

# A study on solutions of Jisuguimundo using the range of magic sums

합의 범위를 이용한 지수귀문도 해의 탐구

KWON Gyunuk 권균욱 PARK Sang Hu 박상후 SONG Yun Min 송윤민

CHOI Seong Woong 최성웅 PARK Poo-Sung\* 박부성

Jisuguimundo is an inimitable magic hexagon devised by CHOI Seok-Jeong, who was the author of GuSuRyak as well as a prime minister in Joseon dynasty. Jisuguimundo, recorded in GuSuRyak, is also known as Hexagonal Tortoise Problem (HTP) because its nine hexagons resemble a tortoise shell. We call the sum of numbers in a hexagon in Jisuguimundo a magic sum, and show that the magic sum of hexagonal tortoise problem of order 2 varies 40 through 62 exactly and that of hexagonal tortoise problem of order 3 varies 77 through 109 exactly. We also find all of the possible solutions for hexagonal tortoise problem of order 2.

*Keywords:* CHOI Seok-Jeong, Jisuguimundo, Hexagonal Tortoise problem, magic square, magic sum; 최석정, 지수귀문도, 마방진, 마법합.

MSC: 01A13, 01A45, 01-00, 05B99 ZDM: A30, K20

## 1 서론

최석정(崔錫鼎, 1646–1715)은 조선 숙종 대에 영의정을 역임한 정치가이자, 수학을 주역의 관점으로 풀어보려 하였던 저서 《구수략(九數略)》으로 유명한 수학자이다. 그의 연구는 유교적 관념론에 치우친 한계는 있으나 뛰어난 수학적 성과를 보여, 그를 조선 시대를 대표하는 양반 관료 수학자로 손꼽을 만하다. 특히 그가 9차 마방진을 만들면서 제시한 라틴 방진(Latin square)의 개념은 오일러(L. Euler)보다도 60년 이상 앞서는 탁월한 성과로

---

\*Corresponding Author.

이 논문은 2013년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2013R1A1A2010614)

KWON Gyunuk: Changwon Science High School E-mail: rnjsahdz1@naver.com

PARK Sang Hu: Changwon Science High School E-mail: matthew9702@naver.com

SONG Yun Min: Changwon Science High School E-mail: 97sym@naver.com

CHOI Seong Woong: Changwon Science High School E-mail: whitemonday@hanmail.net

PARK Poo-Sung: Dept. of Math. Edu., Kyungnam Univ. E-mail: pspark@kyungnam.ac.kr

Received on Feb. 12, 2014, revised on Apr. 8, 2014, accepted on Apr. 14, 2014.

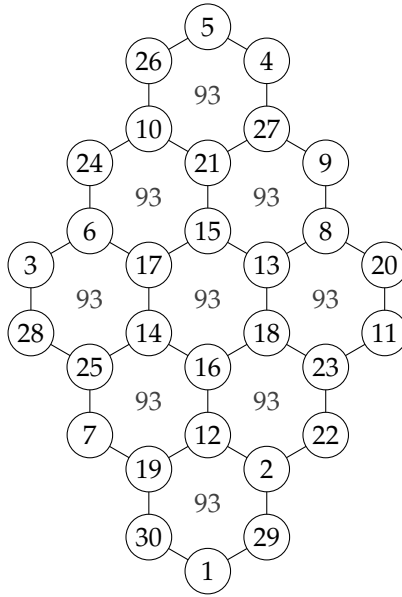


Figure 1. Choi Seok-Jeong's magic hexagonal tortoise pattern; 최석정의 지수귀문도

평가받고 있다[3], [6], [9].

최석정은 《구수략》에서 다양한 형태의 마방진을 제시하고 있으며[2], 그 가운데 지수귀문도(地數龜文圖) 또는 낙서육구도(洛書六九圖)라 불리는 육각진은 최석정의 독창적인 연구로, 아직까지도 그 전모가 밝혀지지 않고 있다. <Figure 1>은 《구수략》에 실려 있는 것으로 1부터 30까지의 수가 아홉 개의 육각형을 이루고, 육각형을 이루는 여섯 수의 합인 마법합(magic sum)이 모두 93으로 일정하다.

최석정이 이러한 육각진을 연구한 이유는 분명하지 않으나, 3차 마방진인 낙서(洛書)가 거북 등에 그려져 있었다는 고대 중국의 전설로부터 영감을 얻어 구성한 것으로 보인다. 육각진은 《양휘산법(楊輝算法)》에서 다룬 취육도(聚六圖, <Figure 2>(a))가 있으나, 이것은 육각형 여섯 개가 독립적으로 구성되어 지수귀문도에 비해 훨씬 단순하다. 같은 책의 취팔도(聚八圖, <Figure 2>(b))는 네 개의 팔각형이 연결되어 있어 취육도(聚六圖)보다는 다소 복잡하나, 그 연결 관계가 지수귀문도에 비해 불완전하다. 이런 점에서 지수귀문도는 《양휘산법》을 뛰어넘는 착상이라 할 수 있다.

지수귀문도에 대해 최근에 많은 연구가 이루어지고 있다[10]. 김동진과 오영환[5]은 지수귀문도를 이루는 마법합이 76보다 크거나 같고 110보다 작거나 같다는 사실을 증명하고, 컴퓨터를 이용하여 마법합이 77부터 108까지인 지수귀문도를 구성하였다.<sup>1)</sup> 또, 전문수학자가 아닌 여러 사람이 다양한 지수귀문도를 만들었다[4]. 컴퓨터를 이용하여 지수귀문도를

1) 그들의 알고리즘으로는 마법합 109인 지수귀문도를 찾지 못하였다.

탐색하는 여러 가지 기법도 많이 개발되고 있다[1], [7]. 그러나 김동진과 오영환의 논문에서 제시한 범위의 양쪽 경계에 해당하는 76과 110을 합으로 하는 지수귀문도가 존재하는지는 알려져 있지 않다.

지수귀문도의 크기를 일반화하여  $n^2$  개의 육각형을 배열한  $n$ 차 지수귀문도에 대한 연구도 많이 이루어지고 있다. 다양한 크기의 지수귀문도가 발견되었으며, 특수한 형태의 해법도 발견되었으나, 가장 작은 지수귀문도라 할 수 있는 2차 지수귀문도의 해의 개수조차 정확히 밝혀져 있지 않다.

이 논문에서는 일반화된 지수귀문도를 연구하여, 2차 지수귀문도에서 마법합으로 가능한 값의 정확한 범위를 찾고, 2차 지수귀문도로 가능한 모든 배열을 찾아내었다. 또, 원래의 지수귀문도에 해당하는 3차 지수귀문도에서 마법합으로 76과 110이 불가능함을 증명하여, 마법합이 정확히 77부터 109까지 가능함을 보였다.

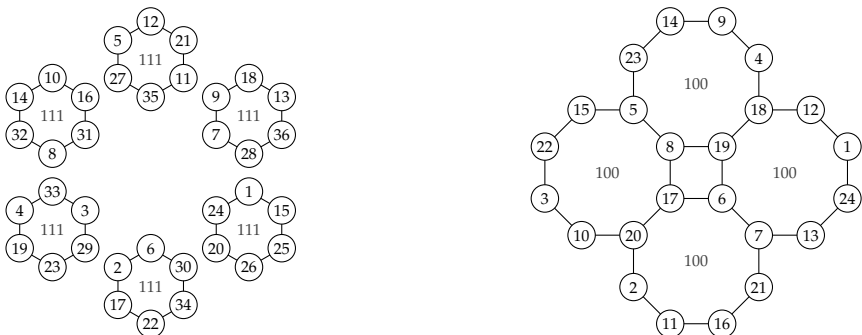
## 2 본론

### 2.1 일반화된 지수귀문도

최석정이 제시한 지수귀문도는 세 개씩 세 줄로 아홉 개의 육각형이 배열된 구조이다[10]. 이를 일반화하여,  $n$  개씩  $n$  줄로 육각형이 배열된 구조를  $n \times n$  지수귀문도라 하고 간단히  $n$  차 지수귀문도 (Jisuguimundo of order  $n$ )라 부르자. 이때 사용되는 수는 1부터  $2n^2 + 4n$  까지이고, 육각형을 이루는 여섯 수의 합을 이 지수귀문도의 마법합(magic sum) 또는 간단히 합이라 하자. 《구수략》에 실린 지수귀문도는 마법합이 93인 3차 지수귀문도라 할 수 있다.

1부터  $n^2$ 까지의 수가 정사각형 모양으로 배열되는 마방진(magic square)에서는 마법합이  $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 로 일정한 반면, 지수귀문도의 마법합은 흥미롭게도 다양한 값이 가능하다.

만약  $n$ 차 지수귀문도의 해가 하나 주어지면, 각 수를  $2n^2 + 4n + 1$ 에서 빼어서 새로운 지수



(a) Magic six number circle; 취육도(聚六圖)      (b) Magic eight number circle; 취팔도(聚八圖)

Figure 2. Magic circle in YangHuiSuanFa; 양휘산법의 마방진

귀문도를 만들 수 있다. 이런 경우 두 지수귀문도의 해를 서로 쌍대(dual)라 부른다. <Figure 3>은 마법합이 각각 40과 62인 쌍대 2차 지수귀문도로서, 대응하는 꼭짓점에 해당하는 두 수의 합이 모두  $2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 17$ 이고 두 마법합의 합이  $6 \times (1 + 16) = 102$ 가 됨을 확인할 수 있다.

3차 지수귀문도에서는 쌍대인 두 3차 지수귀문도의 두 마법합의 합이  $6 \times (1 + 30) = 186$ 을 이룬다. <Figure 4>는 김동진, 오영환[5]이 발견한 마법합 77인 3차 지수귀문도와 그 쌍대인 마법합 109인 3차 지수귀문도를 나타낸다.

이러한 대응은 일대일로 이루어지므로, 지수귀문도의 마법합은  $6(2n^2 + 4n + 1)/2 =$

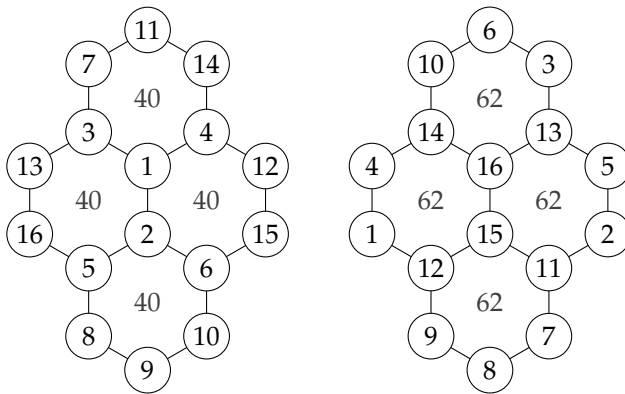


Figure 3. Dual magic hexagonal tortoises of order 2; 쌍대를 이루는 2차 지수귀문도

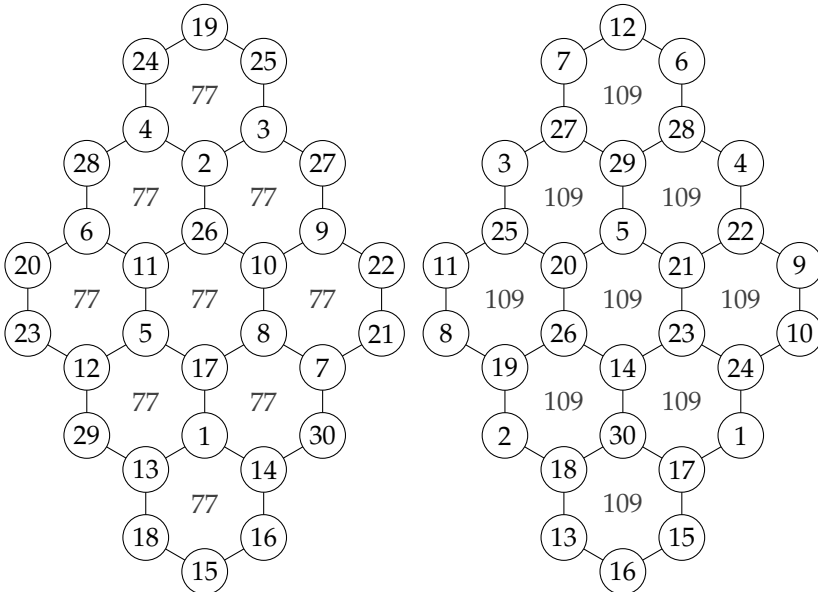


Figure 4. Dual magic hexagonal tortoises of order 3; 쌍대를 이루는 3차 지수귀문도

$3(2n^2 + 4n + 1)$ 을 중심으로 하여 대칭을 이루게 된다. 따라서 마법합이  $3(2n^2 + 4n + 1)$ 보다 작거나 같은 지수귀문도만 생각하여도 충분하다.

최석정이 《구수략》에서 3차 지수귀문도의 예로서 마법합 93인 것을 제시한 이유도 93이 대칭의 중심 역할을 하기 때문일 것으로 추측된다. 실제로 최석정의 지수귀문도에 사용된 배열을 살펴보아도 그가 대칭성에 주목하고 있음을 알 수 있다.

〈Figure 5〉의 왼쪽은 최석정의 지수귀문도에서 아래위로 대응하면서 합이 31인 쌍을 표시한 것이다. 특히, 가운데 육각형을 이루는 수 가운데 15와 16이 1부터 30까지의 수 가운데 가장 가운데 있는 두 수이고, 다른 두 쌍인 (13, 18)과 (14, 17)도 그 다음으로 가운데 있는 수라는 점에서, 아마도 최석정은 가운데 육각형에 이와 같은 배치를 먼저하고서 지수귀문도를 구성한 것으로 보인다.

한편, 9쌍 18개의 수가 아래위로 짝을 이루는 것으로 보아, 최석정은 30개 수 모두가 아래위로 짝을 이루는 지수귀문도를 만들려 한 것으로 보인다. 즉, 〈Figure 5〉의 오른쪽과 같은 배열이 그의 목표였을 것이다. 이 배열에서 최석정의 지수귀문도와 일치하는 20개의 수에는 밑줄을 그어 표시하였다.

이 배열과 같이 쌍대인 지수귀문도가 원래의 지수귀문도를 뒤집거나 회전한 것과 일치할 때, 그 지수귀문도를 자기쌍대(self-dual)라 부르자. 최석정의 수학적 능력으로 보아, 그는 자기쌍대인 지수귀문도를 충분히 찾을 수 있었을 것으로 생각된다. 그러나, 《구수략》이 그의 말년에 간행된 것으로 추정되므로, 아마도 그가 원하던 배열을 찾는 데는 시간이 부족하였던 것 같다.

자기쌍대인 지수귀문도의 마법합은 원래의 마법합과 같으므로, 마법합은 93이 된다. 최석정이 마법합 93인 지수귀문도를 제시한 이유가 이로부터 자연스럽게 설명된다.

## 2.2 2차 지수귀문도 마법합의 범위

2차 지수귀문도의 마법합을  $S$ 라 하고 16개의 수를 〈Figure 6〉에서와 같이  $a_1, \dots, a_{16}$ 이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_3 + a_4 + a_7 + a_8 + a_{11} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_{12} + a_{14} \\ &= a_1 + a_2 + a_4 + a_6 + a_{13} + a_{15} \\ &= a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + a_{16} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 4S &= \sum_{k=1}^{16} a_k + \sum_{k=1}^6 a_k + a_1 + a_2 = \sum_{k=1}^{16} k + \sum_{k=1}^6 a_k + a_1 + a_2 \\ S &= 34 + \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^6 a_k + a_1 + a_2 \right) \end{aligned}$$

가 된다. 즉, 2차 지수귀문도의 마법합은  $a_1, \dots, a_6$ 에 의해 결정된다.

마법합이 가장 작은 경우는

$$\{a_1, a_2\} = \{1, 2\}, \quad \{a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{3, 4, 5, 6\}$$

일 때의 값인  $S = 34 + \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 1 + 2) = 40$ 이므로, 마법합이 40보다 작은 2차 지수귀문도는 존재하지 않는다. 2차 지수귀문도의 마법합은  $51 = 3 \times (1 + 16)$ 을 중심으로 대칭이 되므로, 2차 지수귀문도의 마법합  $S$ 는

$$40 \leq S \leq 62$$

를 만족한다. 마법합 40부터 62까지의 2차 지수귀문도가 존재한다는 사실은 <Figure 7>

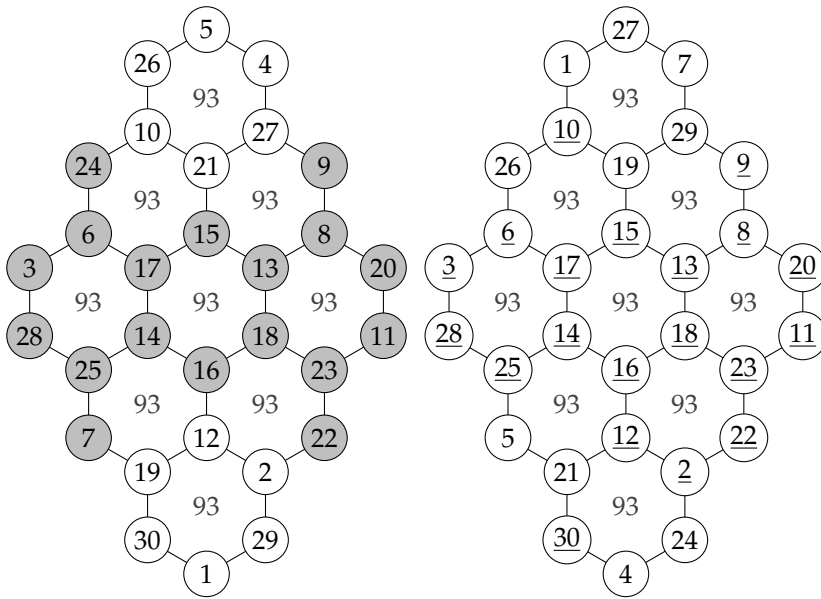


Figure 5. Choi's magic hexagonal tortoise and symmetry; 최석정의 지수귀문도와 대칭성

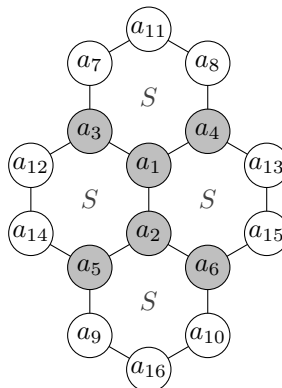


Figure 6. Magic hexagonal tortoises of order 2; 2차 지수귀문도

에서 확인할 수 있다. 이 목록에 해당하는 2차 지수귀문도들은 손으로 직접 구성하여 보일 수도 있으나, 위에서 구한 제약 조건으로부터 조사해야 할 경우의 수를 크게 줄일 수 있으므로, 컴퓨터를 이용하여 2차 지수귀문도의 모든 해를 찾는 것이 가능하다.

먼저  $S$ 와  $a_1, a_2, \dots, a_6$  사이의 관계로부터

$$2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \text{은 } 4\text{의 배수}$$

$$40 \leq S = 34 + \frac{1}{4}(2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \leq 51$$

인 경우를 찾고, 대칭성을 고려하여,

1.  $a_1 < a_2$
2.  $a_3 < a_4$
3.  $a_{12} < a_{14} = S - (a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_{12})$
4.  $a_{13} < a_{15} = S - (a_1 + a_2 + a_4 + a_6 + a_{13})$
5.  $a_7 < a_{11} < a_8 = S - (a_1 + a_3 + a_4 + a_7 + a_{11})$
6.  $a_9 < a_{16} < a_{10} = S - (a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{16})$

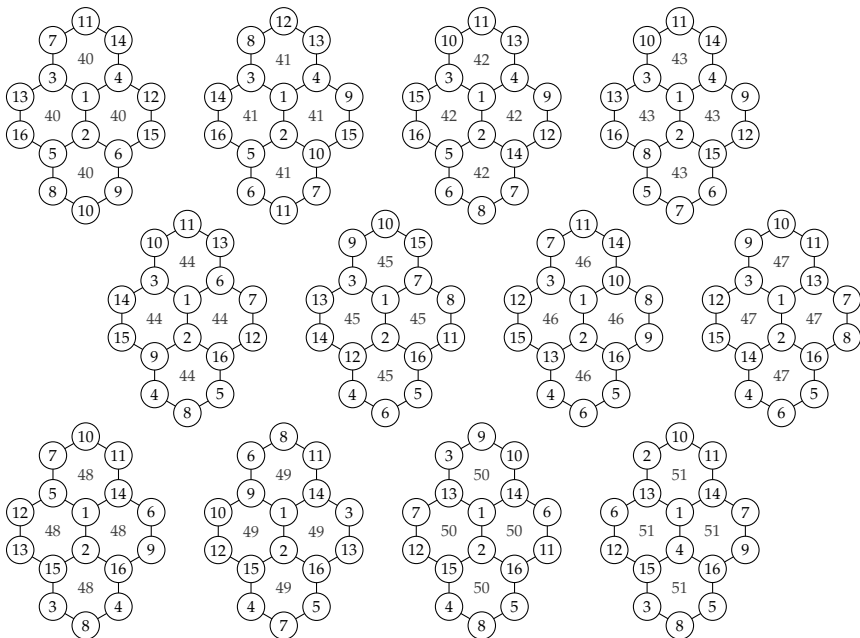


Figure 7. Magic hexagonal tortoises of order 2 with magic sums 40 through 51; 마법합 40부터 51까지의 2차 지수귀문도

마법합	개수
40, 62	$2 \times 45$
41, 61	$2 \times 1, 233$
42, 60	$2 \times 3, 694$
43, 59	$2 \times 10, 879$
44, 58	$2 \times 17, 794$
45, 57	$2 \times 35, 481$
46, 56	$2 \times 46, 710$
47, 55	$2 \times 76, 274$
48, 54	$2 \times 90, 156$
49, 53	$2 \times 116, 305$
50, 52	$2 \times 120, 279$
51	156,486
총합	1,194,186

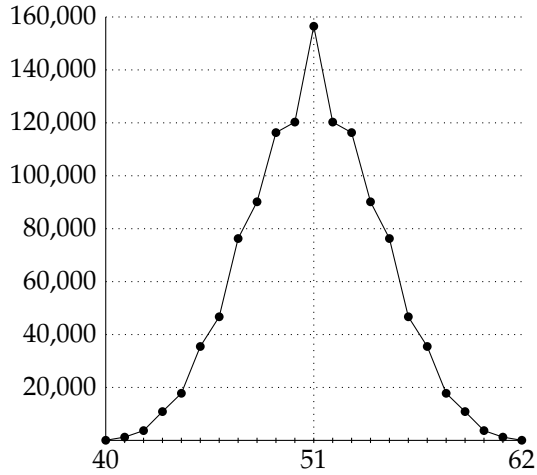


Table 1. The number of solutions to HTP of order 2; 2차 지수귀문도 해의 개수

인 경우로 제한하면 1,194,186 개의 해를 모두 구할 수 있다.<sup>2)</sup>(〈Table 1〉)

대칭성을 생각하지 않고 모든 해를 구한다면 위의 여섯 제약 조건으로부터

$$2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 3! \times 1,194,186 = 687,851,136$$

이 되어, 모든 해의 개수는 거의 7억 개 가까이 됨을 알 수 있다. 이 값은 Choe, Choi, Moon[1] 이 통계적인 방법으로 추정한 값인  $6.86 \times 10^8$  과 비슷하다. 그들은 1부터 16까지를 무작위로 배열한  $2^{32}$  개 배열에서 140,915 개의 2차 지수귀문도가 존재하였다는 실험 결과로부터 이 추정치를 얻었다.

2차 지수귀문도의 해는 대단히 많으나, 1부터 16까지를 무작위로 채우는 경우의 수  $16!$  에 비하면 2차 지수귀문도는 약 0.003% 정도에 불과하여, 지수귀문도를 탐색하는 데는 효율적인 알고리즘이 필수적임을 알 수 있다.

이상의 결과로부터, 2차 지수귀문도의 마법합은 40부터 62까지 정확히 23개의 값이 가능함을 알 수 있다.

〈Figure 8〉은 자기쌍대인 2차 지수귀문도의 예이다. 〈Figure 8〉(a)와 같이 쌍대인 지수귀문도를 아래위로 뒤집는 것과 일치하는 배열을 vertical의 첫 글자를 따서 유형 V, 〈Figure 8〉(b)와 같이 쌍대인 지수귀문도를 회전한 것과 일치하는 배열을 rotation의 첫 글자를 따서 유형 R라 하면, 앞서 구한 1,194,186개의 해 가운데 유형 V인 경우는 36,000개가 존재하고, 유형 R인 경우는 1140개가 존재한다.

대칭성을 생각하지 않고 모든 경우를 센다면, 유형 V인 자기쌍대 2차 지수귀문도의 개수는

$$2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 1 \times 36,000 = 3,456,000$$

2) 1.7GHz Intel Core i5 프로세서를 사용하는 컴퓨터에서 Python 언어로 짠 프로그램을 67초 동안 실행하였다.



이고, 유형 R인 자기쌍대 2차 지수귀문도의 개수는

$$2! \times 2! \times 2! \times 1 \times 3! \times 1 \times 1140 = 54,720$$

이므로, 자기쌍대 2차 지수귀문도 전체의 개수는 3,510,720개이다.

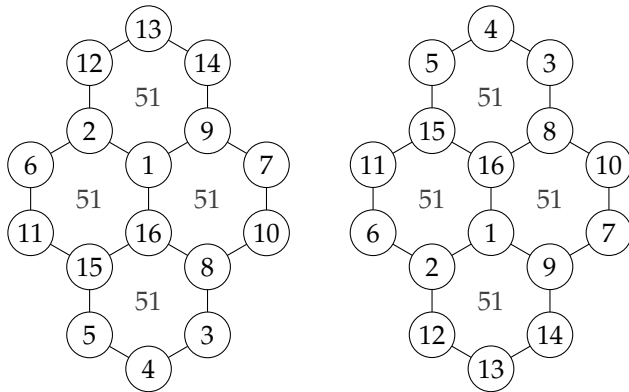
### 2.3 3차 지수귀문도 마법합의 범위

일반적으로  $n$ 차 지수귀문도의 마법합을  $S_n$ 이라 할 때,

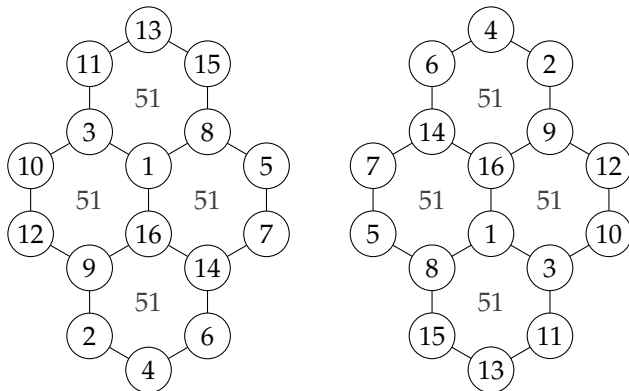
$$n^2 S_n = \sum_{k=1}^{2n^2+4n} k + \sum D + 2 \sum T$$

가 성립한다. 여기서 <Figure 9>의 왼쪽 그림에서처럼  $D$ 는 두 개의 육각형이 공유하는 칸에 들어가는 수,  $T$ 는 세 개의 육각형이 공유하는 칸에 들어가는 수를 뜻한다.

3차 지수귀문도의 경우, <Figure 9>의 오른쪽 그림과 같이 번호를 매기고 마법합을  $S$ 라



(a) Type V; 유형 V



(b) Type R; 유형 R

Figure 8. Self-dual magic hexagonal tortoises of order 2; 자기쌍대 2차 지수귀문도

하면

$$9S = \sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=9}^{16} a_k + 2 \sum_{k=1}^8 a_k$$

가 성립한다. 한편,  $S = \sum_{k=1}^6 a_k$  이므로

$$\begin{aligned} 7S &= \sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=9}^{16} a_k + 2(a_7 + a_8) \\ &= 465 + \sum_{k=9}^{16} a_k + 2(a_7 + a_8) \end{aligned} \tag{1}$$

이 된다. 즉, 3차 지수귀문도의 마법합  $S$ 는 열 개의 수  $a_7, a_8, \dots, a_{16}$ 에 의해 결정된다.

3차 지수귀문도의 마법합은  $6 \times (1 + 31)/2 = 93$ 을 중심으로 대칭을 이루므로, 3차 지수귀문도 마법합의 범위는 93보다 작거나 같은 경우만 조사해도 충분하다. 위에서 구한 식 (1)에서  $7S$ 가 가장 작은 경우를 생각하면,  $a_7 = 1, a_8 = 2, a_9 = 3, \dots, a_{16} = 10$ 일 때이므로,

$$7S \geq 465 + (3 + 4 + \dots + 10) + 2(1 + 2) = 523 = 7 \times 74.7 \dots$$

이 된다. 따라서 3차 지수귀문도의 마법합  $S$ 는 75보다 크거나 같아야 하고  $2 \times 93 - 75 = 111$ 보다 작거나 같다.

이제 3차 지수귀문도의 마법합으로 75와 76이 불가능함을 보이자.

$S = 75$ 인 경우, 식 (1)에서

$$7S = 525 = 465 + \sum_{k=9}^{16} a_k + 2(a_7 + a_8)$$

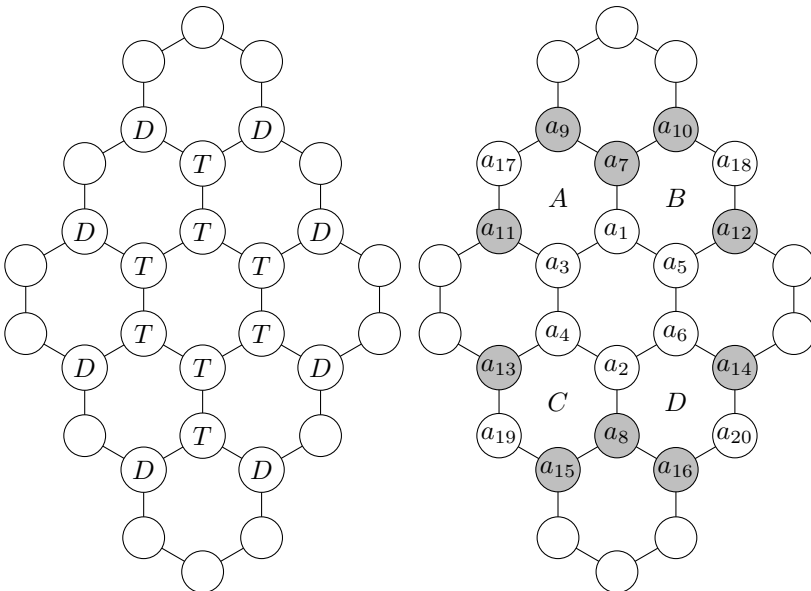


Figure 9. Magic hexagonal tortoises of order 3; 3차 지수귀문도

이므로

$$\sum_{k=9}^{16} a_k + 2(a_7 + a_8) = 60$$

이 된다. 양변에  $\sum_{k=1}^6 a_k = S = 75$ 를 더하면

$$\sum_{k=1}^{16} a_k + (a_7 + a_8) = 135$$

가 되는데,

$$\sum_{k=1}^{16} a_k \geq 1 + 2 + \cdots + 16 = 136$$

이므로  $a_7 + a_8 \leq -1$ 이 된다. 따라서 마법합 75인 3차 지수귀문도는 존재하지 않고 이와 대칭이 되는 마법합 111도 불가능하다.<sup>3)</sup>

$S = 76$ 인 경우, 식 (1)에서

$$7S = 532 = 465 + \sum_{k=9}^{16} a_k + 2(a_7 + a_8)$$

이므로

$$\sum_{k=9}^{16} a_k + 2(a_7 + a_8) = 67$$

이 된다. 양변에  $\sum_{k=1}^6 a_k = S = 76$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^{16} a_k + (a_7 + a_8) = 143$$

이다.

한편, <Figure 9>의 오른쪽 그림에서 육각형  $A, B, C, D$ 의 합을 구하면

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_3 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{17} \\ &= a_1 + a_5 + a_7 + a_{10} + a_{12} + a_{18} \\ &= a_2 + a_4 + a_8 + a_{13} + a_{15} + a_{19} \\ &= a_2 + a_6 + a_8 + a_{14} + a_{16} + a_{20} \end{aligned}$$

이므로

$$4S = \sum_{k=1}^{20} a_k + a_1 + a_2 + a_7 + a_8$$

이 된다.  $S = 76$ 이고  $\sum_{k=1}^{16} a_k + (a_7 + a_8) = 143$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} = 4 \times 76 - 143 = 161$$

이다.  $a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} \leq 27 + 28 + 29 + 30 = 114$ 이므로

$$a_1 + a_2 \geq 161 - 114 = 47$$

3) 김동진, 오영환[5]도 거의 같은 방법으로 마법합 75와 111이 불가능함을 보였다.

이다. 또,  $a_7 + a_8 \geq 3$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{16} a_k \leq 140$$

이 된다. 따라서

$$a_3 + a_4 + \cdots + a_{16} \leq 140 - (a_1 + a_2) \leq 93$$

을 만족한다. 그런데

$$a_3 + a_4 + \cdots + a_{16} \geq 1 + 2 + \cdots + 14 \geq 105$$

이므로 모순이다. 따라서 마법합 76인 3차 지수귀문도도 존재하지 않고 마법합 110인 3차 지수귀문도도 존재하지 않는다.

마법합 77부터 93까지는 실제로 3차 지수귀문도를 만들어 확인할 수 있다. 기존 연구 결과에서 마법합 77부터 109까지의 지수귀문도가 이미 구성되어 있지만, 편의를 위하여 여기서는 앞에서 제시되지 않은 마법합 78부터 92까지의 3차 지수귀문도를 <Figure 10>에 수록하였다. 앞에서 살펴본  $S$ 에 대한 몇 가지 제한 조건을 이용하여 경우의 수를 많이 줄임으로써 컴퓨터를 이용하여 이 계산을 쉽게 수행할 수 있었다.

이상의 결과로부터 3차 지수귀문도의 마법합  $S$ 는 정확하게 77부터 109까지 33개의 값이 가능함을 알 수 있다.

위에서 구한 제한 조건을 이용하더라도 3차 지수귀문도의 모든 해를 구하는 것은 불가능하였다. 김동진, 오영환[5]은 그들의 알고리즘으로부터 대략  $10^8$  개 정도의 해가 존재할 것으로 추정하였으나, 전체 개수는 이보다 훨씬 많다. 한편, 문병로[7]는 <Figure 11>([8] 참조)과 같이 24 개의 수로 이루어진 변형된 지수귀문도에 대하여 통계적인 방법으로 그 해가 40조 개가 넘을 것으로 추정하였으므로, 3차 지수귀문도의 해는 이보다도 많을 것으로 생각된다.

통계적인 방법을 적용하기에 3차 지수귀문도의 해가 너무 많으므로, 대신에 아래위로 대칭이 되는 무작위 배열을 이용하여 유형 V인 자기쌍대 지수귀문도의 개수를 추정하였다. 실험 결과, 총  $2^{30}$  개의 배열 가운데 6383개가 지수귀문도를 이루어,

$$15! \times 2^{15} \times 6383/2^{30} \approx 2.55 \times 10^{11}$$

로부터 유형 V인 자기쌍대 지수귀문도의 개수가 약 2500억개라는 사실을 알 수 있었다.

### 3 결론

최석정의 《구수략》에서는 독창적인 마방진이 다양하게 제시되어 있다. 이 가운데 지수귀문도는 독특한 형태와 함께 컴퓨터를 이용하여도 해를 구하기 쉽지 않다는 점에서 많은 관심의 대상이 되어 왔다. 그러나 그 해를 구성하는 몇 가지 방법에 대한 연구 이외에 이론적인 면을 다룬 연구는 거의 없는 실정이었다.

이 논문에서는 지수귀문도를 일반화한 2차 지수귀문도가 가질 수 있는 마법합의 정확한 범위를 구하고, 이를 바탕으로 2차 지수귀문도의 모든 해를 구할 수 있었다. 또, 원래의 지수

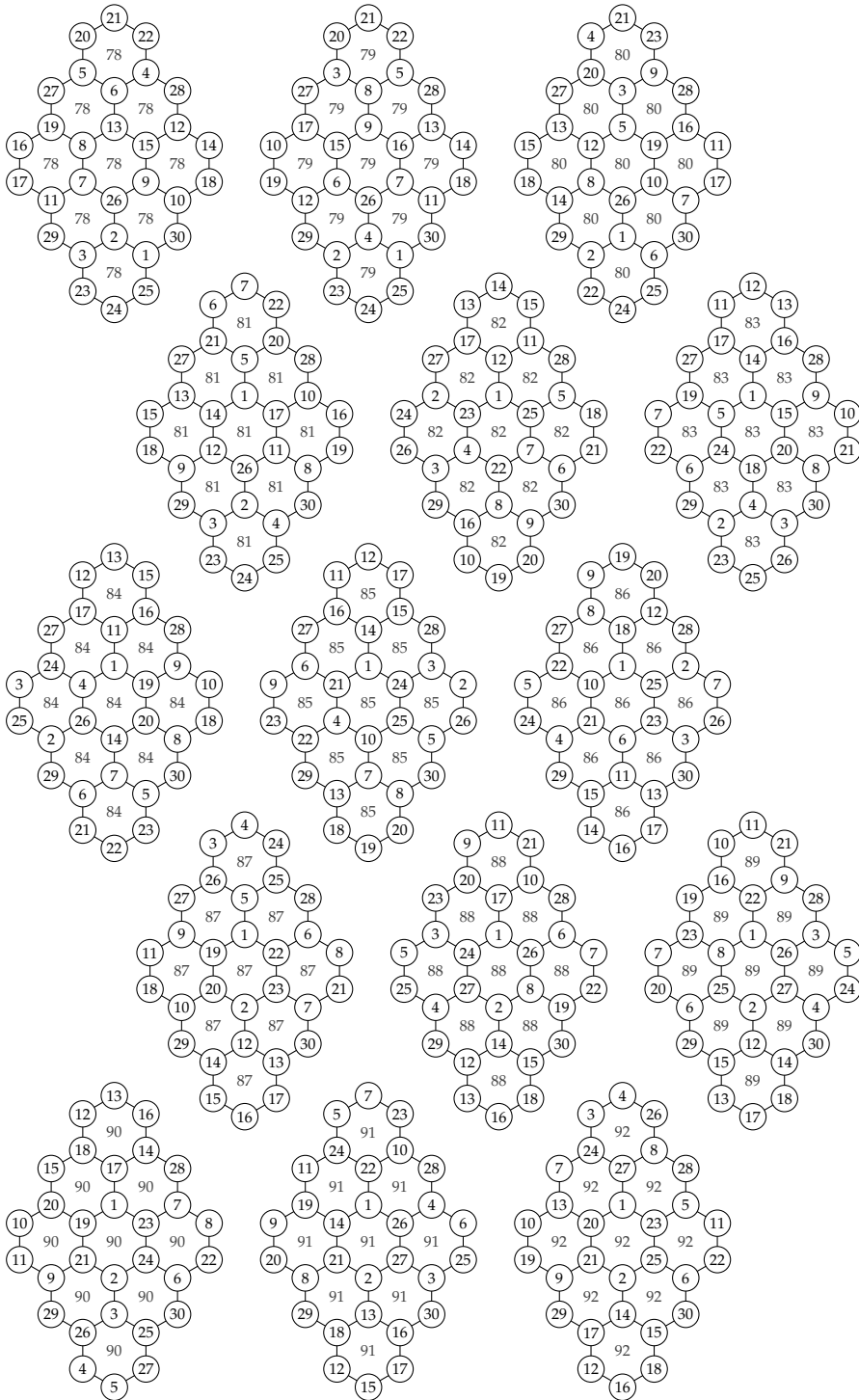


Figure 10. Magic hexagonal tortoises of order 3 with magic sums 78 through 92; 마법합 78부터 92까지의 3차 지수귀문도

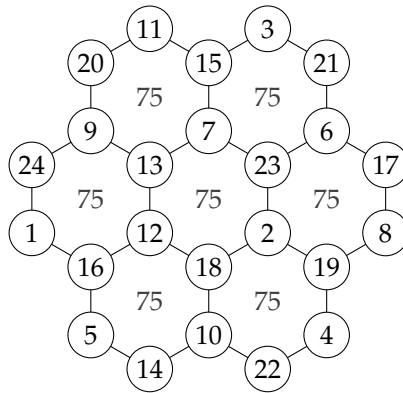


Figure 11. Magic hexagon of magic sum 75; 마법합 75인 육각진

귀문도에 해당하는 3차 지수귀문도가 가질 수 있는 마법합의 정확한 범위를 구하고, 마법합이 93인 지수귀문도를 최석정이 제시한 이유와 그가 어떤 방식으로 지수귀문도를 구성하려 하였는지를 추정하였다.

현재 3차 지수귀문도의 개수에 대해서는 전혀 연구된 결과가 없다. 이 논문에서 제시된 조건을 이용하더라도 여전히 컴퓨터로 계산할 수 있는 범위를 벗어난다. 3차 지수귀문도의 해의 개수를 추정하기 위해서는 더 많은 연구가 필요할 것으로 생각된다.

## References

1. CHOE Heemahn, CHOI Sung-Soon, MOON Byung-Ro, A Hybrid Genetic Algorithm for the Hexagonal Tortoise Problem, *Lecture Notes in Computer Science* 2723 (2003), 850–861.
2. CHOI Seok-Jeong, *GuSuRyak* (translated by JEONG Hae-Nam, HUH Min), Kyo-Woo-Sa, 2006. 최석정, 구수략 – 조선시대 산학총서, 정해남, 허민 옮김, 교우사, 2006.
3. C. COLBURN, J. DINITZ (co-editors), *Handbook of Combinatorial Designs*, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, 2006.
4. JEON Yong Hun, Mysteries of mathematics: The order of the universe hidden in numbers, *Science Dong-A*, July 1999, 68–77. 전용훈, 수학사의 미스터리 마방진, 과학동아 1999년 7월호, 68–77.
5. KIM Dong Jin, OH Yung Hwan, Properties and solution-finding algorithm of Jisuguimundo (Turtle-shape Diagram), *Proceedings of Korea Information Science Society* 16(1) (1989), 405–408. 김동진, 오영환, 지수귀문도의 특성 및 해를 구하는 알고리즘, 한국정보과학회 봄 학술발표회 논문집 16(1) (1989), 405–408.
6. KIM Young Wook, Seok-Jeong Choi, prime minster and mathematician in 17th century, *Newsletter of Korean Mathematical Society*, September 2013, 2–4. 김영욱, 최석정, 17세기의 영의정 수학자, 대한수학회 소식지 2013년 9월호, 2–4.
7. MOON Byung-Ro, Genetic algorithm: the key to solving Jisuguimundo, *Science Dong-A*, July 2003, 146–149. 문병로, 지수귀문도 해결의 열쇠 유전자 알고리즘, 과학동아 2003년 7월호,

- 146–149.
8. Arseniy V. POVOLOTSKIY, SHIN Haisoo, RI Bob McKAY, Hexagonal Tortoise Problem Solving using Constraint Programming, *Journal of KIISE: Software and Applications* 38(1) (2011), 27–40. 아르세니 포볼로츠키, 신해수, 밥 맥케이, 제약 프로그래밍을 이용한 지수귀문도 풀이, *정보과학회지논문지: 소프트웨어 및 응용* 제38권 제1호, 2011년 1월호, 27–40.
  9. SONG Hong-Yeop, Choi Seok-Jeong made orthogonal Latin squares at least 61 years earlier than Euler, *Newsletter of Korean Mathematical Society*, September 2013, 5–12. 송홍엽, 최석정 선생, 오일러를 최소 61년 앞서 직교라틴방진을 만들다, *대한수학회 소식지* 2013년 9월호, 5–12.
  10. Wikipedia, Hexagonal tortoise problem, [http://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal\\_tortoise\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal_tortoise_problem) (2014, February 1)