Journal for History of Mathematics
Vol. 27 No. 2 (Apr. 2014), 127–138
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2014.27.2.127

The Origin of Newton's Generalized Binomial Theorem

뉴턴의 일반화된 이항정리의 기원

Koh Youngmee 고영미 Ree Sangwook 이상욱

In this paper we investigate how Newton discovered the generalized binomial theorem. Newton's binomial theorem, or binomial series can be found in Calculus text books as a special case of Taylor series. It can also be understood as a formal power series which was first conceived by Euler if convergence does not matter much. Discovered before Taylor or Euler, Newton's binomial theorem must have a good explanation of its birth and validity. Newton learned the interpolation method from Wallis' famous book 《Arithmetica Infinitorum》 and employed it to get the theorem. The interpolation method, which Wallis devised to find the areas under a family of curves, was by nature arithmetical but not geometrical. Newton himself used the method as a way of finding areas under curves. He noticed certain patterns hidden in the integer binomial sequence appeared in relation with curves and then applied them to rationals, finally obtained the generalized binomial sequence and the generalized binomial theorem.

Keywords: Alhazen's summation formula, Cavalieri's method of indivisibles, Wallis' interpolation, Newton's generalized binomial theorem.

MSC: 01Axx

1 서론

뉴턴(Newton, 1643–1727)이 유도한 일반화된 이항정리는 다음과 같다. 정수 m과 $n(\neq 0)$에 대하여,

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ^2 + \frac{m-2n}{3n}CQ^3 + \cdots$$

이고, 이때, $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}A$, $C = \frac{m-n}{2n}B$ 등으로 정의된다. 위의 식에서 양변을 $P^{m/n}$로 나누고 Q를 x로 바꾸면 아래와 같이 간단히 표현되기도 한다.

$$(1+x)^{m/n} = 1 + \frac{m}{n}x + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}x^2 + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\cdot 2}x^3 + \cdots$$

Koh Youngmee: Dept. of Math., The Univ. of Suwon E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr
Ree Sangwook: Dept. of Math., The Univ. of Suwon E-mail: swree@suwon.ac.kr
Received on Jan. 18, 2014, revised on Feb. 21, 2014, accepted on Mar. 4, 2014.

뉴턴의 일반화된 이항정리는, 널리 알려지고 매우 유용하게 활용되고 있는 이항정리

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

또는

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-3)}{3 \cdot 2}x^3 + \cdots + x^n$$

과 매우 닮은꼴임을 알 수 있다. 이 식에서 n은 양의 정수이다. 이 공식에 나타나는 계수 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 을 이항계수라 부르고, 이항계수들을 삼각형 모양으로 나열한 파스칼 삼각형[1)] 은 이항계수들의 다양한 성질을 잘 보여준다. 간단히 말하면 뉴턴이 17세기에 발견한 일반화된 이항정리는 파스칼 또는 가헌의 이항정리에서 지수 n을 유리수로 확장시킨 것이다.

이 논문은 「뉴턴은 이항급수 또는 일반화된 이항정리를 어떻게 발견했을까?」라는 질문에 대한 답을 제시하고자 하는 목적으로 쓰여졌다. 뉴턴의 이항급수는 대학의 미분적분학에서 다루어지는 내용 중에서 테일러 급수를 적용하거나, 오일러에 의해서 최초로 시작된 형식멱급수(formal power seires)의 개념으로 설명이 가능하지만, 뉴턴이 이항급수를 발견한 시기는 1665년 경으로 테일러(Talor, 1685–1731)나 오일러(Euler, 1707–1783)가 태어나기 전이다. 이로 보아 미분적분학을 이용하지 않고 뉴턴의 이항정리를 그럴듯하게 설명하는 방법이 있을 것임을 짐작할 수 있다.

뉴턴은 월리스가 곡선 아래의 넓이를 구하는 데 이용한 보간법에서 아이디어를 얻어 월리스와 유사한 방법으로 보간법을 적용하고 특정한 패턴을 발견함으로써 일반화된 이항정리, 즉 이항급수를 얻을 수 있었다. 일반화된 이항정리에 대한 엄밀한 증명은 19세기에 이르러 코쉬와 아벨 등에 의해 주어졌지만, 월리스나 뉴턴은 구체적인 증명 대신 대수적인 계산이나 기하적인 방법 등을 포함한 다양한 방법으로 그들이 얻은 공식을 실험적으로 검토함으로써 공식의 타당함을 확인하였다.

이 논문에서는 뉴턴이 이항급수를 얻는 과정을 설명하고, 이항급수의 기원에 대한 이해에 초점을 둔다. 이를 위해서 월리스의 보간법(interpolation)에 대한 설명을 빠뜨릴 수 없다. 월리스의 보간법에 활용된 알하젠의 합의 공식과 카발리에리의 불가분량법(method of indivisibles)을 먼저 간단히 소개하고 각각이 어떤 관련을 가지고 어떻게 활용되었는 지 살펴본다.

2 알하젠의 합의 공식

알하젠(Alhazen)으로 알려져 있는 이라크 출생의 알헤이탐(Ibn al-Haytham, 965–1040)은 수학자이자 물리학자였고 철학자였다 [11]. 그리스 수학은 길이, 넓이, 부피 등과 관련된

---

1) 실제로, 파스칼 삼각형은 17세기의 파스칼보다 훨씬 이른 10세기에 이미 인도와 페르시아의 문헌에서 발견되고, 중국에서는 11세기에 가헌에 의해 유사한 삼각형이 제시되었고, 13세기에 양휘의 저술에서도 발견된다. (http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle)

기하에 관심을 두었으므로 3보다 큰 지수에 대해서는 다루지 않았다. 그러나 알하젠은 3 이상의 지수가 포함된 공식으로 표현되는 넓이와 부피 등을 계산하기를 원했다. 예를 들어 지수 4를 포함하는 계산으로, 알하젠은 포물선 $y = a^2 - x^2$과 x축으로 둘러싸인 영역을 x축을 중심으로 회전시켜 생긴 입체의 부피를 구했다. 그는 소진법(method of exhaustion)[2)]을 이용하여 회전체의 부피가 외접하는 원기둥 부피의 $\frac{8}{15}$ 임을 알아내었다. 17세기까지는 도형의 넓이와 부피를 상대적으로, 즉 비로 표현하였다. 예를 들어, 원의 넓이는 외접하는 사각형 넓이의 $\frac{\pi}{4}$, 피라미드의 부피는 둘러싸고 있는 직육면체 부피의 $\frac{1}{3}$ 등으로 표현하였다 [4].

알하젠은 정수의 거듭제곱의 합을 구하는 공식을 제시하였다. 이들 합은 소진법을 이용해서 넓이와 부피를 구할 때 유용하게 이용된다. 그림은 알하젠이 합의 공식을 유도한 방법을 기하학적으로 해석한 것이다 [5]. 그림의 내용을 현대의 기호를 이용한 산술식으로 표현하면,

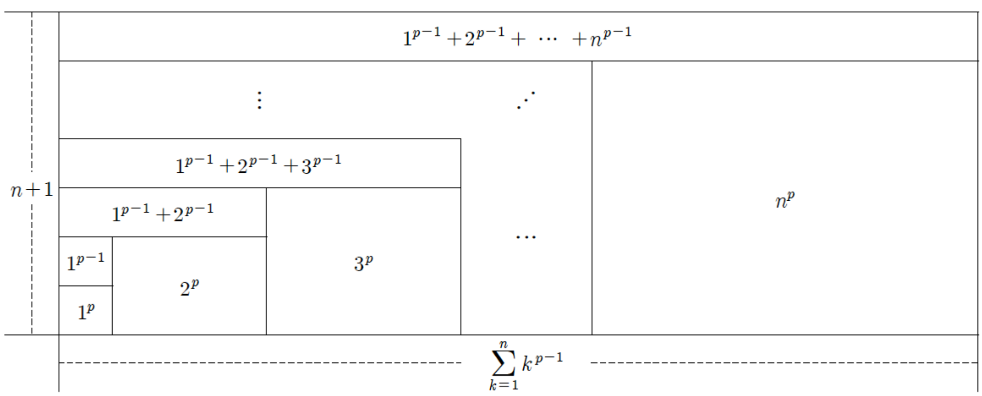

Figure 1. The Method for Al Hazen's Summation formula

$p = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^{p-1} = \sum_{k=1}^{n} k^p + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} i^{p-1}$$

이다. 몇 개의 p에 대한 공식을 구체적으로 써보면

$$n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \ \text{에서} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ \text{을,}$$

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} i \ \text{로부터} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ \text{을,}$$

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} i^2 \ \text{으로부터} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \ \text{을}$$

2) 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문제는 오이독소스(Eudoxus, 408–355 BC)와 아르키메데스(Archimedes, 287–212 BC)에 그 뿌리를 두고 있다. 이들은 도형의 넓이를 구하기 위해 이미 알고 있는 넓이를 가진 작은 도형들로 주어진 도형을 채우는 식의 소진법(method of exhaustion)을 이용했다.

단계적으로 얻을 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 일반적으로, 임의의 양에 정수 p에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} k^p$을 표현하는 공식을 앞서 구한 $\sum_{k=1}^{n} k^s (s = 1, 2, 3, \cdots, p-1)$를 표현하는 공식들로부터 찾아낼 수 있음을 알 수 있다.

3 카발리에리의 불가분량법

소진법은 일반적으로 적용하기가 어렵다는 단점이 있어서, 그리스인들은 쌍곡선 $y = 1/x$ 아래 영역 등을 포함해 많은 영역의 넓이를 알 수 없었다 [2]. 14세기에 오어섬 (Oresme) 으로부터 곡선 아래 영역의 넓이를 구하는 문제의 중요성이 인식되었다. 오어섬은 곡선으로 물체의 속도를 표현할 수 있고 곡선 아래 영역의 넓이가 물체의 이동 거리를 나타냄을 발견하였다 [6].

곡선 아래 영역의 넓이를 구하고자 하는 노력에서 적분법의 역사가 시작되었다고 한다면, 이런 적분법의 기초를 최초로 만든 사람은 이탈리아의 수학자 카발리에리 (Cavalieri, 1598–1647) 라고 할 수 있다. 1635년에 출판된 책 《Geometria indivisiblibus continuorum nova quadam ratione promota》은 카발리에리를 유명한 수학자로 만들어주었다 [1]. 그는 이 책에서 불가분량 (indivisible) 이라는 무한소 (infinitesimal) 개념을 이용해서 넓이를 구하는 방법을 설명했다. 곡선은 무한히 많은 점들의 합으로 표현되고, 영역은 무한히 많은 선분들로 구성된다는 것이 그의 핵심 아이디어였다. 즉, 점은 선의 불가분량이고 선분은 영역의 불가분량이다. 아르키메데스의 소진법도 비슷한 개념을 이용하는 방법이지만, 20세기가 되어서야 그의 소진법이 알려졌다[3] [9].

예를 들어, $y = x^2$ 아래 영역의 넓이를 구하기 위해 이를 둘러싼 직사각형의 넓이와 비교한다 (넓이는 상대적인 비로 표현되었으므로). 즉, 곡선과 $x = n$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를, 밑변의 길이가 1이고 높이가 각각 $0^2, 1^2, 2^2, \cdots, n^2$ 인 직사각형의 넓이의 합으로 근사하여, 가로가 $x = -0.5$ 부터 $x = n + 0.5$ 까지이고 세로가 n^2 인 직사각형의 넓이와 비교한다. 비교 직사각형을 크기가 $1 \times n^2$ 인 $n + 1$ 개의 직사각형으로 나누어 곡선 아래 영역의 넓이와 직사각형의 넓이의 비를 살펴보면, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 일 때

$$\frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \quad \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}, \cdots$$

등을 얻는데 여기서 보이는 패턴으로부터 카발리에리는 $\dfrac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6n}$ 을 추측했다. 영역은 무한히 많은 선분들, 즉 불가분량들의 합으로 표현되므로 $1/6n$ 은 거의 영향을 미치지 못하게 되고, 결국 카발리에리는 곡선 아래 영역의 넓이가 사각형 넓이의 $1/3$ 이라는 결론에 이른다 [7].

3) 1906년에 아르키메데스의 《The Method》가 발견되었는데, 이 책에서 소진법을 이용해서 포물선의 넓이와 구의 부피 등을 구한 방법을 찾아볼 수 있다. (http://www.wilbourhall.org/pdfs/archimedes/archimedesHeiberg.pdf)

4 월리스의 보간법

월리스 (Wallis, 1616–1703) 는 뉴턴과 같은 시대를 살았던 영국의 신학자이고 수학자이자 논리학자였다. 우리에게는 π 를 유리수의 곱으로 표현한 월리스의 공식 (Wallis product)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

으로 유명한 사람이다. 월리스는 곡선 아래 영역의 넓이를 구하는 과정에서 양의 정수 지수가 유리수 지수까지 확장된 지수법칙을 증명했다. 그의 대표 업적으로는 1665년에 출판된 저서 《Arithmetica Infinitorum(The Arithmetic of infinitesimals)》가 꼽힌다. 이 책은 뉴턴이 이항급수, 즉 일반화된 이항정리를 얻고 미분적분학을 발견하는 데 큰 영향을 미치게 된다 [12]. 월리스는 데카르트에 앞서 기하를 대수적으로 다룬 최초의 사람으로서, 원추곡선을 포함해서 유클리드 원론의 기하를 대수적으로 다룬 최초의 사람이기도 하다 [9].

아래의 내용은 뉴턴에게 크게 영향을 준 월리스의 보간법에 관한 설명이다. 월리스는 이미 알고 있는 넓이로부터 보간법을 이용해서 다른 넓이들을 구했다. 보간법은 도형의 기하적 성질을 이용해서 넓이를 구하는 게 아니라, 주어진 숫자들의 열을 보고 틈을 메꾸는 방법을 찾고자 하는 생각에 기초한 순전히 산술적인 아이디어에 근거한다. 그러므로 월리스와 뉴턴의 보간법은 엄밀한 논리적 근거가 뒷받침되는 방법이라기보다는 실험적으로 추측하여 얻은 결과를 이미 알려져 있는 다른 방법을 통해 확인함으로써 그 타당성을 주장하는 방법인 것이다.

월리스는 《Arithmetica Infinitorum》에서

$$\frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

와 같은 형식의 비를 생각하고, 알하젠의 합의 공식을 이용하여 비를 구한 다음 n 이 커질 때를 생각하였다. 예를 들어, $k = 2$ 의 경우에 알하젠의 공식을 이용하면

$$\frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{(1/6)n(n+1)(2n+1)}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

을 얻는다. n 을 크게 하면 이 수는 $1/3$ 에 가까워지고 이때 주어진 비 $1/3$ 을 지수 $k = 2$ 의 특성비라고 명명하였다. 월리스는 같은 방법으로 지수 $k = 3$ 의 특성비를 $1/4$ 로, 지수 $k = 4$ 의 특성비를 $1/5$ 로 정의할 수 있었다. 이어서 월리스는 일반적인 양의 정수인 지수 k 의 특성비를 $\frac{1}{k+1}$ 로 정의하였다.

월리스는 이들 지수에 대한 특성비가 다름 아닌 $y = x^k$ 의 곡선 아래 영역 넓이의 외접하는 직사각형 넓이에 대한 비와 같음을 알하젠의 합의 공식과 카발리에리의 불가분량법을 이용해서 알 수 있었다. 예를 들어, 식 $\dfrac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2}$ 에서 월리스는 분자의 수들을 곡선 아래 영역을 구성하는 평행선분들의 길이로, 분모의 수들은 외접 직사각형을 구성하는 평행선분들의 길이로 해석하면 이 식은 넓이의 비가 된다. 즉, 지수 $k = 2$ 의 특성비, 또는 곡선 $y = x^2$ 의 특성비는 외접사각형의 넓이에 대한 곡선의 넓이의 비이다. 곡선 $y = ax^2$ 에 대한 식에서도 분자와 분모의 선분의 길이를 a 배씩 늘여줄 뿐이므로 특성비는 변하지 않는다. 즉, 모든 포물

q \ p	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1		3/2		15/8		105/48		945/384
1	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
3/2	1		5/2		35/8		315/48		3465/384
2	1	15/8	3	35/8	6	63/8	10	99/8	15
5/2	1		7/2		63/8		693/48		9009/384
3	1	105/48	4	315/48	10	693/48	20	1287/48	35
7/2	1		9/2		99/8		1287/48		19305/384
4	1	945/384	5	3465/384	15	9009/384	35	19305/384	70

Table 1. $f(p,q)$

선의 특성비는 $1/3$이다. 이로부터 피라미드의 부피와 원뿔의 부피가 각각 외접 직육면체와 외접 원기둥 부피의 $1/3$이 됨을 알 수 있다.

윌리스는 더 나아가 곡선의 넓이의 비 개념을 이용하여 지수의 범위를 확장할 수 있었다. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 아래의 넓이는 외접사각형 넓이에서 $y=x^2$의 넓이를 뺀 것과 같으므로 외접시각형의 넓이에 대한 $y=\sqrt{x}$의 넓이의 비는 $2/3$이다. 넓이의 비가 곧 특성비이고 식 $\frac{1}{k+1}=\frac{2}{3}$를 만족시키는 $k=1/2$이므로 $\sqrt{x}$의 지수를 $1/2$로 정의해야 한다고 생각했다. 즉, $\sqrt{x}=x^{1/2}$임을 주장하였다. 같은 이유로 $\sqrt[m]{x}=x^{1/m}$이어야 함을 알았다. 이로부터 그는 $y=\sqrt[q]{x^p}$의 특성비가 $\frac{1}{p/q+1}$이어야 하고, 따라서 $\sqrt[q]{x^p}=x^{p/q}$임을 주장하였다.

윌리스는 $y=x^k$으로 표현되지 않는 곡선, 특히, 원을 일반화한 곡선 $y=(\sqrt[q]{r}-\sqrt[q]{x})^p$의 특성비를 구하였다. $p=0$이면 $y=1$로 생각했고, $x^{1/q}+y^{1/p}=r^{1/q}$에서 $p=q=1/2$일 때가 원의 식이다. $f(p,q)$를 $y=(\sqrt[q]{r}-\sqrt[q]{x})^p$의 특성비, 즉 외접사각형에 대한 곡선의 넓이의 비의 역수로 정의하자. 그러면 $f(p,q)$에서 p와 q를 서로 바꾸는 것은 식 $x^{1/q}+y^{1/p}=r^{1/q}$에서 x와 y를 바꾸는 것과 같아서 곡선 아래의 넓이는 변하지 않는다. 즉, $f(p,q)=f(q,p)$이다.

〈Table 1〉은 $f(p,q)$를 기록한 것이다. 윌리스는 p와 q가 정수일 때 넓이의 비를 계산함으로써 $f(p,q)$를 구할 수 있었다. 여기서 이항계수들이 나타난다. 양의 정수 p에 대하여 $q=1$이면 등차수열, $q=2$이면 삼각수, $q=3$이면 삼각수들의 합 등으로 주어지므로 각 경우에 대하여 알하젠의 합의 공식을 적용하면

$$\begin{aligned}
f(p,0)&=1\\
f(p,1)&=p+1\\
f(p,2)&=\frac{(p+1)^2+(p+1)}{2}\\
f(p,3)&=\frac{(p+1)^3+3(p+1)^2+2(p+1)}{6}\\
f(p,4)&=\frac{(p+1)^4+6(p+1)^3+11(p+1)^2+6(p+1)}{24}
\end{aligned}$$

등을 얻는다. 각각의 공식을 분수인 $p = \frac{k}{2}$ 일 때도 적용해서 ⟨Table 1⟩의 해당 칸을 채운다. 이것이 월리스의 보간법(interpolation)[4]이다. 다시 말해서 월리스의 보간법은 정수에 대하여 발견된 패턴을 유리수에 확장시켜 적용하는 것이다. $f(2, 1/2) = 15/8$ 은 알하젠이 회전 포물선의 부피를 구한 결과와 같은데, 월리스는 이런 식의 비교를 통해 자신의 보간법이 옳다는 것을 확인하였다. 또한 월리스는 $f(1/2, 1/2)$ 이 사분원의 넓이의 비의 역수인 $4/\pi$ 와 같아야 함을 인식하고, 이것을 이후에 자신의 보간법이 타당함을 다시 확인하는 데 이용한다. ⟨Table 1⟩에서 $q = 1/2$ 의 행에 있는 숫자들이

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{15}{8} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}, \quad \frac{105}{48} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}, \quad \frac{945}{384} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}, \cdots$$

의 패턴을 보이고 있음에 주목해서, 이들 수의 분자, 분모에 빠진 수들을 빈칸에 채우는 방식을 택한다. 즉, $f(1/2, 1/2) = X$ 로 두고 이후에 나오는 빈칸에 순서대로

$$\frac{4}{3}X, \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}X = \frac{8}{5}X, \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}X = \frac{64}{35}X, \cdots$$

을 채운다. $q = 3/2$ 일 때도 마찬가지로 하면 $f(1/2, 3/2) = f(3/2, 1/2) = \frac{4}{3}X$ 로 부터 출발하여,

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{3}X = \frac{8}{3}X, \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{8}{5}X = \frac{64}{15}, \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{10}{7}X = \frac{128}{21}X, \cdots$$

을 채운다. 이런 방식으로 하면 ⟨Table 1⟩의 모든 빈칸을 채울 수 있고, 이때 얻어진 각각의 수들은 두 칸 위의 수와 두 칸 왼쪽의 수의 합과 같다는 이항계수의 법칙을 따름을 확인할 수 있다.

마지막으로 $X = 4/\pi$ 가 맞는 지를 확인한다. $q = 1/2$ 일 때 각 칸의 수는 두 칸 왼쪽의 수에 $\frac{n}{n-1}$ 을 곱한 것과 같기 때문에 n 이 커지면 $\frac{n}{n-1}$ 은 거의 1이 되고, f 가 p 에 따른 증가함수이어서 같은 행에 속한 전체 수열은 증가하므로 짝수 번째 칸의 수와 홀수 번째 칸의 수가 결국 같아져야 한다. 즉,

$$X\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdots = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdots$$

이다. 월리스는

$$2\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdots}$$

를 근사적으로 계산한 값이 이미 알려진 원주율과 같음을 확인함으로써 $X = \frac{4}{\pi}$ 가 맞고 동시에 자신의 보간법이 옳다는 생각을 한다 [5]. 위의 식은 원주율을 계산하는 한 가지 방법을 제시해주는 잘 알려진 「월리스의 공식」이다.

5 뉴턴의 이항급수

뉴턴은 너무나 유명한 물리학자이자 수학자이다. 수학에 관한 그의 업적 중 가장 중요한 것으로 인정받는 내용이 미적분학의 발견과 무한급수 이론이다. 그 중 핵심이 되는 일반화된

4) interpolation은 Wallis가 만든 단어로 inter와 polish를 결합한 말이다 [5].

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
10	6	3	1	0	0	1	3	6	10	15	
-20	-10	-4	-1	0	0	0	1	4	10	20	
35	15	5	1	0	0	0	0	1	5	15	
-56	-21	-6	-1	0	0	0	0	0	1	6	
84	28	7	1	0	0	0	0	0	0	1	

Table 2. Generalized binomial coefficients for negative integer exponents; 이항계수의 음수로의 확장

이항정리의 발견은 뉴턴이 스스로 언급한 「창조적인 활동이 최고조에 달했던 1665년」[5)]에 이루어졌다. 실제로 영국에서 치명적인 역병이 유행했던 1665–1966년 사이에 뉴턴이 재학 중이던 캠브리지 소재 트리니티 칼리지가 휴교한 동안 뉴턴은 수학 연구에 더욱 몰입할 수 있었고, 결과적으로 미분적분학도 이 시기에 탄생되었다 [9].

뉴턴이 이항급수를 발견한 과정은 월리스의 《Arithmetica Infinitorum》에 있는 보간법으로부터 시작된다 [10]. 뉴턴은 먼저 양의 정수 n에 대한 곡선 $y = (1+x)^n$의 넓이를 생각했다. 월리스가 상대적인 넓이, 즉 특성비를 생각했던 것과 다르게 뉴턴은 곡선 $y = x^k$의 넓이를 $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$으로 나타내었고, $n = 2$이면, $y = (1+x)^2 = 1+2x+x^2$의 넓이를 $x+2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$으로, $n = 3$이면 $x + 3\cdot\frac{x^2}{2} + 3\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ 등으로 구했다. 이들 식을 살펴보면 곡선의 전개식이나 곡선의 넓이의 식 모두에서 같은 이항계수들이 나타난다. 앞의 예에서 $n = 2$이면 이항계수 1, 2, 1이 $n = 3$이면 이항계수 1, 3, 3, 1이 곡선과 넓이의 식에서 공통적으로 계수에 나타난다. 이 결과를 음수 n으로 확장하여 양의 정수에 대해 성립하는 이항계수의 법칙을 음의 정수까지 적용하여 ⟨Table 2⟩를 얻었다 (표에서 각 칸의 수는 왼쪽의 수와 위의 수의 합과 같다) [4,10]. 예를 들어, ⟨Table 2⟩에서 네 번째 열은 $n = -1$, 그리고 일곱 번째 열은 $n = 2$인 경우의 $y = (1+x)^n$의 넓이 식에서의 계수들을 나타낸 것이다. 즉, 곡선 $y = \frac{1}{(1+x)}$의 넓이를 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$으로 쓸 수 있음을 의미한다. 뉴턴은 이후에 이 급수를 로그함수의 계산에 이용하였다.

그리스인들은 원추곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문제에 관심을 두었으나 쌍곡선의 경우에 대해서는 해결할 수 없었다. 뉴턴이 양의 정수 n에 대한 곡선 $y = (1+x)^n$의 넓이를 관찰하는 것에서 출발해서 월리스 식의 보간법을 따라 음의 정수 n에 대한 결과를 얻은 것은 쌍곡선 아래 넓이를 구하는 문제에 대한 관심에서 시작된 것으로 보인다.

뉴턴은 이어서 곡선 $y = (1-x^2)^p$의 넓이를 생각했다 [3]. $p = 1/2$이면 원이 되는 이 식은

5) 뉴턴이 말하길, 『All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in my prime of age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any time since.』 [9]

p	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3	$7/2$	4
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3	$7/2$	4
	1	$3/8$	0	$-1/8$	0	$3/8$	1	$15/8$	3	$35/8$	6
	-1	$-5/16$	0	$3/48$	0	$-1/16$	0	$5/16$	1	$35/16$	4
	1	$35/128$	0	$-15/384$	0	$3/128$	0	$-5/128$	0	$35/128$	1
	-1	$-63/256$	0	$105/3840$	0	$-3/256$	0	$3/256$	0	$-7/256$	0

Table 3. Generalized binomial coefficients for fractional exponents; 이항계수의 분수로의 확장

원의 넓이에 대한 뉴턴의 관심에서 연구되었던 것 같다. 뉴턴은 정수 p에 대한 곡선의 넓이를 구하고 윌리스의 보간법을 따라 주어진 패턴을 적용시켜 분수 p에 대한 넓이 공식을 얻고자 했다. $p = 2$이면 곡선의 넓이는 $x - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ 이고 $p = 3$이면 $x - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ 등으로 구해진다. 이들 식에서도 이항계수들이 나타난다. 보간법을 이용해서 분수 $p = \frac{n}{2}$ 에 대한 넓이를 구하기 위해 ⟨Table 2⟩의 각 열마다 새로운 열을 추가해 1/2 간격의 표를 만든다. 뉴턴은 각 행에 있는 수열이 다음과 같은 형태를 따른다고 생각하였다.

$$\begin{array}{lllll}
a & a & a & a & a \\
b & b+c & b+2c & b+3c & b+4c \\
d & d+e & d+2e+f & d+3e+3f & d+4e+6f \\
g & g+h & g+2h+i & g+3h+3i+k & g+4h+6i+4k \\
l & l+m & l+2m+n & l+3m+3n+p & l+4m+6n+4p+q
\end{array}$$

즉, 행마다 몇 개의 수를 알면 행의 나머지 모든 칸은 다음과 같은 특정한 패턴을 따라 채워진다는 것이다. 예를 들어, ⟨Table 2⟩를 1/2 간격으로 만들어 새로운 열들을 추가하면 세 번째 행의 수열이 $d = 0, d + 2e + f = 0, d + 4e + 6f = 1$을 만족하므로 $d = 0, e = -1/8, f = 1/4$ 이어서 1/2 간격의 세 번째 행의 수열을 다음과 같이 찾을 수 있다.

$$\cdots, 3, \quad \frac{15}{8}, \quad 1, \quad \frac{3}{8}, \quad 0, \quad -\frac{1}{8}, \quad 0, \quad \frac{3}{8}, \quad 1, \quad \frac{15}{8}, \quad 3, \quad \cdots$$

이런 식으로 만들어진 것이 ⟨Table 3⟩이다. 윌리스는 각 행의 수들을 곱으로 표현한 반면에 뉴턴은 합으로 표현하여 서로 다른 패턴을 찾았다.

⟨Table 3⟩에서 $p = 1/2$인 열은 곡선 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 의 넓이, 즉,

$$x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{3}{48} \cdot \frac{x^7}{7} - \frac{15}{384} \cdot \frac{x^9}{9} - \cdots$$

을 나타낸다. 위 식에서 $x = 1$이면 사분원의 넓이와 같아져야 한다. 이 값을 계산하여 아르키메데스식으로 구한 원의 넓이[6]및 윌리스의 공식과 비교함으로써 뉴턴은 자신의 보간법이

6) 아르키메데스는 원에 내접하는 다각형과 외접하는 다각형으로 원의 넓이를 구했다.

타당하다는 확신을 얻을 수 있었다 [4].

월리스가 제시한 예를 따라서 뉴턴은 각 열의 수들을 곱으로 표현하여 패턴을 찾았다. $p = 1/2$ 인 열에 나오는 수들은

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4} \cdot \frac{-3}{6} \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-7}{10} \cdot \frac{-9}{12} \cdots$$

와 같이 차례로 연속적으로 곱하여 얻어지고, 마찬가지로 $p = 3/2$ 인 열에 나오는 수들도

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{6} \cdot \frac{-3}{8} \cdot \frac{-5}{10} \cdot \frac{-7}{12} \cdot \frac{-9}{12} \cdots$$

와 같이 차례로 연속적으로 곱해서 얻어짐을 발견하였다.

여기서 더 나아가 뉴턴은 $1/2$ 간격에 대한 보간법을 적용하여 $1/3$ 간격의 확장된 이항계수들을 구할 수 있었다. $p = 1/3$ 인 열에 나오는 수들은

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{6} \cdot \frac{-5}{9} \cdot \frac{-8}{12} \cdot \frac{-11}{15} \cdot \frac{-14}{18} \cdot \frac{-17}{21} \cdots$$

으로 주어진다. 뉴턴은 이 패턴으로부터 $p = m/n$ 인 열의 수들이

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} \cdot \frac{m-3n}{4n} \cdots$$

와 같은 식으로 나타남을 주장했다 [4]. 이것은 다름 아닌 우리가 일반화된 이항계수로 부르고 있는

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}, \ k = 1, 2, \cdots$$

와 같은 식이다. 즉, 일반화된 이항계수를 이용하여 곡선 $y = (1+x)^p$ 의 넓이를 나타내면

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

이고, 같은 이항계수를 원래 곡선의 전개식에 적용하면 뉴턴의 이항정리를 얻는다.

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k$$

여기서, p는 유리수이다.7)

뉴턴은 곡선의 넓이를 구하기 위해 보간법을 적용하여 이항계수를 음수와 분수로 확장했고, 제곱근, 세제곱근을 푸는데 확장된 일반화된 이항계수를 이용할 수 있음을 알았다. 예를 들어 식

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \cdots$$

은 제곱근을 푸는데 활용할 수 있다. 특히 $\sqrt{3} = 3\sqrt{1-1/4} \approx 1.73206\cdots$ 을 알 수 있다.

7) 현대의 일반화된 이항정리는 보통 실수 p에 대한 정리를 말한다.

6 결론

기하급수는 그리스시대에 이미 알려져 있었고, $\tan^{-1} x$, $\sin x$, $\cos x$ 등의 삼각함수의 급수표현은 15–16세기에 인도에서 알려져 있었다 [9]. 즉, 미분적분학이 생기고 테일러급수가 생기기 훨씬 전부터 알려진 것들이다. 대학과정에서 뉴턴의 일반화된 이항정리는 미분적분학에서 뿐만 아니라 이산수학 혹은 조합론에서 생성함수를 다룰 때도 소개된다. 이 논문은 테일러급수보다 먼저 나온 이항급수가 어떻게 발견되었는지에 초점을 두었다. 뉴턴과 월리스가 살았던 17세기는 지금의 우리에게 익숙한 엄밀한 논리에 따른 수학적 증명이 아직 생겨나기 전이었고 특히 함수에 대한 명확한 개념이나 급수의 수렴성은 아직 다루어지지 않았던 때였다. 그럼에도 불구하고 월리스가 몇 개의 경우에 대하여 성립하는 내용을 귀납적으로 일반적인 경우로 쉽게 확장한 방법이나 주어진 패턴이 잘 맞아떨어지도록 사이를 메꾸는 보간법은 페르마를 포함한 당시의 수학자들에게도 적지 않은 비판의 대상이 되기도 하였다 [5]. 월리스나 뉴턴은 엄밀한 논리에 따른 증명은 아니지만 이미 알려진 여러가지 공식이나 기하적인 해석을 통한 방법으로 이중 삼중의 확인을 통해 자신의 주장이 옳다는 확신을 할 수 있었다. 뉴턴이 발견한 이항급수는 월리스의 보간법을 적용한 것으로 곡선 아래의 넓이를 연구하다가 얻어진 것이다. 간단히 말해서, 양의 정수들로 이루어진 이항계수를 음의 정수나 분수로 확장하기 위해서 이항계수들이 가지고 있는 패턴을 음수와 분수에도 그대로 적용하는 방법이 보간법이다.

뉴턴의 미분적분학은 기본적으로 거듭제곱급수(power series)를 대수적으로 다룬 것이었고, 뉴턴이 발견한 이항정리가 이에 대한 기초를 제공한다는 측면에서 일반화된 이항정리의 중요성을 실감할 수 있다. 뿐만 아니라 오일러는 뉴턴의 이항정리로부터 지수함수 e^x 의 거듭제곱급수 표현을 얻고 e 의 값을 근사적으로 구하는 등, 연속함수에 대한 탐구의 기반을 마련하였다 [8]. 결국 현대적 의미로서의 엄밀한 증명을 제시하지는 않았지만, 월리스와 뉴턴이 매우 영리하게 이용한 보간법은 성공적이었고 이후 미분적분학이나 연속함수 등을 포함한 수학의 발전에 큰 공헌을 한 것이다.

뉴턴이 1676년에 후크(Hooke)에게 보낸 편지에 다음과 같은 문구가 있다 [13].

『If I had seen a little further, it is by standing on the shoulders of Giants.』

수학의 입장에서만 보자면 월리스는 뉴턴이 이항정리와 미분적분학을 발견하도록 이끌어준 사람으로서 뉴턴의 거인 중 한 사람이었음에 틀림없다.

수학의 중요 역할 중 하나로 패턴의 발견을 꼽는다면, 이항급수 뿐만 아니라 중력의 법칙을 발견하는 데 있어서도 뉴턴은 패턴 발견에 대한 뛰어난 능력을 보여준 훌륭한 수학자였다. 또한 뉴턴의 천재성은 그의 거인들로부터 물려받은 지적 유산들을 잘 분석하고 종합한 창의성에 기인하였다고 볼 수 있다.

References

1. K. Anderson, Cavalieri's method of indivisibles, 1984. (http://library.mat.uniroma1.it/appoggio/MOSTRA2006/ANDERSEN.pdf)
2. M. Carroll, S. Dougherty, D. Perkins, Indivisibles, infinitesimals and a tale of seventeenth-century mathematics, *Math. Magazine* 86 (2013), 239–254.
3. J. L. Coolidge, The story of the binomial theorem, *The Amer. Math. Monthly* 56(3) (1949), 147–157.
4. D. Dennis, S. Addington, The binomial series of Issac Newton, Mathematical Intentions (http://www.quadrivium.info.)
5. D. Dennis, J. Confrey, The creation of continuous exponents: A study of the methods and epistemology of John Wallis, *Researches in Collegiate Mathematics* (CBMS Vol. 6) AMS (1996), 33–60.
6. D. Dennis, V. Kreinovich, S. Rump, Intervals and the origins of calculus, *Reliable Computing* 4(2) (1998), 1–7.
7. D. Ginsburg, B. Groose, J. Taylor, History of the integral from the 17th century, Lecture Note (www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calc1.html)
8. Ree Sangwook, Koh Youngmee, Kim YoungWook, e is Euler's style, *Mathematics and Education* 95 (2012), 68–77. 이상욱, 고영미, 김영욱, e는 오일러 스타일, 수학과 교육 (전국수학교사모임) 95 (2012), 68–77.
9. J. Stillwell, *Mathematics and its history*, 3rd ed., Springer, 2010.
10. D. T. Whiteside, Newton's discovery of the general binomial theorem, *The mathematical Gazette* 45(353) (1961), 175–180.
11. http://en.wikipedia.org/wiki/Alhazen
12. http://www.robertnowlan.com/pdfs/Wallis,%20John.pdf
13. http://www.phrases.org.uk/meanings/268025.html