인 변화는 고려되지 않았다. 결국, 문자기호k에 대해 그래프 개형에 대한 답변으로부터 변이성보다는 고정성이 강조되고 있다는 것을 뒷받침한다.

또한, 문자기호k에 의해 결정되는 것(thing)에 대한 물음에 대해 두 집단 모두 대부분 'y절편'을 명기하고 있었다. 이것은 주어진 식에서 문자기호k에 대한 기능에 주목하여 일차함수를 결정하는 중요한 요소인 절편의 결정성을 강조하고 있는 반면, k값의 변화에 따라 일어나는 변화에 대해 인식하는 답변은 일어나지 않았다.

2. 메타-인지적 질문에 대한 반응 결과

설문지문제(6)과 (7)은 문제(1)~(5)를 다루는 동안 스스로 생각했던 문자기호에 대해 반성해볼 수 있도록 하기 위해 의도적으로 메타-인지적 질문형태로 제시되었다. 문제(6)은 문자기호x와 k사이에 역할의 차이를 비교하여 설명하는 문제이고, 문제(7)은 두 문자기호사이에 관계를 설명하는 문제이다. 문제(6)에 대해서는 두 집단 간에 답변을 어느 정도 범주화하여 비교 분석할 수 있었지만, 문제(7)에 대해서는 각 집단별로 다양한 답변을 기술하여 범주화하기가 용이하지 않았다. 그래서, 그 중 한 가지 공통적인 양상을 띠는 중학생의 답변에 대한 대표적인 사례를 제시하여 분석을 시도하였다.

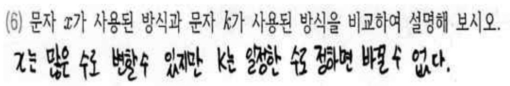
문자기호들 간에 역할에 대한 이해(문제(6))

중학생들이 문제(6)에 대해 작성한 답변은 아래 <표 Ⅳ-5>와 같이 네 가지 유형으로 구별되었다. 네 가지 유형 중 'x는 변수, k는 상수'로 답변한 유형2는 문제(1), (2)에서 고려한 내용을 적용하여 작성한 것으로 이해할 수 있고, 'x는 y의 값을 결정, k는 y절편을 결정'으로 답변한 유형3은 문제(4), (5)에서 고려한 내용을 적용하여 작성한 것으로 이해할 수 있다.

<표 Ⅳ-5> 문제(6)에 대한 중학생들의 답변 유형

	유형1	유형2	유형3	유형4	합계
	x는 변수, k는 정해지지 않은 수	x는 변수, k는 상수	x는 y값을 결정, k는 y절편을 결정	무응답	
학생수(명)	2	15	8	10	35
비율(%)	6	43	23	28	100

그런데, 문제(6)에 대한 중학생들의 답변 유형에서 유형1과 같이 'x는 변수, k는 정해지지 않은 수'로 작성한 학생들은 문제(2)에서 k를 "상수"로 작성했지만, 문자기호 k를 순전히 고정적인 수의 의미로 사용하지 않는다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, 아래의 [그림 Ⅳ-6]은 서로 다른 의미를 갖는 문자기호 x,k가 사용된 방식을 비교하는 문제에 대한 중학생C가 작성한 내용을 보여준다.


(6) 문자 x가 사용된 방식과 문자 k가 사용된 방식을 비교하여 설명해 보시오.
x는 많은 수로 변할수 있지만 k는 일정한 수로 정하면 바뀔수 없다.

[그림 Ⅳ-6] 문제(6)에 대해 학생C가 작성한 내용

학생C는 문제(1),(2)에 대해 각각 x,y를 변수로, k는 상수로 작성하였다. 그런데, 두 문자기호 x,k를 비교하는 문제에 대해 문자기호 x는 통상적인 변수의 의미로 설명하고 있지만, 문자기호 k에 대해서는 상수의 의미보다는 매개변수의 의미[5]로사용하고 있다는 것을 확인할 수 있다. 즉, 학생C는 문제(2)에서 문자기호 k를 고정된 수의 의미로서 상수라고 명시했지만, 문제(6)에서 문자기호 k에 대해 작성한 "k는 일정한 수로 정하면"이라는 표현은 그 문자에 대해 잠재적 가능성을 내포하는 부정소로서 매개변수의 의미에 가까운 표현이다. 이것은 극히 드물지만, 학교수학에서 매개변수에 대한 구조적인 해석을 강조하기 위해 상수라는 용어로 대신하여 사용하고 있지만, 학생들이 접근하는 성향은 조작적일 수 있다는 것을 보여준다.

다음에 오는 <표 Ⅳ-6>은 문제(6)에 대한 예비교사들의 답변에 대한 유형을 보여준다. 중학생들의 답변유형에 포함되지 않는 유형5는 "그 외"의 유형으로 처리하였다. 두 집단 간 비교를 위해 유형1과 유형2에 대한 동질성 검정을 실시한 결과 각각 유의확률이 .379, .468으로 두 문자기호 간에 역할을 비교하는 메타적 질문에 대한 중학생들의 유형1과 유형2로 인식하는 비율이

<표 Ⅳ-6> 문제(6)에 대한 예비교사들의 답변 유형

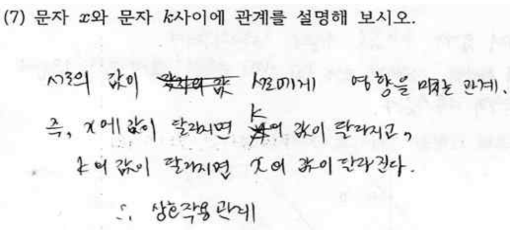
	유형1	유형2	유형3	유형4	유형5	합계
	x는 변수, k는 정해지지 않은 수	x는 변수, k는 상수	x는 y값을 결정, k는 y절편을 결정	무응답	그 외	
학생수(명)	8	26	5	26	8	73
비율(%)	11	36	6	36	11	100

5) 여러 선행연구자들은 매개변수를 "아직 정해지지 않은 고정된 수(undeterminated but fixed number)"로 정의하고 있다(ex. 우정호, 1998; Bardini et al, 2005; Mason & Pimm, 1984).

고등학습을 거친 예비교사들의 반응에서도 크게 달라지지 않는다는 것을 알 수 있다. 특히, 유형1에 대해 중학생 집단과 예비교사 집단 간에 유의미한 변화가 없다는 결과는 고등적인 개념학습과 다양한 문제해결을 거치더라도 매개변수개념의 이해를 기대하기는 힘들다는 것을 뒷받침해준다.

문자기호들 간에 역동적인 관계의 인식의 어려움(문제(7))

문제(7)에 대해서는 각 집단별로 다양한 답변을 기술하여 범주화하기가 용이하지 않았지만, 그 중 한가지의 답변에 대한 공통적인 양상을 보여 대표적인 사례를 제시하여 분석을 시도하였다. 예를 들어, 아래의 [그림Ⅳ-7]은 문제(7)에 대해 중학생D가 작성한 내용을 보여준다. 학생D는 문자기호들 사이에 역동적인 관계를 설명하지 못했고, 복합적으로 상호작용하는 관계로 설명하고 있다.



[그림 Ⅳ-7] 문자기호 x,k사이의 관계에 관한 학생D의 답변

통상적으로, 학교수학에서 일반적인 일차함수식을 $y=ax+b$(a,b는 상수, 단, $a \neq 0$)와 같이 제시하고 있다. 일차함수에 대한 전반적인 학습을 거치는 동안 a,b는 함수값을 결정하는 요인으로 다루어지기 보다는 함수의 그래프를 결정하는 요인으로 '기울기'와 'y절편'이라는 용어로 사용되고 있다. 즉, 학생들에게 함수식 자체를 그래프에 대응시켜 구조적으로 이해하도록 유도하고 있다. 하지만, 위의 [그림 Ⅳ-7]과 같은 학생D의 반응은 문자기호k에 대한 구조적인 역할을 보지 못할 뿐만 아니라 두 문자 사이에 역동적인 관계를 보지 못한다는 것을 보여준다. 더욱이, 두 문자기호의 관계를 상호작용관계로 작성한 학생의 진술로부터 각 문자기호의 변화의 독립성[6]에 대립되는 개념으로 이해하고 있다는 것을 보여준다. 이러한 결과는 대수 학습에서 구조적인 접근방식을 통해 학생들에게 의미 있는 학습의 결과를 기대하고 있지만, 학생들은 문자기호들 간에 역동적인 관계를 의미 있게 이해하지 못하고 있다는 것을 반증한다. 이것은 대수 학습에서 문자기호들 간의 역동적인 관계에 대한 의미 충실한 이해를 지원하는 학습조건에 관한 연구의 필요성을 강조하며, 특히 대수의 도입에서 구조적인 접근방식에 대해 재고해 볼 필요성을 암시하는 것이다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구의 목적은 대수 학습에서 매개변수에 대한 학생들의 인식양상을 살펴봄으로써 매개변수개념의 지도에 관한 시사점을 도출하고자 하였다. 이를 위해 매개변수에 대한 교과서 및 정의 분석을 통해 현재 우리나라 교과서에서 매개변수를 다루는 방식, 그리고 그 개념에 대한 정의로부터 이끌어 낼 수 있는 본질적인 요소를 살펴보았다. 그리고 실증적으로 학생들이 매개변

6) 문자기호 x,k에 대한 변이의 독립성의 이해는 두 문자기호에 관한 다른 차원에서의 변화의 이해 및 관점의 유연한 전환을 요구한다. 즉, 먼저, 매개변수 k가 변수로 작용하는 경우, 변수 x는 그 자체로 대수적 관계를 나타내는 물화된 대상으로 파악될 수 있어야 하고, 이후, x를 변수로 취급할 때 k는 고정된 수로 작용하게 된다는 것을 이해할 수 있어야 한다.

수를 인식하는 양상과 어려움이 어떤지를 살펴보고자 하였다. 또한, 매개변수에 대한 초기의 인식의 양상이 고등적인 학습을 거친 이후에 유의미하게 변화하는지를 살펴봄으로써 현재의 지도방식에 대해 시사점을 제공하고자 하였다.

연구 결과, 두 집단 모두 매개변수에 대해 부정 또는 변이보다는 고정에 주목하고 있었다. 이러한 결과는 현재 매개변수를 대신하여 사용하고 있는 상수라는 용어가 어느 정도 영향을 미치는 것으로 분석되었다. 특히, 대수학습의 초기 학습자와 예비교사들을 대상으로 두 집단 간의 문자사용에 관한 인식의 동질성에 관한 통계적 처리결과 두 집단 간의 여러 가지 문자기호에 관한 인식양상의 차이가 유의미하게 구별되지 않는다는 결과가 도출되었다. 또한, 두 집단 모두 매개변수가 독립변수, 즉 매개변수가 함수를 결정한다는 것을 대부분 인식하지 못했고, 매개변수와 변수사이에 역동적인 대입의 관계를 인식하지 못했다. 또한, 매개변수와 변수사이에 변이(variation)의 독립성을 인식하지 못했을 뿐만 아니라, 두 문자기호사이의 변이와 고정의 관점의 전환이 적절하게 이루어지지 않았다.

상기한 연구의 결과로부터 다음과 같은 네 가지 논점 및 시사점을 고려해 볼 수 있다. 먼저, 연구결과에서 학생들의 매개변수에 대한 초기의 개념이미지는 이후의 고등적인 개념학습과 다양한 문제해결을 거치더라도 뚜렷하게 변화하지 않았다. 이것은 매개변수개념에 대한 초기의 학습경험의 중요성을 강조하는 것이다. 그러나, 우리나라 수학교과서에서 일반화 수단으로서 매개변수는 다른 문자기호에 비해 소극적으로 다루어지고 있고, 그 개념에 대해 의미 있게 이해하도록 전개되지 못하고 있는 실정이다. 이에 대해 후속연구에서는 매개변수개념에 대해 의미 있게 지도할 수 있도록 지원하는 다양한 교수자료의 개발과 그 효과에 대해 살펴보는 연구가 필요하다.

둘째, 연구결과로부터 현재 학교대수에서 사용되고 있는 상수라는 용어는 매개변수의 본질적인 측면의 이해를 방해하는 요인으로 작용하고 있다는 것이 발견되었다. 상수라는 용어는 매개변수라는 용어에 비해 사용하기 편안하고 학생들의 인지수준에 적합해보일지모르지만, 상수라는 용어에서 배어나오는 의미가 학생들에게 매개변수에 대한 잘못된 개념이미지를 심어주고 있고, 이것은 학생들의 자연스러운 성향에 거스르는 것이다. 이에 대해, 교육과정개발자들은 매개변수의 본질적인 개념을 적절하게 반영한 용어에 대해 재고할 필요가 있다.

셋째, 문자기호에 대한 학생들의 인식양상의 결과 특정한 문자기호에 대해 고정적인 의미를 부여하고 있다는 것이 발견되었다. 이는 Bills(2001)의 연구에서 보고한 결과와 동일한 것으로, 이러한 문자기호의 고정화는 그 역할을 분명하게 규정하기 위해 존재하는 관습이다. 문자기호의 고정화는 학생들이 문자기호의 다른 역할을 구별하여 사용하도록 지원하지만, 문자기호의 역할을 유연하게 변화시켜 나가야하는 상황에서 어려움에 처하게 한다. 학생들이 문자기호를 의미 있게 사용하기 위해 한 문자기호에 대한 역할을 고정화하기보다는 유연하게 변화시켜 나갈 수 있도록 지도할 필요가 있다. 이를 위해 교사는 문제해결과정에서 맥락에 따라 문자기호의 역할이 변하는 상황에 대해 학생들이 주의를 기울일 수 있도록 북돋울 필요가 있다.

마지막으로, 학교대수에서 매개변수에 대한 구조적인 해석을 강조하기 위해 상수라는 용어를 대신하여 사용하고 있지만, 학생들이 접근하는 성향은 조작적일 수 있다. 이것은 Sfard가 수학적 개념을 이해하기 위해 효과적인 접근방식에 대해 언급한 진술을 환기시킨다. 즉, 수학적 개념의 구조적인 이해는 도달해야할 목적지이지 출발점이 될 수 없고, 조작적인 접근에서 출발하

여 구조적인 접근으로 발달시켜나가야 한다. 이것은 매개변수개념에 대한 이해를 위해 접근할 수 있는 방식에 대한 정보를 암시하는 것으로, 매개변수개념에 접근하는 방식은 조작적인 접근에서 출발할 필요가 있다.

본 연구는 학생들이 여러 가지 문자기호에 대해 어떻게 인식하고 있는지를 초보적인 학습자와 예비교사들을 대상으로 설문조사를 통해 수집된 자료를 분석함으로써 그 결과에 대한 논점을 바탕으로 현 대수교육에 시사점을 도출하였다. 실제로, 대전지역의 중학교 2학년 한 교실의 35명의 학생들과 B대학교 학부과정에 있는 예비교사 73명을 대상으로 문자기호에 관한 동일한 설문조사를 실시하여 그 결과에 대해 혼합적으로 분석하는 연구를 실시하였지만, 두 집단 각각의 표본이 모집단을 대표한다고 보기 어렵기 때문에 연구결과를 일반화하여 확대해석하기에는 무리가 있다. 끝으로, Sfard & Linchevski(1994)는 대수 학습에서 문자기호의 의미의 다양성은 대수가 가진 힘의 근원이라고 주장하며, 다양한 변수개념의 의미 있는 이해를 강조했다. 특히, 다양한 변수개념 중 메타변수로 간주되는 매개변수는 고등 대수적 추론과 함수학습을 위해 중요한 개념이다. 이에 대해 본 연구는 매개변수개념과 관련하여 우리나라 학교대수에서 도입되고 있는 방식에 대해 문제점을 불러일으키는 것이고, 후속연구로서 매개변수개념의 의미 있는 이해를 위한 제반의 학습조건을 탐색하는 실증적인 연구가 활발히 이루어지길 기대한다.

참고문헌

김남희(1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교대학원 박사학위논문.

김남희(2004). 매개변수 개념의 교수-학습에 관한 연구. **수학교육연구, 14**(3), 305-325.

김성준 & 박선용(2002). 학교수학에서의 매개변수의 역할 고찰. **학교수학, 4**(3), 495-511.

이준열, 최부림, 강동재, 한대희, 이미라, 신송임, 이애경, 강해기(2009). **중학교 수학1**. 서울: 천재교육.

이준열, 최부림, 강동재, 한대희, 이미라, 신송임, 이애경, 강해기(2009). **중학교 수학2**. 서울: 천재교육.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호(1975). 초등수학의 구조적 접근. **논문집, 10**, 421-439.

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. In L. C. Helen, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Eduaction* (vol. 2, pp. 129-136). University of Melbourne, Australia.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra Perspectives on school algebra. In R. Sutherlan et al. (Eds.), *Perspective on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bruner, J. S. (1963). *The Process of Education.* New York: Vintage Books.

Cressvell J. W. (2009). **연구방법: 질적, 양적 및 혼합적 연구의 설계**(김영숙, 류성림, 박판우, 성용구, 성장환, 유승희, 임남숙, 정종진, 허재복 역.). ㈜시그마프레스. (원저 2009 출판).

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design* *research on the understanding of the concept of parameter*. Dissertation Utrecht University. Nederlands.

Dubinsky, D. E., & Harel. G. (1992). *The Concept of Function, Aspect of Epistemology and pedagogy*. MAA REPORT25.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? In da Ponte, J. P. & Matos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Eduaction* (vol. 2, pp. 368-375). Lisbon, Portugal.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 116-140.

Hashemi, M., Maleki J., Sheikhaliyan F. & Gooya, G. (2011). How sutudents conceive the differnce between variable and parameter; the case of Ali. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, p. 454). Ankara, Turkey.

http://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%88%98%ED%95%99_%EC%83%81%EC%88%98

http://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000700498

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11 – 15. *Educational studies in mathematics, 33*(1), 1-19.

NCTM(2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*: National Council of Teachers of Mathematics.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann(Eds.), *Children's understanding of mathematics:11-16* (pp. 102-119). John Murray.

Martinez, M. V., & Castro Superfine, A. (2012). Integrating Algebra and Proof in High School: Students' Work with Multiple Variables and a Single Parameter in a Proof Context. *Mathematical thinking and learning, 14*(2), 120-148.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational studies in mathematics, 15*(3), 277-289.

Goldenberg, P., Lewis, P., & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function, In E. D. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The Concept of Function, Aspect of Epistemology and pedagogy* (pp. 235-260). MAA REPORT25

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The mathematics teacher, 85*(7), 557-561.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher, 81*(6), 420-427.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge university press.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification-the case of algebra. *Learning mathematics* (pp. 87-124). New York: Springer.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. Cambridge university press.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? In M. J. Hoines & A. J. Bishop (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 361–368). Bergen, Norway.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12, 8*, 7-13.

Van Hiele, P. M. (2009). **구조와 통찰** (우정호, 박교식, 남진영, 강현영, 임재훈, 권석일, 박선용, 최지선 역.). 서울: 경문사. (원저 1986 출판)

A Comparison of Pre-Service Teachers' and Students' Understanding of the Concept of Parameters as Means of Generalization

Jee, Young Myong (Graduate School, Seoul National University)
Yoo, Yun Joo (Seoul National University)

From the early stages of learning algebra, literal symbols are used to represent algebraic objects such as variables and parameters. The concept of parameters contains both indeterminacy and fixity resulting in confusion and errors in understanding. The purpose of this research is to compare the beginners of algebra and pre-service teachers who completed secondary mathematics education in terms of understanding this paradoxical nature of parameters. We recruited 35 middle school students in eight grade and 73 pre-service teachers enrolled in a undergraduate course at one university. Using them we conducted a survey on the perception of the nature of parameters asking if one considers parameters suggested in a problem as variables or constants. We analyzed the collected data using the mixed method of qualitative and quantitative approaches. From the analysis results, we identified several difficulties in understanding of parameters from both groups. Especially, our statistical analysis revealed that the proportions of subjects with limited understanding of the concept of parameters do not differ much in two groups. This suggests that learning algebra in secondary mathematics education does not improve the understanding of the nature of parameters significantly.

* Key Words : Literal symbol(문자기호), Variable(변수), Constant(상수), Parameter(매개변수), Mixed method(혼합연구)

논문접수 : 2014. 11. 15
논문수정 : 2014. 12. 10
심사완료 : 2014. 12. 10

<부록>

기울기가 2이고, y절편이 k인 일차함수식

$$y = 2x + k$$

에 대해 아래의 물음((1)~(7))에 답하시오.

(1) 주어진 식에 변수가 (있다, 없다).

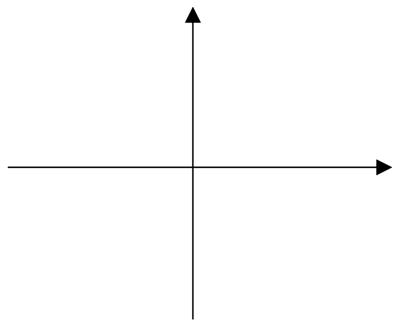
☞ 변수가 있다고 생각하는 경우, 변수는 (   )이다.
(괄호 안에 해당되는 것을 모두 작성하시오)
이유 :

(2) 주어진 식에 상수가 (있다, 없다)

☞ 상수가 있다고 생각하는 경우, 상수는 (   )이다.
(괄호 안에 해당되는 것을 모두 작성하시오)

이유 :

(3) 주어진 일차함수의 그래프의 개형을 그리시오.



(4) 문자 x 에 의해 결정되는 것은?

(5) 문자 k 에 의해 결정되는 것은?

(6) 문자 x가 사용된 방식과 문자 k가 사용된 방식을 비교하여 설명해 보시오.

(7) 문자 x와 문자 k사이에 관계를 설명해 보시오.