대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 1, 57 ~ 81. Mar 2014

원의 방정식에서의 오류 극복 학습에 관한 연구
- 고등학교 1학년을 중심으로 -

한 경 민* · 고 상 숙**

본 연구는 고등학교 원의 방정식에서 나타나는 오류유형을 바탕으로 우수고교의 미성취학생들의 오류의 극복과정을 조사하였다. 연구결과는 학생들이 문제를 풀 때 그들이 도달한 현 단계를 자주 잊어버려서 문제풀이 전에 계획을 다시 복습할 수 있는 기회를 가졌다. 특히 문제해결 과정 생략오류와 잘못된 결론의 오류들이 현저히 감소하였는데 그들은 귀납적 수업모형을 바탕으로 한 수업에서 문제에 대한 대수식과 그림을 통해 수학적 개념, 원리, 그리고 식을 이해하였고 이런 탐구중심의 활동에서 수학적 내용을 매우 논리적으로 잘 해결하였다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 목적 및 필요성

교육은 학생들이 사회인으로 성장하면서 필요한 능력을 길러주는 중요한 역할을 한다. 학생 스스로 문제를 해결하고, 합리적인 의사결정을 할 수 있는 능력을 길러주어야 하는데 이러한 능력은 수학 학습을 통해 길러질 수 있다 (NCTM, 2000). 이러한 수학적 능력을 길러주기 위해서 여러 교수·학습 방법을 사용하여 학생들이 능력을 키울 수 있는 최적의 방법을 찾아야 하는 것이 교사의 역할이라 할 수 있다(NCTM, 1991). 그렇기에 학생들이 어떤 곳에서 학습에 어려움을 겪고 있는지 살펴보고 교사가 교수과정에서 학생들이 어려움을 극복하고 발전할 수 있도록 지도하는 것이 중요하다.

수학적 오류 분석에 관한 선행연구를 살펴보면, 오류의 유형을 분석하고 채점 기준을 개선하기 위한 연구(김성희, 2012), 수학 학습부진 학생들의 오류 유형을 다룬 연구(최선아. 2006) 등과 공학도구를 이용한 개선을 위한 연구(김성완, 2012)가 있었으나 대다수 여러 연구에서 오류 유형을 분석하는데 그치고 학생들이 이런 수학적 오류를 어떻게 극복해나가는지에 대한 연구는 매우 부족한 편이다. 특히 고교과정의 원의 방정식에서 학생들은 해석 기학적 접근에 미숙한 탓인지 한 가지 경우만을 고려한 풀이과정을 나타내는 오류가 많다. 이러한 현장 수업의 경험에 의해 원의 방정식에서 소수의 학생을 대상으로 한 오류 극복에 관한 연구가 필요하다고 생각되어 본 연구를 수행하게 되었다. 학생들이 쉽사리 빠질 수 있는 오류를 사전에 교사가 파악하고 극복할 수 있는 적절한 지도방법을 생각한다면 학생들이 이런 오류를 범하지 않거나 또는 극복하는 과정을 통해 올바른 수학 개념을 인지할 수 있을 것이다.

* 단국대학교 교육대학원, rudals-82@hanmail.net
** 단국대학교, sangch@dankook.ac.kr, 교신저자

오류는 극복해야할 나쁜 것이 아니라 그를 통해 사고의 발전이 일어날 수 있는 좋은 것이다. 그렇기에 오류에 관한 많은 선행 연구들이 진행되어 왔다. Tall과 Vinner(1981), Artigue와 Viennor(1987), Clements와 Del Campo(1987), Herscovics(1989)등의 연구에서처럼 학생이 지니고 있는 오개념의 파악으로부터 시작된 오류에 관한 연구는 Cornu(1991), 박선화(2000), 이종희와 김부미(2004) 등의 연구와 같이 오개념의 특성 이해, 오류 양상과 개념 변화 과정의 이해, 이를 해소할 수 있는 수업 모형의 개발 등으로 연구의 폭과 깊이가 더해가고 있다(김부미, 2004, 재인용).

김부미(2004)는 수학적 오류를 학생들이 고쳐야할 잘못된 개념으로 보지 않고, 연구자들의 입장과 견해에 따라서 대안적 개념(alternative conception), 소박한 개념(naive conception), 학생들의 개념(Student's conception), 인지적 장애(cognitive obstacle), 인식론적 장애(epistemological obstacle), 직관적 신념(intuitive belief)등으로 통용된다고 하였다. 또한 이러한 수학적 오류들은 4가지 공통된 특징이 있다고 하였다. 첫째, 수학적 오류는 학습자가 지식을 구성해 갈 때, 지각에 의존하거나 분화되지 않은 개념을 사용한다. 둘째, 상황에 따라 다르게 생각하며 단순히 인과적으로 생각하는 경향이 있다. 셋째, 새로운 상황을 이해하려고 할 때, 능동적인 인식 틀의 역할을 할 뿐 아니라 다른 작동 기제에 선행한다. 넷째, 사고방식 내에서 일관성을 갖고 나타나며, 쉽게 변화하지 않는 견고성을 갖고 있다. 이 연구를 살펴보면 오류가 일관성을 가지고 쉽게 변화하지 않으므로 오류가 생기기 전에 미리 교수학습 준비를 통해 오류의 유형을 파악하고 이에 잘 대처해야하는 방안을 모색해둘 필요가 있다.

수학적 오류와 오개념을 교사가 잘 파악하여 수학학습에서 발생할 수 있는 학생들의 어려움에 대한 지원을 적절히 한다면 학생들의 수학적 발견과 탐구에 도움이 된다(황혜정 외 5인, 2003). 그렇기에 교사들은 오개념의 적절한 활용을 통해 이를 올바른 수학적 개념으로 전이·진화시킴으로써 교수·학습에서 효과적으로 활용할 수 있다. 교사는 지속적으로 학생들의 오개념, 오류에 대한 지식을 갱신하고 학습내용의 변화에 따라 새로운 내용에 대한 오류 유형을 철저하게 분석하여 대처할 수 있도록 해야 한다(최승현 외 2인, 2013).

그 이외에 교사들이 학생들의 수학적 능력을 키우기 위해서는 수학적 내용뿐만 아니라 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감과 긍정적인 태도 등 정의적 영역의 개선과 더불어 상대방을 이해하고 배려하는 바람직한 인성을 길러 주어야하며, 수학은 개인차가 크게 나타나는 교과이므로 학생의 인지 발달 단계, 학습 수준, 학습 특성 등을 고려하여 적절히 교수·학습 방법을 적용해야 한다(교육과학기술부, 2012).

선행 연구들이 나타내듯이 오류는 학생들이 새로운 수학적 개념을 배울 때 자연스럽게 생기는 것이며, 그것을 제거해야 하는 나쁜 것으로 보기보다는 오류 극복을 통해 수학적 개념을 더욱 공고히 할 수 있고, 한 단계 더 나아갈 수 있는 동력이 될 수 있는 것으로 보아야한다. 또한 오류 극복을 통한 수학 학습의 발달은 학생들의 자기주도적 학습 능력 향상에 긍정적인 영향을 미친다. 그렇기에 본 연구에서는 원의 방정식에서 흔히 나타나는 오류 유형을 파악하고 학생들이 오류 극복을 어떻게 이루어 가는지 살펴보고자 하였다.

2. 용어의 정의

미성취 학생에 대한 정의는 잠재력과 수행 간이 불일치 정도를 판단하는 경우, 지능검사와 성취검사 점수의 관련성을 비교하는 경우, 그리고

실제 성취도와 예견된 성취도의 차이를 강조하는 경우 등이 있다. 따라서 미성취와 미성취 영재에 대한 대부분의 정의는 잠재적인 능력과 실제 성취도가 불일치를 보인다는데 동의한다(Whitmore, 1980). 본 연구에서는 비평준화 지역의 우수고교[1]에서 미성취학생을 대상으로 하였다.

Ⅱ. 문헌 고찰

1. 원의 방정식

고등학교 1학년 수학에서는 중학교 3학년 수학에서 익힌 도형에 관한 여러 성질과 관계를 데카르트(Descartes)의 해석 기하적인 관점에서 대수적인 방법으로 접근하여 기하학을 새롭게 조명해보고, 직관적인 사고에서 논리적이고 창조적인 사고로 발전시키는 것을 목적으로 한다(교육과학기술부, 2012). 좌표평면에서 원 위의 점들이 만족하는 방정식을 원의 방정식이라고 한다. 기하학적인 원의 정의는 '한 점에서부터 거리가 일정한 점들의 모임'이다. 이를 해석학적으로 표현하면 한 점을 중심 $C(a,b)$, 일정한 거리를 반지름 r, 같은 거리에 있는 점을 $P(x,y)$라고 하면 $\overline{CP}=r$이므로 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$이다. 이 식의 양변을 제곱하면 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이다.

역으로, 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 만족하는 점(x,y)를 좌표로 하는 점 P는 $\overline{CP}=r$가 성립하므로 원 위에 있다. 따라서 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 구하고자하는 원의 방정식이다(유희찬 외 8인, 2012).

우정호(2003)는 17세기 초에 데카르트(Descartes)는 모든 문제를 해결할 수 있는 보편적인 방법을 찾으려 노력했는데, 그가 찾은 방법은 모든 문제를 수학문제로, 모든 수학문제는 대수문제로, 모든 대수문제는 한 방정식의 풀이로 풀라는 사고 규칙이다. 그는 이러한 사고 패턴을 통해 기하학을 우선했던 유클리드(Euclid)적인 전통에 도전하여 대수적 수단인 방정식을 이용하여 기하학을 연구하는 해석기하학을 탄생시킴으로써 수학과 과학 발전에 지대한 공헌을 하였다. 데카르트(Descartes)의 기본발상은 좌표의 개념을 도입하여 점 대신에 실수의 순서쌍 (x,y)을 생각함으로써 평면을 '산술화'한 것과, 미지수가 두 개인 부정방정식$f(x,y)=0$에서 미지수 x를 x좌표로 간주하고 그에 대응하여 결정되는 미지수 y의 값을 y좌표로 간주함으로써, 그러한 좌표를 갖는 모든 점으로 이루어진 곡선을 나타내는 것으로 해석한 것이다. 이는 함수 개념과 미적분학을 탄생시키는데 기여하게 됨으로써 새로운 과학의 세계를 여는 계기가 되었다.

2. 수학적 오류

이미 많은 연구에서 수학적 오류에 대한 연구가 진행되어 왔다. 독일의 수학자 Radatz (1979)는 오류를 범하게 되는 범주를 5가지로 구분하고 있다. 언어의 어려움 때문에 생기는 오류 (langage difficult), 공간적 지식 획득의 어려움에 생기는 오류 (difficulties in obtain spatial imformation), 선행 기술, 사실과 개념의 미숙에 따른 오류 (deficient mastery of prerequisitie skills, facts and cincepts), 부정확한 결합 또는 사고의 경직성에 따른 오류 (incorrent associations or rigidity of thinking), 부적절한 규칙과 전략의 응용에 따른 오류 (application ofirrelevant rules or strategies)이다. Hardar, Zaslavsky,& Inbar(1987)는 대수와 기하 영역에 대한 이스라엘 학생들의 졸업 시험 결과를 바탕으로 잘못 이용된 자료(Missed data), 잘못 해석된 언어(Misinterpreted

1) 이 우수학교는 2013년 과학고와 외국어고를 제외한 전국공립학교에서 4위에 해당하는 학교이다.

language), 논리적으로 부적절한 추론(Logically invalid inference), 곡해된 정리나 정의(Misunderstood theorem or definition), 논증되지 않은 해답(Unverified solution), 기술적 오류(Technical errors)의 6개의 범주로 분류하였다. Clements(1980)는 문제해결과정에서 일어날 수 있는 학생들의 오류의 유형을 6가지로 제시하였는데 수학 읽기 오류(mathematics reading errors), 이해 오류(comprehension errors), 변환 오류(translation errors), 처리기술 오류(process skills errors), 부주의(careless)이다(박장희 외, 2012, 재인용).

이종희, 김부미(2006)는 학생들이 일차방정식을 풀 때의 오류를 구조적 오류와 실행적 오류로 나누었다. 구조적 오류는 개념의 불완전한 이해로 발생하는 복잡한 패턴을 가진 오류이며, 실행적 오류는 방정식 문제해결과정에서 비교적 단순한 조작의 오류나 주어진 형식이나 연산 과정에서 나타나는 오류이다. 구조적 오류에 속하는 오류의 범주는 논리적 오류, 개념상 오류로 범주화되며, 실행적 오류는 주어진 연산의 우선성 선택 오류, 수치 연산의 오류, 생략의 오류로 분류된다.

김차숙, 류희찬(2003)은 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구에서 오류 분석을 위해 오류 유형을 4가지로 분류하였다. 이해의 오류, 처리 기술의 오류, 요구되지 않은 해답, 애매한 오류로 분류하였으며 분석 결과 이해의 오류가 가장 많이 발생한다고 하였다. 같은 수학내용으로 김아람(2013)은 일차 방정식 문제 해결 과정에서 나타나는 오류의 유형 분석을 통해 '개념 이해에 대한 오류', '처리 기술의 오류', '요구되지 않은 답', '애매모호한 오류'로 4가지로 분류하였으며 연구 결과 일차 방정식의 문제 해결 과정에서 나타난 오류 중 개념 이해의 오류가 41.7%로 가장 높게 나왔다. 학생들이 수업에서 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하거나 또는 알고 있으면서도 활용할 수 있는 능력이 부족한 경우에 오류가 발생함을 발견하였으며 이러한 오류를 줄이기 위해서는 기계적인 문제 해결을 강조하는 것이 아니라 기본적인 수학적 개념의 원리를 이해하고 발견하여 다양한 문제에 적용할 수 있도록 충분한 지도가 필요하다고 하였다. 이는 수학 학습 시 도구적 이해보다는 관계적 이해를 통한 학습 시 오류를 줄일 수 있음을 말하고 있다.

최영아(2001)는 고등학교 수학에서 수학적 오류의 분석과 분류에 대한 연구를 통해 Hardar 외(1987)의 오류 모델을 기준으로 학생들의 오류를 6가지로 분류하였다. 즉, '잘못 사용된 자료', '잘못 해석된 언어', '논리적으로 부적절한 추론', '왜곡된 정리나 정의', '확인하지 않은 해답', '기술적인 오류'이다. 연구 결과 정리나 정의를 잘못 사용하는 오류의 비율이 26.5%로 가장 높게 나타났다. 최영아는 이 연구를 통해 학생들은 그들이 배운 정리나 정의를 나름의 이해를 통해 자신의 정의로 가지고 있어 때로 왜곡된 정의를 갖고 있기에 개념에 관한 지도와 더불어 흔한 유형의 오류를 제시함으로써 빈도가 높은 오류를 예방하고 적절한 활용을 통해 지도해야함을 말하고 있다.

이호철(2007)은 중학교 기하 증명과정에서의 오류를 분석하였는데 '가정을 잘 이용하지 못하는 오류', '도형에 집착하여 발생하는 오류', '연산자의 잘못된 적용', '연산자의 잘못된 실행', '증명 과정의 일부 생략', '결론을 바르게 내리지 못함', '기술적인 오류', '논리적 추론의 결여', '오류의 애매모호함'으로 총 9가지로 분류하였다. 그 결과 '가정을 잘 이용하지 못하는 오류'가 41.9%로 가장 높게 나타났다. 즉 학생들이 가정과 결론을 구분하지 못하여 생기는 오류가 가장 높다는 것을 알 수 있다. 연역적인 증명을 처음 접하는 학생들이기에 도형을 통해 직관적인

방법을 이용하여 증명에 친근하게 다가설 수 있도록 지도해야함을 보여주고 있다.

김옥경(1991)은 고등학교 수학 전 단원에서 고루 테스트를 걸쳐 오류 내용을 분석하였는데, Hardar, Zaslavsky, & Inbar(1987)가 이스라엘 학생들을 대상으로 분류했던 6가지 분류 모델에 ‘풀이과정의 생략’, ‘오류의 애매 모호성’이라는 오류 유형 두 가지를 추가하여 총 8가지로 오류 유형을 분석하였으며 오류 유형의 빈도는 <표 Ⅱ-1>와 같다. 연구 결과 집합과 명제에서는 논리적으로 부적절한 추론에 의한 오류가 가장 많았으며, 수와 식, 도형의 방정식에서는 잘못 해석된 언어의 오류가 많이 발생하였다. 즉 수학의 문장이나 언어의 이해 여부가 성취도에 연결된다고 볼 수 있으며, 수학적 내용에 따라 발생되는 오류의 종류가 서로 다름을 알 수 있다.

선행연구들을 살펴본 결과 학생들이 수학 문제 풀이에서 보이는 전반적은 오류는 비슷한 패턴을 보이고 있다. 기술의 오류나 논리적 판단의 오류, 잘못된 정의나 정리의 사용에 관한 오류들이 가장 많았기에 고등학교 1학년의 원의 방정식 부분에서도 학생들이 이와 같은 오류를 범하는지 살펴보고, 나아가 귀납적 탐구수업 모형에 기반을 둔 수업을 통해 학생들이 자주 범하는 오류들이 어떻게 극복되는지 극복 과정을 관찰하였다.

<표 Ⅱ-1>

오류 유형	오류 내용	발생 빈도(%)
오용된 자료	주어진 자료를 수험자가 어떻게 다루느냐에서 발생하는 오류	16.8
잘못 해석된 언어	문제 내용을 잘못 해석하는 데서 오는 오류	11.8
논리적으로 부적절한 추론	주어진 정보로부터 혹은 전에 잘못된 것으로부터 새로운 정보가 부적절하게 이끌어지는 데서 오는 오류	4.6
곡해된 정리 혹은 정의	특수하고 동일한 원칙, 규칙, 정리 또는 정의를 부적절하게 사용한 경우	30.2
요구되지 않은 해답	제시문제에 대한 해가 아닌 오류	5.5
기술적 오류	계산상의 오류, 즉, 대수 부호의 조작에서의 오류	11.4
풀이과정이 생략된 오류	풀이과정이 없이 답만 제시하거나, 문제를 풀다가 그만둔 경우, 현 단계까지의 풀이과정은 옳으나 다음 단계의 풀이과정이 생략된 경우	16.2
오류의 애매 모호성	글자가 흐릿하거나 애매모호하여 식별이 어려운 경우, 학생들이 제시한 답을 보고 연구자가 수험자의 의도를 정확히 분석할 수 없는 경우	3.5

Ⅲ. 연구방법

1. 사전 조사

가. 연구 대상

경기도 용인시에 있는 S고등학교 1학년 6개 학급 120명을 대상으로 진행하였다. 고등학교 1학년 원의 방정식 부분 교과내용을 모두 배운 상태에서 오류의 유형을 파악하기 위해 학생들의 학습내용 누락은 없는 상태에서 실시되었으며 본 연구가 시작되기 전 여름방학을 앞두고 실시하였다.

나. 검사지

학생들은 비평준화지역의 공립 고등학교로 전국학력평가에서 수리 1등급인 비율이 50%에 달하는 우수한 인재들이다. 따라서 기본 개념에 관한 문제보다는 여러 개념이 합쳐진 서술형 문항

으로 구성하여 문제 풀이 과정 중에서 나타나는 오류를 분석하고자 하였다. 교과서 4종 이상을 조사하고 수학 교육 전공자 1인과 수학교사 4인의 검토를 통해 교과서에 나오는 원의 방정식에 관련된 모든 개념을 포함한 문항 11개를 개발하였고, 문항의 신뢰도를 측정하기 위하여 SPSS V.12를 이용하였는데 Cronbach alpha 계수가 0.831로 나타나 신뢰도가 높게 나타났으며 각 문항의 평가 내용은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1>

문항 번호	평가 내용
1	중심이 특정 직선 위에 존재하며 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식
2	중심이 특정 직선 위에 존재하며 특정 점을 지나는 원의 방정식
3	특정 점을 지나며 x축, y축에 동시에 접하는 두 원의 중심 사이 거리
4	아폴로니우스 원의 방정식
5	원 위의 점으로 이루어진 삼각형 무게중심 자취
6	원과 직선의 위치관계
7	기울기가 주어진 원의 접선의 방정식
8	원 위의 점에서의 접선의 방정식
9	원 밖의 한 점에서의 접선의 기울기
10	원 밖의 한 점 P에서 그은 접선의 접점과 점P 사이의 거리
11	두 원의 공통 접선

2. 사전조사 결과

가. 전체 오류 유형과 오류 유형별 빈도 분석

연구의 결과 부적절한 논리적 추론(38.81%)이 가장 높은 비율로 나타났다. 이는 학생들이 문제를 해결할 때, 수학적 개념을 완벽하게 적립하지 못하여 부적절한 추론을 통해 문제를 해결했기 때문에 발생된 것이라 할 수 있다.

문항별로 살펴보면 2번 문항에서 부적절한 논리적 추론가 압도적으로 높게 일어났다. 2번 문항의 특성 상 문제 해결에 필요한 식이 두 가지였으나 학생들은 평소 교과서에서 보아온 기본형 문제에 비추어 식을 한 가지만 제시함으로써 오류를 범한 것으로 생각된다. 그 다음은 풀이과정의 생략(25%)인데 학생들이 문제 풀이 과정 중 계산이 복잡해지거나 숫자가 복잡해지는 단계에서 문제 풀이를 포기한 경우가 많았기 때문에 나타난 오류라 생각된다. 세 번째로는 기술적 오류(15.67%)로 계산 과정 중 부호의 변형이나 숫자의 변형으로 인한 오류가 많았다. 이는 문제를 빠르게 풀고 문제 풀이를 점검하지 않기 때문에 나타나는 오류라 생각된다. 네 번째로는 잘못된 결론 오류(11.94%)로 이는 문제 해결 과정은 옳았으나 문제에서 묻고자 하는 것을 정확히 파악하지 못하여 올바른 결론을 도출하지 못한 경우이다. 이는 많은 학생들이 빠른 문제 풀이 과정에서 처음에 읽었던 문제를 제대로 기억해내지 못하고 문제 풀이 과정에서 도출 된 답을 그대로 정답으로 인식했기에 나타난 오류라 생각된다. 다섯 번째 오류는 잘못된 정리의 사용에서 발생하는 오류(5.97%)로 오류의 빈도는 낮았다. 연구 대상 학생들의 학습 수준이 높은 만큼 정의나 정리에 관해서는 기본적인 학습이 되어 있는 상태였기에 일부 수학 미성취 학생들에게 발생했다. 마지막으로는 시각적 자료에서 발생하는 오류(2.61%)로써 원의 방정식에 관련된 문제를 해결하면서 문제풀이의 도구였던 도형을 잘못 그리게 되어 잘못된 정답을 도출하게 된 경우이다.

선행연구 중 김옥경(1991)이 고등학교 수학 전 단원에서 이루어진 오류 내용과 비교해보면 연구 결과가 다른 것을 볼 수 있다. 김옥경(1991)의 연구에서 도형의 방정식 부분에서는 잘못 해석된 언어의 오류가 높게 나타났으나, 본 연구에서는 부적절한 논리적 추론이 가장 높은 빈도로 발생하였다. 이러한 차이가 나타난 이유는 김옥

경(1991)의 연구가 평준화 지역의 고등학생을 대상으로 한 연구이기에 문제 내용을 잘못 이해하여 오류가 발생한 경우가 많았던 반면, 본 연구의 대상은 비평준화 지역의 학생들로써 문제 해석에 어려움을 겪기보다는 문제 풀이 과정 중 두 가지 이상의 조건들을 생각하여 문제를 해결하는 과정 중에서 논리적인 추론 부분에서 오류가 나타났기 때문이라 생각된다.

조사결과 많은 학생들이 정리와 정의를 명확히 알지 못한 상태에서 문제 풀이에 어려움을 겪고 있고, 많은 수의 학생들이 문제 풀이에 끈기가 없이 복잡한 문제 풀이 과정에서 포기하고 있으며, 의외로 많은 학생들이 숫자와 부호의 기술에서 잦은 실수를 보인다는 사실이 나타났다. 따라서 교사는 이런 오류의 발생을 줄여 줄 수 있는 교수·학습 방법을 찾아 오류를 극복할 수 있도록 지도해야 한다. 오류 유형과 오류 유형별 빈도는 <표 Ⅲ-2>와 같다.

3. 본 연구

가. 연구 대상

연구의 대상은 2013년 1학기 1차 지필평가와 2차 지필평가, 2학기 1차 지필평가 성적이 저조한 학생들 중 자신의 오류를 극복하기 위해 참여하길 원하는 학생들로 2명의 학생이 선택되었고, 일주일에 세 번 방과 후 1시간 30분 동안 연구에 참여함을 원칙으로 하였다.

우수고교 학교에서 2명의 학생들의 성적은 <표 Ⅲ-3>이 제시한대로 낮은 편이다. 특히 장발전 학생은 방초롱 학생에 비해 1학기 지필평가 점수가 다소 좋은 편이나 2학기 1차 지필평가 점수는 비슷한 것으로 나타났다. 2학기 1차 지필

<표 Ⅲ-2>

오류유형	오류 내용	발생빈도 (%)
부적절한 논리적 추론 - A형 오류	주어진 정보에서 타당치 못하게 이끌어 내진 정보이거나 이미 추론된 것에서 타당치 못하게 이끌어 내진 새로운 정보인 경우	38.81
풀이과정의 생략 - B형 오류	문제풀이 과정이 중단된 경우, 현 단계까지의 풀이 과정은 맞았으나 다음 단계의 풀이가 생략된 경우	25
기술적 오류 - C형 오류	계산상의 오류로써 이전 단계까지의 문제해결 과정은 맞았으나 다음 단계에서 옮겨 쓰는 과정에서 부호, 숫자의 변형 등이 일어난 경우	15.67
잘못된 결론 - D형 오류	결론 전 단계까지 문제해결은 옳았으나 문제가 요구하는 결론을 틀리게 제시한 경우	11.94
잘못된 정리의 사용 - E형 오류	정리나 정의의 내용은 잘 알고 있으나, 주어진 조건에 맞지 않은 경우에 사용한 경우	5.97
시각적 오류 - F형 오류	문제해결의 도구로 사용하는 도형을 잘못 사용한 경우	2.61
합		100

평가의 내용에 도형의 방정식 부분이 포함된 것을 고려한다면 두 학생이 원의 방정식에서의 학습 수준이 비슷할 것으로 보인다.

이는 두 학생의 평소 성적이 다른 상태에서 도형의 방정식 부분만 비슷한 성적을 보인 바 앞으로 오류를 극복하는 과정이 서로 다를 수 있음을 시사한다. 또한 사전조사에서 나타난 두 학생이 오류 특징을 요약 정리하면 <표 Ⅲ-4>와 같고, [그림 Ⅲ-1과 Ⅲ-2]는 이들의 오류유형을 분석한 자료 중 한 예시로써 '부적절한 논리적 추론'에 관한 사례를 제시한 것이다.

<표 Ⅲ-3> 연구 참여자 성적

별칭	이름	성별	1학기 1차 지필평가 점수	1학기 2차 지필평가 점수	2학기 1차 지필평가 점수
방초롱	방**	여	26.9	33.3	15.8
장발전	장**	여	41.9	50.8	18.7

2명의 학생들은 서로 알고 지내던 사이이고 연구자가 가르치는 학생들이라 학생들 간 또는 연구자와 학생들 사이에 큰 거리감 없이 자연스럽게 연구에 참여할 수 있었다.

<표 Ⅲ-4>

오류 유형	문항 번호	문항의 특징
A	1, 2	1, 2번 문항은 모두 원의 방정식을 구하는 문제로써 x축과 y축제 접하기 위해서 필요한 조건을 묻는 문제이다. 두 문항에서 A형 오류가 가장 높게 나타난 공통된 이유는 원이 x축, y축에 접하면 원이 반지름 r과 원의 중심 x좌표의 절댓값이 같거나 원의 중심 y좌표의 절댓값이 같음을 이용해야하는데 부적절한 논리적 추론으로 인해 절댓값을 생각하지 못했기 때문이다.
B	4, 9, 10, 11	4, 11번 문항은 문제해결 과정에서 계산 과정이 복잡하고 사칙 연산이 복잡한 문제로써 많은 학생들이 계산 과정을 끝까지 이행하지 못하고 중간이 그만 둠으로써 발생하였다. 9, 10번 문항은 문제 풀이 과정이 간단함에도 풀이 과정의 중단이 일어난 것으로 보아 뒷 번호의 문항이라 문제 해결 시간이 부족하였을 것이라 추측된다.
C	6, 7	5번 문항은 미지수를 학생 스스로 설정하여 무게 중심 좌표를 설정하고 원의 방정식에 대입하는 3단계의 문제 풀이 과정이 포함된 복잡한 문제로써 학생들이 각 단계를 거치면서 숫자의 변형이 나타난 경우가 많았다. 7번 문항은 점과 직선사이의 거리를 구하는 과정에서 근호($\sqrt{\ }$)를 계산하면서 제곱을 놓치는 경우에 오류가 발생하였다.
D	3, 6, 11	3번 문항은 문제 해결에서 나온 결론을 이용하여 답을 구하는 문제로써 구해야 할 정답을 학생들이 잊었기에 나타난 오류이며, 6번과 11번은 문제 풀이 과정에서 답이 2개가 나왔으나 정답을 1개만 기술한 경우이다.
E	10	원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결하려 하였으나 이 문제는 접선의 방정식은 구할 필요가 없는 문제이다. 접선의 방정식을 구했다면 접선과 원의 방정식을 연립하여 접점을 구한 뒤 원 밖의 한 점과 접점 사이의 거리를 구하면 되는 문제이다. 그러나 많은 학생들이 접선의 방정식을 이용한 문제 해결은 과정이 복잡하기에 접선의 방정식이 문제 해결에 필요한 정리가 아니었기에 문제를 끝까지 해결하지 못하였다.
	10	피타고라스 정리를 이용하는 간단한 문제이지만 학생들이 문제해결의 도구로 이용한 도형을 잘못 그림으로써 발생한 경우이다.

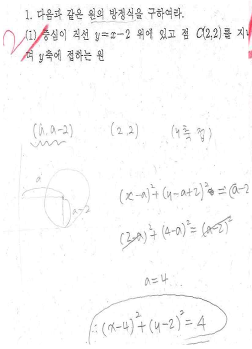
2명의 학생 모두 성적이 저조하며 평소 수업 태도를 관찰한 바로는 수업에 참여하고자 하는 의지는 가지고 있으나 수업 내용을 이해하고 다른 문제에 적용하는 데 다른 학생들에 비해 시간이 많이 필요한 상태였다. 또한 자신의 문제풀이에 자신이 없으며 수업 시간에 대답하기를 꺼려하는 모습을 보이고 있었다. 교사의 발문에 대답하기 어려워했으며 자신이 어디서부터 어떤 내용을 잘 모르고 있는지에 대해서도 설명하기 어려워하였다.

장발전 학생은 세 남매 중 첫째 딸로 공부를 잘해야한다는 부담감이 큰 학생이다. 평소에도 말이 없는 편이며, 중학교 때부터 수학 성적이 저조하여 수학에 공포심이 있으며 자신은 잘 할 수 없을 것이라는 부정적인 생각이 깊게 자리한 학생이었다. 중학교 3년 내내 수학 시험에서 실패한 경험으로 인해 자신은 수학에 재능이 없고 앞으로 더욱 못할 것이라는 비관적인 모습을 보이고 있었다. 중학교에서 배운 수학 내용을 잘 습득하고 있지 못한 상태였으며, 수학 학습 습관을 자세히 살펴본 결과 수학 문제 풀이에 있어서 글씨를 아주 작게 쓰며 수학적 기호를 두서없이 적는 버릇이 있어 자신의 문제풀이 과정을 검토할 수 없었다. 그로 인해 문제 풀이 과정 중 자신이 어디까지 문제를 해결했는지 확인하지 못해 당황해하는 모습을 자주 보였다. 글씨가 너무 작고 불분명하게 적다보니 문제 풀이 과정에서 숫자와 부호가 바뀌는 기술적 오류를 상당히 많이 보였다. 그리고 문제의 과정이 복잡하거나 답이 정수로 나오지 않을 경우 자신의 문제 풀이에 문제가 있을 것이라 섣불리 판단하고 문제 풀이를 중단하거나 답을 도출하지 않는 모습을 보였다. 선행 지식이 부족하여, 선행지식이 필요한 문제 풀이 과정은 매우 취약하였다. 이 학생이 주로 보이는 오류 유형은 부적절한 논리적 추론과 기술적 오류였다.

방초롱은 외동딸로 부모님의 기대를 한 몸에

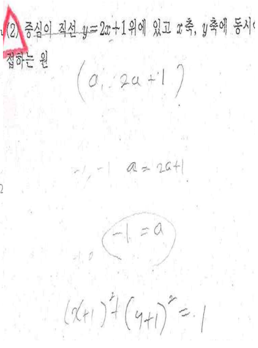
받고 있는 학생이다. 평소에는 쾌활하며 약간 엉뚱한 소리를 잘하며 일본 만화에 매료되어 만화 속 용어를 일상 언어로 사용할 정도의 학생이다.

[그림 Ⅲ-1]



[그림 Ⅲ-1]은 1번 문제로 원의 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있어 중심 좌표를 $(a, a-2)$ 라 설정한 후 원이 y 축에 접하므로 원의 반지름은 원 중심의 x 좌표의 절댓값과 같으므로 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a+2)^2=a^2$ 이라 세우면 된다. 그 후 이 원이 지나는 점 $C(2,2)$ 를 대입하여 a 값을 구하면 되는 문제이다. 위 그림은 반지름을 $(a-2)$ 로 잘못 생각함으로써 오류가 나타난 경우이다

[그림 Ⅲ-2]



[그림 Ⅲ-2]는 2번 문제로 원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있고 원이 x, y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름은 원 중심의 x 좌표의 절댓값과 y 좌표의 절댓값이 같으므로 $|a|=|2a+1|$ 을 해결하여 a 값을 구하면 되는 문제이다. 위의 그림은 절댓값을 생각하지 못하여 문제를 해결함으로써 오류가 발생한 경우이다.

수업 시간에 잘 참여하나 문제 해결 속도가 느려 수업 중간에는 약간 힘들어하는 모습을 보였다. 방초롱 학생은 장발전 학생과는 반대로 글씨를 너무 크게 쓰는 나머지 문제 해결 과정을 다 적지 못하고 빈틈을 찾아 이리저리 문제를 해결해 나가고 있었다. 연습장을 사용해보니 조금은 개선되었으나 복잡한 식들은 한 줄에 정리하지 못하고 있어 글씨를 줄여서 사용할 것을 권하였다. 이 학생은 자신의 잘못된 수학적 오류에 대하여 부끄러워하였으나 금새 웃으면서 고칠 수 있다고 생각하는 긍정적인 모습을 보여주어 장발전 학생과 대조적이었다. 중학교에서 배운 선행 지식은 장발전 학생에 비해 조금은 더 많았으며, 고등학교에서 배운 정리와 공식을 암기하고 있었다. 그러나 어느 조건에서 사용하는지에 대한 이해없이 암기한 내용이라 문제 풀이에 부적절하게 자주 사용하고 있었으며, 자신의 풀이 과정을 검토하지 않는 모습을 보였다. 이 학생이 주로 보인 오류는 기술적 오류, 잘못된 정리의 사용 오류였다.

나. 연구 도구 : 연구 지도안

사전조사를 통해 오류 빈도가 높았던 수학 내용을 중심으로 우수 고교에서 수학 미성취학생들의 오류가 어떻게 극복되는지를 관찰하고 묘사하기 위함이다. 연구는 귀납적 탐구수업 모형(고상숙, 정인철, 박만구, 2009)의 따른 5차시 수업이 진행되었고, 차시별 내용은 사전조사에서 많이 나타난 오류들을 개선하기 위한 내용으로 구성하였으며 그 내용은 <표 Ⅲ-6>과 같다. 수학 학업 성취도가 낮은 학생들을 대상으로 하는 수업이기에 수업에서 사용한 문제는 문제풀이과정이 여러 단계를 요하는 복잡한 문제보다는 기본 개념을 토대로 하여 문제풀이에 관한 아이디어가 필요한 문제들로 구성하였다.

<표 Ⅲ-5> 귀납적 탐구수업모형 절차

단계	요소	수업 전략
1	문제파악, 탐색	여러 자료를 제시하여(가능하면 학생의 인지구조에 알맞은 자료를 제시하는 것이 바람직하다)자료의 다양성을 유지한다.
2	자료제시 (탐구활동)	일반화를 하기 위해 주어진 소재를 이용하여 단계적 탐색과정을 거친다.
3	규칙성 발견 및 정리	탐색과정을 통해 얻은 직관적인 개념이 명확한 기호나 언어를 도입하여 개념을 설명, 정리한다.
4	적용	증명, 발전적인 보기와 같은 수준의 경험이 이어지며, 교사의 설명에 의하여 확증작업이 이루어진다.

<표 Ⅲ-6> 차시별 내용

영역 / 차시	원의 방정식 영역	주요 개념
1	원의 방정식	중심이 직선 위에 존재하며 x축, y축에 접하는 원의방정식
2	원과 직선의 위치 관계	원과 직선의 만나는 교점의 개수(판별식D) & 원의 중심과 직선까지의 거리(d)와의 관계
3	기울기와 접점이 주어진 원의 접선의 방정식	기울기와 접점이 주어진 경우의 접선의 방정식
4	원 밖의 한 점에서 그은 원의 접선의 방정식	원 밖의 한 점에서 그은 원의 접선의 방정식과 평행이동
5	두 원의 공통 접선	두 원의 위치 관계에 따른 공통접선

다. 연구 절차

본 연구는 사전조사에 참여한 학생 중 수학 미성취학생 2명을 선택하여 오류 극복 학습 과정을 관찰하였다. 2013년 10월 15일부터 총 5차시로 진행하였으며, 수업모형은 귀납적 탐구수업 모형을 이용하였다. 수업은 매주 3번 오후 4시 30부터 1시간 30분 동안 수업을 진행하였으며, 2명의 학생이 함께 수업에 참여하였다.

귀납적 탐구수업 모형을 이용하여 수업을 진행하는 동안 학생들은 직접 그림을 그리고 문제 해결 과정을 서로에게 일상 언어로 설명하고, 질문이 생기면 바로 표현하도록 지도하였다.

교사는 학생들의 일상적인 언어를 통한 수학적인 문제풀이 과정을 수학적인 기호를 통한 수학적 의사소통이 가능할 수 있도록 지도하였으며, 학생들의 학습 진행상황에 맞추어 적절한 발문을 통해 학생들이 탐구의 아이디어를 얻을 수 있도록 하여 탐구가 잘 이루어 질 수 있도록 도와주는 역할을 하였다.

학생들끼리 수업 시간 동안 서로 대화를 통해 서로의 학습 상황을 점검할 수 있도록 하였으며, 자신들이 보이는 문제점을 스스로 찾고 어떻게 개선하면 좋을 지에 대해서도 서로 이야기 할 수 있도록 하였다.

귀납적 수업 모형을 통한 수업과 면담을 진행하면서 관찰 및 교사와의 대화로부터 얻은 녹음자료는 전사를 통해 엑셀파일로 정리하였으며 학생들이 수업 중에 기록한 수학활동지도 수집하였다.

Ⅳ. 연구결과 및 분석

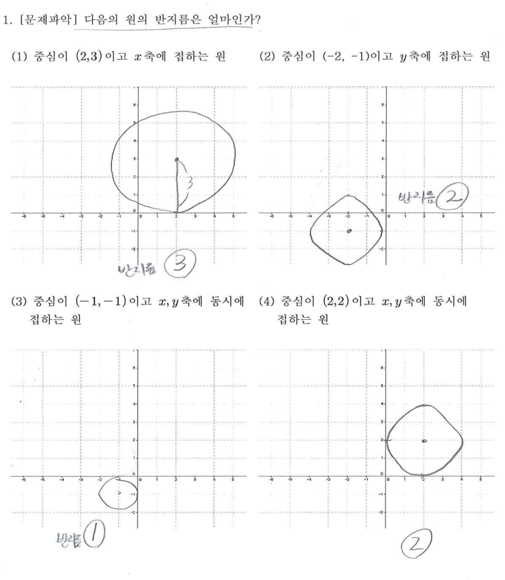
사전조사를 통해 오류의 유형을 파악한 후 본 연구는 이들 오류가 어떻게 극복하는지를 파악하고자 하였다. 총 5차시의 수업이 진행되었고 연구 참여자 두 학생의 발달과정은 다음과 같다.

1. 제 1차 수업

제 1차시 수업에서는 원의 방정식을 세우는 수업을 진행하였다. 처음에는 학생들이 낯설어했으나 귀납적 탐구수업 모형에 따른 수업이기에 교사의 주도적인 설명보다는 학생들이 직접 그림을 그리거나 친구들과의 대화, 교사와의 대화를 통해서 탐구할 수 있는 기회를 제공함으로써 수업에 적극적으로 참여하게 되었다.

[그림 Ⅳ-1]과 <프로토콜 1>은 장발전 학생의 문제파악 활동의 그림과 대화 내용이다.

[그림 Ⅳ-1] 장발전 학생의 탐구활동 모습



<프로토콜 1>

교　사 : 먼저 첫 번째 그림에서 원의 반지름의 크기가 얼마지?

장발전 : 3이요.

교　사 : 그럼 그 값은 원의 중심의 어떤 것과 같아?

장발전 : y값이요.

교　사 : 두 번째 그림에서 원의 반지름의 크기는?

방초롱 : 2요.

교　사 : 그럼 그 값은 원의 중심의 어떤 것과 같아?

장발전 : 음...y값. 아닌데...[자신있게 말하지 못하고 머뭇거림]

방초롱 : 절댓값이요!

교　사 : 그렇지. 좀 더 정확히 말하면?(수학적으로 정확히 말하도록 지도함)

방초롱 : y좌표의 절댓값이요.

교　사 : 원이 x축에 접하는 경우에는 원의 반지름은 원의 중심의 어떤 것과 같다고 말할 수 있을까?

방초롱 : y좌표의 절댓값이요.

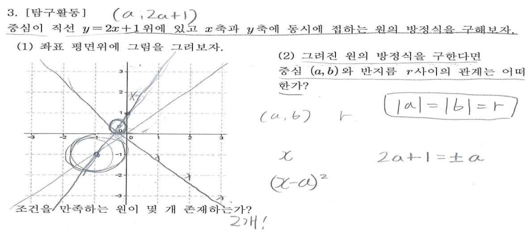
교　사 : 원이 y축에 접하는 경우에는 원의 반지름은 원의 중심의 어떤 것과 같다고 말할 수 있을까?

장발전 : x좌표의 절댓값이요.

다양한 조건에서의 원의 그림을 그리면서 원의 중심과 원의 반지름 사이의 관계를 말로써 설명할 수 있도록 발문을 지속하였다. 탐구 활동 결과 학생들이 각각의 x축과 y축에 접하는 원의 방정식에서 반지름과 원의 중심 좌표 사이의 관계를 발견하였으며, 각 축에 접하는 원의 반지름의 크기가 원의 중심의 좌표의 절댓값과 같다는 것을 놓치기에 일어나는 원의 방정식 수립에서의 부적절한 논리적 추론이 개선되는 것을 보여주었다.

[그림 Ⅳ-2]와 <프로토콜 2>는 방초롱 학생이 탐구 활동을 하면서 적절한 논리적 추론을 통해 문제를 해결하는 모습이다.

[그림 Ⅳ-2] 방초롱 학생의 탐구활동 모습



<프로토콜 2>

교　사 : 다음 탐구로 넘어가서 중심이 직선 $y=2x+1$위에 있고 x축, y축에 동시에 접하는 원을
그려보자.

방초롱 : 샘, 이게 어떻게 그려져요?

장발전 : 이거 봐주세요. [자신이 그린 제 3사분면의 원을 보여준다], 샘 이거 맞아요?

교　사 : 이 원 어떻게 찾은 건데? (학생의 생각을 수학적으로 정리하도록 유도함)

장발전 : 양 축에 만날 거니까 x랑 y가 같을 것 같아서 $y=x$ 그래프랑 $y=2x+1$ 그래프랑 같이 그려봤더니 만나는 점이 $x=y=-1$가 찾아졌어요.

교　사 : 맞네. 잘했네. 근데 원이 그거 이외에 또 있을순 없나?(다양한 원의 존재를 이끌어내기 위함)

장발전 : 아..모르겠는데…[다른 원이 존재할 수 있을 것이라 전혀 예상하지 않음]

교　사 : 앞에서 x축이랑 y축에 동시에 접하는 원의

중심 좌표와 반지름 사이의 관계가 어떻지?

방초롱 : r 이랑 $|a|$, $|b|$ 가 같아요.

교 사 : 그렇지, 절댓값이 같지. 그럼 $y=x$ 직선 말고 다른 직선은 뭘 찾을 수 있을까?

방초롱 : $y=-x$ 이요?

장발전 : 맞네~ 그렇게 식을 세우면$x=-\frac{1}{3}$ 이 나오네.. 원이 2개 맞다!!! [자신의 풀이에 뿌듯해함] 그럼 $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 겠네요..

교 사 : 정말로 그렇게 생각해? [풀이 과정 점검을 유도함]

장발전 : 네.. 아니에요? [정답이 아닌 것에 난감해했지만 풀이를 점검하지는 않음]

교 사 : 이 원이 어떤 직선 위에 있는 거라고 했지?

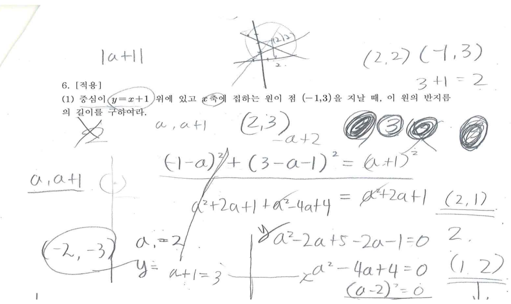
장발전 : $y=-x$ 요.

교 사 : 근데도 중심의 좌표가 같을까? 그림 좀 그려봐. [그림을 이용한 점검을 이용하도록 함]

장발전 : 맞다, 맞아...죄송해요...흐흐흐 $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 이거 맞죠?

'원이 x축과 y축에 동시에 접합다'는 조건을 보면서 학생들은 제 1사분면과 제 3사분면 위에 존재하는 원을 떠올리며 원이 1개만 존재할 것이라 예상하고 문제를 해결한 후 문제 풀이 과정을 검토할 생각을 하지 않았다. 이는 x축과 y축에 동시에 접합하기 위해서는 원의 중심의 x좌표와 y좌표가 같아야한다는 오류를 범하고 있었기 때문이다. 여러 원들을 그려보면서 모든 사분면에 접하는 원의 중심과 반지름 사이의 관계를 파악한 후 원의 중심 좌표의 절댓값이 같다는 것을 파악하였다. 그러나 문제의 조건인 직선의 식과 문제 해결의 중요 아이디어를 잊는 모습을 보여주었다.

[그림 Ⅳ-3]과 <프로토콜 3>은 탐구활동을 통해 파악한 축에 접하는 원의 중심과 반지름 사이의 관계를 이용한 문제 풀이 과정이다.



[그림 Ⅳ-3] 장발전 학생의 잘못된 결론의 오류 극복 모습

<프로토콜 3>

장발전 : a 값이 2가 나와요.

교 사 : 그래? 그럼 원의 반지름은 얼마지?

장발전 : 2 요! [자신있게 발표함]

교 사 : 진짜로? 문제가 뭘 묻고 있는지 다시 한 번 점검해봐. 그리고 지금까지 문제 풀이를 잘 알아볼 수 있도록 정리해서 써봐. 어떤 걸 답으로 적어야하는지는 꼭 표시해두고.

방초롱 : 3 이요..

장발전 : 아, 왜??? 아...맞네...1 을 더해야하네.... 아까워...[정답을 구하지 못했으나 정답에 근접했다는 사실에 좋아하면서도 아쉬워함]

문제를 빨리 해결해야한다는 것에 집착한 나머지 문제가 어떤 결론을 요구하는지 파악하지 않은 채 계산에 매진하고 계산 결과를 답으로 제시하는 모습을 보여주었다. 교사는 문제가 무엇을 요구하는지 살펴보고 반드시 표시해두어 잊지 않도록 해야 하며, 문제 해결의 과정을 기록하고 사고 과정을 점검해 볼 수 있도록 지도함으로써 잘못된 결론의 오류를 극복할 수 있도록 하였다. 두 학생이 제 1차 수업에서 극복한 오류는 <표 Ⅳ-1>과 같이 제시할 수 있다.

2. 제 2차 수업

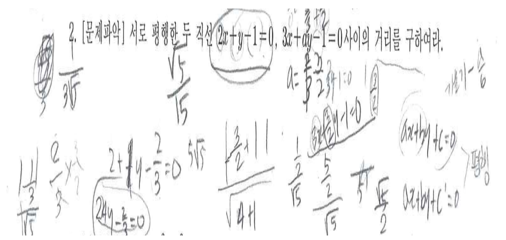
제 2차 수업은 원과 직선사이의 위치 관계를 파악하는 방법에 대해 수업을 진행하였다. 원과 직선의 위치 관계를 파악할 수 있는 두 가지 방

<표 Ⅳ-1> 제 1차시에서 극복한 오류

학생	오류 극복	A	B	C	D	E	F
방초롱	x 축과 y 축에 접하는 원의 방정식을 구할 때, 원의 중심 좌표가 각 사분면에서 어떻게 달라지는지를 인지하기 시작했다. 그렇기에 문제 해결에서의 부적절한 논리적 추론이 줄어드는 모습을 보였으며, 문제를 끝까지 읽고 문제의 답이 무엇인지 잊지 않고 문제를 해결하여 잘못된 결론을 내리는 오류를 줄이는 모습을 관찰하였다.	o		o	o		o
장발전	원의 중심 좌표가 각 사분면에 어떻게 달라지는지 인식하기는 했으나 문제 해결에 바로 적용하지 못하였다. 문제를 끝까지 읽지 않아 답을 놓치고 있다는 자신의 문제점을 파악하여 문제점을 극복하기 위해 노력하는 모습을 보여 추후 잘못된 결론의 오류를 극복할 수 있는 가능성을 보여주었다.	o			o		o

법을 학생들이 찾을 수 있도록 탐구 활동을 제시하였다. 탐구 활동을 통해서 학생들은 원과 직선까지의 거리를 이용한 문제를 해결하였으며, 여러 가지 문제 풀이 중 계산이 비교적 간단한 문제 풀이 방법을 찾을 수 있었다.

[그림 Ⅳ-4]과 <프로토콜 4>는 장발전 학생의 잘못된 계산의 오류를 개선하는 모습이다.



[그림 Ⅳ-4] 장발전 학생의 잘못된 계산의 오류 극복 모습

<프로토콜 4>

교 사 : 그럼 2번째는 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하는 문제인데, 이건 1번이랑 비교해서 어떤점이 다를까?

방초롱 : 이건 둘 다 직선이에요, 아깐 하나는 점이었는데…

장발전 : 샘, 근데 두 직선이 평행인거 맞아요? 앞에 숫자가 다른데요?

교 사 : x, y 앞에 숫자가 다르면 평행하지 않은 거야?

장발전 : 아니..뭐..꼭...(자신이 모른다는 점을 확실히 말하지 않음) 그럼 어떻게 해요?

교 사 : 문제에서 평행하다고 했으니까 평행 조건을 사용해야겠지...평행 조건이 뭐지?

방초롱 : 기울기가 똑같은거요.

교 사 : 앞에 직선 기울기가 얼마지?

장발전 : 아~~~ 기울기...그럼 a가 $\frac{2}{3}$네.

교 사 : 응? 얼마라고? 다시 잘 봐봐.

장발전 : [눈치를 보며] 아니아니. $\frac{3}{2}$요. 흐흐흐....

교 사 : 계산 바로 해야지. 검산도 하고. 그런데 꼭 이렇게 기울기를 찾아야 가능할까?
애들아, $x+2y+1=0$이랑 $2x+4y-3=0$이 서로 평행한 직선일까? 아닐까?

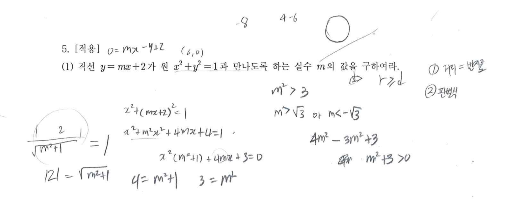
장발전 : 음...기울기가 똑같이 $-\frac{1}{2}$이고 상수항이 다르니까 평행해요.

교 사 : 그럼 각 항의 문자들을 가지고 와서 비율을 만들면 어떨까?

장발전 : $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\neq\frac{1}{-3}$이네요.. 이야..진짜네, 신기하다.

평행한 직선에 대한 개념은 가지고 있으나 고등학교에서 직선의 방정식 $ax+by+c=0$이 아직은 낯설어 두 직선의 방정식 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 서로 평행할 조건 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$(단, $a'b'c'\neq 0$)를 자유롭게 사용하지 못해, 주어진 식을 일차함수 꼴로 변형하여 기울기를 비교해서 문제를 해결하고 있었다. 이 경우 학생이 알고 있는 직선의 식 $y=ax+b$의 형태로 변형하는 것도 좋은 방법이지만 두 직선이 평행하므로 직선의 방정식에 0이 아닌 특정한 상수를 곱하여도 기울기가 변하지 않는다는 점을 예로 보여주어 문제 해결을 도울 수 있었다. 또한 계산 실수는 여전히 반복되고 있었기에 문제해결과정을 점검하여 잘못된 풀이를 찾고 고치는 습관은 꾸준히 지도해야함을 알 수 있었다.

[그림 Ⅳ-5]과 <프로토콜 5>는 원의 접선의 방정식을 구할 때, 여러 방법으로 해결할 수 있으나 그 중 어떤 풀이가 더 간단한지 느끼고 문제를 해결하는 모습이다.



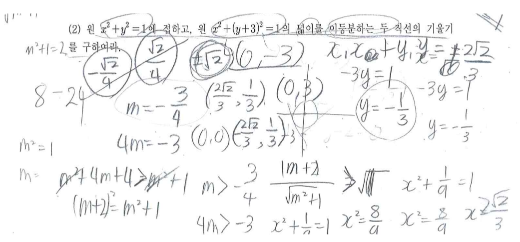
[그림 Ⅳ-5] 방초롱 학생의 여러 가지 풀이방법 비교 모습

<프로토콜 5>

교 사 : 잘했어~ 그럼 안 만나려면 어때야지?
방초롱 : 거리가 반지름보다 작아야해요, 아니 커야해요.
교 사 : 그럼 두 번 만나려면?
장발전 : 거리가 반지름보다 작아야해요.
교 사 : 잘했어~근데 수학에서 문제를 푸는 방법이 한 개는 아니잖아? 그럼 원의 중심과 접선까지의 거리 공식 말고 다르게 푸는 방법은 뭐가 있을까?
방초롱 : 전에 수업시간에 판별식 썼었어요.
교 사 : 판별식은 언제 쓰는거지?
방초롱 : 근의 개수 구하는건데...
교 사 : 그렇지. 정확히 말하면 실근의 개수를 구하는 거지. 원의 방정식과 접선의 방정식 이 두개의 식을 이용해서 판별식을 사용해야겠지.
장발전 : 두개를 연립해서 x 의 개수가 교점의 개수에요~
교 사 : 그럼 문제 풀이 과정을 말로 설명해볼까?
장발전 : 원의 방정식이랑 접선의 방정식을 서로 연립한다. 연립방정식의 판별식을 계산해서 판별식이 양수면 2개, 0이면 1개, 음수면 0개이다
교 사 : 자 그럼 3번 다 풀었니?
방초롱 : 샘, 안나와요.
교 사 : 그래? 어떤 방법으로 풀었는지 샘 좀 보여줄래?
방초롱 : 판별식을 사용했는데... 어디서 틀린 건지 모르겠어요.
교 사 : 차분하게 검산하자.
방초롱 : 아~ 여기 넘어오면서 부호가 틀렸구나. 그럼 됐네. 나왔네.
교 사 : 그렇지? 검산을 좀 잘해봐. 그런데 이 방법 말고 다른 방법으로 풀 수 있지 않을까?
장발전 : 네. 원 중심이랑 직선 사이의 거리요.
[계산을 한 후]
장발전 : 헐.. 훨씬 더 간단하네...
방초롱 : 그러네...이게 더 빠르네...진작 이걸로 할 걸...

학생들은 중학교에서 학습했던 연립방정식을 이용한 문제 풀이 과정이 익숙하여 새로 학습한 점과 직선 사이의 거리를 이용한 해결방법을 잘 사용하지 못하고 있었다. 학생들은 여전히 기술적 오류를 보이고 있었다. 그러나 두 가지 풀이 방법을 모두 경험하면서 어떻게 문제를 해결하는 것이 더욱 효율적인가에 대한 생각을 갖게 되었다.

[그림 Ⅳ-6]과 <프로토콜 6>은 장발전 학생의 풀이과정 생략 오류를 극복하는 모습이다.



[그림 Ⅳ-6] 장발전 학생의 풀이과정 생략의 오류 극복 과정 모습

<프로토콜 6>

교 사 : 그러면 문제를 정리해볼까?
방초롱 : 원에 접하고, 원의 중심 $(0, -3)$ 을 지나는 직선의 기울기를 구하래요.
교 사 : 그렇지, 잘했어! 그럼 우리 이제 뭐부터 시작하면 되지?
장발전 : 직선의 방정식을 세워서, 중심까지 거리가 반지름이랑 같다. 맞나?
[교사의 대답을 기다리면서 자신감 없이 대답하고 있음]
교 사 : 그렇지. 이제 잘 아네. 그럼 우리 한번 해보자.
방초롱 : 샘..답이 이상해요...
교 사 : 왜?
방초롱 : 숫자가 더러운데...

학생들은 문제 해결의 결과가 자연수와 정수, 또는 간단한 기약분수로 나오지 않은 경우에 답에 대한 불안감을 보였다. 자신이 틀릴 수 있을 것이라는 생각으로 인해 더 이상 계산하지 않은 경우도 보였으며 계산을 끝까지 해내지 않는 풀이 과정의 생략 오류를 보이고 있었다. 학교 시험이나 국가 학력평가에서 서술형 문제로 제시되는 것들이 간단한 답의 형태를 보이고 있어 무리수와 분수꼴의 답의 형태에 익숙하지 않은 것이라 생각된다. 수업을 통해 다양한 형태의 답이 존재한다는 것을 꾸준히 인식시켜줄 필요가 있다고 생각된다.

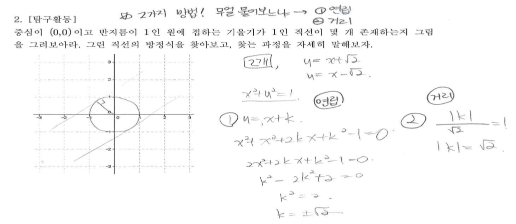
위 내용을 요약해 보면 두 학생이 제 2차 수업에서 극복한 오류는 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 제 2차시에서 극복한 오류

학생	오류 극복	A	B	C	D	E	F
방초롱	자신의 문제 풀이를 검토하기 시작하여 기술적 오류를 줄였으며, 문제 풀이 과정 중 답이 다양한 숫자와 문자로 나타날 수 있다는 것을 인식하여 문제를 끝까지 해결하지 않는 풀이과정의 생략 오류를 줄이고 있었다.		o	o			
장발전	문제를 해결하는 방법이 다양함을 느껴 문제해결을 다양한 방법으로 시도하는 모습이 관찰되었다. 또한 글씨를 조금 더 깔끔하게 기록하여 기술적 오류를 줄이는 모습이 관찰되었다. 그러나 아직까지는 자신의 풀이에 대한 확신을 갖고 있지는 못하고 있었다.		o	o			

3. 제 3차 수업

제 3차 수업에서는 원의 접선의 방정식을 구하는 방법에 대해 학습하였다. 원의 접선의 방정식을 구하는 유형은 크게 3가지로 분류된다. 기울기가 주어진 접선의 방정식, 원 위의 접점이 주어진 접선의 방정식, 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식으로 3가지 유형이 있다. 제 3차시 수업에서는 앞의 2가지 종류에 대해 수업을 진행하였다.



[그림 Ⅳ-7] 장발전학생의 기술적 오류극복 모습

[그림 Ⅳ-7]과 <프로토콜 7>은 장발전 학생의 원의 접선의 방정식을 구할 때 다양한 풀이 방법이 존재함을 알게 되고, 기술적 오류를 극복하는 모습이다.

<프로토콜 7>

교 사 : 두 식을 연립해서 판별식으로 풀 수 있겠지. 또는 점과 직선 사이의 거리를 이용해서 풀 수 있지. 둘 중에 아무거나 너희 맘에 드는 걸로 하면 되는 거야. 잘 진행되고 있니?

장발전 : 식이 너무 길고 복잡해요. [두 식을 연립하여 계산하고 있다.]

방초롱 : 난 직선까지 거리로 풀어봐야지.

교 사 : 천천히 풀어봐...[학생들에게 충분히 생각하고 문제풀이할 시간을 제공하고자 함]

장발전 : 샘 전 아직도 안 나왔어요... 음...(k^2-2k^2의 계산이 안 되고 있는 모습을 보임. 식이 길어지면서 계산이 멈춰지고 있음을 느낌)

교 사 : 천천히 숨을 쉬고, 글씨를 좀 더 크고 정확하게 써봐.

장발전 : 네...[시간이 흐른 뒤]답이 나왔어요.

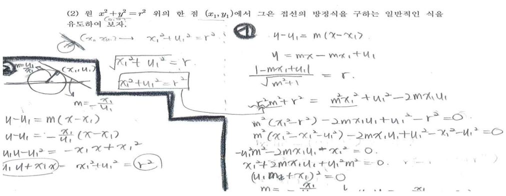
교 사 : 두 가지 방법이 모두 같은 답을 구할 수 있지만 어떤 경우에 어떤 방법을 사용하느냐가 중요하지, 그치? 단순히 y절편을 구하는 경우에는 어떤 방법을 쓰는게 좋을까? [학생 스스로 두 문제풀이 방법을 비교해 볼 수 있도록 하여 편리할 방법을 선택하도록 함]

방초롱 : 점과 직선사이의 거리요. 판별식을 계산이

너무 복잡하고 어려워요.
교 사 : 접점을 구하는 문제라면?
장발전 : 그때는 연립해서 좌표를 찾아야해요.

위의 문항 해결에서 학생들은 중학교 때 사용했던 연립방정식을 푸는 방법을 더욱 익숙하게 사용하였다. 그러나 연립방정식을 이용한 문제해결방법은 계산과정이 다소 복잡하여 중간에 계산을 포기하고자 하는 모습을 보였다. 이 때, 교사는 학생들에게 우선 끝까지 계산을 할 수 있도록 지도한 후 다른 방식으로 문제를 해결할 수 있음을 보여주었다. 그 후 다양한 문제를 제시함으로써 어떤 방법으로 문제를 해결하는 것이 효율적인지를 스스로 느끼고 풀이 방법에 익숙해질 수 있는 기회를 제공하였다. 그 후 학생들은 다양한 방법으로 문제에 접근하여 문제 풀이에 적극적으로 참여하는 모습을 보여주었다.

[그림 Ⅳ-8]과 <프로토콜 8>은 방초롱 학생의 풀이과정의 생략과 부적절한 논리적 추론이 개선되고 있는 모습이다.



[그림 Ⅳ-8] 방초롱 학생의 부적절한 논리적 추론 극복 모습

<프로토콜 8>

교 사 : 자 우리가 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식을 배웠어. 뭐지?
장발전 : $x_1x+y_1y=r^2$ 이요.
교 사 : 그렇지... 근데 왜 그게 나왔는지 우리 공식을 유도해 볼까?
방초롱 : 후덜덜...어떻게요..[증명 얘기에 겁을 먹은 모습을 보임]
교 사 : 우리 우선 그림을 그려보자.
방초롱 : 네...[그림을 그린 후 적당한 점을 잡아 표시한다.]
교 사 : 그 점에서 원에 접하니까 접선을 그려보면 원의 중심과 접점을 이은 선분이 접선과 어떻게 만나지?
장발전 : 수직으로 만나요.
교 사 : 수직인 두 직선의 특징이 뭘까?
방초롱 : 두 직선의 기울기가 곱하면 -1이 나와요.
교 사 : 그렇지~~ 잘하네... 그럼 우리 원의 중심과 접점을 이은 선분의 기울기가 얼마지?
방초롱 : $\frac{y_1}{x_1}$ 이요.
교 사 : 그럼 접선의 기울기는 얼마로 둬야하지?
장발전 : 샘 $(y-y_1)=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$. 이거예요?
교 사 : 와우~~ 잘한다~ 그럼 이걸 어떻게 정리해야 우리가 알고 있는 공식이 나오지?
방초롱 : 우선 y_1을 양변에 곱한 다음에... $yy_1-y_1^2=-x_1x+x_1^2$ 이요.
교 사 : 조금 더 정리해봐.
방초롱 : $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$ 이요.
교 사 : 우리가 아는 공식이랑 모양이 조금 다르네?
장발전 : x_1이랑 y_1이 원 위의 점이니까 $x_1^2+y_1^2=r^2$이니까 r^2으로 바꿔요.

학생들이 '증명하시오.'라는 문제를 접하면 우선 겁을 먹고 섣불리 도전하지 못하는 모습을 보였다. 이때 교사가 그림을 이용하면서 단계적으로 발문을 하면서 학생들과 함께 증명 과정을 구성하니 특별한 어려움 없이 학생들이 증명에 참여하는 모습을 관찰하였다. 두 학생 모두 교사의 발문에 대답을 적극적으로 하면서 선행지식을 정리하고 새로 배운 공식들을 잘 정리하며, 증명에서 필요한 사고 과정을 잘 정리하면서 부적절한 논리적 추론과 풀이과정의 생략 오류가 개선되는 모습을 관찰 할 수 있었다.

위 내용을 요약해 보면 두 학생이 제 3차 수업에서 극복한 오류는 <표 Ⅳ-3>과 같이 제시할 수 있다.

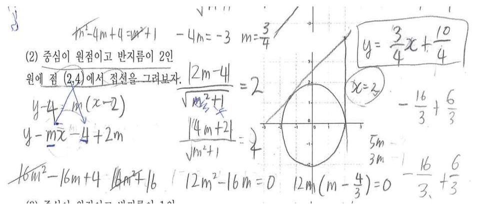
4. 제 4차 수업

<표 Ⅳ-3> 제 3차시에서 극복한 오류

학생	오류 극복	A	B	C	D	E	F
방초롱	여러 가지 풀이 방법 중에서 쉽고 빠른 풀이를 찾고자 노력하는 모습을 보였으며, 자신의 사고 과정을 말로써 표현하면서 문제를 해결하는 동안 사고 과정을 하나씩 짚어봄으로써 사고 과정을 놓치는 일을 줄여가고 있었다. 이 학생의 경우 글씨가 너무 커서 문제가 되었는데 3차시 수업을 통해 글씨를 확연히 줄어 문제 풀이 과정을 질서 있게 정리할 수 있을 정도로 변화된 모습이 관찰되었다.			o	o		o
장발전	선행지식의 부재로 인한 오류를 줄이기 위해서 꼼꼼하게 정리하고 기억하는 모습을 보였다. 또한 기술적인 오류가 일어났을 경우에도 자신의 풀이방법을 잘 살펴보고 틀린 부분을 찾고자 하였다. 다만 글씨가 너무 작고 불분명한 필체로 인해서 중간에 풀이를 알아보지 못하는 경우가 있었다. 또한 불분명한 기호의 사용으로 인한 오류가 계속해서 발견되고 있었다.	o				o	

제 4차 수업에서는 원 밖의 한 점에서 그은 원의 접선의 방정식을 구하는 방법에 대해 학습하였다. 일반 학생들도 원의 접선의 방정식 구하는 문제 중 가장 어려워하는 부분이며 앞에서 배운 2가지 접선의 방정식에 대한 이해가 필요한 부분이다. 선행 지식에 문제가 있으면 해결하기 어려운 문제들이라 선행지식에 대한 점검이 필수인 부분이다.

[그림 Ⅳ-9]과 <프로토콜 9>은 방초롱 학생의 기술적 오류가 개선되고 있는 모습이다.



[그림 Ⅳ-9] 방초롱 학생의 기술적 오류 극복 모습

<프로토콜 9>

교 사 : 맞아, 그림을 그려서 기울기가 0 인지 양수인지 음수인지 기울기가 없는 경우인지 판단을 한 후에 계산을 해서 실수를 줄이라는 거지. 선생님이 둘러보니 계산 실수가 눈에 계속 보이네. 초롱아 자꾸 문제 (2)이 답이 $\frac{4}{3}$ 이 나오는데 왜 그럴까? 검산을 해볼까?

방초롱 : 아니 이게요...$y = mx + (2-4m)$ 이라고 직선식을 세우면요 중심까지 거리를 구하면 $m = \frac{4}{3}$ 이 나와요.

교 사 : 그렇네..니가 세운 직선의 방정식이 기울기에 관계없이 항상 지나는 점이 어디지?

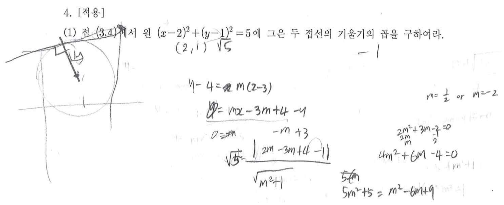
방초롱 : $(2, 4)$ 요.

교 사 : 정말로? 진짜로 네가 세운 식이 그래?

방초롱 : 아...$(4, 2)$ 를 넣었구나..

학생들은 끊임없이 계산 실수를 보이고 있었으며, 그림을 문제 풀이의 한 방법으로 아직은 잘 사용하고 있지 못하는 모습을 보였다. 자신의 풀이 과정을 알아볼 수 있도록 문제 풀이를 지도하고 있었으나 아직까지도 반성적 사고인 풀이 과정의 점검이 바로 일어나지 않고 있었다. 그러나 교사와의 점검을 통해서는 기술적 오류가 개선되는 모습을 보였다.

[그림 Ⅳ-10]와 <프로토콜 10>는 장발전 학생의 잘못된 정리의 사용 오류가 개선되는 모습이다.



[그림 Ⅳ-10] 장발전 학생의 잘못된 정리의 사용 오류 개선 모습

<프로토콜 10>

교 사 : 네가 어떻게 풀었는지 말해줄래? [학생 스스로 풀이를 말하면서 잘못된 정리의 사용을 깨닫게 하고자 하였음]

장발전 : $(y-1)-4=m((x-2)-3)$ 이라고 해서 직선에서부터 원 중심까지 거리가 반지름이랑 같다고 놓고 기울기를 구하려고요.

교 사 : 음..근데 직선의 방정식을 구하는데 $y-1, x-2$ 를 넣은 이유가 뭐야?

장발전 : 원의 중심이 $(2,1)$ 로 원이 평행이동 했으니까요.

교 사 : 아..그렇게 생각했구나. 네가 세운 직선의 방정식은 기울기에 관계없이 지나는 점이 얼마로 보이지? (지나는 점을 이용하여 자신의 식이 잘못 되었음을 인식하도록 함)

장발전 : $(5,1)$ 이요.

교 사 : 그럼 $(5,1)$ 을 지나는 원의 접선의 방정식을 세우게 된거네?

장발전 : 아. 그러네..샘 그러면 이렇게 구한다음에 다시..아닌데...그럼 어떻게 해야해요?

교 사 : 왜 평행이동을 먼저 생각했어?

장발전 : 원 중심이 원점이 아니니까요.

교 사 : 그럼 원의 중심이 $(2,1)$ 이니까 이걸 원점으로 평행이동 하려면 x 축의 방향으로 -2 만큼 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동 하겠지?

장발전 : 네.

교 사 : 그럼 주어진 점 $(3,4)$ 는 어떻게 해야 할까?

장발전 : 같이 이동해야겠네요...그럼 (1, 3)에서 그은 접선의 방정식을 구한 다음에 다시 평행이동 해주면 되는 거예요? (설명을 들으면서도 확실히 알지 못하고 있음.)

교 사 : 물론 그렇게 풀어도 되겠지...그런데 그런 방법 말고도 좀 더 쉬운 걸로 할 수 있지 않을까? 처음부터 평행이동 하지 않아도 될 것 같은데...

장발전 : 네...그런 것 같아요. 이동했다가 또 이동할 필요 없는 것 같아요...문제집에서 보니까 평행이동 하는 거라고 하길래...근데 그게 뭔 내용인지 잘 모르겠어요.

장발전 학생은 교과서에서 제시된 접선의 방정식에 관한 공식을 암기하고 있었으나, 어떤 조건에서 사용하는 공식인지에 대한 정확한 이해가 없는 상태였다. 그렇기에 조건에 맞지 않은 경우에서도 공식을 사용하려 하였으며, 그로 인해 잘못된 결론을 도출하게 되었다. 이때 교사가 다양한 예시를 들어 공식을 사용할 수 없는 경우를 보여주고 이런 경우에는 어떤 아이디어가 필요한지 학생들 스스로 생각하고 발표할 수 있도록 하여 잘못된 정리의 사용의 오류가 개선되었다. 위 내용을 요약해 보면 두 학생이 제 4차 수업에서 극복한 오류는 <표 Ⅳ-4>과 같이 제시할 수 있다.

<표 Ⅳ-4> 제 4차시에서 극복한 오류

학생	오류 극복	A	B	C	D	E	F
방초롱	계산상의 실수인 기술적 오류가 계속해서 나타나고 있었으나 자신의 풀이를 점검하는 과정에서 어느 부분에 실수가 있었는지 찾아서 오류를 수정하는 모습이 관찰되었다. 또한 계속해서 자신의 사고 과정을 말로 표현함으로써 사고의 흐름을 잃지 않으려는 모습도 보여주었다.		o	o	o		
장발전	공식을 이용한 문제 해결에 문제점이 발견되었으나 교사의 다양한 예시를 통한 설명을 통해서 잘못된 개념이 교정되었으며, 문제의 유형에 따라 그림을 이용한 문제 아이디어를 얻어 문제를 해결하기도 하였으며, 그림을 이용하여 도출한 답의 옳고 그름을 판단하는 모습을 보여주었다.	o					o

5. 제 5차 수업

제 5차 수업에서는 두 원의 공통접선에 관한 내용과 원의 접선의 성질에 관련된 내용에 대해 학습하였다. 중학교에서 배운 원의 접선에 관한 성질을 기억하고 있고 고등학교에서 새로 배운 자취의 방정식을 잘 이해했다면 무난하게 학습할 수 있는 내용이다.

<프로토콜 11>은 학생들이 선행지식에 맞추어 수학 용어를 정리하고 있는 모습이다.

<프로토콜 11>

교 사 : 두 원의 위치에 따라 공통 접선의 존재와 개수를 구하는 걸 해보자. 다음의 탐구활동을 한번 채워봐. [학생들이 탐구 활동을 통해서 접선의 개수를 구하고 있다.]
자, 4 개의 그림에 접선을 다 그렸으며 그 직선 에 접하는 원의 방향을 한 번 살펴보자.

방초롱 : 직선에 원이 같은 쪽이 있을 때도 있고 다른 쪽에 있을 때도 있어요.

교 사 : 그렇다면 어떤 경우가 공통 내접선이고, 또 어떤 경우가 공통 외접선일까?

방초롱 : 음..[선뜻 어떤 것인지 대답하지 못함.]

교 사 : 애들아, 외접, 내접이 무슨 뜻일까? 한자로 바깥 외.. 안 내. 어때?

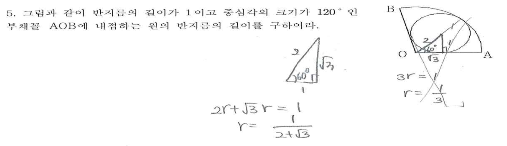
방초롱 : 샘..그럼 안 내자를 써서 두 원의 안쪽, 사이에 있으면 공통내접선이라고 말해도 되는 거예요?

장발전 : 그럼 바깥 외자를 써서 두 원의 모두 바깥쪽?

교 사 : 그렇지..수학적 정의가 꼭 그렇지는 않지만 너희가 개념을 확실하게 이해하기 위해서는 너희들만의 방법으로 이해하고 기억하는 것도 좋은 방법이지.

학생들은 공통내접선과 공통외접선의 용어조차 구별하지 못하고 있었다. 이는 용어에 대한 이해가 부족하여 벌어진 일이라 생각되어 자신이 기억할 수 있는 자신만의 방법을 찾아 잘못된 결론을 내리는 경우를 개선하는 모습이 관찰되었다.

[그림 Ⅳ-11]과 <프로토콜 12>은 장발전 학생이 시각적 오류를 개선하는 모습이다.



[그림 Ⅳ-11] 장발전 학생의 시각적 오류 극복 모습

<프로토콜 12>

장발전 : 어..반지름을 r 이라고 하고 이 원이 부채꼴에 접하니까 반으로 접으로 원 중심이 딱 접힐거고..접으면 각이 $60°$ 니까 특수 각이 나와서 $2:1:\sqrt{3}$ 을 이용하면 될 것 같아요..

교 사 : 자 초롱이 생각은 어때?

방초롱 : 전 아직...

교 사 : 그래? 그럼 좀 더 생각해보자.(충분한 시간을 제공하고자 함)
자, 그러면 반지름의 길이가 얼마 나왔지?

장발전: $\frac{1}{3}$ 이요.

방초롱 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 이요.

교 사 : 어..서로 답이 다르네..왜일까? 먼저 발전이가 말해볼까?

장발전 : 저 특수각 삼각비를 이용했는데 원의 반지름을 r 이라고 놓으면 요기가 $2r$ 이구 그러니까 부채꼴의 반지름이 $3r$ 이 나오는데 부채꼴의 반지름이 1 이니까 $r=\frac{1}{3}$ 이요.

방초롱 : 야~~여기가 $60°$ 니까 반지름을 r 이라고 하면 여기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}r$ 이고 나머지가 $\frac{2}{\sqrt{3}}r$ 이 되서 $r+\frac{2}{\sqrt{3}}r=1$ 이 돼야지. [친구의 풀이를 보고 바로 설명함.]

장발전 : 아..맞네~ 그렇네...샘 비율을 잘못 봤어요.

이번 문제에서는 학생이 그림을 잘못 이해하여 비율을 잘못 이용함으로써 오답이 나왔다. 그러나 옆의 학생이 문제 풀이를 검산하면서 잘못된 점을 찾아내어 해결하는 모습을 보였는데, 이는 수업 초에는 서로의 풀이 과정을 보지 못했

던 것과 비교해보면 풀이 과정을 알아볼 수 있도록 정리하였다는 점과 타인의 풀이를 이해할 수 있게 되었다는 점에서 나아진 점이라 할 수 있다.

위 내용을 요약해 보면 두 학생이 제 5차 수업에서 극복한 오류는 <표 Ⅳ-5>와 같이 제시할 수 있다.

<표 Ⅳ-5> 제 5차시에서 극복한 오류

학생	오류 극복	A	B	C	D	E	F
방초롱	수학 용어를 이해하고 개념화하는데 있어 스스로 알고 있던 선행지식에 접목시켜 이해하고 이것으로 인해 발생되었던 잘못된 결론 오류를 극복하였다. 중학교에서의 지식을 잘 적용하고 문제 해결에서 중요한 도구인 도형을 이용한 문제풀이에서 도형을 잘 이용하고 적절히 활용함으로써 시각적인 오류를 극복하였다. 또한 장발전 학생의 풀이를 검토해주고 틀린 부분을 찾아 수정을 도와주는 모습에서 자신의 풀이 이외에 다른 사람과의 수학적인 의사소통이 가능해지고 있음을 관찰하였다.	o		o			o
장발전	선행지식을 잘 이용하여 부적절한 논리적 추론은 줄었으나, 문제 풀이의 도구인 도형의 그림을 잘못 이해하여 시각적 오류를 나타내었다. 또한 계산 실수인 기술적 오류가 발견되었는데 방초롱 학생의 도움으로 서로 수학적 의사소통을 통해 오류를 수정하는 모습을 보였다.	o		o			

6. 오류 극복 과정 정리 및 사후 면담

수업 초기에는 두 학생의 오류 유형과 발생 빈도가 비슷하였으나 5차 수업 후에는 두 학생의 오류 극복 내용에 차이가 나타나기 시작하였다.

방초롱 학생은 귀납적 탐구수업 모형을 이용한 수업이 진행됨에 따라서 기술적 오류와 잘못된 결론의 오류가 개선되었다. 탐구활동을 통해서 자신의 생각을 정리하는 연습을 통해서 문제 풀이 과정을 정리하고 점검해봄으로써 오류가 개선되었다. 또한 부적절한 논리적 추론과 시각적 오류도 개선되었는데, 탐구활동과 규칙성 찾기 활동을 통해 원의 방정식에 대해 머릿속으로만 대수식을 생각하지 않고 직접 그림을 그려봄으로써 왜 그렇게 원이 존재해야하는지 생각해보고 확인을 함으로써 부적절한 논리적 추론과 시각적 오류가 개선되었다.

장발전 학생은 귀납적 탐구수업 모형을 이용한 수업이 진행됨에 따라 부적절한 논리적 추론과 풀이과정의 생략 오류가 개선되기 시작했다. 방초롱 학생과 마찬가지로 그림을 이용한 문제풀이 방법을 이용하면서 다양한 형태의 원이 존재함을 알게 되었기 때문이라 생각된다. 하지만 문제 풀이 과정을 검토하는 반성적 사고가 필요함을 느꼈으나 기술적인 오류가 극복되지 않아서 문제 풀이 과정을 제대로 검토할 수 없었다. 때문에 잘못된 결론의 오류가 잘 극복되지 못하였다. 같은 수업을 진행한 후 이러한 차이가 나타났기에 그 이유를 사후 면담을 통해 확인할 수 있었다.

면담의 결과 방초롱 학생은 귀납적 탐구수업을 이용한 수업을 통해서 스스로 수학에 참여하고 있다는 느낌을 받아 수학이 재밌다는 생각을 갖게 되었다. 또한 그림을 그리고 친구와 대화를 하는 동안에 수학 내용을 자신이 발견하게 됨으로써 신기하고 뿌듯한 느낌을 받았으며, 수업 내용이 기억에 오래 남아 문제를 해결하는데 쉽게 적용할 수 있었으며, 그림을 그리는 과정에서 시각적 오류도 많이 개선되었다. 또한 평상시 자신이 자주 범하는 문제점이 무엇인지 알 수 있게 되면서 기술적 오류와 잘못된 결론을 극복하기 위해 애를 쓰고 있다고 하였다. 수업 시간에 대답도 일부러 열심히 하였고, 수학을 어떻게 학습해야 할지에 대한 자신만의 계획도 세웠으며 실천하고 있다고 하였는데 이는 수업 시간 중에 연구자가 이런 변화를 관찰 할 수 있었다. 이런

변화는 귀납적 탐구수업에서의 탐구활동을 이용하여 수학적 개념을 발견하게 됨으로써 부적절한 논리적 추론과 잘못된 정리의 사용, 시각적 오류 등이 개선되면서 학생에게 긍정적인 변화가 생긴 것이라 생각되었다.

반면에 장발전 학생은 부적절한 논리적 추론과 시각적 오류의 횟수가 줄어들었으나 기술적 오류가 개선이 되지 않으면서 옳은 정답을 구할 수 없었다. 귀납적 탐구 수업을 통해서 수학 내용이 이해가 잘 되고 기억도 잘 나며, 문제를 해결할 때 그림을 통해 힌트를 얻을 수 있게 되었으나 문제 풀이 과정에서 기술적 오류로 인해 정답을 맞추는 횟수가 늘지 않자 조금은 실망한 기색이 보였다. 그렇기에 수학 학습에 아직까지는 어려움을 겪고 있었다.

두 학생의 변화를 살펴보면 귀납적 탐구수업 모형에 따른 수업은 학생들의 기술적 오류와 부적절한 논리적 추론의 개선에 도움이 된다. 그러나 기술적 오류 극복은 개인의 주의와 관심에 따라서 달라질 수 있음을 시사한다. 물론 학습자라면 모든 학습자 스스로 오류를 범하고자 하는 의도는 없을 것이다. 다만 이런 오류발생을 방치한지 오래되어 누적이 되다보니 심리적 불안감이 가중되어 늘 수학에 대한 두려움이 자신의 심리 속에 자리잡고 있기 때문이다. 최근에 사교육을 받지 않으면 비정상적 가정으로 가정하려하는 사교육 범람 풍토에 의존하다보니 스스로 문제를 대면하여 해결하기보다는 문제해결 방식만을 암기하여 일시적 해결책만을 습득하는 학습양식에 젖어있기 때문이다.

방초롱 학생은 사교육 없이 학습하고 있었기에 자신이 모르는 것에 대해서 질문하고 스스로 고민하면서 여러 방법으로 문제를 해결해보려는 습관이 있어 귀납적 탐구수업을 이용한 수업에 좋은 결과가 있었던 것이라 생각된다. 반면 장발전 학생은 사교육을 받으면서 공식 암기와 교사의 문제 풀이 방법 모방에 익숙해져 스스로 고민하고 탐구하는 것을 낯설어 하였기에 귀납적 탐구수업을 이용한 수업에서 개선된 모습이 잘 발견되지 않았던 것이라 생각된다. 그렇기에 장발전 학생은 스스로 탐구하고 수학 내용을 정리, 검토하는 학습방법을 좀 더 습관화한다면 수학적 오류를 좀 더 개선할 수 있을 것이라 생각된다.

Ⅴ. 결론 및 제언

1. 요약

우수학교 학생들을 지도하면서 수학 학습에서 학생들이 어떤 오류를 보이는지 또한 수학 미성취학생들이 오류를 어떻게 극복하는지 살펴보기 위해 본 연구는 시작되었다. 본 연구의 목적은 원의 방정식 문제 풀이 과정에서 학생들이 보이는 오류의 유형과 발생 빈도를 파악하고, 우수학교 수학 미성취학생들이 귀납적 탐구수업 모형을 이용한 수업을 통해 어떻게 오류를 극복하는지 관찰하는데 있다. 이 장에서는 앞서 살펴본 결과 분석에 대한 요약과 논의를 바탕으로 결론을 제시하고자 한다.

본 연구는 수학 미성취학생 2명을 대상으로 하여 귀납적 탐구수업 모형을 이용한 5차시 수업을 통해서 수학 미성취학생들의 오류 극복 과정을 관찰하였다. 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 귀납적 탐구수업 모형에 의한 수업 중 탐구활동과 규칙성 발견 등 스스로 생각하고 활동하는 경험을 통해서 수학적 개념과 원리, 공식 등을 도출해 내면서 학습 내용을 더 잘 이해하고 기억할 수 있게 되었다. 또한 문제 풀이의 도구인 그림을 이용하는 법을 익히게 되어 대수식뿐만 아니라 그림을 통해서 문제 해결

의 방법을 얻을 수 있었고 이를 통해 수학적 개념을 더욱 견고하게 할 수 있는 경험을 하게 되었으며, 이런 경험은 학생들은 부적절한 논리적 추론과 시각적 오류, 풀이과정의 생략 오류를 극복하는데 도움이 되었다.

둘째, 학생들은 많은 양의 문제를 해결하기 보다는 몇 개의 문제라도 스스로 충분히 생각하고 풀이하며 풀이를 검토하는 시간을 통해서 자신의 풀이 방법을 점검하고 서로의 풀이 방법을 서로 비교해 볼 수 있었다. 점검하고 비교하는 과정에서 학생들은 기술적 오류와 잘못된 결론을 내리는 오류를 많이 극복할 수 있었다.

셋째, 소수의 인원으로 이루어진 수업을 통해서 학생들은 자유로운 의사소통과 질문을 할 수 있었다. 자신이 평소 궁금해 했던 내용을 자유로운 질문과 탐구를 통해서 알아갈 수 있었으며, 교사의 세밀한 지도하에 자신이 가지고 있던 수학적 오류 및 학습 습관에 관련된 문제점을 파악할 수 있었다. 교사와 또는 동료학생과의 의사소통의 경험을 통해서 주로 부적절한 논리적 추론 오류와 잘못된 정리의 사용 오류를 극복할 수 있었다.

2. 본 연구의 시사점

본 연구에서 수학 미성취학생들은 귀납적 탐구수업 모형을 이용한 수업에서 탐구활동에서의 다양한 예를 통해 수학적 개념을 형성하였고, 규칙성 찾기 활동을 통해 수학 내용과 규칙성을 찾았으며, 개념 정리 단계에서 수학적으로 정리된 내용을 알게 되었다. 적용 단계에서는 좀 더 다양한 조건에 주어진 경우의 문제를 적용함으로 좀 더 발전된 수학 내용을 알게 되었다. 학생들은 스스로 수학 내용을 발견하고 규칙성을 찾고 정리하는 과정을 통해서 수학 내용을 더 잘 이해하고 잘 기억할 수 있었다. 그렇기에 교사의 일방적인 수업과 비교해보면 부적절한 논리적 추론 오류와 잘못된 정리의 사용 오류 극복에 더욱 효과적인 수업이라는 것을 시사하고 있다.

둘째, 중학교에서 논증기하로 학습하고 온 학생들에게 해석기하를 이용한 도형의 학습은 수학 내용 자체에 오류가 많을 수 있는 영역이다. 해석기하만을 이용하는 원의 방정식의 학습은 학생들에게 오류를 많이 유발하고 있었다. 원의 방정식의 해석학적 관점에서 대수적인 식을 이용한 지도가 교과서에서 이루어지고 있으나, 수학 미성취학생들에게 바로 지도한 경우 학생들은 식을 이용한 풀이에 익숙해져 그림을 이용한, 즉 도형을 이용한 문제 해결에 어려움을 겪고 있었다. 이 경우 그림을 이용해 문제 해결의 아이디어를 얻은 후 도형의 방정식을 이용해 문제를 해결하도록 지도한 결과 학생들이 문제 해결에 더욱 적극적으로 바뀌었으며, 부적절한 논리적 추론이 줄어듦을 알 수 있었다. 이는 원의 방정식의 해석학적 관점과 동시에 기하적인 관점이 함께 지도될 때 학생들이 보이는 수학적 오류가 줄어들 수 있음을 시사하고 있다.

3. 제언

본 논문의 연구결과를 바탕으로 다음과 같은 점을 제언하고자 한다.

첫째, 본 연구는 수학 미성취학생들을 대상으로 귀납적 탐구수업 모형에 따른 오류의 극복을 살펴보았다. 본 연구에서처럼 미성취학생들에게 수학적 개념을 그림을 이용해서 학생들에게 시각화를 통한 수학적 이해를 높이고 개념 형성에 도움을 줄 수 있었는데, 앞으로 연구에서는 시각화를 더욱 약동적으로 활용할 수 있는 공학적 도구를 이용한 수업을 시도해볼만하다. 해석학적인 관점에서 원의 방정식에 관해 학습하였기에 시각적 도구를 통해 원의 식을 도출하는 수업이

이루어진다면 반성적 사고의 기회를 더 많이 가질 수 있을 것이다.

둘째, 학생들이 수학 내용을 실생활과 관련지어 학습하면 흥미와 참여가 높아질 수 있을 가능성이 있다. 이번 연구에서는 실생활과 관련된 수업이 이루어지지 않았으므로 원의 방정식에서 실생활과 연관된 교수･학습에 관한 연구가 필요하다.

셋째, 정의적 영역에서 수학적 자신감을 향상시킬 수 있는 방안을 모색하는 것이 이번 연구에서는 고려하지 않았다. 예를 들어 장발전 학생은 일반 학교의 미성취자와는 다른 측면이 있기 때문에 자신감을 키울 수 있는 충분한 시간과 지도가 필요하다. 좀 더 많은 시간과 수업을 제공한다면 반드시 효과적인 오류 극복이 이루어질 것이라 생각된다. 따라서 장기간의 연구로써 정의적 영역에 관한 연구를 제안한다.

참 고 문 헌

고상숙, 정인철, 박만구 (2009). 교구를 활용한 중학교 공간능력 향상을 위한 수업에서 학습의 효과. **수학교육, 48**(1), 1-20.

교육과학기술부 (2012). **수학과 교육과정 해설서**. 서울: 교육과학기술부.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥 (2006). **수학교육과정과 교재연구**, 서울: 경문사.

김부미 (2004). 인지심리학의 관점에서 수학적 오류의 분석가능성 탐색. **수학교육학연구, 14**(3), 239-266.

김성완(2012). **도형의 방정식에서 나타난 수학적 오류와 GeoGebra를 이용한 교정사례 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김성희(2012). **서술형 평가에서 나타나는 오류분석 및 채점기준 개선에 관한 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김아람 (2013). **일차 방정식 문제 해결 과정에서 나타나는 오류의 유형 분석**. 한양대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김옥경 (1991). **고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김차숙, 류희찬 (2003). 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구. **대한수학교육학회지 학술발표대회** (pp. 405-426). 숭실대학교.

박선화 ((2000). 수열의 극한개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구, **수학교육학연구, 10**(2), 247-262.

박장희, 유시규, 이중권 (2012). 실생활 문장제의 해결과정에 나타나는 오류유형 분석. **한국학교수학회논문집, 15**(4), 699-718.

우정호 (2003). **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부.

유희찬, 조완영, 조정묵, 임미선, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 정선윤 (2012). **고등학교 수학**. ㈜미래엔 컬처그룹.

이종희, 김부미 (2004). 증명학습에서 생성-수렴 수업모형의 개발과 적용. **학교수학, 6**(1), 59-90.

이종희, 김부미 (2006). 일차방정식에서 오류 탐지-교정 학습법의 교수학적 효과 분석. **교과교육학연구. 10**(2), 461-483.

이호철 (2007), **중학교 기하 증명과정에서 학생들이 보이는 오류 분석**. 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

최승현, 남근천, 류현아 (2013). 수학 학습 부진 학생을 위한 오개념 교정 지도 자료 개발 연구. **수학교육학연구, 23**(2), 117-133.

최영아 (2001). **고등학교 수학에서 수학적 오류의 분석과 분류에 대한 연구**. 성신여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

최선아(2006). **수학 학습 부진 학생들의 오류 유형 분석**. 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2003). **수학교육학 신론**, 서울: 문음사.

Artigue, M., & Viennor, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematic, 3*, 1-8.

Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 1-21.

Clements, M. A., & Del Campo, G. (1987). Fractional understanding of fractions: variations in children's understanding oj fractional concepts, across embodiments. *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematic, 3*, 98-110.

Cornu, B. (1991). Limit. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking(pp. 153-166)*, Kluwer Academic Publishers.

Hardar, N. M., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), R*esearch Issues in the Learning and Teaching of Algebra, 4*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: Author.

______________ (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. 류희찬 조완영 이경화 나귀수 김남균 방정숙(공역) (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, *Educational Studies Mathematics, 12*, 31-54.

Whitmore, J. R. (1980). *Giftedness, Conflict and Under-achievement*. Boston: Allan& Bacon.

An Analysis on the Types of Errors in Mathematics and How to Overcome the Errors in the Area of the Equation of a Circle in the High School

Han, Kyung Min (Graduate School of Education, Dankook Universtiy)
Choi-Koh, Sang Sook (Dankook University)

This study was to investigate how the underachievers of mathematics in a non-leveling excellent high school would overcome the errors through the lessons based on the inductive thinking model in the equation of a circle. The results showed that when there were many stages to solve the problem, the students gave it up or forgot the stage they reached. In this case, if they had a revisit-opportunity to review their thinking process by planning ahead the stage to solve the problem and recording it, the omission error of the solving process and the error of wrong conclusions would be dramatically decreased. Moreover, they understood the mathematical concept, principle, and formula and remembered the learning contents extremely well through thinking by themselves in exploration-based activities and by using visualization for the problem and could solve the problem through these pictures besides algebraic expressions.

* Key Words : Type of Mathematical Error(수학적 오류유형), Inductive Thinking Model(귀납적 수업 모형), Equation of a Circle(원의 방정식), Underachiever in a Non-leveling Excellent Highschool(우수고교 미성취학생)

논문접수 : 2014. 2. 5
논문수정 : 2014. 3. 16
심사완료 : 2014. 3. 21