대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 1, 39 ~ 56. Mar 2014

초등 영재 학생의 비례 추론 발달 단계에 따른 계산기 사용에 대한 행위 분석

강 영 란*

본 연구는 초등학교 5학년 수학 영재 학급 학생 8명을 대상으로 계산기를 활용하여 정비례에 대한 수업의 질적 자료를 바탕으로 계산기 사용 행위를 분석하였다. 학생들의 비례 추론 발달 단계를 알아보기 위해 설문지 문항으로 사전 검사를 하였고, Baxter & Junker(2001)에 따라 비례 추론 발달 단계를 분류하였다. 계산기를 활용한 정비례 활동지를 제작하였으며 60분 동안 연구자에 의해 수업이 진행되었다. 자료 분석을 위해 동영상 촬영, 인터뷰 등을 수집하여 녹취록을 작성하였고, Guin & Trouche(1999)의 계산기 사용 행위 유형에 기초하여 학생들의 행위를 분석하였다. 본 연구 결과에 따르면 비례 추론 발달의 각 단계에서 계산기 사용 행위 유형은 다양하게 나타났으며, 이러한 각 행위는 학생들의 비례 추론 발달에 서로 다른 영향을 주었다.

Ⅰ. 서 론

2009 개정 수학과 교육과정은 문제 해결력, 추론 능력, 의사소통 능력을 수학적 과정이라는 구성요소로 두었다. 특히 교수 · 학습 방법에 수학적 추론과 관련된 명시적 내용을 추가한 것은 추론 학습에 대한 중요성이 재차 강조되고 있음을 보여준다. 초등 수학에서 이러한 추론 교육의 정점에 위치해 있는 것은 비례 추론이다. 비례 추론은 대수 학습에 있어서 가장 추상적인 관계를 수적인 표현으로 바꿀 수 있는 교량 역할을 할 뿐만 아니라 함수의 토대가 되는 개념이며 (Fuson & Abrahamson, 2005; Lamon, 2007; Lesh, Post, & Behr, 1988), 상위 수학의 학습을 위한 초석이 된다(Nabors, 2003).

이와 같은 이유로 많은 연구자들은 학생들의 비례 추론 능력과 일반적 인지 구조의 변화, 비례 추론 사용 과정의 구체적인 차이, 그리고 개인적 변인이 과제에 미치는 영향에 대해서 연구를 수행하였다(이종욱, 2006; 장혜원, 2003; 정은실, 2003; Ben-Chaim, Fey, Fttzgerald., Benedetto, & Miller, 1998; Clark, Berenson, & Cavey, 2003; Misailidou & Williams, 2003; Nabors, 2003; Singh, 2000; Thompson, Austin, & Beckmann, 2002; Weinberg, 2002). 그러나 지금까지 연구는 대부분 일반 학생의 비례 추론 능력을 알아보는 것에 초점을 두고 있으며 초등 수학 영재 학생과 일반 학생의 비례 추론 능력을 비교하는 김주석(2013)의 연구를 제외하고는 영재 학생을 대상으로 한 비례 추론 연구는 찾아보기 힘든 실정이다. 게다가 학교 수학은 추론 교육이 점차 강조되어 교수 · 학습 방법에 반영되고 있지만 초등 수학 영재 학생을 지도하기 위한 프로그램에서

* 영남대학교 대학원, yr3027@hanmail.net

는 추론 능력을 향상시키기 위한 내용이 거의 개발되어 있지 않다(김상미, 2013; 정수지, 2011; 홍은자, 2004). 따라서 초등 수학 영재 학생의 비례 추론 발달 단계를 알아보고, 그들의 비례 추론 능력을 향상시키기 위한 영재 프로그램 개발이 요구된다.

비와 비율, 비례와 같은 수학적 상황은 다른 수학적 개념과 달리 지도의 축척, 모형 제작 등 일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 것이다. 그러나 비례 추론이 일상생활에서 자주 사용되고 있음에도 불구하고 연구 결과에 따르면 학생들은 비례적 추론을 어렵게만 느낀다고 한다. 많은 학생들은 여전히 비례 개념과 관련된 문제 해결을 어려워하거나 비례 추론을 잘 적용하지 못하며 (Ahl, Moore, & Dixon, 1992; Fujimura, 2001; Lamon, 2007), 심지어 성인들도 비례 추론 과제를 잘 해결하지 못한다고(Baroody & Coslick, 1998) 지적하고 있다. 이러한 이유에는 여러 가지 있으나 Streefland(1985)는 현실과 관련있는 것처럼 보이는 문제 하나를 바탕으로 순수하게 수에 의해 비를 연습하도록 되어 있기 때문으로 보았다. 이처럼 지필 맥락이 아니라 실생활 맥락을 다루기 위한 다양한 교수·학습 방법이 요구되며 그 중 하나가 공학을 활용한 학습이다. 최근 공학 기반으로 한 비례 추론 학습은 학생들의 능력 향상에 도움이 된다는 연구 결과가 보고되고 있다(Caulfield, Smith, & McCormick, 2005; Gueudet, 2007; Norton, 2006; Silk, Higashi, Shoop, & Schunn, 2010). 그러나 이 연구들은 공학 도구를 사용하였을 때 비례 추론 발달에 긍정적인 영향을 주었다는 결과를 제공하지만 공학이 어떻게 사용되어 비례 추론 발달에 영향을 주었는지에 관한 정보는 극히 제한적이다.

Guin & Trouche(1999)는 공학이 수학 학습 과정에서 수학적으로 활용 의미가 부여된 도구로 발전되어 가는 도구발생 관점으로 학생들이 문제를 해결하는 동안 공학을 어떻게 사용하는지 관찰하여 학생들의 계산기 사용 행위를 분류하였다. 학생들의 도구발생 과정에 따라 무작위적 행위, 도구적 행위, 비교대조 행위, 이론적 행위, 합리적 행위의 다섯 가지 유형으로 계산기 사용 행위를 나누었으며(Artigue, 2003; Guin & Trouche, 1999; Hershkowitz & Kieran, 2001), 이 과정에는 계산기를 활용해 온 시간과 도구를 선택하는 학생 개개인이 중요한 변인으로 작용되고 있다. 따라서 현재도 계산기를 활용하는 수업이 진행되어 계산기를 활용하는 시간이 누가적으로 축적되고 있다는 가정 하에, Guin & Trouche의 계산기 사용 행위 유형은 영재 학생들의 비례 추론 능력과 학생들의 공학 사용 행위 사이의 관계를 설명해주고, 공학이 어떻게 사용되어 비례 추론 발달에 영향을 주는지에 관한 정보를 제공해 줄 수 있을 것이다.

이에 본 연구에서는 먼저 초등 수학 영재 학생들의 비례 추론 발달 단계를 알아본 후, 그들의 비례 추론 발달의 단계는 실험 활동과 계산기를 활용한 정비례 학습 과정에서 나타나는 계산기 사용 행위와 어떤 관계가 있는지 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비례 추론

수학에서 비, 비율, 비례의 의미는 다르다. 비는 관계로, 비의 값은 그 관계를 수로 나타내기 위한 두 양의 몫으로, 비율은 한 양(또는 수)을 기준으로 하여 나타낸 다른 양(또는 수)의 비교값으로 논리적으로 구분이 된다. 그러나 학교 수학에서는 엄밀하게 구별하여 사용되지는 않고 비와 비의 값, 비의 값과 비율이 동일시되어 사

용되고 있다. 이것은 비, 비율, 그리고 비례가 고립된 개념이 아닌 곱셈, 나눗셈, 분수 등의 다른 개념과 연결된 개념으로 용어가 명확히 구분되지 않는 경우가 많기 때문이며(Heinz, 2000), Heinz는 비와 비율을 다음과 같은 세 가지로 제시하여 비교하고 있다.

① 비는 같은 성질을 갖는 두 양의 관계이다. 예를 들어 (주스의 양) : (물의 양)은 모두 액체의 양을 나타내어 같은 성질이며 같은 단위로 측정된다. 반면에 비율은 (설탕의 양) : (물의 양)과 같이 서로 다른 성질을 갖는 두 양의 관계를 나타낸다.
② 비는 두 양으로 나타내는 이항관계이고 비율은 '~당' 으로 인식되는 내포량이다.
③ 비는 다른 어떤 양에 관련된 하나의 양을 나타내는 수 표현이며, 비율은 '~에 대한 어떤 양'으로 예를 들면 시간에 대한 어떤 양(시간당 거리)과 같다.

비, 비율, 비례의 개념을 토대로 하는 비례 추론 능력은 학생들의 수학적 사고 발달을 위한 이정표가 된다. 비례 추론은 새로운 개념이라기보다는 순서, 동치 관계, 비에 관한 이해와 해석, 곱셈과 나눗셈 등과 같은 다양한 유리수 개념과 관계된다. 예를 들어 '사과 3개에 1000원'의 상황은 사과와 그 금액간의 비를 설명한다면, 비례 추론은 1000원에서 3000원으로 증가할 때 사과의 수가 어떻게 변하는지를 설명하기 위해 필요하다. 따라서 비례 추론은 두 비 사이의 동치관계를 포함하는 2차적 관계라 할 수 있다(이종욱, 2006). 이러한 비례 추론 능력의 획득은 학생의 인지발달에 중요한 역할을 하며(Cramer & Post, 1993), 특히 Lesh, Post, & Behr(1988)는 비례 추론이 대수 학습에서 다음과 같은 이유로 중요하다고 주장하였다: 첫째, 비례는 수학적 함수의 기본적인 예로 y=mx와 같은 일차함수로 표현할 수 있어 일반식과 경험적 수치 사이의 교량 역할을 할 수 있다. 둘째, 비례는 속도, 혼합, 농도, 크기, 변환, 가격과 같은 다양한 유형의 비율 문제를 해결하는데 유용하다. 셋째, 표, 그래프, 그림, 다이어그램 등은 대수적 개념들을 표현하고 이해를 돕는 표상들인데, 이들 표상 사이의 전환을 설명할 수 있는 방법으로 비례 추론이 이용될 수 있다.

비례 추론이 학교 수학에서 학습되는 많은 수학 주제들을 연결시켜주는 중요한 통합적 연결고리로 강조되면서(NCTM, 2000) 그 동안 비례 추론에 대한 연구가 많이 이루어져 왔다. 학생들의 비례적 사고와 관련하여 학생들의 비례 추론 능력이 어떻게 발달하는지(이종욱, 2006; Ben-Chaim, Fey, Fttzgerald, Benedetto, & Miller, 1998; Nabors, 2003; Singh, 2000), 학생들의 비례 추론 능력을 어떻게 평가하고 향상시킬 것인지(장혜원, 2003; 정은실, 2003; Clark, Berenson, & Cavey, 2003; Misailidou & Williams, 2003; Nabors, 2003; Thompson, Austin, & Beckmann, 2002; Weinberg, 2002)에 대한 논의가 있었다.

비례 추론은 학생들이 반드시 습득해야 하는 형식적 사고의 중요한 구성요소 중 하나이며(Hoffer & Hoffer, 1992), 비례 추론은 한 수준에서 이해가 더 높은 수준의 이해를 위한 기초를 형성하는데 장기적인 발달 과정을 거친다. 이러한 견해를 공유하는 연구자들은 비례 추론의 발달 수준 및 발달 단계를 구분하여 제시하였다. 먼저, Baxter & Junker(2001)는 비례 추론 발달 단계를 다음과 같이 5단계로 구분하였다.

<표 Ⅱ-1> Baxter & Junker(2001)의 단계

단 계	특 징
질적 수준 단계	두 양 사이의 인식 및 질적 비교, 비례적 관계 인식 불가
덧셈적 접근 단계	두 양 사이의 덧셈적 차이 인식, 반복적 덧셈을 통한 단위 조절
곱셈적 접근 단계	두 양 사이의 규칙 인식, 곱셈적 추론, 곱셈적 사고로 단위 조절
공변과 불변의 조화 단계	비 표현, 변량과 상수의 존재 인식
함수적 접근 단계	비례적 관계 인식, 비례식 표현, 함수 관계 추론

Baxter & Junker(2001)에 따르면 비례 추론 발달 단계는 첫째, 질적 추론 단계로 학생들은 정확한 수치로 비교하지 못하지만 양에 대하여 ‘더 많다’, ‘더 적다’, ‘같다’로 비교하는 수준이고, 둘째, 덧셈적 접근 단계는 양에 대한 초기 시도 단계로 학생들은 얼마나 많고, 얼마나 더 많은지에 대해 덧셈적 차이로 비교하는 수준이다. 셋째, 곱셈적 접근 단계는 곱셈적 관계를 인식하는 단계로 학생들은 변하는 두 수 사이의 관계를 비로 표현하기 시작하며 곱셈적 추론을 할 때 구하고자 하는 답을 얻기 위해 차례로 곱해가는 전략을 사용한다. 넷째, 공변과 불변의 조화 단계는 학생들이 변화하는 양들 사이에 불변하는 양이 존재함을 인식하게 되고, 곱셈적 추론을 발전시키는 수준이며, 다섯째, 함수적 접근 단계는 함수와 스칼라의 연산 관계를 이해하는 수준이다. Lobato, Ellis, Charles, & Zbiek(2010)은 비례 추론 발달에서의 전환(shift)을 제시함으로써 학생들의 비례 추론에 대한 수준을 전환하여 발전시켜야 한다고 제안하였다.

① 전환 1 : 하나의 양에서 두 양에 초점 두기
② 전환 2 : 덧셈적 비교에서 곱셈적 비교하기
③ 전환 3 : 주어진 비를 구하고자 하는 수까지 단계적으로 구성해나가는 전략에서 합성 단위(composed unit)를 만들어‘~의 몇 배’에 초점 맞추기
④ 전환 4 : 합성 단위의 반복에서 다양한 동치 비율로 표현하기

지금까지의 내용을 정리하면 비례 추론은 그 수준이 전환되는 장기적인 발달 과정을 거쳐 비례 추론이 형성됨을 알 수 있다. 따라서 비와 비례의 학습에서 비례 추론 능력을 향상시키기 위해서는 먼저 학생의 비례 추론 발달 단계를 파악하여 그 비례 추론 수준을 전환시킬 수 있는 비, 비례 상황과 맥락을 제공해야 할 것이다.

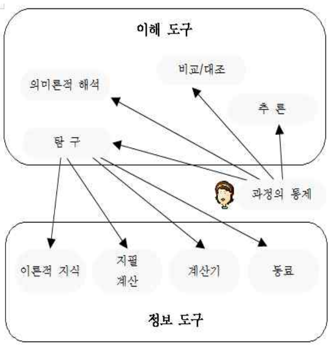
2. 계산기 사용에 대한 행위 유형

단순한 연장에 지나지 않던 기술 공학이 수학 학습 과정에서 수학적으로 활용 의미가 부여된 도구로 발전되어 가는 과정을 도구발생(instrumental genesis)이라 한다(Drijvers, 2003). 그는 도구발생을 다음과 같이 설명하였다.

> 망치는 전에 그것을 사용해본 적이 없거나 다른 사람이 사용하는 것을 본 적이 없다면, 사용자가 될 사람에게 처음에는 무의미한 연장일 뿐이다. 망치와 같은 어떤 것에 대한 필요성을 느낀 후나 새로운 사용자가 그것을 사용하는 경험을 한 후에야 망치는 점차 행위를 매개하는 가치있고 유용한 도구로 발전되어간다. 숙달된 사용자는 그것을 간편한 방식으로 사용할 수 있도록 기능을 발달시키며 어떤 환경에서 망치가 유용한지를 알고 있다(Drijvers, 2003, p.244).

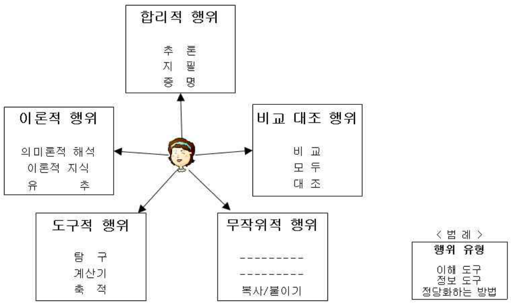
이처럼 연장이 교수학적으로 유용한 도구가 되는 과정인 도구발생은 시간이 흐르면 자연스럽게 일어나는 과정이 아니라 상당한 시간과 노력이 요구된다.

수학 학습 과정에서 계산기가 도구발생되는 과정을 살펴보기 위한 연구가 많이 이루어졌다. Artigue(2003), Guin & Trouche(1999, 2002), Hershkowitz & Kieran(2001)는 계산기를 사용하는 중등 학생들의 행동 관찰로부터 계산기 사용 행위 유형을 분류하여 이를 바탕으로 계산기가 도구발생되는 과정을 설명하고자 하였다. 그들은 계산기 환경에서 학생이 문제를 해결할 때 크게 두 종류의 도구가 필요하다고 설명하였다. 문제 해결에 도움을 얻기 위해 사용하는 도구인 정보 도구(information tools)와 정보 도구로부터 얻은 내용이 수학적 지식에 타당한지의 여부를 확인하기 위한 이해 도구(understanding tools)가 바로 그것이다. 정보 도구에는 이론적 지식, 지필 계산, 계산기, 동료 등이 있으며 이해 도구로는 탐구, 의미론적 해석, 비교/대조, 그리고 추론이 있다. 이 때 학생들은 정보 도구와 이해 도구를 각각 선택하는 과정에 대한 통제권자로서 역할을 한다. [그림 Ⅱ-1]은 문제 해결 과정에서 정보 도구와 이해 도구 및 이 과정에서 이들 도구를 선택하여 사용하는 것에 대한 학습자의 통제를 나타낸 것이다.



[그림 Ⅱ-1] 계산기 환경에서 문제 해결 과정

Guin & Trouche(1999)은 계산기를 사용하는 학생들의 관찰을 통해서 학생들이 선택하는 정보 도구와 이해 도구, 그리고 그 과정에 대한 학생의 통제 관계를 바탕으로 계산기 사용 행위를 다음과 같이 다섯 가지 유형으로 분류하였다.



[그림 Ⅱ-2] 학습자의 계산기 사용 행위

첫째, 무작위 행위(random work method)는 계산기 환경이나 지필 환경에 관계없이 수학에 어려움을 겪는 학생들이 이전에 알고 있던 해결 방법을 그대로 적용하여 성급하게 일반화를 함으로써 과제를 해결하려는 행위를 말한다. 이 행위는 수학 학업 성취 능력이 부족한 학생들의 시행착오전략으로 나타나므로 학생들은 문제를 해결하기 위해 필요한 도구를 선택하는 과정이나 이해하기 위한 과정에는 특별한 관심을 두지 않는다.

둘째, 도구적 행위(mechanical work method)는 정보 도구가 주로 계산기에 한정되어 있는 경우로써 계산기의 단순한 조작으로 나타난 결과에 한정하여 제한적인 탐구를 하며 계산기를 여러 번 조작하면서 나온 누적된 결과에 의존하여 추론을 하는 학생들의 계산기 사용 행위를 말한다. 결국 수학적으로 어떤 의미가 있는지 확인하지 않고 계산기가 보여주는 그대로 인식하게 된다. 따라서 도구적 행위는 계산기에 나타난 결과를 이해하기 위한 도구를 통제하려는 학생의 의지가 약한 경우에 발생하는 행위이다.

셋째, 비교 대조 행위(resourceful work method)는 계산기뿐만 아니라 지필 계산, 이론적인 수학 등 이용 가능한 모든 정보를 활용하여 탐구하는 행위이다. 이 행위는 정보 도구와 이해 도구를 선택하는 과정에서 학생이 과정에 대한 통제권자로서 역할을 하게 되면서 비교하고 대조하는

추론 활동을 하게 된다. 이 행위에는 계산기에 의한 결과를 관찰하고 이론적 결과를 확인하는 등 폭넓은 영역의 해결 전략이 이용된다.

넷째, 합리적 행위(rational work method)는 학생이 정보 도구를 선택하고, 해석을 위한 이해 도구의 선택하는 과정에서 학생의 합리적 판단이 강하게 작용된다. 따라서 계산기의 사용 횟수는 줄어드는 반면 지필 활동이 증가하면서 추론 활동이 강화되는 행위가 나타난다.

다섯째, 이론적 행위(theoretical work method)는 계산기에 나타난 결과를 입증하기 위해 수학적 이론에 참조하여 정보를 해석하고 유추하며 추론하려는 행위를 말한다. Hershkowitz & Kieran(2001)는 의미있는 방식과 도구-알고리즘 방식으로 계산기 사용 행위를 분류하고 있는데, 의미있는 방식이 계산기가 제공하는 정보를 수학적 이론으로 추론하려는 것으로 이론적 행위와 유사하다.

지금까지 계산기 사용 행위 유형을 활용한 연구는 일반 중등 학생을 대상으로 이루어졌다. 따라서 이 학생들이 가진 수학적 지식의 폭이 다양하여 무작위 행위부터 이론적 행위까지 여러 가지 유형이 관찰되었다. 본 연구에서는 영재 학생의 계산기 사용 행위를 분류해보고자 하는데, 이것은 다음 두 가지 측면에서 유용하리라 본다. 첫째, 수학 영재 학생들의 비례 추론 능력과 계산기 사용 행위 사이에는 어떤 관계가 있는지 관찰할 수 있을 것이다. 둘째, 시간의 변화에 따른 학생들의 계산기 사용 행위 변화 추적을 통해 영재 학생들의 비례 추론 수준이 전환될 때 나타나는 행위를 알아보는데 도움을 줄 것이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 비례 추론 발달 단계와 Texas Instruments TI-73 계산기를 활용하는 행위에 대한 분석을 하기 위하여 포항시에 소재하는 ○○초등학교 5학년 수학 영재 학급 학생 중 희망자 8명(남 2명, 여 6명)을 대상으로 방과후에 연구자의 지도 아래 수업을 진행하였다. 이 영재 학생들은 국가에서 실시하는 영재 선발 단계를 거쳐 선발된 학생이며, 영재 학급은 ○○초등학교 내에 설치되어 있다. 또 이 학교 근처에 포항공대와 사립초등학교가 있어 학부모의 교육열이 높으며 사교육을 통한 최소 두 단원부터 1년 앞선 선행학습이 되어 있었다. 그러나 선발 자체가 학교 범위 내에서 이루어지므로 대학 부설 영재원과 교육지원청 영재원 학생들보다 수학 성취도가 낮은 편이다. 영재 프로그램 속에는 계산기 관련 프로그램은 없지만 이 학생들은 2013년 6월부터 TI-73 계산기를 활용한 수업을 8차시 마친 상태로 표 만들기, 그래프 그리기 등의 키 조작을 할 수 있다.

2. 활동 프로그램 개발과 수업 절차

TI-73 계산기를 활용한 수학 영재교육을 위하여 이와 관련된 국내·외 문헌을 통하여 수학교육 전문가와 협의 하에 비례 추론과 관련된 내용을 선정하여 연구자가 과제를 개발하였다. 활동 프로그램은 Texas Instruments 회사에서 개발한 활동지(Discovering Mathematics with the TI-73: Activities for Grades 7 and 8)를 바탕으로 하였다. 본 연구에서 사용된 활동은 구멍을 낸 종이컵에 물을 부은 후 일정하게 종이컵을 통해 새는 물의 양을 직접 10초 간격으로 측정하여 그 결과를 표로 정리하였다. 표의 값을 바탕으로 시각을 x, 새는 물의 양을 y로 하여 식을 예상해 본 후, 예상한 식과 실제 식을 비교하기 위하여 계산기를 활용하였다. 계산기에 값을 입력하여

함수식을 만들어보고 그래프를 관찰하였으며, 이를 통해 정비례 그래프와 식 사이의 관계를 이해하도록 하였다. 이러한 비례 추론 상황의 실험 활동을 통해 일정하지 않게 변하는 두 양 사이를 유추하여 그래프로 나타내는 능력을 살펴보기 위해 30일 동안 새는 물의 양, 점차 구멍이 커져서 새는 물의 양이 점점 많아지는 경우를 그래프로 나타내어보는 과제로 구성하였다. 이렇게 개발된 과제는 연구자에 의해 60분 동안 수업이 진행되었다. 본 수업에서는 8명의 학생에게 각각 한 대씩 계산기를 제공하였으며 실험 활동을 바탕으로 한 수업이었기 때문에 모둠을 형성하였다. 이 때 모둠 구성은 계산기 매뉴얼에 익숙한 정도에 따라 의도적인 모둠을 형성하였다.

3. 자료 수집과 분석 방법

먼저 비례 관계에 대한 추론 발달 단계를 분석하기 위하여 홍지연(2012)이 개발한 문제 유형 중에서 5학년 2학기 수학과 교과서에 제시된 비와 비율 단원에 해당하는 문항을 선정하였다. 수업을 하기 전 이 문항으로 사전 검사를 하였으며, Baxter & Junker(2001)의 비례 추론 발달 단계를 이용하여 학생들의 현재 단계를 확인하였다. 계산기 환경에서 정비례 관계를 파악하는 학생들의 행위를 알아보기 위해서는 사전 검사 문항과 같이 단위 비율이 일정하여 학생들이 공변과 불변의 양을 인식하고 함수 관계를 추론할 수 있는 내용으로 구성하였다. 수업이 이루어지는 동안 학생들이 TI-73 계산기를 활용한 활동을 관찰한 자료, 활동에 참여한 학생들의 면담 자료, 활동 수행의 결과물인 학생 활동지와 계산기에 저장된 자료 등을 수집하였다. TI-73 계산기를 활용한 모든 수업 과정을 비디오카메라를 이용하여 전체적으로 녹화하였고, 또 다른 비디오카메라를 이용하여 짝 또는 모둠의 상호작용 과정을 녹화하였다. 탐구 과정과 활동지 기록 등을 관찰하면서 정확히 파악할 수 없는 내용과 학생들의 학습에 대한 이해를 살펴보기 위해서는 개별적인 면담을 실시하였다. 이렇게 수집된 녹화 자료 및 녹음 자료 그리고 인터뷰 자료는 모두 녹취록을 만들었으며 Guin & Trouche(1999)의 계산기 환경에서 학생들의 행위 유형을 바탕으로 영재 학생들은 계산기를 어떻게 사용하는지 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 연구 대상자의 비례 추론 발달 단계

연구 대상자들의 비례 추론 발달 단계를 분석하기 위해 사용한 문항은 <표 Ⅳ-1>과 같으며, 이 문항은 두 은행의 예금액과 예금기간에 따라 이자가 변화되지만 단위 비율이 일정하여 학생들이 공변과 불변의 양을 인식하고 함수 관계를 추론할 수 있는지 파악할 수 있다.

<표 Ⅳ-1> 비례 추론 단계를 알아보기 위한 문항

세진이는 1000000원을 6개월간 저금하려고 합니다. ★★ 은행과 ◆◆ 은행의 예금액과 예금기간, 이자가 다음과 같을 때, 세진이는 어느 은행에 예금을 하는 것이 이익입니까? 이유를 설명하고 답을 쓰시오.

은 행	예금액	기간	이자
★★은행	500000원	3개월	1500원
◆◆은행	1000000원	12개월	10000원

이 문항에 대해 각 비례 추론 발달 단계에 해당하는 예상 답은 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 비례 추론 단계에 해당하는 예상 답

비례 추론 발달 단계	예상 답
질적 수준 단계	문제 상황의 예금액, 예금기간, 이자에 해당하는 양을 수치가 아닌 질적으로 비교한다.
덧셈적 접근 단계	★★ 은행은 예금액 500000원에 대해 1개월에 이자가 500원 이므로 6개월이라면 500+500+500+500+500+500=3000 예금액이 1000000원이 되면 이자가 $3000+3000=6000$원
곱셈적 접근 단계	★★ 은행은 예금액 500000원에 대해 3개월에 이자가 1500원이므로 6개월이라면 $1500\times2=3000$원 예금액이 1000000원이 되면 이자가 $3000\times2=6000$원
공변과 불변의 조화 단계	★★ 은행은 예금액 500000원이 1000000원의 1/2이고, 기간 3개월이 6개월의 1/2이므로 1000000원 예금액을 6개월 예금하면 이자액은 1500원의 4배가 되므로 1500×4=6000원
함수적 접근 단계	★★ 은행은 월과 이자액을 이용하여 비례식으로 나타내면 $3:1500=6:x$, 따라서 x는 3000원 예금액 500000원과 1000000원은 $1:2$이므로 $1:2=3000:x$, 따라서 예금액이 1000000원이 되면 이자가 6000원

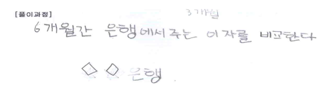
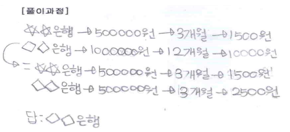
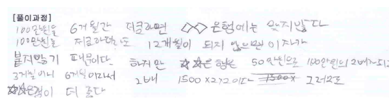
학생 A는 질적 수준 단계로 <표 Ⅳ-3>과 같이 비례적 관계를 제대로 인식하지 못하여 더 이상의 해결 노력을 보이지 않았다.

<표 Ⅳ-3> 질적 수준 발달 단계의 학생 반응

학생	반응	해 석
A	500000 × 3 1500000	★★ 은행의 예금액과 예금기간을 곱한 식을 기록한 것으로 보아 비례적 관계에 대한 인식이 부족한 것으로 여겨짐

학생 B, C, D, E, F는 <표 Ⅳ-4>와 같이 곱셈적 접근 단계이며 곱셈 관계 추론을 시도하지만 문제 해결에서 모두 오류를 보이고 있다. 그러나 이 다섯 학생의 수준은 같은 단계 내에서도 다음과 같은 차이가 발생하는데 Lobato, Ellis, Charles, & Zbiek(2010)에 따르면 학생 B는 이제 덧셈적 비교에서 곱셈적 비교로 전환된 수준 2로 단위 조절은 고려하지 않은 채 두 양의 규칙을 이용하여 문제를 해결하였다. 반면 학생 C, D, E는 곱셈 관계로 추론을 하지만 단위 조절에 실패하여 문제 해결에 오류가 발생하고 있어 수준 3으로 전환시켜야 하며, 학생 F는 수준 3으로 곱셈적 사고를 통한 단위 조절이 가능하다.

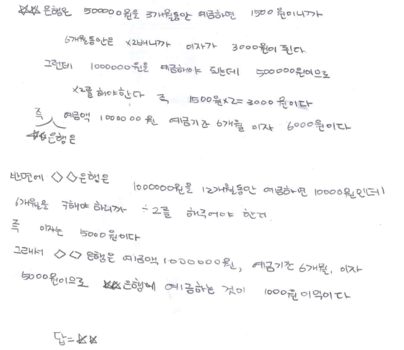
<표 Ⅳ-4> 곱셈적 추론 발달 단계의 학생 반응

학생	반응 및 해석
B	 ★★ 은행과 ◆◆ 은행의 이자에 차이가 있음을 인식하지만 어떤 추론과정도 나타나지 않음
C	 이자를 비교하기 위해 1000000원, 6개월이라는 단위로 조절해야 하나 세 학생 단위 조절 실패로 오답
F	 ★★ 은행은 예금액과 예금 기간의 변화로, ◆◆ 은행은 예금기간의 변화로 단위 조절을 하여 1500×2×2라는 곱셈적 관계로 문제를 해결함

마지막으로 학생 G, H는 공변과 불변의 조화 단계로 <표 Ⅳ-5>와 같이 변하는 양과 변하지 않는 양을 이해하고 비례적 관계를 이해하며 문제를 해결하였다.

<표 Ⅳ-5> 공변과 불변의 조화 단계의 학생 반응

반응 및 해석


☆☆은행은 500000원을 3개월동안 예금하면 1500원이니까
6개월동안은 ×2배니까 이자가 3000원이 된다
그런데 1000000원을 예금해야 되는데 500000원이므로
×2를 해야한다 즉 1500원×2=3000원이다
즉 ☆☆은행은 예금액 1000000원 예금기간 6개월 이자 6000원이다

반면에 ◇◇은행은 1000000원을 12개월동안 예금하면 10000원인데
6개월을 구해야 하니까 ÷2를 해줘야 한다
즉 이자는 5000원이다
그래서 ◇◇은행은 예금액 1000000원, 예금기간 6개월, 이자 5000원이므로 ☆☆은행에 예금하는 것이 1000원 이익이다

답=☆☆

예금액, 예금기간, 이자가 변화하는 동안 예금액, 예금기간, 이자에서 변하지 않는 양에 대해 바르게 이해하고 있어 ★★ 은행과 ◆◆ 은행을 각각 예금액 1000000원, 예금기간 6개월로 식을 표현하고자 함. 이자를 비교하기 위하여 비례적 관계를 인식하고 있으나 비례식을 이용하거나 비를 활용하여 문제를 해결하지 않고 ×, ÷ 연산을 이용하여 관계를 추론하고 있음

지금까지 살펴본 문항에 대한 학생의 반응을 종합하면 연구 대상자 8명은 다음 <표 Ⅳ-6>과 같은 비례 추론 발달 단계가 나타났다.

<표 Ⅳ-6> 연구 대상자의 비례 추론 발달 단계

단계	형태	연구 대상자 A	B	C	D	E	F	G	H
질적 수준	두 양의 인식 및 질적 비교		○	○	○	○	○	○	○
	비례적 관계 인식 불가	○							
곱셈 접근	두 양 사이의 규칙 인식		○	○	○	○	○	○	○
	곱셈관계 추론			○	○	○	○	○	○
	곱셈적 사고를 통한 단위조절						○	○	○
공변 불변	변량과 상수의 존재 인식							○	○
함수 접근	비례적 관계 인식							○	○

학생 A는 비례적 관계를 인식하지 못하는 질적 수준 단계, 학생 B, C, D, E, F는 두 양 사이의 차이를 인식하며 곱셈적 사고를 통한 추론을 하는 곱셈적 접근 단계, 학생 G, H는 변하는 양과 변하지 않는 양을 인식하며 비례적 관계를 이해하는 공변과 불변의 조화 단계였다. 김주석(2013)의 연구에 따르면 초등 수학 영재 학생들의 비례 추론 능력에 있어서 곱셈적 추론 단계에 있는 학생이 많다고 하였는데 본 연구에서도 곱셈적 접근 단계에 머물러 있는 학생이 가장 많았다. 그리고 이 단계에는 곱셈적 비교가 가능한 수준 2로 전환된 학생(B), 단위의 조절 가능의 유무에 따라 수준 3으로 전환해야 할 학생(C, D, E), 그리고 수준 3으로 전환된 학생(F)으로 다양한 비례 추론의 수준이 동시에 나타났다.

2. 비례 추론 발달 단계와 계산기 사용 행위와의 관계

연구 대상자의 비례 발달 단계와 계산기 사용 행위 사이의 관계를 분석한 결과는 <표 Ⅳ-7>과 같다.

<표 Ⅳ-7> 비례 추론과 계산기 사용 행위의 관계

비례 추론 발달 단계	연구 대상자	계산기 사용 행위 유형: 무작위	도구	비교대조	합리적	이론적
질적 수준	A	○	○			
곱셈적 접근	B				○	
	C			○	○	
	D		○			
	E			○		
	F			○		
공변과 불변의 조화	G				○	
	H			○	○	

비례 추론 발달 단계가 질적 수준인 학생 A는 계산기 사용에 있어서 시행착오를 겪는 무작위적 행위와 친구의 도움으로 계산기를 조작하지만 수학적으로 어떤 의미가 있는지 확인하는 활동이 없이 계산기가 보여주는 그대로 인식하는

도구적 행위가 나타났다. 곱셈적 접근 단계인 학생 B, C, D, E, F에게는 계산기에 의존하는 도구적 행위, 지필, 계산기 등 다양한 정보 도구로부터 얻은 자료를 이용하여 문제를 해결하려는 비교 대조 행위, 그리고 관계식을 이용하여 문제를 해결하려는 합리적 행위가 나타났다. 공변과 불변의 조화 단계인 학생 G, H는 비교 대조 행위, 합리적 행위가 나타났다. 각 발달 단계에 해당하는 학생들의 비례 추론 발달 단계와 계산기 사용 행위에 대한 분석 결과는 다음과 같다.

가. 질적 수준 단계 학생의 계산기 사용 행위

Baxter & Junker(2001)에 따르면 비례 추론 발달이 질적 추론 단계인 학생들은 정확한 수치로 비교하지는 못하지만, 양에 대하여 '더 많다', '더 적다', 또는 '같다'로 비교할 수 있다. 이처럼 비례적 관계가 있음을 인식하나 문제를 해결하기 위한 어떠한 노력도 하지 않은 질적 수준 단계인 학생 A는 계산기 사용에 있어서 무작위적 행위와 도구적 행위가 나타났다.

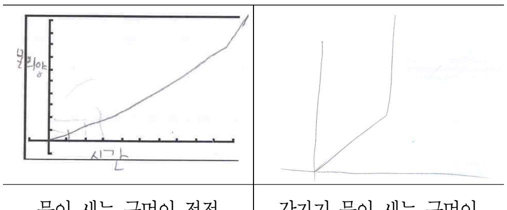
학생 A는 계산기를 활용하여 정비례를 학습하는 동안에도 x, y 사이의 관계식을 이해하지 못했다. 그래서 30일 동안 모은 물의 양을 계산할 때 학생 A는 가장 먼저 계산기를 들고 계산하려고 하였지만 계산기에 나타난 $y = x \times 2$라는 관계식에 대한 개념이 형성되지 않았기 때문에 의미없는 키 누르기와 화면 지우기를 반복하는 무작위 행위가 나타났다. 이와 같이 학생 A는 계산기 환경이나 지필 환경에 상관없이 정비례 학습에 대한 어려움을 겪었고 다음 <표 Ⅳ-8>과 같이 계산기에 다양한 식을 입력하는 시행착오 전략을 사용하였다.

<표 Ⅳ-8> 학생 A의 계산기 화면

계산기 실행 Line	계산기 화면	
①	135*60	8100
②	8100*30	243000
③	*Ans***2	*Error*
④	*Ans**********2	*Error*
⑤	23*6	138
⑥	*Ans**60	8200
⑦	*Ans**24	198720
⑧	*Ans**30	5961600
⑨	60*60*2	7200
⑩	60*60	3600
⑪	7200*30	216000

①-②: 1분(60초)동안 모은 물의 양 135mL를 이용하여 60과 30을 각각 곱하였지만 단위 환산 실패
③-④: 잘못 입력한 식
⑤-⑧: 10초동안 모은 물의 양 23mL을 이용하여 6, 60, 24, 30을 각각 곱하였지만 단위 환산 실패
⑨-⑪: 30일을 초 단위로 바꾸고 있는 과정이지만 잘못된 수식 입력

활동 초반에 무작위 행위를 하던 학생 A의 계산기 행위는 친구의 도움으로 표에 자료를 입력하고 나타난 정비례 그래프의 표상을 관찰하는 동안에는 계산기 화면의 결과에 의존하는 도구적 행위로 바뀌었다. 이러한 도구적 행위로 학생 A는 물이 새는 구멍이 점점 커지는 경우와 물이 새는 구멍이 갑자기 터져버린 경우의 그래프를 예상하도록 하였을 때 계산기가 보여주는 그래프 정보의 이해를 바탕으로 [그림 Ⅳ-1]처럼 그래프를 나타낼 수 있었다.



물이 새는 구멍이 점점 커지는 상황	갑자기 물이 새는 구멍이 터져버린 상황

[그림 Ⅳ-1] 학생 A가 그린 비례 그래프

이상의 내용을 정리하면 질적 수준 단계인 학생 A는 계산기를 활용하여 비례를 학습하였지만 관계식에 대해 여전히 이해하지 못했고, 다만 계산기가 보여주는 그래프의 정보를 통해 상황에 맞는 그래프를 나타낼 수 있었다. 김민경, 권혁진(2010)은 상위권 학생들이 수식의 사용을 선호하는 반면, 중, 하위권 학생들은 그림이나 표를 이용하는 경우가 많다는 주장과 같이 비례 추론 능력이 낮은 학생에게는 식보다는 계산기의 그래프나 표가 비례 개념을 이해하는데 도움을 주고 있음을 알 수 있었다. 비록 계산이나 대수적 절차가 약한 질적 수준 단계인 학생일지라도 계산기를 사용하는 행위는 수학적 영역을 탐구할 수 있는 새로운 접근 방법을 제공하여 개념 이해를 돕는다고 볼 수 있다(Lagrange, 2005).

나. 곱셈적 접근 단계 학생의 계산기 사용 행위

Baxter & Junker(2001)에 따르면 비례 추론 발달 단계가 곱셈적 접근 단계인 학생들은 변하는 두 수 사이의 관계를 비로 표현하기 시작하며 곱셈적 추론을 할 때 구하고자 하는 답을 얻기 위해 차례로 곱해가는 전략을 사용한다. 본 연구에서 곱셈적 접근 단계에 있는 학생은 B, C, D, E, F로 가장 많은 학생들이 이 단계에 속해 있었다. 곱셈적 접근 단계인 학생들이 계산기 환경에서 문제를 해결하는 동안 나타나는 행위는 도구적 행위, 비교 분석 행위, 합리적 행위였다.

학생들이 실험 활동을 통해 실제로 10초마다 새는 물의 양을 측정하여 그 결과를 <표 Ⅳ-9>와 같이 나타내었다.

<표 Ⅳ-9> 10초마다 새는 물의 양

시각(초)	10	20	30	40	50	60
양(mL)	23	42	63	84	109	135

이 값을 계산기에 입력한 후 상관관계에 있는 두 변량 사이의 관계를 알아보는 명령어 $LinReg(ax+b)$를 사용하여 방정식 $x\times 2=y$를 얻었다. 학생들과 함께 $x\times 2=y$의 의미, 계산기로 그래프를 그린 후 나타난 그래프 관찰을 통해 $x\times 2=y$ 그래프의 특징을 살펴보면서 정비례를 학습하였다.

먼저 30일 동안 물이 샌다면 몇 mL의 물이 모여지는지에 대해 합리적 행위를 하는 학생 B, C는 배운 정비례 개념을 그대로 적용하여 다음과 같이 해결했다. 이 학생들은 계산기를 사용하지 않고 지필로 다음과 같이 식을 순차적으로 적으며 계산하였다.

$$36\times 24=86400, 86400\times 30=2592000$$
$$2592000\times 2=518400(mL), \text{만약 } L\text{라면 } 5184$$

학생 B는 Lobato, Ellis, Charles, & Zbiek(2010)에 따르면 수준 2로 단위 조절은 고려하지 않은 채 두 양의 규칙을 이용하여 문제를 해결하였지만, 계산기 환경에서 정비례를 학습하는 동안 수준 3으로 전환할 수 있었다. 그러나 계산기보다는 지필 계산으로 활동을 마친 학생 B와는 달리 학생 C는 <표 Ⅳ-10>과 같이 계산한 값이 정당한지 확인하기 위하여 계산기에 다음과 같은 식을 입력하며 결과를 비교하는 활동을 하였다.

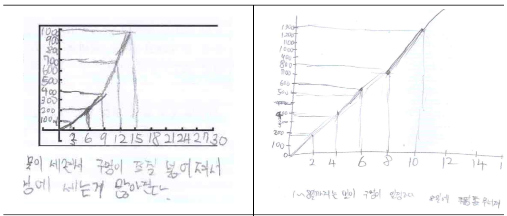
<표 Ⅳ-10> 학생 C의 계산기 화면

계산기 실행 Line	계산기 화면
①	$3600\times 24\times 30\times 2=5184000$
②	$135\times 60\times 24\times 30\times 2=11664000$
③	$23\times 6\times 60\times 24\times 30\times 2=1192320$
	$Ans/2$ 5961600

식 ①은 지필에서 했던 계산을 축약하여 하나의 식으로 만들어 입력한 것으로 결국 이 유형

의 학생은 x 대신 3600×24×30를 입력하고 ×2를 하여 바른 식을 입력하였다. 그러나 이 학생에게 나타나는 흥미로운 점은 식 ①에서 활동을 마치는 것이 아니라 식 ②는 문제 상황에 맞는 식은 아니지만 표에서 60초에 해당하는 물의 양인 135를 이용하여 식을 만들어 식 ①과 비교해보고 있다는 점이었다. $x \times 2 = y$를 잘못 이해하여 2를 곱하는 오류를 범하고는 있지만 곧 식 ②의 값이 식 ①의 값과 상당한 차이가 있다는 것을 확인하게 되고, 식 ③에서는 10초에 해당하는 물의 양인 23을 이용하여 식을 만든 후 23×6×60×24×30과 $x \times 2$를 계산한 값을 비교하며 $Ans/2$를 입력하여 5961600라는 y 값을 얻으며 ①과 ③을 비교하고 있었다.

이처럼 합리적 행위와 비교 대조 행위를 동시에 보인 학생 C는 물이 새는 구멍이 점점 커지는 경우와 갑자기 물이 새는 구멍이 터져버린 경우의 그래프를 예상하여 나타낼 때 다른 학생들과는 달리 다음 그림과 같이 x값과 y값을 실제로 예상하여 수치로 자세히 나타내었다.



물이 새는 구멍이 점점 커지는 상황	갑자기 물이 새는 구멍이 터져버린 상황

[그림 Ⅳ-2] 학생 C가 나타낸 비례 그래프

학생 C 역시 계산기를 활용한 비례 학습은 그래프를 표현하고 해석하며 관계식을 이용하여 문제를 해결하는 동안 수준 3으로 전환할 수 있는 기회가 되었다.

학생 E, F의 경우에는 회귀방정식이 $(x \times 2) + 5 = y$로 나타났지만 이 관계식에 대한 수학적 지식은 이용하지 않은 채 표의 자료를 이용한 계산, 계산기에 나타난 정비례 그래프 표상, 계산기를 활용한 식 입력 등의 정보로 문제를 해결하는 비교 대조 행위가 나타났다. 여전히 이 두 학생은 수학적 개념인 정비례와 정비례를 나타내는 식에 대한 개념을 완전히 이해하지 못하였기 때문에 이론적인 수학으로 합리적인 해결을 할 수 없었다.

학생 D는 학생 A와 같이 도구적 행위가 나타났지만 비례 추론 발달 단계가 다른 두 학생은 서로 다른 양상을 보였다. 표와 그래프 사이의 표상을 옮겨가면서 관찰에 치중하던 학생 A와는 달리 학생 D는 표와 그래프 관찰뿐만 아니라 30일 동안 모은 물의 양을 계산하기 위해 다음 <표Ⅳ-11>과 같은 식을 입력하며 확인하였다.

<표 Ⅳ-11> 학생 D의 계산기 화면

계산기 실행 Line	계산기 화면	
①	23*6	130
②	Ans*60	8200
③	Ans*24	5961600
④	135*60	8100
⑤	Ans*24	194400
⑥	Ans*30	5832000
⑦	23*60	1380
⑧	Ans*24	33120
⑨	Ans*30	993600
⑩	Ans*6	5961600

①-③: 10초동안 모은 물의 양 23mL를 이용하여 6, 60, 24를 각각 곱하였지만 단위 환산 실패

④-⑥: 60초동안 모은 물의 양 135mL를 이용하여 60, 24, 30을 각각 곱하였지만 단위 환산 실패

⑦-⑩: 10초동안 모은 물의 양 23mL를 이용하여 60, 24, 30, 6을 각각 곱하였지만 단위 환산 실패

비록 계산기 사용이 학생 D로 하여금 단위 조절을 성공할 수 있도록 돕지 못하여 오답을 얻었지만 질적 추론 단계인 학생 A와는 달리 아무렇게나 계산기 키를 눌러보는 무작위 행위를 하지 않았다.

이와 같이 동일한 계산기 사용 행위라 할지라도 비례 추론 발달 단계가 다를 경우에는 나타나는 양상이 다르며, 또한 동일한 비례 추론 발달 단계에 있더라도 계산기 사용 행위는 달랐다. 이는 문제 해결 과정을 통해 알 수 있듯이 수학적 영재 학생의 일반화 능력, 데이터 처리 능력(Greenes, 1981)은 계산기 환경에서도 중요한 요소가 되기 때문이라 본다. 게다가 문제 해결 과정에서 결과에 대해 확인하고 평가를 하는 행위가 학생들의 능력 차이를 판가름하는 것처럼(Sriraman, 2003), 동일한 곱셈적 추론 단계 내의 학생들을 활용할 수 있는 다양한 정보로부터 비교 대조하며 확인 평가하는 행위를 하는 학생(학생 C, E, F)과 도구적 행위를 하는 학생(학생 D)으로 구분짓는 잣대가 되기도 하였다.

다. 공변과 불변의 조화 단계인 학생의 계산기 사용 행위

비례 추론 발달 단계가 공변과 불변의 조화 단계인 학생은 변화하는 양들 사이에 불변하는 양이 존재함을 인식하게 되고, 곱셈적 추론을 발전시킬 수 있다. 연구 결과에서 공변과 불변의 조화 단계인 학생 G, H는 변량과 상수가 존재함을 인식하며 문제를 해결하였고, 비례식으로 표현은 하지 않았으나 비례적 관계를 인식하는 수준으로 계산기 환경에서 주로 합리적 행위가 나타났다. 학생 G는 곱셈적 접근 단계였던 학생 B와 유사하게 지필로 계산을 하여 값을 얻은 후 계산기에 $3600 \times 24 \times 30 \times 2 = 5184000$을 입력하여 그 답을 확인하는 작업을 하였다. 학생 G는 “비례식으로 하면 이 문제를 바로 풀려요.”와 같이 이미 비례적 관계를 인식하고 있었기 때문에 굳이 계산기를 이용한 다른 시도를 해 보지 않았던 것으로 보인다. 학생 H 역시 곱셈적 접근 단계인 학생 C와 유사하게 계산한 값이 정당한지 확인하기 위하여 계산기를 이용하여 답을 확인하였고, 30일 동안 모은 물의 양을 계산할 때 60초 동안 모은 물의 양인 135mL를 이용하여 식을 만들어 계산하였다.

<표 Ⅳ-12> 학생 H의 계산기 화면

계산기 실행 Line	계산기 화면
①	$3600 \times 24 \times 30 \times 2 = 5184000$
②	$135 \times 60 \times 24 \times 30 \times 2 = 11664000$

이처럼 공변과 불변의 조화 단계인 두 학생은 정보 도구를 선택하고, 해석을 위한 이해 도구의 선택하는 과정에서 학생의 합리적 판단이 강하게 작용하여 계산기의 사용보다는 지필 활동 횟수가 더 많았음을 알 수 있었다.

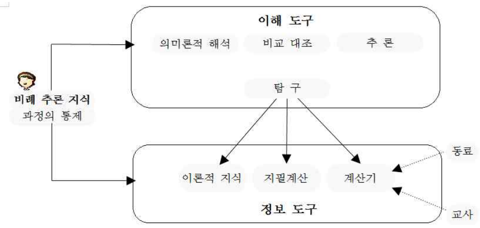
Ⅴ. 결 론

본 연구는 초등학교 5학년 수학 영재 학급의 학생을 대상으로 계산기를 활용한 정비례 학습 과정에서 나타나는 계산기 사용 행위와 비례 추론 발달 단계 사이의 관계를 살펴보았다. 연구 결과로부터 얻은 결론과 시사점은 다음과 같다.

첫째, 비례 추론 발달의 각 단계에서 계산기 사용 행위 유형은 다양하게 나타났으며, 이러한 행위는 학생들의 비례 추론 발달에 있어 서로 다른 영향을 주었다. 예를 들어 무작위 행위와 도구적 행위를 주로 하는 질적 수준 단계에 있는 학생들에게는 계산기가 비례적 관계를 인식하는데 큰 도움을 주지 못했지만, 계산기의 다양한 표상은 이 단계에 있는 학생들에게 정비례 그래프를 이해하는데 도움이 되었다. 특히 곱셈적 접근 단계에 있는 학생들에게는 계산기가 도구적 행위, 비교 분석 행위, 합리적 행위로 나타

나 비례 추론 수준의 전환이 일어날 수 있도록 해 주었다. 덧셈적 비교에서 곱셈적 비교로 전환된 수준 2의 학생들은 곱셈적 비교로 문제를 해결할 수 있었고, 곱셈 관계로 추론을 하지만 단위 조절에 실패하여 문제 해결에 오류가 발생한 수준 3의 학생은 계산기 사용을 통해 곱셈적 사고를 통한 단위 조절이 가능하였고 주어진 그래프를 해석할 수 있었다. 따라서 교사는 영재 학생이라 할지라도 무분별하게 공학을 사용하기보다는 학생들마다 공학 사용 행위가 다르다는 것을 인식하여 각 행위마다 비례 추론 능력을 향상시킬 수 있는 방법을 모색해야 할 것이다.

둘째, 영재 학생들이 계산기 환경에서 문제를 해결 과정은 일반 학생들을 대상으로 연구한 Guin & Trouche(1999)의 과정과는 차이가 있었다. 먼저, 계산기 환경에서 문제 해결 과정이 학생들의 비례 추론에 대한 수학적 지식에 의해 영향을 받고 있음을 알 수 있었다. 본 연구 결과에 따르면, 영재 학생들의 비례 추론 발달 단계는 질적 수준 단계, 덧셈적 접근 단계, 곱셈적 접근 단계, 공변과 불변의 조화 단계로 서로 달랐으며 이는 학생들의 계산기 사용 행위와 밀접한 관련을 가지고 있음을 알 수 있었다. 즉 비례 추론 능력이 좋은 학생일수록 주로 정보 도구와 이해 도구를 선택하는 과정에서 수학적 지식에 기초한 합리적 행위가 나타났으며, 비례 추론 능력이 낮은 학생일수록 의미없는 키 누르기와 화면 지우기를 반복하는 무작위 행위나 계산기의 화면에 나타난 결과에만 의존하려는 도구적 행위가 주로 나타났다. 물론 수학적 지식과 계산기 사용 행위 사이에 인과 관계가 성립하는 것은 아니지만 [그림 V-1]처럼 문제 해결 과정의 통제권자인 학생의 비례 추론 지식은 계산기 사용 행위를 결정하는 중요한 변인이 되고 있음을 알 수 있었다.



[그림 V-1] 영재들의 계산기 환경에서 문제 해결

또 다른 차이로 Guin & Trouche는 ‘동료’를 이론적 지식, 지필계산, 계산기와 같이 정보 도구 중의 하나로 보고 있지만, 본 연구 결과에서 동료는 교사와 함께 계산기를 잘 이용할 수 있도록 도움을 주는 변인으로 작용하고 있음을 알 수 있었다. 키 조작이 서툴거나 계산기가 에러 상황에 빠진 학생의 경우, 계산기 화면에 나타난 정보에 대한 의구심이 생겼을 때 동료나 교사와의 의사소통을 통해 문제를 해결할 수 있었다. 이러한 결과는 초등 수학 영재 학생을 대상으로 비례 추론 능력을 향상시키기 위해 계산기를 활용할 경우, 먼저 학생들의 비례 추론 발달 단계를 파악하여 그 단계에서 계산기가 유의미한 도구로 사용될 수 있도록 프로그램을 구성해야 한다는 시사점을 제공해준다. 게다가 계산기를 활용하여 수업을 진행할 때, 소집단으로 그룹을 편성한다면 계산기 사용에 대한 도움을 얻을 수 있어 계산기가 정보 도구로써 충분한 역할을 할 수 있을 것으로 본다.

셋째, 초등 수학 영재 학생들의 비례 추론 발달 단계 분석 결과 상당 수의 학생들이 곱셈적 접근 단계에 머물러 있었다. 김주석(2013)의 연구와 같이 본 연구에서도 초등 수학 영재 학생들의 비례 추론 능력이 곱셈적 접근 단계에 있는 학생이 많았다. Krutetskii(1976)는 수학 영재 학생은 현상에 대한 수학적 측면에 관심이 있어 함수적 관련성을 찾는 능력이 탁월하다고 하였지만, 본 연구에서 영재 학생들은 30일 동안 모

은 물의 양을 계산할 때 관계식을 이용하여 해결하기보다는 표에 나타난 자료에만 초점을 두어 차례로 곱해가는 전략을 사용하여 답을 구하였다. 이러한 결과를 볼 때 영재 교육과정에서 비례 추론은 여전히 발달시켜야 하는 능력 중의 하나이며, 영재 학생들의 비례 추론 능력을 키울 수 있는 프로그램의 개발이 필요하다고 본다.

본 연구에서는 초등 수학 영재 학생들의 비례 추론 발달 단계와 계산기 사용 행위 사이의 관계를 살펴보았다. 그러나 연구자이면서 동시에 관찰자의 역할을 동시에 수행하였기에 연구자의 의도가 연구 과정에서 영향을 주었을 것이라는 제한점이 있다. 또한 정비례 학습에 초점이 맞추어진 본 연구로부터 관찰된 계산기 사용 행위는 타 영역에서는 새로운 양상이 관찰될 수 있으므로 이에 대한 후속 연구도 필요할 것으로 본다.

참 고 문 헌

김민경, 권혁진 (2010). 수학 문제 해결에서 학업 성취도에 따른 표상 활용 능력과 특징 분석. **한국수학교육학회, 24**(2), 475-502.

김상미 (2013). 초등수학분야 영재교육원의 교육 내용 사례 비교 연구. **학교수학, 15**(2), 429-442.

김주석 (2013). **초등수학영재와 일반학생의 비례 추론 능력 및 비례문제 해결전략의 비교 분석**. 대구교육대학교 대학원 석사학위 논문.

이종욱 (2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **수학교육학연구, 16**(2), 157-177.

장혜원 (2003). 수학 학습을 위한 상황문제의 활용. **학교수학, 4**(3), 483-494.

정수지 (2011). **초등 수학 영재 프로그램 평가: 서울시 A교육청 사례를 중심으로**. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.

정은실 (2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

홍은자 (2004). **초등 수학 영재 교수-학습 프로그램 분석**. 서울교육대학교 대학원 석사학위 논문.

홍지연 (2012). **비구조화된 문제의 해결 과정에 나타난 초등학생의 수학적 추상화 및 비례적 추론 연구**. 이화여자대학교 대학원 박사학위 논문.

Ahl, V. A., Moore, C. F., & Dixon, J. A. (1992). Development of intuitive and numerical proportional reasoning. *Cognitive Development, 7*(1), 81-108.

Artigue, M. (2003). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Baroody, A. J., & Coslick, P. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baxter, G., & Junker, G. (2001). *Designing developments: A case study in proportional reasoning.* Retrieved from http://www.google.co.kr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=2&ved=0CDcQFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.stat.cmu.edu%2F~brian%2Frpm%2Fbaxterjunkerncme.pdf&ei=yBi4UsXILMeIkAXx2IGwBg&usg=AFQjCNFzY7ZuiH_Pt8P6fRcqvruJ8IAuJw&bvm=bv.58187178,d.dGI&cad=rjt

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fttzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36*(3), 247-273.

Caulfield, R., Smith, P. E., & McCormick. K. (2005). The spreadsheet: A vehicle for connecting proportional reasoning to the real world in a middle school classroom. In Masalski, W. J. (Ed.), *Technology-supported mathematics learning environments* (pp. 165-174). Reston, VA: NCTM.

Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 297-317.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching: Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Discovering Mathematics with the TI-73: Activities for grades 7 and 8 from http://education.ti.com/en/us/activities/explorations-series-books/activitybook_73_discovering.

Drijvers, P. (2003). Algebra on a screen, on paper and in the mind. In J. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, & R. M. Zbiek (Eds.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 241-267). Reston, VA: NCTM.

Fujimura, N. (2001). Facilitating children's proportional reasoning: A model of reasoning processes and effects of intervention on strategy change. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 589-603.

Fuson, K. C., & Abrahamson, D. (2005). Understanding ratio and proportion as an example of the apprehending zone and conceptual phase problem solving models. In J. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 213-234). New York: Psychology Press.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*, 14-18.

Gueudet, G. (2007). Learning mathematics with E-exercises: A case study about proportional reasoning. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14*(4), 69-82.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*(3), 195–227.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations. *ZDM, 34*(5), 204-211.

Heinz, K. R. (2000). *Conceptions of ratio in a class of preservice and practicing teachers.* Unpublished Doctoral Dissertation, The Pennsylvania State University.

Hershkowitz, R., & Kieran, C. (2001). Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within same mathematical activity: An experience with graphing calculators. In V. Heuvel, & M. Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education Vol 1* (pp. 95-107). Utrecht: Freudenthal Institute.

Hoffer, A. R., & Hoffer, S. A. K. (1992). Ratios and proportional thinking. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades k-8* (pp. 303-330). Boston: Allyn and Bacon.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Lagrange, J. B. (2005). Transposing computer tools from the mathematical sciences into teaching. In D. Guin, K. Ruventh, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 67-82). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr, & J. Hilbert (Eds.), *Number concepts & operations for the middle grades* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* Reston, VA: NCTM.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 335-368.

Nabors, W. K. (2003). From fractions to proportional reasoning: A cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(2), 133-179.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Norton, S. (2006). Pedagogies for the engagement of girls in the learning of proportional reasoning through technology practice. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 69-99.

Silk, E. M., Higashi, R., Shoop, R., & Schunn, C. D. (2010). Designing technology activities that teach mathematics. *The Technology Teacher, 69*(4), 21-27.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*(3), 271-292.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations. *The Journal of Secondary Gifted Education, 14*(3), 151-165.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 15*(4), 75-94.

Thompson, D. R., Austin, R. A., & Beckmann, C. E. (2002). Using literature as a vehicle to explore proportional reasoning. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 yearbook* (pp. 130-137). Reston, VA: NCTM.

Weinberg, S. L. (2002). Proportional reasoning: one problem, many solutions!. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 yearbook* (pp. 130-137). Reston, VA: NCTM.

Analysis on Behaviors of Using Calculator Based on Developmental Stage of Proportional Reasoning of Gifted Elementary Students

Kang, Young Ran (Graduate School, Yeungnam University)

This study analysed 8 gifted students'behavior of using calculator in the 5th grade based on qualitative data of direct proportion class with the utilization of the calculator. Pretesting with questionnaire had been made to verify students' developmental stages of proportional reasoning, and the stage was categorized according to Baxter & Junker (2001). The learning contents were made of worksheet, and the researcher held the class for 60 minutes. For analysing data, record of class was gathered to make a transcript and analysed it with Guin & Trouche'behavior of using calculator type. According to the result, each type of the behavior affected students' development of proportional reasoning differently.

* Key Words : Mathematically Gifted Student(수학 영재), Proportional reasoning (비례 추론), Calculator (계산기), Behavior types of using calculator (계산기 사용 행위)

논문접수 : 2014. 2. 2
논문수정 : 2014. 2. 26
심사완료 : 2014. 2. 26