

양방향 Filtered-x 최소 평균 제곱 알고리즘에 대한 해석*

권 오 상**

Analysis of Bi-directional Filtered-x Least Mean Square Algorithm

Kwon, Oh Sang

〈Abstract〉

The least mean square(LMS) algorithm has been popular owing to its simplicity, stability, and availability to implement. But it inherently has a problem of slow convergence speed, and the presence of a transfer function in the secondary path following the adaptive controller and the error path has been shown to generally degrade the stability and the performance of the LMS algorithm in applications of acoustical noise control. In general, in order to solve these problems, the filtered-x LMS (FX-LMS) type algorithms can be used and the bi-directional Filtered-x LMS(BFXLMS) algorithm is very attractive among them, which increase the convergence speed and the performance of the controller with nearly equivalent computation complexity.

In this paper, a mathematical analysis for the BFXLMS algorithm is presented. In terms of view points of time domain, frequency domain, and stochastic domain, the characteristics and stabilities of algorithm is accurately analyzed.

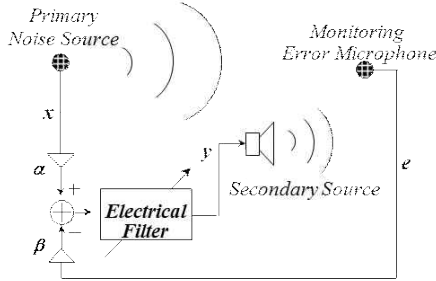
Key Words : Bi-directional Filtered-x LMS, Analysis, Time, Frequency, Stochastic

I. 서론

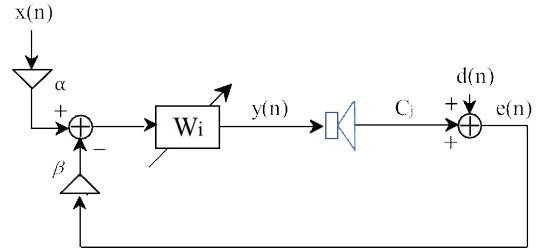
소음이나 간섭 등을 제어하기 위해 많이 사용되는 대표적인 알고리즘이 최소 평균 제곱 (Least Mean Square, LMS) 알고리즘이다[1-4]. 하지만 음향학적인 소음이나 간섭 등을 제거할 때에는 소음을 제거하기 위해 인공음을 발생시키는 스피커로부터 소음 제거 성능을 모니터링하는 마이크로폰까지의 2차 경로 또는 오차 경로가 존재하게 된다. 이 2차 경로에 의해 적응 제어기의 성능이 떨어지고, 수렴속도가 느려지

며, 잔여 에너지가 증가하여 제어기가 불안정하게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여 많이 사용된 알고리즘이 LMS 알고리즘을 발전시킨 Filtered-x LMS 알고리즘이다[3-4]. 그러나 이 알고리즘도 여전히 수렴속도가 느리고, 2차 경로의 변화에 대처하는 능력이 떨어지는 단점을 가지고 있다. 이를 해결하기 위해 많은 논문이 발표되었는데, 이들 논문에서 제시한 방법 중 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘은 표 1과 같이 계산 양의 증가가 거의 없고 신호에 대해서 미리 측정해야 할 필요가 없으면서도 기존의 Filtered-x LMS 알고리즘에 비해 수렴속도가 빠르고, 소음 제거 성능

* 고려사이버대학교 전기전자공학과 교수



<그림 1> 양방향 Filtered-x 최소 평균 제곱 알고리즘의 물리적인 표현



<그림 2> 양방향 Filtered-x 최소 평균 제곱 알고리즘의 블록도

도 우수한 장점을 가지고 있다[5]. 이 알고리즘은 순방향 제어 알고리즘과 역방향 제어 알고리즘의 결합을 통해 양 알고리즘의 장점을 극대화시키는 방향으로 구성된 알고리즘이다. [5]에서 이 알고리즘의 우수성을 모의실험을 통해 증명하였으나 알고리즘에 대한 분석에 있어서는 부족한 면이 있다. 이에 본 논문에서는 수학적이고 추계학적인 분석을 통해 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘을 해석한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서 시간 영역에서 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘을 해석하고, III장에서는 주파수 영역에서 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘을 해석하며, IV장에서는 추계학적인 방법으로 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘을 해석하여, V장에서 결론을 맺었다.

<표 1> 계산 양 비교 (N : 필터 탭 수)

		Filtered-x	양방향 Filtered-x
계산 양	곱셈	$2N^2$	$2N^2+1$
	덧셈	N^2	N^2+1

II. 시간 영역에서의 해석

양방향 Filtered-x 최소 평균 제곱 알고리즘은의 물

리적인 표현을 그림 1과 같이 표현할 수 있으며, 그림 2는블록도로 그 구조를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 주 소음원(Primary Noise Source)에서 발생된 소음이 주 경로를 거쳐 모니터링을 위한 오차 센서 또는 오차 마이크로폰에 도달하게 되며, 이 마이크로폰 주변이 바로 정음화시킬 지역이다. 정음화를 위해서는 소음과 위상이 반대이고 크기는 동일한 반소음(Anti-noise)을 발생하여 이들을 중첩시켜야 하는데, 음향학적인 반소음을 발생시키는 역할을 하는 것이 스피커이다. 또한, 적응 필터 또는 적응 제어기는 소음에 대해 위상이 반대이고 크기가 같은 신호를 발생시키고, 스피커를 구동하는 역할을 한다.

n 번째 표본에서의 i 번째 계수를 가진 적응 FIR 필터를 $w_i(n)$ 이라고 한다면, 스피커에 입력되는 필터 출력력을 (1)식에서 (3)식과 같이 표현할 수 있다.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{I-1} w_i(n) [\alpha x(n-i) - \beta e(n-i)] \quad (1)$$

$$= \sum_{i=0}^{I-1} w_i(n) r_b(n-i) \quad (2)$$

$$= \mathbf{R}_b^T \mathbf{W} \quad (3)$$

여기서 I 는 적응 FIR 필터의 계수 개수이며, α 와 β 는 각각 원래의 참조신호와 오차신호의 가중 계수이다. 또한, $r_b(n-i)$ 는 가중된 참조신호(weighted reference signal)이며,

$$\mathbf{R}_b^T = [r_b(n), r_b(n-1), \dots, r_b(n-I+1)]$$

$$\mathbf{W}^T = [w_0, w_1, w_2, \dots, w_{I-1}]$$

이다.

스피커 입력부터 오차 센서 출력까지의 전달함수를 J 차수의 FIR 필터로 모델링한다면, j 번째 계수는 C_j 이며, 오차 마이크로폰에서 출력되는 표본 출력은 (4)식에서 (8)식과 같이 표현할 수 있다.

$$e(n) = d(n) + \sum_{j=0}^{J-1} C_j y(n-j) \quad (4)$$

$$= d(n) + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} C_j w_i(n-j)$$

$$\cdot [\alpha x(n-i-j) - \beta e(n-i-j)] \quad (5)$$

$$= d(n) + \sum_{i=0}^{I-1} w_i \sum_{j=0}^{J-1} C_j$$

$$\cdot [\alpha x(n-i-j) - \beta e(n-i-j)] \quad (6)$$

$$= d(n) + \sum_{i=0}^{I-1} w_i r_{fb}(n-i) \quad (7)$$

$$= d(n) + \mathbf{R}_{fb}^T \mathbf{W} \quad (8)$$

여기서 $r_{fb}(n-i)$ 는 가중된 필터링 참조신호 (weighted filtered reference signal)이며,

$$\mathbf{R}_{fb}^T = [r_{fb}(n), r_{fb}(n-1), \dots, r_{fb}(n-I+1)]$$

이다.

이때, 전체 오차는 (9)식에서 (11)식과 같이 표현할 수 있다.

$$J = E[e^T(n)e(n)] \quad (9)$$

$$= E[d^T(n)d(n)] + 2E[\mathbf{R}_{fb}^T d(n)] \mathbf{W} + \mathbf{W}^T E[\mathbf{R}_{fb}^T \mathbf{R}_{fb}] \mathbf{W} \quad (10)$$

$$= E[d^T(n)d(n)] + 2\mathbf{P}^T \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W} \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{P}^T = E[\mathbf{R}_{fb}^T d(n)]$ 는 가중된 필터링 참조 신호

와 주 신호와의 상호상관 행렬이며, $\mathbf{R} = E[\mathbf{R}_{fb}^T \mathbf{R}_{fb}]$ 는 가중된 필터링 참조신호의 자기상관 행렬이다. 위의 (11)식에서 알 수 있듯이 오차 표면에서의 2차 특성이 분명하므로 유일한 해를 가진다. 따라서 \mathbf{W} 에 대해서 미분한 항을 0으로 둔다면 다음의 (12)식에서 (13)식과 같이 최적의 Wiener 해를 구할 수 있다.

$$\mathbf{W}_{opt} = - (E[\mathbf{R}_{fb}^T \mathbf{R}_{fb}])^{-1} E[\mathbf{R}_{fb}^T d(n)] \quad (12)$$

$$= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} \quad (13)$$

위의 해를 이용하여 최소 오차를 다음의 (14)식에서 (15)식과 같이 구할 수 있다.

$$J_{min} = E[d^T(n)d(n)] - E[d^T(n)\mathbf{R}_{fb}] \cdot (E[\mathbf{R}_{fb}^T \mathbf{R}_{fb}])^{-1} E[\mathbf{R}_{fb}^T d(n)] \quad (14)$$

$$= E[d^T(n)d(n)] + \mathbf{P}^T \mathbf{W}_{opt} \quad (15)$$

따라서 전체 오차를 다음의 (16)식과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$J = J_{min} + (\mathbf{W} - \mathbf{W}_{opt})^T \mathbf{R} (\mathbf{W} - \mathbf{W}_{opt}) \quad (16)$$

위의 (16)식에서 알 수 있듯이 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘은 유일한 해를 가지며, 필터 계수를 반복적으로 보상함으로써 최적의 해에 도달함을 알 수 있다. 즉, 전체 오차는 필터 계수에 대해 2차 함수 (quadratic function)이고, 전체 오차 J 를 최소화시키는 데 필요한 최적의 계수 값은 반복적으로 기울기 강하 방법 (gradient descent method)에 의해 계산될 수 있다.

III. 주파수 영역에서의 해석

주파수 영역에서의 해석을 위해 참조신호가 순음

(Pure Tone)이라고 가정해보자. 이 때 정상상태에서 참조신호의 크기와 위상을 다음의 (17)식과 같이 복소수로 표현할 수 있다.

$$E(w_0) = D(w_0) + [\alpha C(w_0)X(w_0) - \beta C(w_0)E(w_0)]W(w_0) \quad (17)$$

$$= D(w_0) + R(w_0)W(w_0) \quad (18)$$

여기서 w_0 는 참조신호의 주파수이며, E 는 2차 경로의 복소 응답을, D 는 주 소음원에 대한 응답을, W 는 적응 필터의 응답을, R 은 가중된 필터링 참조신호의 응답을, C 는 부음원에 대한 센서의 복소 응답을 나타낸다.

따라서 전체 오차는 다음의 (19)식에서 (20)식과 같이 표현된다.

$$J = E^H E \quad (19)$$

$$= D^H D + D^H R W + (R W)^H D + (R W)^H R W \quad (20)$$

여기서 윗 첨자 H 는 Hermitian transpose를 나타낸다.

W 에 대해서 J 의 미분을 0으로 놓는다면 다음의 (21)식, (22)식과 같이 기울기 벡터와 필터에 대한 최적의 응답을 얻을 수 있다.

$$g = \frac{\partial J}{\partial W} = 2D^H R + 2R^H R W \quad (21)$$

$$W_{opt} = -(R^H R)^{-1} D^H R \quad (22)$$

윗 식의 해를 이용하여 최소 오차를 구하면 다음의 (23)식과 같다.

$$J_{min} = D^H [I - R(R^H R)^{-1} R^H] D = 0 \quad (23)$$

또한, 적응 필터의 계수에 대한 보상식은 다음의 (24)식에서 (26)식과 같다.

$$W(n+1) = W(n) - \gamma' g \quad (24)$$

$$= W(n) - \gamma D^H R - \gamma R^H R W \quad (25)$$

$$= (1 - \gamma R^H R) W - \gamma D^H R \quad (26)$$

여기서 $\gamma = 2\gamma'$ 는 적응 속도를 결정하는 파라미터이다. 따라서 W_{opt} 를 이용하여 위의 (26)식을 다음의 (27)식과 같이 표현할 수 있다.

$$W(n+1) - W_{opt} = [I - \gamma R^H R] \cdot [W(0) - W_{opt}] \quad (27)$$

만약 $W(0) = 0$ 이라면 위의 (27)식을 아래의 (28)식과 같이 표현할 수 있다.

$$W(n+1) - W_{opt} = -[I - \gamma R^H R]^n W_{opt} \quad (28)$$

이때, Hessian 행렬은 정규화된 고유벡터 (Eigenvector) Q 와 고유치(Eigenvalue)로 이루어진 대각 행렬 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{L-1})$ 로 표현될 수 있고, Hessian 행렬은 Hermitian 특성이 있으므로 고유치의 값은 모두 실수이다. 따라서 가중된 필터링 참조신호의 응답 R 을 다음의 (29)식과 같이 표현할 수 있다.

$$R^H R = Q \Lambda Q^H \quad (29)$$

필터 계수 벡터의 주 축을 다음의 (30)식과 같이 정의할 수 있다.

$$V(n) = Q^H [W(n) - W_{opt}] \quad (30)$$

$$= (I - \gamma \Lambda)^n V(0) \quad (31)$$

따라서, $V(n)$ 의 m 번째 신호를 다음의 (32)식과 같이 표현할 수 있다.

$$V(n) = (1 - \gamma \lambda_m)^n V_m(0) \quad (32)$$

$$\approx e^{-\gamma \lambda_m n} V_m(0) \quad (\because \gamma \lambda_m \ll 1) \quad (33)$$

위의 식을 이용하여 전체 오차를 다음의 (34)식에서 (35)식과 같이 표현할 수 있다.

$$J(n) = J_{\min} + (W(n) - W_{opt})^H R^H R \quad (34)$$

$$\bullet (W(n) - W_{opt}) \quad (34)$$

$$= (W(n) - W_{opt})^H R^H R$$

$$\bullet (W(n) - W_{opt}) \quad (35)$$

여기서

$$J(n) = V^H A V(n) \quad (36)$$

$$= V^H(0)(I - \gamma A)^{2n} A V(0) \quad (37)$$

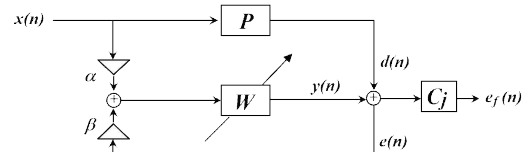
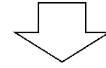
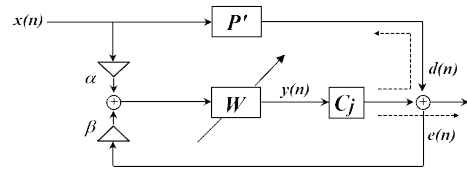
이다.

IV. 추계학적인 해석

안정적인 입력에 대해서 필터 계수 벡터의 평균값이 위너 해(Wiener Solution)에 도달한다는 사실은 잘 알려져 있다. [43]. 이것은 필터 오차 제곱의 평균값을 최소화하여 얻을 수 있으며 다음의 (38)식과 같이 표현된다.

$$W_{opt} = (E[R_{fb}^T R_{fb}])^{-1} E[R_{fb}^T d(n)] = R^{-1} P \quad (38)$$

여기서 오차는 적응 필터에 의해 예측가능한 주신호 $d(n)$ 과 예측할 수 없는 신호 $e_0(n)$ 로 구성되며,



<그림 3> 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘에서의 2차 경로 모델 천이

$e_0(n)$ 의 1차 모멘트가 아래의 (39)식과 같이 0이고, 2차 모멘트가 아래의 (40)식과 같이 주어진다고 가정한다.

$$E[e_0(n)] = 0 \quad (39)$$

$$E[e_0^2(n)] = J_{\min} \quad (40)$$

또한, $e_0(n)$ 가 입력 프로세스 $R_{fb}(n)$ 와 상호상관 관계가 없다고 가정하고, $e_0(n)$ 가 백색 프로세스(White Process)라고 가정한다.

편의를 위해 그림 3과 같이 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘에서의 2차 경로 모델을 천이했을 경우, C_j 가 덧셈하는 부분을 지나 오차 경로에 존재하게 되며 P 와 C_j^{-1} 가 결합된 P 가 추정하여야 하는 시스템 모델이 된다. 이 경우에 필터 계수를 보상하는 관계식은 다음의 (41)식과 같이 주어진다.

$$W(n+1) = W(n) + \mu R_{fb}(n) e_f(n) \quad (41)$$

시간 n 에서의 계수 오차 벡터를 다음의 (42)식과

같이 정의하고, 오차 경로 C_j 를 J 차수의 필터로 모델링한다면 다음의 (43)식과 같은 벡터식이 만들어진다.

$$\epsilon(n) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}_{opt} \quad (42)$$

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{R}_{fb}^T(n)\epsilon(n) + \mathbf{e}_0(n) \quad (43)$$

또한, 필터링된 오차 $\mathbf{e}_f(n)$ 는 다음의 (44)식과 같이 표현된다.

$$\mathbf{e}_f(n) = \sum_{j=0}^{J-1} C_j [\mathbf{R}_{fb}(n-j)\epsilon(n-j) + \mathbf{e}_0(n-j)] \quad (44)$$

그러면 제곱 평균 필터링된 오차는 다음의 (45)식과 같이 계산된다.

$$E[\mathbf{e}_f^2(n)] = \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} C_i C_j E[\mathbf{R}_{fb}(n-i)\epsilon(n-i) \cdot \epsilon^T(n-j)\mathbf{R}_{fb}(n-j)] + E\left[\sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} C_i C_j \mathbf{e}_0(n-i)\mathbf{e}_0(n-j)\right] \quad (45)$$

여기서 $\mathbf{e}_0(n)$ 는 백색 프로세스이므로 위의 (45)식을 아래의 (46)식과 같이 간단히 할 수 있다.

$$E[\mathbf{e}_f^2(n)] = \sum_{j=0}^{J-1} C_j^2 [tr(\mathbf{R}E[\epsilon(n-j)\epsilon^T(n-j)]) + J_{min}] \quad (46)$$

$E[\mathbf{e}_f^2(n)]$ 를 최소화하기 위해서는 $tr(\cdot)$ 항을 최소화해야 하는데, 필터 계수 오차 벡터의 공분산 행렬 $E[\epsilon(n-j)\epsilon^T(n-j)]$ 를 최소화하는 것과 그 의미가 같다. 입력 프로세스의 1차 모멘트가 모두 0이라고 가정하고 상관도가 있는 임의의 프로세스 $\mathbf{R}_{fb}(n)$ 가 다음의 (47)식과 같이 동일 차수의 상관도가 없는 프로세스 $\mathbf{u}(n)$ 의 선형적인 변형이라고 가정한다면

$$\mathbf{R}_{fb}(n) = \mathbf{A}\mathbf{u}(n) \quad (47)$$

자기 상관 행렬 \mathbf{R} 을 다음의 (48)식과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{R} = \sigma_u^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^T \quad (48)$$

여기서 \mathbf{R} 을 대각행렬로 만드는 하나의 직교 행렬을 \mathbf{Q} 라고 한다면 다음의 (49)식과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \quad (49)$$

대각선 행렬 $\mathbf{\Lambda}$ 의 요소들이 자기 상관 행렬의 고유치라고 한다면 다음의 (50)식과 같이 \mathbf{Q}^T 는 \mathbf{A} 를 대각행렬로 만들 수 있다.

$$\sigma_u \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}^{1/2} \quad (50)$$

구상으로 변하지 않는 임의의 프로세스 (Spherically Invariant Random Process, SIRP)에서 벡터 $\mathbf{u}(n)$ 의 요소들은 서로 통계적으로 독립이며, 결합 밀도 함수의 대칭성으로 인하여 적어도 하나의 홀수 차수를 포함하는 모든 모멘트가 0이 된다. [6-7]

또한, 독립성의 원리에 의하여 해석을 보다 용이하게 할 수 있는데, 벡터 $\mathbf{x}(i)$ 와 $\mathbf{x}(j)$ 가 $i \neq j$ 인 경우에 대해서 서로 독립적이라는 것이다. 위의 독립성의 원리가 만족되지 않는 경우가 실제로 많이 있긴 하지만 LMS 알고리즘의 경우에는 경험상으로, 심지어 매우 의존적인 데이터 표본에 대해서도 독립성의 원리가 의미가 있으므로 잘 사용되어 왔다. 따라서, 본 논문에서 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘을 해석하는 경우 독립성의 원리를 적용하여도 아무런 문제가 없을 것이다.

4.1 1차 모멘트

위 (42)식의 필터 계수 오차 벡터를 이용하여 다음의 (51)식과 같은 관계식을 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon(n+1) &= \epsilon(n) - \mu \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J C_i C_j \mathbf{R}_{fb}(n-j) \\ &\quad \cdot \mathbf{R}_{fb}^T(n-i) \epsilon(n-i) \\ &\quad + \mu \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J C_i C_j \mathbf{R}_{fb}(n-j) \mathbf{e}_0(n-i) \end{aligned} \quad (51)$$

독립성의 원리를 적용하고 양 변에 평균을 취하면 다음의 (52)식에서 (53)식과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[\epsilon(n+1)] &= E[\epsilon(n)] - \mu \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J C_i C_j \\ &\quad \cdot E[\mathbf{R}_{fb}(n-j) \mathbf{R}_{fb}^T(n-i)] E[\epsilon(n-i)] \end{aligned} \quad (52)$$

$$= E[\epsilon(n)] - \mu \mathbf{R} \sum_{j=0}^{J-1} C_j^2 E[\epsilon(n-j)] \quad (53)$$

$\mathbf{v}(n) = \mathbf{Q}^T E[\epsilon(n)]$ 이라고 놓고 \mathbf{R} 을 행렬 \mathbf{Q} 에 의해 대각선 행렬로 만든다면 다음의 (54)식과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \mu \mathbf{A} \sum_{j=0}^J C_j^2 \mathbf{v}(n-j) \quad (54)$$

벡터 $\mathbf{v}(n)$ 의 각 요소에 대하여 다음의 (55)식과 같은 특성 방정식이 만들어진다.

$$z^{-1} + \mu \lambda_k \sum_{j=0}^J C_j^2 z^{-j} = 0 \quad (k=1, \dots, N) \quad (55)$$

1차 모멘트의 안정성을 보장하기 위해서는 특성 방정식의 해가 단위 원내에 존재하여야 한다. 위의 식에서 $\mu \lambda_k$ 를 증가시키면 해가 단위 원 밖으로 나오

게 되므로 $\mu \lambda_{\max}$ 에 주의를 기울여야 한다. 여기서 λ_{\max} 는 자기 상관 행렬 \mathbf{R} 의 최대 고유치이다.

예를 들어 하나의 주기적인 신호가 진폭 A ($\lambda_{\max} = A^2/2$ for $N \gg 1$)를 갖고 오차 경로에서의 지연이 D 이고 크기가 h_D 라고 할 때, 수렴 계수에 대한 안정성 범위는 식 (56)과 같이 표현할 수 있다.

$$0 < \mu < \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{2(2D+1)}\right)}{NA^2 h_D^2} \quad (56)$$

따라서, 위의 식에서 표현된 범위가 주기적인 입력 신호에 대한 최소한의 안정성 범위라고 할 수 있으며, 1차 모멘트의 안정성이 주기적인 입력 신호에 대한 충분 조건이라고 할 수 있다.

4.2 2차 모멘트

본 논문에서 해석하는 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘의 동작을 설명하기 위해서 $M(n) = E[\epsilon^T(n)\epsilon(n)]$ 으로 표현되는 시스템 부정합 정도를 도입한다. $M(n)$ 을 알기 위해서는 공분산 행렬 $\mathbf{K}_{00}(n) = E[\epsilon(n)\epsilon^T(n)]$ 의 대각합(Trace)을 계산하여야 하는데, 평균 제곱 오차도 다음의 (57)식을 이용하여 공분산 행렬로부터 구할 수 있다.

$$E[\epsilon^2(n)] = \text{tr}(\mathbf{K}_{00}(n)\mathbf{R}) + J_{\min} \quad (57)$$

공분산 행렬에서 다음의 (58)식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \epsilon(n+1)\epsilon^T(n+1) &= \\ \epsilon(n)\epsilon^T(n) &- \mu \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} C_i C_j \mathbf{R}_{fb}(n-j) \mathbf{R}_{fb}^T(n-i) \\ &\quad \cdot \epsilon(n-i)\epsilon^T(n) - \mu \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_k C_l \epsilon(n)\epsilon^T(n-l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}(n-l)\mathbf{R}_{fb}^T(n-k) \\
 & + \mu^2 \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_i C_j C_k C_l \mathbf{R}_{fb}(n-j) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-i)\boldsymbol{\epsilon}(n-i)\boldsymbol{\epsilon}(n-l)\mathbf{R}_{fb}(n-l)\mathbf{R}_{fb}^T(n-k) \\
 & + \mu^2 \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_i C_j C_k C_l \mathbf{R}_{fb}(n-j)\mathbf{R}_{fb}^T(n-k) \\
 & \bullet \mathbf{e}_0(n-i)\mathbf{e}_0(n-l)
 \end{aligned} \tag{58}$$

위 식에 대하여 독립성의 원리를 적용하고 양 변에 평균을 취하면 다음의 (59)식과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 & E[\boldsymbol{\epsilon}(n+1)\boldsymbol{\epsilon}^T(n+1)] = \\
 & E[\boldsymbol{\epsilon}(n)\boldsymbol{\epsilon}^T(n)] - \mu E[\sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} C_i C_j \mathbf{R}_{fb}(n-j) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-i)\boldsymbol{\epsilon}(n-i)\boldsymbol{\epsilon}^T(n)] \\
 & - \mu E[\sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_k C_l \boldsymbol{\epsilon}(n)\boldsymbol{\epsilon}^T(n-l)\mathbf{R}_{fb}(n-l) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-k)] + \mu^2 E[\sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_i C_j C_k C_l \mathbf{R}_{fb}(n-j) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-i)\boldsymbol{\epsilon}(n-i)\boldsymbol{\epsilon}(n-l)\mathbf{R}_{fb}(n-l) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-k)] + \mu^2 E[\sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_i C_j C_k C_l \mathbf{R}_{fb}(n-j) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-k)\mathbf{e}_0(n-i)\mathbf{e}_0(n-l)]
 \end{aligned} \tag{59}$$

여기서 $\mathbf{K}_{ij}(n) = E[\boldsymbol{\epsilon}(n-i)\boldsymbol{\epsilon}^T(n-j)]$ 를 정의하여 사용할 수 있는데, $\mathbf{K}_{00}(n)$ 은 필터 계수 오차 벡터의 공분산 행렬을 나타낸다. 따라서, 이 식을 이용하여 위의 (59)식을 다음의 (60)식과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{00}(n+1) & = \mathbf{K}_{00}(n) - \mu \sum_{i=0}^{J-1} C_i^2 \mathbf{R} \mathbf{K}_{i0}(n) - \mu \sum_{k=0}^{J-1} C_k^2 \mathbf{K}_{0k}(n) \mathbf{R} \\
 & - \mu^2 \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_i C_j C_k C_l \cdot E[\mathbf{R}_{fb}(n-j) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-i)\mathbf{K}_{il}(n)\mathbf{R}_{fb}(n-l)\mathbf{R}_{fb}^T(n-k) \\
 & + \mu^2 J_{\min} \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} C_i^2 C_j^2 \mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{60}$$

4.1절에서 정의한 것과 같이 상관관계가 없는 프로

세스 $\mathbf{R}_{fb}(n)$ 를 상관관계가 있는 프로세스 $\mathbf{u}(n)$ 으로 변환해 주는 행렬을 \mathbf{A} 라 하고, \mathbf{R} 을 대각선 행렬로 만드는 직교 행렬을 \mathbf{Q} 라 하면, $\mathbf{R} = \sigma_u^2 \mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 이고 $\mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ 이다.

따라서, 이 두 개의 식과 $\mathbf{Q}^T \mathbf{K}_{ij}(n) \mathbf{Q} = \mathbf{S}_{ij}(n)$ 라고 정의한다면 다음의 (61)식과 (62)식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{00}(n+1) & = \mathbf{S}_{00}(n) - \mu \sum_{i=0}^{J-1} C_i^2 \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{i0}(n) - \mu \sum_{k=0}^{J-1} C_k^2 \mathbf{S}_{0k}(n) \mathbf{\Lambda} \\
 & - \frac{\mu^2}{\sigma_u^4} \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{J-1} C_i C_j C_k C_l \cdot E[\mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{R}_{fb}(n-j) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-i) \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{S}_{il}(n) \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{R}_{fb}(n-l) \mathbf{R}_{fb}^T(n-k) \mathbf{\Lambda}^{1/2}] \\
 & + \mu^2 J_{\min} \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{J-1} C_i^2 C_j^2 \mathbf{\Lambda}
 \end{aligned} \tag{61}$$

$$\mathbf{S}_{0k}(n+1) = \mathbf{S}_{0k}(n) - \mu \sum_{i=0}^{J-1} C_i^2 \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{i(k-1)}(n) \tag{62}$$

SIRP 관점에서 $\mathbf{Z}(n) = \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{S}_{ii}(n) \mathbf{\Lambda}^{1/2}$ 항을 생각해 본다면 입력 프로세스의 결합 4차 모멘트를 $m_u^{(2,2)}$ 라고 정의하여 사용하는 것이 편리하다. 따라서 다음의 (63)식에서 (69)식과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & E[\mathbf{R}_{fb}(n-j)\mathbf{R}_{fb}^T(n-i)\mathbf{Z}(n)\mathbf{R}_{fb}(n-l) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^T(n-k)]_{rs} = \\
 & \sum_p \sum_m E[\mathbf{R}_{fb}^p(n-j)\mathbf{R}_{fb}^p(n-i)Z_{pm}(n)\mathbf{R}_{fb}^m(n-l) \\
 & \bullet \mathbf{R}_{fb}^m(n-k)] = \\
 & 1) 2m_u^{(2,2)} Z_{rs}(n) \quad (r \neq s, j=i=l=k) \tag{63} \\
 & 2) m_u^{(4)} Z_{ss}(n) + m_u^{(2,2)} \sum_{m \neq s} Z_{mm}(n) \quad (r=s) \tag{64} \\
 & 3) m_u^{(2,2)} Z_{rs}(n) \quad (j=i=l=k) \tag{65} \\
 & 4) m_u^{(2,2)} Z_{sr}(n) \quad (j=l \neq i=k) \tag{66} \\
 & 5) m_u^{(2,2)} \sum_m Z_{mm}(n) \quad (r=s, j=k \neq i=l) \tag{67} \\
 & 6) 0 \quad (r \neq s) \tag{68} \\
 & 7) 0 \quad (\text{else}) \tag{69}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{S}_{ij}(n+1)$ 의 주도적인 모든 대각선 요소들은 $\mathbf{S}_{ki}(n)$

의 주도적인 대각선 요소들에 좌우되며, 대각선 행렬에서 대각합이 변하지 않으므로 $\mathbf{s}_{00}(n)$ 의 대각선 요소들을 알기만 하면 시스템 부정합 정도인 $M(n)$ 을 계산할 수 있다. 따라서 위의 (63)식에서 (69)식까지의 결과와 $M_u^{(2,2)} = m_u^{(2,2)}/\sigma_u^4$ 와 같이 정의된 식을 사용하면 $\mathbf{s}_{00}(n+1)$ 과 $\mathbf{s}_{0k}(n+1)$ 의 대각선 요소들에 대한 간단한 표현을 다음의 (70)식과 (71)식과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{00}(n+1) &= \mathbf{s}_{00}(n) - 2\mu \sum_{i=0}^{J-1} C_i^2 \Lambda \mathbf{s}_{0i}(n) + \mu^2 M_u^{(2,2)} \sum_{i=0}^{J-1} C_j^4 \\ &\quad \cdot [\lambda \lambda^T + 2\Lambda^2] \mathbf{s}_{ii}(n) \\ &\quad + 4\mu^2 M_u^{(2,2)} \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j>i}^{J-1} C_i^2 C_j^2 \Lambda^2 \mathbf{s}_{ij}(n) \\ &\quad + \mu^2 M_u^{(2,2)} \sum_{i=j=0}^{J-1} \sum_{i \neq j}^{J-1} C_i^2 C_j^2 \lambda \lambda^T \mathbf{s}_{ii}(n) \\ &\quad + \mu^2 J_{\min} \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{j=0}^{i-1} C_i^2 C_j^2 \lambda \end{aligned} \quad (70)$$

$$\mathbf{s}_{0k}(n+1) = \mathbf{s}_{0(k-1)}(n) - \mu \sum_{i=0}^{J-1} C_i^2 \Lambda \mathbf{s}_{i(k-1)} \quad (71)$$

벡터 λ 는 대각선 행렬 Λ 의 고유치에 의해 계산된다.

V. 결론

소음이나 간섭 등을 제어하기 위해 많이 사용되는 대표적인 알고리즘이 LMS 알고리즘이지만 음향학적인 소음이나 간섭 등을 제거할 때에 존재하는 2차 경로 또는 오차 경로로 인하여 적응 제어기의 성능이 떨어지고, 수렴속도가 느려지며, 잔여 에너지가 증가하여 제어기가 불안정하게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여 많이 사용된 알고리즘이 LMS 알고리즘을 발전시킨 Filtered-x LMS 알고리즘이나 여전히 수렴속도가 느리고, 2차 경로의 변화에 대처하는 능력이 떨어

지는 단점을 가지고 있다. 이를 해결하기 위해 많은 논문이 발표되었는데, 이들 논문에서 제시한 방법 중 양방향 Filtered-x LMS 알고리즘은 계산 양의 증가가 거의 없으면서도 기존의 Filtered-x LMS 알고리즘에 비해 수렴속도가 빠르고, 소음 제거 성능도 우수한 장점을 가지고 있다. 따라서 본 논문에서는 수학적 해석을 통하여 양방향 Filtered-x LMS의 동작 특성을 설명하였다. 특히, 시간영역에서의 해석, 주파수 영역에서의 해석, 그리고 추계학적인 해석을 통하여 다양한 관점에서 알고리즘을 분석하였다.

참고문헌

- [1] 권오상, "적응 다단 식별 알고리즘을 이용한 새로운 반향 제거기," 디지털산업정보학회논문지, 제 10권, 제 1호, 2014, pp. 113-120.
- [2] 권오상, "고속 통신을 위한 향상된 적응 다단 반향제거기," 디지털산업정보학회논문지, 제 10권, 제 3호, 2014.
- [3] Simon Haykin, Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall, Inc, 1991.
- [4] B. Widrow and S. D. Stearns, Adaptive Signal Processing, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1985.
- [5] 권오상, "양방향 Filtered-x 최소 평균 제곱 알고리즘에 대한 실험적인 연구," 디지털산업정보학회논문지, 제 10권, 제 3호, 2014.
- [6] M. Rupp, "The Behavior of LMS and NLMS algorithms in the Presence of Spherically Invariant Processes," IEEE Trans. Signal Processing, vol. SP-41, no. 3, 1993.
- [7] M. Rupp and R. Frenzel, "The Behavior of LMS and NLMS algorithms with Delayed Coefficient

Update in the Presence of Spherically Invariant Processes," IEEE Trans. Signal Processing, April 1994.

■ 저자소개 ■



권 오 상
Kwon, Oh Sang

2005년 3월~현재
고려사이버대학교 전기전자공학과
교수

1999년 2월 연세대학교 전자공학과(공학박사)
1994년 2월 연세대학교 전자공학과(공학석사)
1992년 2월 연세대학교 전자공학과(공학사)

관심분야 : 신호처리, 통신, 멀티미디어
E-mail : narcis@cuk.edu

논문접수일: 2014년	8월	27일
수정일: 2014년	9월	7일
게재확정일: 2014년	9월	12일