

# A Study on the Determination of the Risk-Loaded Premium using Risk Measures in the Credibility Theory

Hyun Tae Kim<sup>a,1</sup> · Yongho Jeon<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Department of Applied Statistics, Yonsei University

(Received October 23, 2013; Revised November 4, 2013; Accepted November 11, 2013)

---

## Abstract

The Bayes premium or the net premium in the credibility theory does not reflect the underlying tail risk. In this study we examine how the tail risk measures can be utilized in determining the risk premium. First, we show that the risk measures can not only provide the proper risk loading, but also allow the insurer to avoid the wrong decision made with the Bayesian premium alone. Second, it is illustrated that the rank of the tail thickness among different conditional loss distributions does not preserve for the corresponding predictive distributions, even if they share the identical prior variable. The implication of this result is that the risk loading for a contract should be based on the risk measure of the predictive loss distribution not the conditional one.

Keywords: Credibility theory, risk measure, Bayes premium.

---

## 1. 서론

신뢰도이론(credibility theory)은 손해보험의 핵심을 이루는 보험수리 이론으로서, 보험회사에서 피보험자의 보험료를 책정할 때 해당 피보험자의 평균 과거손실과 회사에 가입된 모든 피보험자들의 평균 과거손실의 가중평균을 이용하는 기법이다. Bühlmann (1967)에 의해 정립된 전통적인 신뢰도이론은 일반보험의 수리적 모형에서 매우 중요한 모형으로 인정받아 광범위하게 사용되어 왔으며 많은 일반화와 후속연구 역시 진행되어 왔다 (Bühlmann과 Gisler, 2005; Klugman 등, 2008). Bühlmann의 신뢰도이론에 의하면 이 가중평균은 많은 경우 베이시안 통계학에서의 예측분포(predictive distribution)의 기대치가 되는데 이를 베이스보험료라 부르며 다가오는 기간 동안의 피보험자의 보험료를 산정하는 근간이 된다. 수리적 관점에서 베이스보험료는 개별손실의 평균적 경험치에 전체 포트폴리오 평균손실을 반영하는 위험보험료라고 할 수 있다.

표준적인 신뢰도이론의 한계점 중 하나는 예측손실분포의 많은 특성들 중 기대치만을 고려한다는 것인데, 실제 많은 위험들이 예측손실분포의 기대치가 아니라 오른쪽 꼬리에서 나타나게 된다는 점에서 기존 이론은 실제 인수한 위험을 올바르게 측정하는데 한계가 있다고 할 수 있다. 일반적인 보험손실모형에서 기대치 이외의 다른 통계량으로 위험을 측정하려는 시도는 예전부터 보험관련 연구를 통해 많이 알려

---

This research was supported by Basic Science Research Program of the National Research Foundation of Korea (2013-11-0617 for Jeon; 2013-11-1528 for Kim) funded by the Korean government.

<sup>1</sup>Corresponding author: Assistant Professor, Department of Applied Statistics, Yonsei University, 50 Yon-seiro, Seoul 120-749, Korea. E-mail: [jhtkim@yonsei.ac.kr](mailto:jhtkim@yonsei.ac.kr)

져 있으며, 분산이나 표준편차의 적절한 배수를 사용하는 것이 그 내용 중 하나이다. 하지만 이러한 산포측도(dispersion measure)들은 평균을 중심으로 양쪽의 위험을 대칭적으로 측정한다는 점에서 한쪽 위험에만 관심이 있는 손실분포의 위험을 정확히 반영한다고 볼 수 없다. 이와 관련된 논의는 최근 들어 위험측도(risk measures)라는 이름을 통해 금융과 보험 전 분야에 걸쳐 시장위험과 신용위험, 나아가 위험자본을 측정하는 도구로서 널리 사용되고 있다 (Pflug와 Römisch, 2007; Denuit 등, 2005). 보통 위험관리에 관한 선행연구에서는 위험측도는 위험자본의 양을 뜻하지만, 본 논문에서는 예측분포의 위험측도는 할증보험료를 뜻하며 할증보험료와 베이즈보험료의 차이는 안전할증(safety loading) 또는 위험마진의 의미를 가진다.

위의 논의를 바탕으로 본 논문에서는 신뢰도이론에서 이론적 순보험료로 사용되어온 베이즈보험료가 갖는 몇 가지 한계점들을 위험측도의 관점에서 비판적으로 고찰하고자 한다.

첫째, 위에서 언급한 바와 같이 베이즈보험료가 포트폴리오 위험을 반영하지만 손실의 꼬리위험을 적절히 반영하지는 않는다. 우리는 꼬리위험을 반영하는 꼬리위험측도(tail risk measures)를 안전할증의 수단으로 사용할 경우 베이즈보험료와 차이가 얼마나 크게 날 수 있는지를 알아볼 것이다. 특히, 대표적인 꼬리위험측도인 VaR와 CTE를 이용하여 위험마진을 좀 더 객관적이고 논리적으로 구할 수 있는 근거를 제시할 것이다.

둘째, 꼬리위험측도를 고려하지 않고 베이즈보험료만을 사용할 경우 잘못된 의사결정을 가져올 수 있음을 모수적인 손실모형을 통해 보일 것이다. 구체적으로, 베이즈보험료를 기준으로 했을 때 보험료가 작게 계산된 위험이 할증보험료를 기준으로 할 경우 보험료가 더 클 수 있음을 확인할 것이다. 이런 점에서 볼 때 위험측도를 사용하여 계산된 할증보험료는 개별담보의 위험마진을 적절하게 결정하는데 도움이 될 뿐 아니라, 서로 다른 담보들에 내재하는 실제위험을 상대적으로 비교함으로써 회사 전체의 위험관리 측면에서 도움이 될 수 있다.

셋째, 조건부손실분포와 예측분포간의 꼬리두께의 관계에 대하여 다룰 것이다. 주어진 조건부손실분포와 그에 상응하는 예측분포를 비교할 때, 전자보다 후자의 꼬리가 더 두터운 혼합(mixing)분포의 일반적인 성질로서 잘 알려져 있다. 그러나 꼬리두께가 다른 두개의 조건부손실분포에 대해 동일한 사전분포를 가정할 때 각각의 예측분포의 꼬리두께는 조건부손실분포에 비해 두터워지기는 하겠지만 꼬리두께의 순위까지 보존할 것인가에 대한 일반적인 답은 명확하지 않다. 본 논문에서는 알려진 많은 모수적 모형에 대해서 이 질문에 대한 답은 긍정적이지만 항상 그러하지는 않음을 보일 것이다. 즉, 주어진 두 조건부손실분포의 꼬리두께의 순위가 상응하는 예측분포의 경우 뒤바뀔 수 있음을 보일 것이다. 이 결과의 함의는 안전할증의 올바른 책정을 위해서는 조건부손실의 위험측도 대신 반드시 예측분포의 위험측도를 사용해야 한다는 점이다.

이러한 점에서 본 논문은 현재 손해보험업계에서 관심을 갖는 위험에 기반한 상품개발에 직접적으로 관련있는 실용적이면서도 의미있는 문제를 다룬다고 하겠다. 논문의 순서는 다음과 같다. 2장에서는 신뢰도이론과 그 배경에 대해 소개하고 한계점에 대해 논의한다. 3장에서는 위험측도를 정의하며 예측분포의 꼬리위험측도를 소개한다. 4장에서는 베이즈보험료와 할증보험료에 대한 다양한 비교분석을 위험측도의 관점에서 시도한다.

## 2. 신뢰도이론

### 2.1. 신뢰도이론의 수리적 모형

보험사는 보유한 한 사업 부문 내에 존재하는 피보험자들을 보험위험에 따른 다양한 위험분류군(risk

segmentation classes)들로 나누어 보험료를 책정하는 것이 일반적이다. 위험분류군을 세세하게 나누면 각 군집내의 위험 특성을 잘 살려 공정한 보험료를 책정할 수가 있으므로 위험관리가 용이해지는 장점이 있다. 하지만, 분류가 세분화 될수록 각 군집 내의 데이터가 줄어들어 통계적으로 믿을 만한 보험료를 계산할 수 없게 되므로 위험분류를 지나치게 세분화하지는 않는 것이 바람직하다. 따라서 위험분류는 그 속성상 두 가지의 상충되는 면이 있으며, 이상적으로는 보험료를 책정할 때 군집내의 동질적 위험들과 함께 전체 위험(collective risk) 자료들을 함께 고려하는 방법이 필요하게 되는데, 이는 역사적으로 손해보험의 이론적이고 실질적으로 중요한 문제가 되어왔다 (Casualty Actuarial Society, 1988).

Bühlmann (1967)에 의해 정립된 현대적 신뢰도이론은 베이지안의 방법론에 기초하여 동질위험군 내에서 관측된 평균손실과 전체 위험군에서 관측된 평균손실의 가중평균으로 보험료를 표현한다. 이를 수리적으로 구현하기 위해 신뢰도이론에서는 다음과 같은 표준적인 가정들을 전제한다.

1. 위험 포트폴리오에 많은 위험분류군이 존재하며 각 위험군의 위험정도(risk profile)는 해당 위험군의 위험모수  $\theta$ 로 표현된다. 따라서 서로 다른 위험군들은 서로 다른  $\theta$ 값을 가진다.
2. 서로 다른 위험모수를 통계적으로 표현하기 위해  $\theta$ 를 어떤 확률변수  $\Theta$ 의 실현된 값이라고 가정한다.  $\Theta$ 는 사전확률변수이며 그 밀도함수는  $\pi(\theta)$ 로 표기한다.
3.  $\Theta = \theta$ 가 주어졌을 때, 동질위험군에서 관측된 과거손실  $X_1, \dots, X_n$ 은 조건부로 서로 독립이며 손실 모형분포  $F(x|\theta)$ 를 따른다.

신뢰도이론의 핵심은 어떤 위험군에서 발생한 과거손실  $X_1, \dots, X_n$ 이 주어졌을 때, 같은 위험군 내 피보험자의 다음 계약기간의 보험료를 계산하는 것이다. 위의 가정들을 바탕으로 할증이 없는 순보험료 산출의 몇 가지 가능한 방법에 대해 생각해 보자. 위의 가정들에 의하면  $\theta$ 를 위험모수로 가지는 피보험자의 순보험료는 해당 손실 확률변수  $X_{n+1}|\theta$ 의 기대치인  $\mu(\theta) = E(X_{n+1}|\theta)$ 가 가장 자연스럽다. 하지만 이 보험료는 해당 피보험자의 위험모수를 정확하게 알 수 없기 때문에 계산이 불가능하다. 다음으로 아래의 식 (2.1)과 같은 일괄보험료(collective premium)  $\mu$ 를 사용할 수 있는데 이는 평균손실을 모든 피보험자에 대해 다시 기대값을 계산한 것으로 위험분류가 없는 상태의 포트폴리오 전체에 대한 순보험료로 간주될 수 있다.

$$\mu = E[E(X_{n+1}|\theta)] = \int \mu(\theta)\pi(\theta)d\theta. \quad (2.1)$$

그러나 일괄보험료는 과거 손실정보  $X_1, \dots, X_n$ 을 고려하지 않는다는 점에서 좋은 선택이 될 수 없다.

마지막으로 고려할 수 있는 보험료는 예측확률변수(predictive random variable)  $X_{n+1}|X_1, \dots, X_n$ 의 기대치이다.

$$E[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \int \mu(\theta)\pi(\theta|\underline{x})d\theta = E_{\theta|\underline{x}}[\mu(\theta)]. \quad (2.2)$$

식 (2.2)와 같이 표현되는 예측분포의 기대치는 위험모수의 사후확률분포  $\pi(\theta|\underline{x})$ 를 이용함으로써 과거 손실정보를 반영한다는 점에서 사전분포를 이용한 일괄보험료에 비하여 우수하다. 전통적인 신뢰도이론에서는 이와 같이 현실적으로 계산 가능하며 과거 관측치를 반영하는 예측분포의 기대치를 베이지보 보험료 또는 순보험료라고 부르기도 한다.

손실모형이 선형지수족(linear exponential family; LEF)이고 켈레사전분포(conjugate prior)를 사용할 때, 적절한 가정 하에서 베이지보보험료는 피보험자의 과거손실의 평균  $\bar{X} = n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$ 과 일괄보험료  $\mu$ 의 가중평균으로 표현된다는 것은 잘 알려져 있다 (Jewell, 1974). 이 때, 예측분포의 기대치가

과거손실평균의 선형함수이고,

$$E(X_{n+1}|\underline{x}) = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu \quad (2.3)$$

가중치  $Z$ 는

$$Z = \frac{n}{n + \frac{E[\text{Var}(X|\theta)]}{\text{Var}[\mu(\theta)]}}, \quad 0 \leq Z < 1 \quad (2.4)$$

로 주어지는데 경우에 따라  $E[\text{Var}(X|\theta)] = E[v(\theta)] = v$ 와  $\text{Var}[\mu(\theta)] = a$ 로 표기하여  $Z = n/(n + v/a)$ 로 쓰기도 한다. 한편, 손실분포가 LEF에 속하지 않거나 그 사전분포가 켈레가 아닌 일반적인 경우에는 베イズ보험료가 과거 손실에 대한 선형함수로 표현된다는 보장이 없다. 그럼에도 불구하고, 최소제곱법에 의하여 베イズ보험료를 과거 손실의 선형함수로 근사적으로 구한 값을 신뢰도보험료(credibility premium)로 사용하는 것은 오랫동안 일반적인 신뢰도이론의 방법론으로 남아있다 (Bühlmann, 1967; Klugman 등, 2008). 다시 말해, 신뢰도보험료는

$$P_c = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu \quad (2.5)$$

로 주어진다.

요약하자면, 신뢰도보험료와 베イズ보험료는 특정한 조건하에서 동일한 결과를 나타내지만 일반적으로 다르며 전자가 후자의 선형 근사값이다. 신뢰도보험료와 베イズ보험료가 동일한 경우에 신뢰도가 정확하다(exact credibility)고 표현한다.

## 2.2. 신뢰도이론의 한계점

신뢰도이론에서 계산된 신뢰도보험료 또는 베イズ보험료는 본질적으로 기대치만을 고려하고 있어 실제 내재된 분포의 위험성을 적절히 반영하지 못한다는 점에서 한계가 있다. 예를 들어, 예측분포가 지수와 파레토분포인 경우를 비교할 때 꼬리의 두터움 정도가 차이가 나므로 실제 내재한 위험은 후자가 훨씬 크지만, 두 분포들의 평균이 같다면 베イズ보험료는 같을 것이다. 이 경우 베イズ보험료에 분포의 위험에 따른 적절한 위험마진을 더한 할증보험료를 사용하는 것이 일반적이며 예측분포의 분산이나 표준편차의 적절한 배수를 베イズ보험료에 더할 수 있다. 하지만 이러한 산포측도들은 평균을 중심으로 양쪽의 위험을 대칭적으로 측정한다는 점에서 한쪽위험에만 관심이 있는 손실분포의 위험을 정확히 반영한다고 볼 수 없다. 따라서 산포측도가 아닌 꼬리위험측도를 이용하여 할증보험료를 결정하는 방법을 모색하는 것이 합리적일 것이다.

## 3. 예측분포와 위험측도

### 3.1. 위험측도

최근 금융과 보험에서 관심의 대상이 되는 위험측도는 일반적으로 손실확률변수  $X$ 를 양의 실수값으로 대응하는 함수  $\rho : X \rightarrow R^+$ 로 정의된다. 다시 말해, 위험측도는 주어진 확률변수를 하나의 숫자로 요약한 계량값이라고 할 수 있는데, 최근에는 이러한 위험측도가 위험을 고려한 보험료 및 재보험, 나아가 위험자본의 결정에도 사용되고 있으며, 이를 뒷받침하는 이론들 역시 많은 진전이 있어왔다 (Pflug와 Römisch, 2007; Denuit 등, 2005). 전통적인 평균이나 분산이 분포의 중심 또는 그 중심주위의 산포를 측정하려는 것이었다면, 최근 금융이나 보험위험관리에서 널리 사용되는 위험측도는 분포의 한쪽 꼬리

에 더 관심을 많이 가진다는 점에서 다르다. 대표적인 위험측도로서, 연속형 손실확률변수  $X$ 의 분포함수가  $F(x)$ 라고 가정할 때 적절한 신뢰수준  $p(0 < p < 1)$ 에 대하여 Value-at-Risk(VaR)와 Conditional Tail Expectation(CTE)는 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \text{VaR} : \text{VaR}_p(X) &= F^{-1}(p), \\ \text{CTE} : E(X|X > F^{-1}(p)) &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 F^{-1}(u)du. \end{aligned}$$

여기에서 CTE는 Conditional VaR 또는 Expected Shortfall, Tail VaR로 불리기도 한다.  $p$ 값은 손실을 충분히 막아낼 수 있는 수준에서 정하는 것으로서, 수리적인 것이라기 보다는 담보위험에 대해 보험사가 적절하다고 판단하는 수준에서 결정된다. 물론, 자산건전성(solventy) 확인을 위한 목적으로 한다면  $p$ 값은 1에 아주 가까운 값으로, 감독기관의 규제나 지도사항에 기반해 정해질 것이다. 보험료책정의 관점에서는 상대적으로 작은  $p$ 값을 적절히 정하여 해당수준에서의 위험측도를 안전할증을 포함한 할증 보험료로 볼 수 있다.

이론상으로 무수히 많은 다른 위험측도들을 만들어 낼 수 있으나 위험측도에 대한 학계의 연구는 특정한 수리적 조건들을 만족하는 위험측도들을 찾아내어 그 성질을 규명하는 데에 많은 관심을 가져왔다 (McNeil 등, 2005). 특히 임의의 확률변수에 대해 전환불변성(Translation invariance), 하위부가성(Subadditivity), 양동차성(Positive homogeneity), 단조성(Monotonicity)의 네가지 조건들을 만족하는 위험측도  $\rho$ 를 일관위험측도(coherent risk measure; CRM)라고 정의한다 (Artzner 등, 1999). 이러한 네 조건들은 바람직한 위험측도라면 반드시 만족해야하는 일종의 공리로 여겨지며 학계의 주목을 받아왔다. 위험측도가 가져야 할 일반적 성질에 대한 연구와 함께 다른 한 편에서는 이러한 성질을 만족하는 실제 위험측도들을 찾는 연구들이 진행되어 왔는데, 이와 연결해 주목받는 위험측도의 한 종류가 바로 왜곡위험측도(distortion risk measure; DRM)이다 (Wang, 2000; Pflug와 Römisch, 2007; Denuit 등, 2005). DRM은 우선 왜곡함수라 불리는  $g$ 를 필요로 하는데  $g$ 는  $[0, 1]$ 에서 정의되며  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ 을 만족하는 임의의 증가함수이다. 왜곡함수가 주어지고  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ 라 쓰면 DRM은 식 (3.1)과 같이 정의된다.

$$\rho_g(X) = - \int_{-\infty}^0 [1 - g(\bar{F}(x))] dx + \int_0^{\infty} g(\bar{F}(x)) dx, \quad (3.1)$$

여기서 DRM의 실제 계산을 위해 만약 왜곡함수가 미분이 가능하며 분포가 연속형이라고 가정하면 위의 DRM은

$$\rho_g(X) = \int_0^1 F^{-1}(p)dg(p) = \int_0^1 F^{-1}(p)g'(1-p)dp$$

로 표현되므로 (Jones와 Zitikis, 2003), 결국 DRM은 VaR의 값을 왜곡함수의 미분함수로 가중평균을 하는 개념이 된다. 위험관리에서 DRM의 첫 번째 유용성은 현재 널리 사용되는 대표적인 위험측도인 VaR와 CTE, 그리고 다른 많은 위험측도들을 포함한다는 점이다. 예를 들어 VaR와 CTE에 상응하는 왜곡함수들은 각각

$$g_{\text{VaR}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1-p, \\ 1, & t > 1-p, \end{cases} \quad g_{\text{CTE}}(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-p}, & t \leq 1-p, \\ 1, & t > 1-p \end{cases}$$

으로 주어진다. DRM의 두 번째 유용성은 바로 CRM과의 연결고리에 있다. 즉, 어떤 DRM의 왜곡함수가 오목(concave)함수이면 반드시 CRM의 네 공리를 만족하게 된다는 것이다. 이는 주어진 위험

측도의 성질을 알기 위한 매우 편리한 도구가 되는데, 예를 들어, VaR의 왜곡함수는 계단함수(step function)로서 VaR는 일관위험측도가 아닌 반면에, CTE의 왜곡함수는 오목함수로서 CRM의 공리들을 모두 만족한다. 실제 VaR는 꼬리가 두터운 분포들에 대해 위의 공리들 중 하위부가성을 만족하지 않는 경우가 있음을 보일 수 있으나, 이론적인 열등함에도 불구하고 VaR는 여전히 금융권에서 표준적으로 사용되는 위험측도이다. 본 연구에서는 VaR와 CTE를 모두 이용하여 예측분포에서의 할증보험료를 결정하였다.

### 3.2. 예측분포의 위험측도와 안전할증

신뢰도이론에서 위험측도로 보험료를 계산하는 선행연구는 Kim과 Jeon (2013), Wang과 Young (1998) 등이 있다. 예측분포에 대해 꼬리위험측도인 VaR 또는 CTE를 계산하기 위해서는 예측분포의 밀도함수가 필요하다. 예측밀도함수는 과거 손실표본  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 에 대해 식 (3.2)와 같이 정의된다.

$$f(y|\underline{x}) = \frac{\int f(y|\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \pi(\theta) d\theta}{\int \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \pi(\theta) d\theta} = \int f(y|\theta) \pi(\theta|\underline{x}) d\theta, \quad (3.2)$$

여기서  $\pi(\theta|\underline{x})$ 는 사후밀도함수이다. 앞에서 기술한 대로 손실모형이 LEF이고 켈레사전분포를 사용하면 예측밀도함수는 잘 알려진 분포가 되는 경우가 많다. 예를 들어, 손실모형이 평균  $\theta$ 인 포아송을 따르고 모수  $\Theta$ 가 감마분포를 따를 때 예측분포는 음이항분포가 된다. 또 다른 예로서, 손실모형이 평균이  $1/\theta$ 인 지수분포이고  $\Theta$ 가 감마분포일 때 예측분포는 파레토를 따르게 된다. 예측분포의 VaR와 CTE는 예측분포가 닫힌 수식(closed-form) 형태로 주어지는 경우 쉽게 구할 수 있으며, 그렇지 않다면 일반적인 수치해석적인 방법으로 구할 수 있다. 예측분포의 꼬리위험측도가 주어졌을 때 보험료의 안전할증은 꼬리위험측도와 베イズ보험료의 차이, 즉,  $\rho(Y|\underline{x}) - E(Y|\underline{x})$ 로 정의되며, 꼬리위험측도의 값 자체는 할증보험료가 된다. 할증보험료를 결정할 때 신뢰수준  $p$ 는 회사의 위험과 수익을 적절히 감안하여 결정되거나 위험자본을 측정하는 경우와 비교할 때 그 값은 작을 것이다.

## 4. 베イズ보험료에 대한 비판적 고찰

### 4.1. 모수적 손실모형

서론에서 제시한 바와 같이 이 장에서는 모수적 모형에 기반하여 베イズ보험료의 몇 가지 한계점들에 대해 예측분포의 위험측도 관점에서 논의할 것이다. 이를 위해 세 가지의 조건부손실모형-지수모형, 감마모형, 역(inverse)감마모형-을 고려한다. 이 세 분포는 음이 아닌 영역에서 정의되고 양의 첨도를 가지는 전형적인 손해모형의 분포들이면서 꼬리의 두께가 서로 달라 꼬리위험을 비교하기에 적합한 모형들이다. 일관된 비교 분석을 위해 세 모형의 모수에 대한 사전분포는 동일한 감마분포

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \theta > 0 \quad (4.1)$$

를 사용한다. 이 사전분포의 평균은  $\alpha/\beta$ , 분산은  $\alpha/\beta^2$ 이다. 이제 각각의 모형에 대한 분포적 성질에 대해 알아보기로 하겠다.

**4.1.1. 지수-감마 모형** 모수의 사전분포가 감마분포이고 조건부 손실모형이 지수분포

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad (4.2)$$

를 따를 때 크기가  $n$ 인 손실표본의 주변분포가 파레토분포

$$f(\underline{x}) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(\sum x_i + \beta)^{n+\alpha}}$$

임은 잘 알려져 있다. 이때 감마분포는 켈레사전분포이며 사후분포는

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\theta^{n+\alpha-1} (\sum x_i + \beta)^{n+\alpha} e^{-\theta(\sum x_i + \beta)}}{\Gamma(n+\alpha)}$$

로 주어진다. 그리고  $Y = X_{n+1}$ 에 대한 예측분포는

$$f(y|\underline{x}) = \frac{(n+\alpha)(\sum x_i + \beta)^{n+\alpha}}{(y + \sum x_i + \beta)^{n+\alpha+1}}$$

이다. 이는 잘 알려진 대로 모수가  $(n+\alpha, \sum x_i + \beta)$ 인 파레토분포이며 적률  $E(X^k)$ 이  $k < n+\alpha$ 일 때 만 존재한다. 이 경우 베이스보험료는 다음과 같으며 LEF의 성질에 의해 신뢰도보험료도 동일하다.

$$E(Y|\underline{X}) = \frac{\sum X_i + \beta}{n + \alpha - 1} = \frac{\alpha - 1}{n + \alpha - 1} \frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{n}{n + \alpha - 1} \bar{X} = \frac{\alpha - 1}{n + \alpha - 1} \mu + \frac{n}{n + \alpha - 1} \bar{X},$$

여기서 일괄보험료  $\mu$ 는 감마확률변수의 역수에 대한 기대치를 이용하여  $\mu = E[\mu(\theta)] = E[1/\theta] = \beta/(\alpha - 1)$ 로부터 유도된다. 마지막으로 파레토분포의 VaR와 CTE는 각각 다음과 같이 주어진다 (Klugman 등, 2008).

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p(X) &= \left( \sum x_i + \beta \right) \left[ (1-p)^{-\frac{1}{n+\alpha}} - 1 \right], \\ \text{CTE}_p(X) &= \text{VaR}_p(X) + \frac{(\sum x_i + \beta)(1-p)^{-\frac{1}{n+\alpha}}}{n + \alpha - 1}. \end{aligned}$$

**4.1.2. 감마-감마 모형** 사전분포가 감마분포이고 조건부 손실모형도 감마분포

$$f(x|\theta) = \frac{x^{a-1} \theta^a e^{-\theta x}}{\Gamma(a)} \quad (4.3)$$

인 경우, 주변분포, 사후분포, 예측분포는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \frac{\Gamma(an + \alpha)}{\Gamma(a)^n \Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha (\prod x_i)^{a-1}}{(\sum x_i + \beta)^{an+\alpha}}, \\ \pi(\theta|\underline{x}) &= \frac{(\sum x_i + \beta)^{an+\alpha} \theta^{an+\alpha-1} e^{-\theta(\sum x_i + \beta)}}{\Gamma(an + \alpha)}, \\ f(y|\underline{x}) &= \frac{\Gamma(a + an + \alpha)}{\Gamma(an + \alpha) \Gamma(a)} \frac{y^{a-1} (\sum x_i + \beta)^{an+\alpha}}{(y + \sum x_i + \beta)^{a+an+\alpha}}, \end{aligned}$$

여기서 예측분포는 모수가 세 개인 generalized beta of the second kind(이하 GB2)로 불리는 분포로서, 모수는  $(an + \alpha, \sum x_i + \beta, a)$ 로 주어지며  $-a < k < an + \alpha$ 인 경우에만 적률  $E(X^k)$ 가 존재한다.

이 모형 역시 감마분포가 켈레사전분포이고 손실모형인 감마분포가 LEF에 속하므로 정확한 신뢰도의 성질에 의해 베이즈보험료

$$E[Y|X] = \frac{a(\sum x_i + \beta)}{an + \alpha - 1}$$

는 일괄보험료  $\mu = E[\mu(\theta)] = E[a/\theta] = a\beta/(\alpha - 1)$ 임을 이용하여

$$E[Y|X] = \frac{a(\sum x_i + \beta)}{an + \alpha - 1} = \frac{\alpha - 1}{an + \alpha - 1}\mu + \frac{an}{an + \alpha - 1}\bar{X}$$

로 표현될 수 있다. 이 모형은  $a = 1$ 인 특수한 경우 첫 번째 모형인 지수-감마모형이 된다.

여기서 다음과 같은 사항을 상기해야 할 것이다.

첫째, 지수모형과 감마모형 모두 생존함수가 지수적으로 감소하는 maximum domain of attraction of Gumbel(또는 MDA( $\Lambda$ ))로 줄여서 표기)로서 꼬리가 아주 두터운 편은 아니라는 점이다. 이는 Embrechts 등 (1997)의 극단치이론(Extreme Value Theory)에 근거한 것이다.

둘째, 그럼에도 불구하고 무조건적인 분포의 경우 파레토와 GB2 모두 꼬리가 두터운 분포로서 maximum domain of attraction of Frechet (또는 MDA( $\Phi$ ))로 분류된다. 이는 mixture 모형이 가지는 일반적인 성향이다.

마지막으로, GB2 분포의 경우 난수의 생성을 통한 시뮬레이션에 의존하지 않고 VaR와 CTE을 직접 구할 수 있다. 우선 세 모수가  $(\alpha, \theta, \tau)$ 로 주어진 GB2 분포를 가정하자. 이때 불완전 베타함수(incomplete beta function)  $\beta$ 에 대해 누적확률함수는

$$F(x) = \beta\left(\tau, \alpha; \frac{x}{x + \theta}\right)$$

로 표현될 수 있으므로 이를 이용하여 VaR를 계산 할 수 있다. 또한 GB2 분포의 제한손실변수(limited loss variable)인  $X \wedge d$ 의 기대치가 양수  $d$ 에 대해

$$E(X \wedge d) = \frac{\theta\tau}{\alpha - 1}\beta\left(\tau + 1, \alpha - 1; \frac{d}{d + \theta}\right) + d[1 - F(d)]$$

로 주어짐이 알려져 있으므로 이를 사용하여 CTE를 다음과 같이 계산할 수 있게 된다.

$$E[X|X > \text{VaR}_p(X)] = \frac{E(X) - E(X \wedge \text{VaR}_p(X))}{1 - p} + \text{VaR}_p(X).$$

**4.1.3. 역감마-감마 모형** 조건부손실분포의 밀도함수가 식 (4.4)와 같이 정의되는 역감마분포는 LEF에 속하지 않으며,  $k < a$ 인 경우에만 적률  $E(X^k)$ 이 유한하게 정의되는 꼬리의 분포가 매우 두터운 분포이며 생존함수가 승수적으로(power law) 감소하여 MDA( $\Phi$ )에 속함이 알려져 있다 (Giesecke 등, 2008).

$$f(x|\theta) = \frac{(\theta/x)^\alpha e^{-\frac{\theta}{x}}}{x\Gamma(\alpha)}. \quad (4.4)$$

이 모형은 Klugman 등 (2008, 예 20.29)에서 고려되었으나 예측분포는 다루어지지 않았다.

이 경우, 주변분포, 사후분포, 예측분포를 유도하면 각각 다음과 같다.

$$f(\underline{x}) = \frac{\beta^\alpha}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha + na)}{\Gamma(\alpha)^n \Gamma(\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \beta\right)^{\alpha+na}},$$



$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\theta^{na+\alpha-1} e^{-\theta(\beta+\sum \frac{1}{x_i})} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \beta\right)^{\alpha+na}}{\Gamma(\alpha+na)},$$

$$f(y|\underline{x}) = \frac{\Gamma(a+na+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha+na)} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \beta\right)^{\alpha+na} \left(\frac{1}{y}\right)^{a+1}}{\left(\frac{1}{y} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \beta\right)^{a+na+\alpha}}.$$

예측분포는 앞의 감마-감마모형과 같이 GB2 분포가 되지만 모수는  $(a, (\sum(1/x_i) + \beta)^{-1}, na + \alpha)$ 로 다르게 주어짐을 알 수 있다. 따라서 이 분포 역시 MDA( $\Phi$ )에 속하면서  $k < a$ 인 경우에만  $E(X^k)$ 가 존재한다. 마지막으로 베イズ보험료는

$$E[Y|X] = \frac{1}{a-1}(an + \alpha) \left(\sum \frac{1}{x_i} + \beta\right)^{-1}$$

로 계산된다. 이 모형의 경우 감마분포가 켈레사전분포이긴 하지만 손실함수가 LEF가 아니므로 신뢰도가 정확하지 않다. 따라서 베イズ보험료는 신뢰도보험료와 같지 않으며, 후자는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu(\theta) = \frac{\theta}{a-1}, \quad a > 1; \quad \mu = E[\mu(\theta)] = \frac{1}{a-1} \frac{\alpha}{\beta}; \quad \text{Var}[\mu(\theta)] = \frac{1}{(a-1)^2} \frac{\alpha}{\beta^2};$$

$$v(\theta) = \text{Var}[X|\theta] = E[X^2|\theta] - E[X|\theta]^2 = \frac{\theta^2}{(a-1)(a-2)} - \left(\frac{\theta}{a-1}\right)^2 = \frac{\theta^2}{(a-1)^2(a-2)}, \quad a > 2;$$

$$E[v(\theta)] = \frac{\alpha+1}{(a-1)^2(a-2)} \frac{\alpha}{\beta^2}; \quad Z = \frac{n}{n + \frac{E[v(\theta)]}{\text{Var}[\mu(\theta)]}} = \frac{n}{n + \frac{\alpha+1}{a-2}}.$$

따라서 신뢰도보험료는

$$PC = (1-Z)\mu + Z\bar{X} = \left(1 - \frac{n}{n + \frac{\alpha+1}{a-2}}\right) \cdot \frac{1}{a-1} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{n}{n + \frac{\alpha+1}{a-2}} \cdot \bar{X}$$

로 주어진다. 이 모형의 VaR와 CTE는 앞의 감마-감마모형과 동일한 방법으로 계산할 수 있다.

**4.1.4. 모수선택** 세 개의 모형들에 대해 우리는 다음의 모수들을 사용하였다. 우선 공통되는 감마사전분포에 대해서는  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 0.1$ 를 사용하였고 과거손실표본의 크기는 10으로 고정하였다. 조건부 손실분포의 모수는 감마-감마모형에 대해서는  $a$ 를 20과 0.8 두 경우를 고려하였다. 감마분포의 성질에 의해 위험률(failure rate)을 기준으로 할 때 전자는 증가위험률(increasing failure rate; IFR)을 가지며 지수분포보다 꼬리가 얇고, 후자는 감소위험률(decreasing failure rate; DFR)을 가지며 지수분포보다 꼬리가 두텁다. 지수분포는  $a = 1$ 인 경우로 상수위험률(constant failure rate; CFR)을 가진다. 역감마-감마모형에서도  $a$ 를 20과 3의 두 경우를 고려하였다. 두 경우 모두 역감마의 적률이 유한하여 지수분포보다는 두터운 꼬리를 가진다. 이러한 모수선택은 임의적이지만 서론에서 제시한 주장들을 뒷받침 하는데 적절한 선택이며 자세한 사항은 해당 절에서 논의한다.

다음으로 예측분포에는 위의 모수들 외에도 과거손실 또한 모수로 주어진다. 우리는 과거손실의 합  $\sum x_i$ 에 대한 베イズ보험료와 꼬리위험측도의 민감도를 측정하려한다. 하지만 신뢰도보험료와 베イズ보험료가 동일한 첫 번째(지수-감마)와 두 번째(감마-감마) 모형과는 달리 세 번째(역감마-감마) 모형에

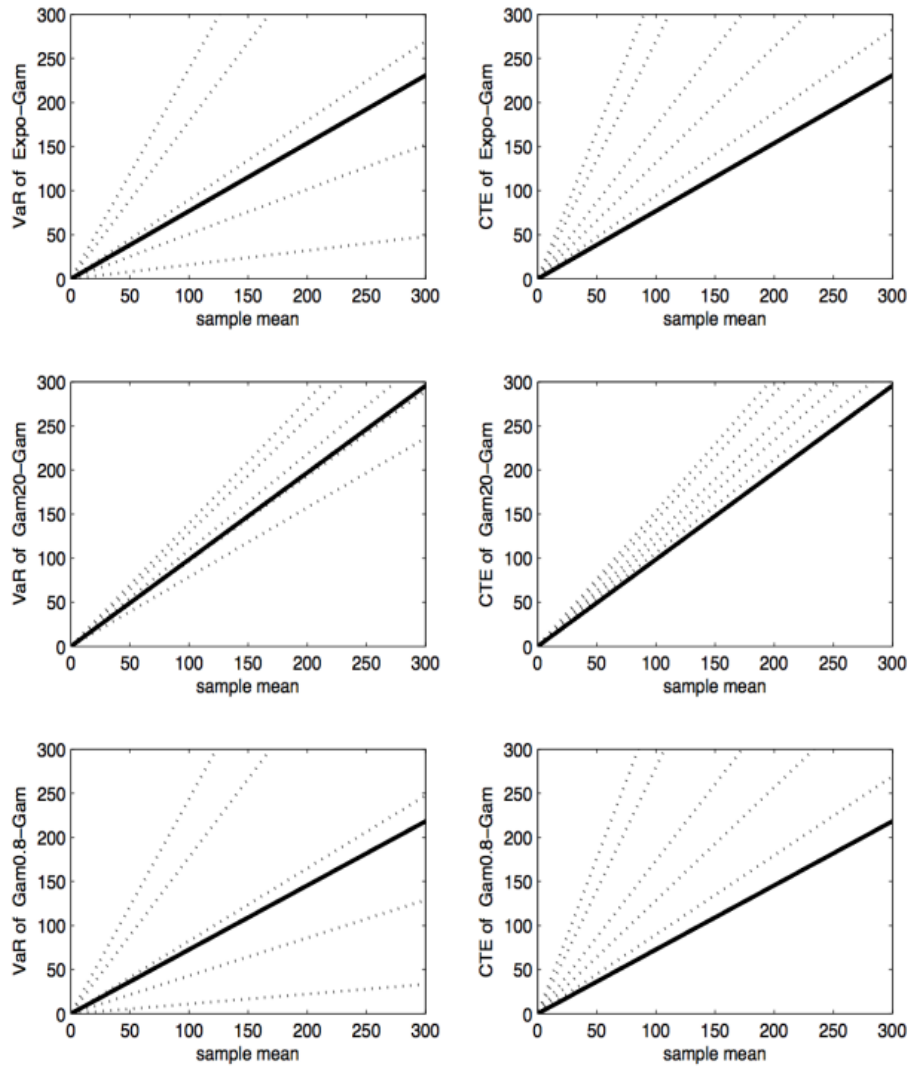


Figure 4.1. Comparison of Bayes and loaded premiums for the Exp-Gam and Gam-Gam models

서는 베이즈보험료가 과거손실에 대한 비선형 함수로 나타나게 되어 신뢰도보험료와 일관된 비교하기가 곤란하다. 이 어려움을 극복하기 위한 한 방법으로 우리는 모든 과거의 손실이 동일한 경우를 가정하였다. 즉  $x_i = x$ 로 두어  $\sum x_i = nx$ 이고  $\sum 1/x = n/x$ 가 되게 하였다.

#### 4.2. 베이즈보험료와 할증보험료의 비교분석

이 절에서는 첫 번째(지수-감마)와 두 번째(감마-감마) 모형을 집중적으로 비교하여 과거손실에 대해 베이즈보험료와 할증보험료가 어떻게 달라지는지 알아본다. 이를 위해 두 개의 모형의 예측분포에 대해

**Table 4.1.** Bayes and loaded premiums for the Exp-Gam model

Sample mean	20	50	100	150	200	300
Bayes Prem	15.39	38.47	76.93	115.39	153.85	230.78
Cred Prem	15.39	38.47	76.93	115.39	153.85	230.78
CTE 95%	66.81	166.97	333.91	500.85	667.79	1001.66
CTE 90%	53.92	134.75	269.47	404.19	538.91	808.36
CTE 70%	34.74	86.84	173.65	260.47	347.29	520.92
CTE 50%	26.33	65.81	131.60	197.39	263.18	394.77
CTE 20%	18.85	47.12	94.23	141.35	188.46	282.69
VaR 95%	47.74	119.32	238.62	357.92	477.22	715.82
VaR 90%	35.77	89.40	178.79	268.17	357.56	536.32
VaR 70%	17.97	44.91	89.81	134.72	179.62	269.42
VaR 50%	10.16	25.38	50.76	76.14	101.52	152.27
VaR 20%	3.21	8.03	16.07	24.10	32.13	48.20

**Table 4.2.** Bayes and loaded premiums for the Gam 20-Gam model

Sample mean	20	50	100	150	200	300
Bayes Prem	19.71	49.27	98.53	147.79	197.05	295.58
Cred Prem	19.71	49.27	98.53	147.79	197.05	295.58
CTE 95%	30.58	76.42	152.83	229.24	305.64	458.46
CTE 90%	28.68	71.68	143.35	215.01	286.68	430.01
CTE 70%	25.27	63.15	126.30	189.44	252.58	378.87
CTE 50%	23.37	58.41	116.81	175.21	233.61	350.42
CTE 20%	21.21	53.00	105.99	158.98	211.97	317.95
VaR 95%	27.94	69.82	139.63	209.44	279.25	418.87
VaR 90%	25.83	64.56	129.11	193.67	258.22	387.32
VaR 70%	21.82	54.54	109.07	163.59	218.12	327.18
VaR 50%	19.32	48.29	96.58	144.86	193.15	289.71
VaR 20%	15.76	39.38	78.75	118.13	157.50	236.24

기대치, 즉 베이즈보험료와 신뢰도보험료를 계산하고, 몇 가지 다른 신뢰수준에서의 할증보험료 VaR와 CTE 역시 계산하여 그 결과를 Figure 4.1에 실었다.

Figure 4.1에서 상단은 지수-감마, 중앙과 하단은  $a$ 가 각각 20인 감마-감마모형(줄여서 감마20-감마로 표기)과 0.8인 감마-감마모형(줄여서 감마0.8-감마로 표기)의 결과이며 왼쪽 패널은 VaR를, 그리고 오른쪽 패널은 CTE를 계산한 결과이다. 각 그림 안에서 굵은 실선은 베이즈보험료를, 굵은 점선은 신뢰도보험료를 나타내는데 이 두 모형들에 대해서는 베이즈보험료가 신뢰도보험료와 동일하기 때문에 굵은 점선이 따로 보이지 않는다. 할증보험료로는 서로 다른 신뢰수준  $p = 20\%$ ,  $50\%$ (중앙값),  $70\%$ ,  $90\%$ ,  $95\%$ 에서 계산한 결과를 얇은 점선으로 표기하였다.  $95\%$ 이상 수준으로 할증보험료를 책정하는 것은 비현실적이므로 고려하지 않았다. 백분위수의 순서는 변하지 않으므로 각 그림에서 가장 아래 있는 얇은 점선이  $20\%$  VaR(왼쪽패널)와 CTE(오른쪽패널)이고 그 위의 점선들은 차례로  $50\%$ ,  $70\%$ ,  $90\%$ ,  $95\%$ 에서의 위험측도 값들이다.

Table 4.1~Table 4.3에는 Figure 4.1의 선별된 실제 계산값들을 각 모형별로 실었다. VaR의 경우  $50\%$ 미만의 신뢰수준은 베이즈보험료보다 작아 실제 할증보험료로는 사용될 수 없으나 일관된 비교를 위해 병기하였다.

**Table 4.3.** Bayes and loaded premiums for the Gam 0.8-Gam model

Sample mean	20	50	100	150	200	300
Bayes Prem	14.55	36.37	72.73	109.10	145.46	218.19
Cred Prem	14.55	36.37	72.73	109.10	145.46	218.19
CTE 95%	70.45	176.07	352.11	528.14	704.18	1056.25
CTE 90%	55.88	139.65	279.27	418.90	558.52	837.76
CTE 70%	34.69	86.71	173.40	260.10	346.79	520.17
CTE 50%	25.68	64.18	128.35	192.52	256.69	385.03
CTE 20%	17.95	44.86	89.72	134.57	179.43	269.14
VaR 95%	48.75	121.83	243.64	365.45	487.26	730.87
VaR 90%	35.53	88.79	177.56	266.33	355.11	532.65
VaR 70%	16.50	41.25	82.48	123.72	164.96	247.43
VaR 50%	8.61	21.52	43.03	64.54	86.05	129.08
VaR 20%	2.22	5.56	11.11	16.67	22.23	33.34

Figure 4.1로부터 다음과 같은 결과를 관측할 수 있다.

- 모든 모형에 대해 과거평균손실  $\bar{X}$ 가 커질수록 베イズ보험료와 신뢰도보험료 모두 증가하며 VaR와 CTE 역시 증가한다. 특히 보험료의 증가 속도보다 꼬리위험의 증가 속도가 훨씬 더 빠름을 기울기의 차이로부터 알 수 있는데, 이는 손실평균이 커질수록 필요한 안전할증이 더 커져야 함을 뜻한다. 따라서 전통적인 베イズ보험료와 신뢰도보험료는 실제 위험을 반영하는데 있어 한계를 지남을 확인할 수 있다.
- Figure 4.1 또는 Table 4.1의 지수-감마모형과 Table 4.2의 감마20-감마모형의 수치를 비교해 보면 우선 안전할증을 고려하지 않는 순보험료(베イズ보험료)의 경우 후자가 전자보다 항상 크다. 하지만 꼬리위험측도를 비교할 경우에는 일정수준이상의 신뢰수준에서 모든  $\bar{X}$ 에 대해 전자가 후자보다 큰 할증보험료값을 가진다. 특히 CTE의 경우 신뢰수준이 35%보다 높기만 하면 전자가 후자보다 항상 크게 된다. 이는 Figure 4.1에서도 쉽게 확인할 수 있듯이 지수-감마모형의 꼬리가 감마20-감마모형의 꼬리보다 두텁기 때문인데, 사실 이 두 모형의 꼬리위험에 대한 비교는 앞서 기술한대로 적률존재 차수로부터 알 수 있고 (전자는 13차까지, 후자는 103차까지 적률이 존재함) 또한 조건부손실분포의 기준에서 지수분포의 꼬리가 형태모수가 1이상인 감마분포(즉 IFR)보다 더 두텁다는 점에서도 예견할 수 있다. 하지만 꼬리위험의 정보는 베イズ보험료에 반영되지 않기 때문에 우리는 이 예로부터 높은 신뢰수준이 요구될 때 꼬리위험측도를 고려하지 않고 베イズ위험만을 사용할 경우 내재된 담보위험의 크기와 반대로 보험료를 책정하는 잘못된 의사결정을 내릴 수 있음을 알 수 있다. 요구되는 신뢰수준이 그리 높지 않은 경우, 할증보험료차원에서는 의사결정에서의 문제가 없겠으나 신뢰수준이 높게 요구되는 위험자본 차원에서는 역시 동일하게 잘못된 의사결정에 도달할 수 있다.
- 형태모수가 1미만(즉 DFR)인 감마0.8-감마를 고려했을 때 우리는 위와 반대되는 결과를 얻는다. 즉, 지수-감마모형이 감마0.8-감마모형보다 베イズ보험료는 크지만 할증보험료는 높은 신뢰수준에서 더 작게 나타났다. 이는 감마20-감마모형과 반대되는 경우로, 역시 꼬리위험측도를 고려한 보험료결정이 올바른 의사결정에 도움이 된다는 것을 확인할 수 있다. 적률 역시 감마0.8-감마모형은 11차까지만 존재한다. 단, 신뢰수준이 높지 않은 경우에는 지수-감마모형이 감마0.8-감마모형보다 할증보험료가 크다. 그 이유는 전자가 후자보다 꼬리가 얇지만 평균이 더 크기 때문이다.

이 절에서는 베イズ보험료의 순위가 할증보험료의 순위와는 달라질 수 있음을 논의하기 위해 주로 첫 번째(지수-감마) 모형과 두 번째(감마-감마) 모형을 비교하였다. 다음 절에서는 세 번째(역감마-감마) 모

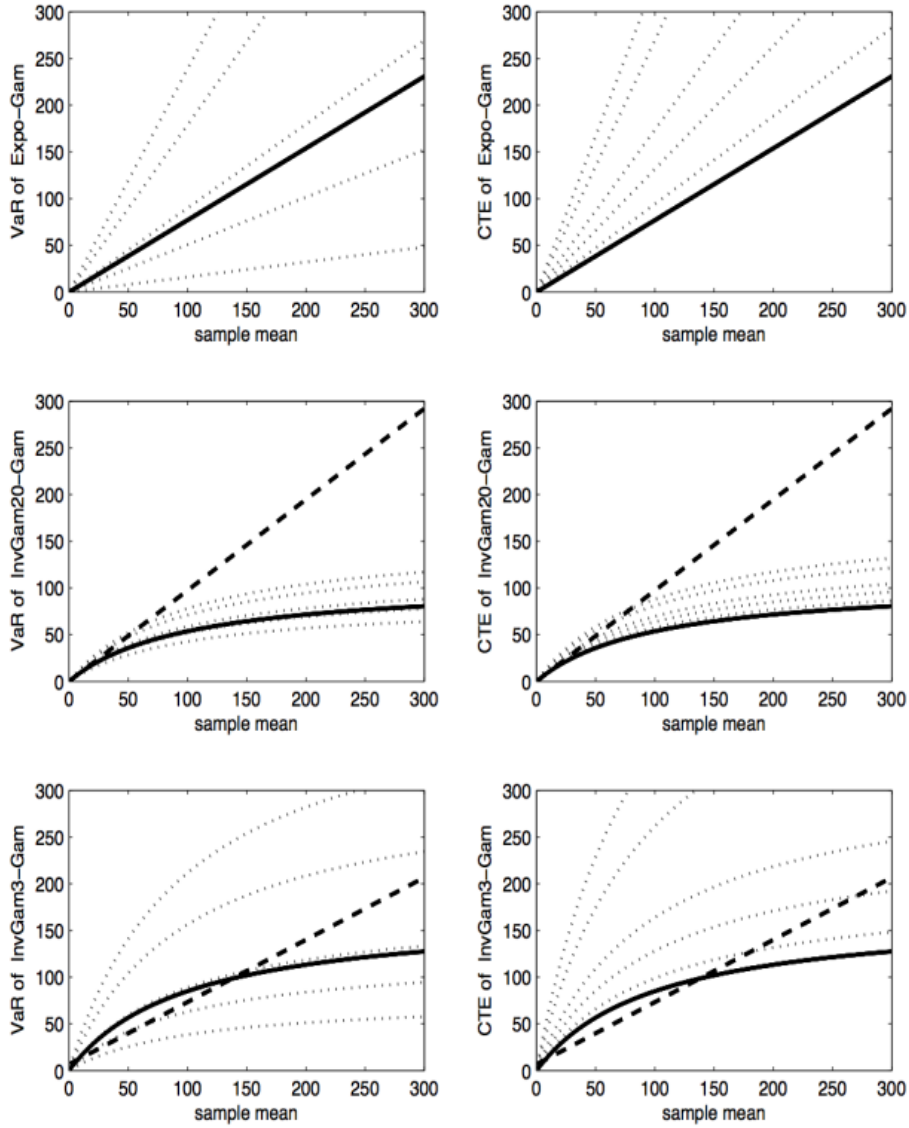


Figure 4.2. Comparison of Bayes and loaded premiums for the Exp-Gam and InvGam-Gam models

형을 이용하여 조건부손실분포와 예측분포간의 꼬리두께의 관계 대한 논의를 할 것이다.

#### 4.3. 조건부손실분포와 예측분포의 꼬리위험측도 비교분석

주어진 조건부손실분포와 그에 상응하는 예측분포를 비교할 때 전자보다 후자의 꼬리가 더 두터워짐은 혼합분포의 일반적인 성질로서 잘 알려져 있다 (Willmot와 Lin, 2001). 앞 절의 예에서도 조건부분포인 지수와 감마분포는  $MDA(\Lambda)$ 에 속하지만 상응하는 예측분포는 모두  $MDA(\Phi)$ 에 속하므로 이를 확인

**Table 4.4.** Bayes and loaded premiums for the InvGam 20-Gam model

Sample mean	20	50	100	150	200	300
Bayes Prem	17.89	35.79	53.68	64.42	71.58	80.53
Cred Prem	19.52	48.71	97.35	146.00	194.65	291.95
CTE 95%	29.29	58.58	87.86	105.44	117.15	131.80
CTE 90%	27.00	53.99	80.99	97.19	107.99	121.49
CTE 70%	23.20	46.41	69.61	83.53	92.81	104.42
CTE 50%	21.27	42.53	63.80	76.56	85.06	95.69
CTE 20%	19.20	38.41	57.61	69.13	76.81	86.42
VaR 95%	26.01	52.01	78.02	93.62	104.02	117.02
VaR 90%	23.66	47.32	70.98	85.17	94.63	106.46
VaR 70%	19.57	39.14	58.72	70.46	78.29	88.08
VaR 50%	17.26	34.52	51.78	62.13	69.04	77.67
VaR 20%	14.23	28.45	42.68	51.21	56.90	64.02

할 수 있다. 이 절에서 우리는 꼬리두께가 다른 두개의 조건부손실분포를 대해 동일한 사전분포를 가정했을 때 각각의 예측분포의 꼬리두께는 조건부손실분포에 비해 두터워지기는 하겠지만 꼬리두께의 순위까지 보존할 것인가라는 것에 대해 논의한다.

만약 이 명제가 참이라면 예측분포가 아니라 실무적으로 다루기 쉬운 조건부손실분포의 위험측도, 또는 더 나아가 분포가정 없이 손실표본으로부터 적절한 위험측도를 추정하여 안전할증을 편리하게 결정할 수 있다. 왜냐하면 조건부손실분포 또는 손실표본으로부터 계산된 할증과 예측분포로부터 계산된 할증이 서로 비례관계에 있기 때문이다.

그러나, 이 절에서 우리는 지수모형과 역감마모형을 비교하여 이 질문에 대한 일반적인 답이 부정적임을, 다시 말해, 주어진 두 조건부분포의 꼬리두께의 순위가 상응하는 예측분포의 경우 뒤바뀔 수 있음을 보일 것이다. 이를 위해 역감마의 형태모수가  $a = 20$  (역감마20-감마모형으로 표기)와  $a = 3$  (역감마3-감마모형으로 표기)인 두 경우를 지수-감마모형과 비교해보았다.

Figure 4.2에 지수-감마모형과 두 개의 역감마-감마모형의 계산된 순보험료와 위험측도를 실었고, 선별된 수치를 Table 4.4와 Table 4.5에 각각 실었다. 굵은 파선은 신뢰도보험료를 나타낸다. 전반적인 논의의 출발점은 사전확률변수  $\theta$ 가 주어졌을 때 조건부 손실모형에서는 지수모형이 역감마모형보다  $a$ 값에 관계없이 항상 꼬리가 얇다는 것인데, 이는 지수모형은  $MDA(\Lambda)$ 에 속하지만 역감마모형은  $MDA(\Phi)$ 에 속한다는 사실에서, 또한 적률존재차수를 비교하여도 알 수 있다 (전자는 모든 양의 적률이, 후자는  $a - 1$ 차까지만 존재함). 하지만 이 두 모형에 감마분포를 혼합하여 만들어지는 예측분포의 경우 둘 다 GB2 분포가 되지만 다른 모수를 가지게 된다.

Figure 4.2와 Table 4.1 및 Table 4.4로 부터, 우선 지수-감마모형과 역감마20-감마모형을 비교하면, 예측분포가 전자는 13차까지, 후자는 19차까지 존재하여 그 두터움의 순위가 바뀌며, 할증보험료값의 비교 역시 이를 뒷받침한다. 특히 과거평균손실이 대략 25이상이면 고려된 모든 수준에서 후자의 CTE값들이 작다. 이를 통해 두 조건부분포의 꼬리두께의 순위가 같은 사전분포하에서 예측분포에서는 뒤바뀔 수 있음을 알 수 있고, 서론에서 제시한 대로 보험료의 안전할증은 조건부손실분포가 아니라 예측분포로부터 계산되어야 함이 분명하다. 우리의 직관과 일면 모순되는 듯한 이 결과를 설명할 수 있는 첫 번째 가설은 위험모수  $\theta$ 가 조건부 지수분포와 조건부 역감마분포에서 서로 반대되는 역할을 한다는 점이다. 즉, 식 (4.4)의 역감마에서는  $\theta$ 가 스케일모수임에 반해 식 (4.2)의 지수분포에서는 그 역수가 되기 때문이라는 것이다. 하지만 이는 완전한 설명이 되지 못하는데, 그 이유를 설명하기 위해 역감마3-감마모

**Table 4.5.** Bayes and loaded premiums for the Gam 3-Gam model

Sample mean	20	50	100	150	200	300
Bayes Prem	28.33	56.67	85.00	102.00	113.33	127.50
Cred Prem	20.00	40.00	73.33	106.67	140.00	206.67
CTE 95%	114.39	228.78	343.17	411.80	457.56	514.75
CTE 90%	87.15	174.29	261.44	313.72	348.58	392.15
CTE 70%	54.58	109.17	163.75	196.50	218.34	245.63
CTE 50%	42.71	85.42	128.13	153.75	170.84	192.19
CTE 20%	32.95	65.91	98.86	118.64	131.82	148.29
VaR 95%	70.49	140.97	211.46	253.75	281.94	317.19
VaR 90%	52.08	104.17	156.25	187.50	208.33	234.38
VaR 70%	29.64	59.29	88.93	106.71	118.57	133.39
VaR 50%	20.98	41.96	62.95	75.53	83.93	94.42
VaR 20%	12.81	25.62	38.43	46.11	51.23	57.64

형을 고려하자. 이 모형의 예측분포는 적률이 2차까지만 존재하여 지수-감마모형보다 훨씬 꼬리가 두텁다. 따라서 이 경우 조건부손실분포의 꼬리두께 순위가 예측분포로 그대로 보존됨을 알 수 있다. 단,  $\bar{X}$ 의 값이 큰 범위에서는 고려된 신뢰수준에서 지수-감마모형보다 VaR값이 작게 보여지나, 이는 신뢰수준을 높이면서 해소된다.

결론적으로, 우리는 조건부손실의 꼬리두께의 순위가 동일한 사전분포하에서도 예측분포의 꼬리두께 순위와는 일반적으로 상관이 없음을, 따라서 안전할증의 올바른 책정을 위해서는 조건부손실의 위험측도 대신 예측분포의 위험측도를 사용해야 함을 알 수 있다. 하지만 조건부손실과는 달리 모수적 가정이 없는 경우 예측분포의 위험측도를 추정하는 것은 쉽지 않아 보이며 이는 후속연구의 주제가 될 예정이다.

마지막으로 첨언할 것은 이 모형의 경우 베イズ보험료가 과거손실에 대한 오목함수로 주어져 그 선형근사치인 신뢰도보험료는 과거손실이 커짐에 따라 처음에 과소추정을 하다가 나중에는 과대추정을 하는 경향을 보인다. 하지만 이 패턴이 일반적으로 성립하는지에 대한 답변은 쉽지 않아 보인다.

## 5. 결론

손해보험에서 신뢰도이론은 보험료를 계산하는데 중요한 이론적 토대가 되어왔다. 그러나 순보험료로 사용되는 베イズ보험료는 꼬리위험을 측정하지 못한다는 한계점이 있다. 본 논문에서는 꼬리위험측도를 이용하여 할증보험료를 결정하는 데 있어 중요하다고 여겨지는 몇 가지 주제를 다루었다. 구체적으로, 첫째, 손실모형의 꼬리위험을 측정하는 VaR나 CTE로서 결정하는 할증보험료는 그 자체로 과학적인 위험마진의 근거가 되며 동시에 베イズ보험료만을 사용했을 때 초래될 수 있는 잘못된 의사결정을 피할 수 있음을 논의하였다. 둘째, 동일한 사전분포가 주어지더라도 서로 다른 조건부손실분포의 꼬리위험 순위와 그에 상응하는 예측분포의 꼬리위험순위는 다를 수 있기 때문에, 안전할증은 조건부손실분포의 위험측도가 아니라 예측분포의 위험측도를 사용해야 함을 확인하였다.

## References

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. and Heath, D. (1999). Coherent measure of risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.
- Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility, *ASTIN Bulletin*, **4**, 199–207.

- Bühlmann, H. and Gisler, A. (2005). *A Course in Credibility Theory and Its Applications*, Springer, Berlin.
- Casualty Actuarial Society (1988). Statement of Principles Regarding Property and Casualty Insurance Ratemaking, adopted by the Board of Directors of the CAS, May 1988.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005). *Actuarial theory for dependent risks*, Wiley, Chichester.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events*, Springer, New York.
- Giesecke, K., Schmidt, T. and Weber, S. (2008). Measuring the risk of large losses, *Journal of Investment Management (JOIM)*, **6**, 1-15.
- Jewell, W. (1974). Credible means are exact bayesian for exponential families, *Astin Bulletin*, **8**, 77-90.
- Jones, B. L. and Zitikis, R. (2003). Empirical estimation of risk measures and related quantities, *North American Actuarial Journal*, **7**, 44-54.
- Kim, J. H. T. and Jeon, Y. (2013). Credibility theory based on trimming, *Insurance: Mathematics and Economics*, **53**, 36-47.
- Klugman, S., Panjer, H. and Willmot, G. (2008). *Loss Models*, Third edition, John Wiley, New York.
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press : New Jersey, 2005.
- Pflug, G. and Römisch, W. (2007). *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific.
- Wang, S. S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks, *Journal of Risk and Insurance*, **67**, 15-36.
- Wang, S. S. and Young, V. (1998). Risk-adjusted credibility premiums using distorted probabilities, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1998**, 143-165.
- Willmot, G. and Lin, X. (2001). Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications, **156**, Springer Verlag,



# 신뢰도이론에서 위험측도를 이용한 할증보험료 결정에 대한 고찰

김현태<sup>a,1</sup> · 전용호<sup>a</sup>

<sup>a</sup>연세대학교 상경대학 응용통계학과

(2013년 10월 23일 접수, 2013년 11월 4일 수정, 2013년 11월 11일 채택)

---

## 요약

손해보험의 신뢰도이론에서 순보험료로 사용되는 베이스보험료는 꼬리위험을 반영하지 못한다는 한계점이 있다. 본 논문에서는 꼬리위험측도를 이용하여 할증보험료를 결정하는데 있어 중요하다고 여겨지는 두 가지 주제를 다루었다. 첫째, 위험측도로부터 유도되는 안전할증은 내재된 담보의 위험을 보다 정확히 반영할 수 있으며, 동시에 베이스보험료만을 사용할 경우 초래될 수 있는 잘못된 의사결정을 피할 수 있음을 보였다. 둘째, 동일한 사전분포가 주어지더라도 서로 다른 조건부손실분포의 꼬리위험 순위와 그에 상응하는 예측분포의 꼬리위험순위는 일반적으로 다를 수 있음을 모수적 모형에 기반하여 보였다. 따라서 안전할증은 조건부손실분포의 위험측도가 아니라 예측분포의 위험측도를 사용해야 함을 알 수 있다.

주요용어: 신뢰도이론, 위험측도, 베이스보험료.

---

이 논문은 2013년도 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구사업임 (2013-11-1528) (2013-11-0617).

<sup>1</sup>교신저자: (120-749) 서울시 서대문구 연세로 50, 연세대학교 상경대학 응용통계학과, 교수. E-mail: jhtkim@yonsei.ac.kr