韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.2.275
2014. 05. 제 53권, 제 2호, 275-290.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
May. 2014, Vol. 53, No. 2, 275-290.

3차원 기하 사고와 공간적 추론에서 예비 중등 수학교사의 표상활동에 관한 연구

이유빈(영남대학교 대학원)
조정수(영남대학교)†

Ⅰ. 서론

기하는 기하적 개념, 추론 방법, 표상 체계 사이의 복잡한 상호 관계적 네트워크이다. 이러한 네트워크는 물리적, 가상적 공간 환경을 분석하고 개념화하는데 사용된다(Battista, 2007). 특히, 기하 추론은 도형의 모양과 공간을 알아보기 위해 형식적인 개념 체계의 사용이 요구된다. 예를 들어 수학자들은 삼각형과 사각형을 정의하고 종류를 나누기 위해 도형의 성질에 관한 개념 체계를 사용한다. 이러한 개념체계는 공간적인 관계를 개념화하는 합동, 평행, 변의 길이, 각 등이다. 이러한 개념체계를 사용하여 정사각형의 정의인 네 변의 길이가 같으며 각이 모두 수직이라는 것은 정사각형의 종류에 관해 좀 더 정확한 추론이 이루어질 수 있도록 도와준다. 이러한 기하 추론의 대상은 추론하는 동안 조작되는 정신적인 대상이며, 이 대상은 표상을 통해 표현된다. 따라서 기하 사고를 할 때 사람들은 표상을 사용하여 정신적 대상에 관하여 추론한다고 할 수 있다(Battista, 2007).

2차원 표상은 학교 수학에서 3차원 기하 대상을 나타내는데 가장 많이 사용하는 표상 유형이다(Berthelot & Salin, 1998). National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 2000)에서는 2차원과 3차원 물체를 머릿속에서 만들고 조작하는 것과 하나의 물체를 여러 가지 관점에서 인식하는 공간 시각화 능력은 기하 사고에서 중요하다고 지적하였다. 그리고 2차원 도형과 3차원 도형을 회전하고 줄이고 변형하는 시각화 기술의 발달과 공간 시각화 능력을 키우기 위해 2차원 도형의 표상과 3차원 도형의 표상을 전환하는 능력을 키워야 한다고 한다. 우리나라에서도 '2009년 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정'에서 공간도형에 관한 내용이 도입되어 있다(교육과학기술부, 2011). 초등학교에서는 '도형'이라는 영역에서 입체도형의 구성 요소, 개념, 간단한 성질 및 공간 감각을 길러주어야 하며, 특히 쌓기 나무를 이용하여 입체도형을 만드는 활동, 평면도형을 밀고 뒤집고 돌리는 활동을 통해 공간감각을 길러야 한다고 제시되어 있다. 중학교에서는 '기하' 영역에서 기본도형, 다각형, 다면체, 회전체의 성질을 이해하여야 하며, 고등학교 미적분Ⅱ에서는 정적분의 한 분야로 입체도형의 부피를 구할 수 있다고 명시되어 있다.

위에서 언급한 것처럼 기하 사고에서 공간 추론과 공간 시각화는 중요한 주제인데, 이에 대한 연구들을 살펴보면, 학생들을 대상으로 기하문제 해결을 통한 시각화와 공간 추론에 대한 연구가 있다(류현아, 2008). 그리고 예비교사들을 대상으로 한 기하 연구는 예비 교사들의 학습자 이해 지식과 교수방법에 관한 지식에 대한 연구가 있었다(김혜연, 2011). 이처럼 국내 연구에서 예비수학교사를 대상으로 한 기하 연구는 매우 제한적이다. 반면 국외 연구를 살펴보면 국내연구와 마찬가지로 학생들을 대상으로 DGS를 이용한 기하에 관한 과제 개발 연구(Laborde, 2002)와 종이 접기가 공간 추론 능력에 어떤 효과를 주는지에 대한 연구(Sevil & Fatma, 2013)가 있다. 예비교사를 대상으로 한 연구에서는 학생들을 대상으로 한 연구와 마찬가지로 공간 시각화를 촉진시키는 과제 개발 연구(Margaret, Ami, & Walter, 2011)와 공간 능력의 향상에 도움이 되는 Dynamic Geometry

* 접수일(2014년 01월 27일), 수정일(2014년 04월 22일), 게재확정일(2014년 05월 19일)
* ZDM분류 : D85
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 3차원 기하 사고, 공간적 추론, 표상
* 이 연구는 2012학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.
† 교신저자

Software(DGS)의 효과에 관한 연구(Baki, Kosa, & Guven, 2011)가 있다. 그러나 학생과 예비교사 모두 공간 시각화의 과정이나 공간적 추론이 일어나는 과정에 대한 연구는 부족하였다.

이에 본 연구는 예비 수학교사들을 대상으로 3차원 기하 대상을 나타내기 위한 2차원 표상활동을 살펴봄으로써 3차원 기하 사고와 공간적 추론이 어떠한 형태로 나타나는지를 알아보았다. 특히 소그룹에서 일어나는 상호작용이 2차원 표상을 하는데 어떤 영향을 주는지를 살펴보았다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 3차원 기하 사고

3차원 기하 사고란 3차원 입체를 2차원 도형으로 표상하고 입체와 그것의 요소들을 설명하는 능력이나 정육면체 배열을 구성하고 입체의 부피와 겉넓이를 계산하거나 3차원 도형의 성질을 비교하는 능력이다(NCTM, 2000). 3차원 기하 사고 중 3차원 도형을 2차원으로 표상하는 능력은 학생들의 시각적 이미지를 분석하고 연합하는 능력과 직접적으로 관련이 있다. 즉 도형의 구성된 부분을 시각적 이미지로 분석하고, 그리고 나서 새로운 이미지로 이러한 부분을 다시 연합하는 능력이다(Brown & Wheatley, 1997). 특히 Mariotti(1989)는 이러한 네트워크를 만드는 것은 도형의 전체적인 정신적 표상과 그것의 구성 부분을 분해하여 이 둘의 대응관계를 예상하는 것이라고 하였다. 또 네트워크의 구성은 학생들이 3차원 대상으로부터 2차원 네트워크로 해석을 만들어내는 능력을 요구한다고 설명하였다(Mariotti, 1989; Potari & Spiliotopoulou, 2001). 3차원 도형의 인식에서 그것의 네트워크의 인식으로의 번역은 도형을 다른 차원으로 만드는 정신적 활동을 필요로 한다(Cohen, 2003).

3차원 기하 도형을 2차원 기하 도형으로 표상하는 것은 학교 수학에서 3차원 기하 대상을 나타내는데 가장 많이 사용하는 표상 활동이다. 그러나 학생들은 3차원 기하 도형을 그리는데 많은 어려움을 가지고 있으며, 평행과 수직을 나타내는 데에도 어려움을 가지고 있다(Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1989; Gutiérrez, 1992; Ma, Wu, Chen & Hsieh, 2009). 이러한 어려움은 주로 Parzysz(1988)와 Duval(1998)에 의해 연구되었다. 특히 Parzysz(1988)는 그의 연구에서 3차원 기하도형을 2차원 평면에 표상하는 것과 같이 표상의 차원이 도형의 차원보다 낮은 차원일 경우에 정보의 손실이 필수적으로 일어난다고 지적하였다. 구체적으로 이러한 사실을 확인하고자 학생들이 기하 도형을 코딩하는 과정과 디코딩하는 과정을 분석하였다. 그 결과 학생들의 능력이 기하 도형을 표상하는데 영향을 준다 할지라도 같은 능력의 학생들 사이에도 결과는 같은 수준으로 나타나지 않는다고 하였다. 학생들은 3차원 기하 도형을 표상하기 위해 대상의 위치와 시각의 선택에 대해 고민을 하지 않으며, 3차원 대상이 가지는 성질을 보존하기 위한 시각적 효과의 사용에도 관심을 두지 않는다고 설명하였다. 그는 이러한 결과의 주된 원인 중에 하나로 전통적인 기하의 교수-학습 문화를 들고 있다. 직선을 선분으로, 평면을 사각형으로 표상하는 것은 한 가지 전통적인 기하의 교수-학습 문화이다. 그리고 이러한 전통적인 기하 문화에 바탕을 둔 기하 표상은 누구나에게 빠르게 기하의 대상을 인식하게 해준다는 장점이 있지만, 이러한 전통은 특정한 그림을 그리게 하는 관행을 가져다주며, 다른 사고나 정확한 표상을 하려는 노력과 정확한 표상과 관련된 시각을 잃게 하는 단점이 있다고 설명하였다. 그러므로 적어도 고등학교에서는 3차원 공간도형의 2차원 표상을 하는 기본적인 원리를 가르칠 필요가 있음을 강조하였다. 그러한 수업을 통해 학생들이 도형을 조작하는 능력과 기하에 관련된 시각을 잃지 않도록 해야 한다고 하였다.

1) 기하의 대상

기하에 관한 연구에서 연구자들은 기하의 대상을 보통 2가지로 구분한다. 하나는 이론적인 대상을 나타내는 figure이며, 다른 하나는 물리적인 대상을 나타내는 drawing이다. 학교에서 기하를 배우는 학생들은 수학 수업시간에 이론적인 기하의 대상에 대한 추론을 대부분 물리적인 대상인 drawing으로 추론하기 때문에 많은 어려움을 겪고 있다(Laborde, 1993). 이와 유사하게 Edelman(1992)는 지각적 대상과 개념적 대상으로 기하의 대상을 구분하였다. 지각적 대상은 무의식적이고 신체의 감각기관으로 받아들이는 대상인 반면에, 개념적

대상은 의식적이며 신체의 감각기관으로 받아들인 신호를 바탕으로 두뇌를 활성화시키는 대상이다. 이러한 여러 연구자들의 기하 대상의 구분을 통합하여 Battista(2007)는 기하와 공간적 사고와 관련된 대상을 5가지 유형으로 구분하였다. 그 다섯 가지는 물리적 대상, 감각적 대상, 지각적 대상, 개념적 대상, 개념 정의이다. 물리적 대상은 상자, 공, 그림, 문, 컴퓨터 프로그램으로 만들어진 figure과 같은 물리적 대상들이다. 감각적 대상은 개인이 물리적 대상을 관찰할 때 일어나는 감각기관의 활성화로 만들어지는 대상이다. 지각적 대상은 개인이 물리적 대상을 바라볼 때 개인이 지각하는 정신적인 대상들이다. 개념적 대상은 개인에게 활성화되어 나타나는 의식적인 사고나 의미, 방법을 말한다. 예를 들어 앞의 지각적 대상에 대한 기억이나 개념 정의에 대한 반응하여 나온 것들이 이에 해당된다. 마지막으로 개념 정의는 개념적 대상을 기호를 사용하여 서술한 것이나 수학적 언어로 구체적으로 형식화 한 것이다.

2) 지각에 영향을 주는 요인들

사람이 무엇을 본다는 것은 그 사람이 무엇을 알고 있으며 무엇을 생각하는지에 영향을 받는다. 즉 사람의 지각은 개인의 가지고 있는 대상에 대한 개념과 맥락에 영향을 받는다(Battista, 2007). 이러한 맥락 중에 기하의 개념에 영향을 줄 수 있는 것 중 하나가 언어이다(Coren, Ward, & Enns, 1994). 언어 표식(verbal labeling)은 사람이 대상이나 모양을 어떻게 지각하고 받아들이는데 영향을 줄 수 있다. 만약 누군가가 그리는 그림을 권총 모양과 같다고 말한다면 그 이후의 그림은 권총모양으로 그려지며, 같은 그림을 누군가가 빗자루와 같다고 말하면 그 이후의 그림은 빗자루처럼 그려진다. 기하에서도 이러한 현상이 일어난다. 그려진 모양에 여러 가지 다른 언어 표식을 하면 그 도형에 대한 지각과 개념에도 다양하게 영향을 줄 수 있다(Coren 외 2, 1994). 또 언어와 함께 개인의 경험도 지각에 영향을 준다. 예를 들어 정사각형을 수평으로 45도 기울려 그리면 학생들은 그것을 마름모로 생각한다. 왜냐하면 마름모에 대한 이전의 경험이 학생들에게 주어진 도형의 부분들 사이의 관계에는 관심을 두지 않게 하며 그것의 위치를 보고 마름모라는 답을 만들어낸다. 이러한 지각에 영향을 주는 경험과 언어 표식은 복잡한 기하도형을 표상하는데 있어 쉬운 방법이나 표상 과정에 영향을 준다(Battista, 2007).

2. 공간 능력

최근의 연구들은 공간 능력이 지능과 관련되거나 도형을 추론하는 것을 의미하는 것은 아니라고 밝히고 있다(Schulze, Beauducel, & Brocke, 2005). 또 다른 연구자들은 공간 능력이 공간 이미지 과제와 공간 과제 기억을 측정하는 것과도 다르다고 주장한다(Kozhevnikov, Motes, & Hegarty, 2007; Miyake, Friedman, Rettinger, Shah, & Hegarty, 1991). Christou & Pittalis(2010)는 그들의 연구를 통해 공간 능력과 3차원 기하에 관련된 능력을 구분하였다. 그들은 공간 능력을 다양한 실제적이고 이론적인 문제를 해결하는데 있어 개인이 공간적 이미지를 만들어내고, 그것들을 조작하는 것을 가능하게 하는 정신적인 활동의 형태라고 하였다. 또 공간 추론 능력은 공간에 있는 대상, 이미지, 관계 변화를 반영하고 조사하는 능력이며, 공간 도형의 이미지를 일반화하고 이러한 이미지에 관한 문제를 풀 수 있는 상위 이미지를 조사하며, 이들 이미지를 조작하고 변형하는 능력을 포함한다(Clements & Battista, 1992; Presmeg, 1997; Wheatley, 1997; Battista, 2007 재인용).

공간 능력에 관한 연구에서 대부분의 공통된 방법 중에 하나가 공간 능력의 요인을 분석하여 구조를 설명하는 방식이다. 연구자들은 공간 능력의 개념을 공간적 이해를 도와주는 것처럼 보이는 요인들로 분해하는 목적으로 요인 분석을 폭넓게 사용하였다(Colom, Contreras, Botella, & Santacreu, 2001; Hegarty & Waller, 2005). Kimura(1999)는 공간적 방향성, 공간적 영역 기억, 타켓팅, 공간적 시각화, 공간적 지각 그리고 분할하기의 6가지 공간 요인을 밝혔다. Burton & Fogarty(2003)는 공간 능력 모델을 만들었는데, 여기에는 2개의 순서 요소와 5개의 우선 순서 요소가 있다. Lohman(1988)의 공간적 시각화, 공간적 방향성, 공간적 관계라는 3가지 요인으로 된 모델을 제시하였다. 공간적 시각화는 어려운 공간 과제로 정의되며, 그러한 과제는 공간적 표상의 변형과 좀더 복잡한 자극을 요구하는 과제이다. 예를 들어 공간적 시각화 문항은 점선이 하나이거나 그 이상인 종이를 접

고 접지 않는 것을 상상하는 것을 요구한다. 공간적 방향성은 공간적 형상이 나타내는 변화된 방향에 의해 혼돈되지 않는 학생들의 능력으로 정의된다. 대상이 오른쪽 혹은 왼쪽, 높거나 낮거나 하는 것을 인지하는 능력이다. 공간적 관계는 공간적 대상을 전체를 빠르게 그리고 정확하게 머릿속으로 회전하는 능력으로 정의된다(Colom 외 3, 2001). 그것은 대상을 공간적 변환에 기초하여 만들어 내는 능력이다. 그것은 대상의 위치를 환경의 틀에 의해 움직이나 자기중심적인 틀은 변화하지 않는 것을 말한다. 공간 관계 평가는 2차원의 도형을 손쉽게 다루는 것과 3차원의 머릿속 회전에 관한 평가 문항을 의미한다.

본 연구에서는 3차원 기하 사고에 해당하는 3차원 입체를 2차원 도형으로 표상하는 과제를 사용하였다. 예비 수학교사들이 이를 해결하는 과정에서 2차원 도형을 회전하여 도형에 관한 이미지를 조작하고 변형하는 공간적 추론의 능력을 조사하고자 하였다. 선행연구를 통해 밝혀진 기존의 공간 능력에 관한 요인을 참고하면서, 관찰과 인터뷰를 통해 예비 수학교사들의 표상활동을 살펴보았다.

3. 소그룹 활동

소그룹 활동은 학습을 위해 의미 있는 사회적 맥락을 제공해 준다. 학생이 처음으로 배우는 내용을 학습할 때 사회적 맥락은 학습을 의미 있게 하는 방법이 되기도 한다. 또 소그룹 활동은 참여자들로 하여금 자신들의 생각을 명료화하고 정련화하도록 하며, 언어나 기호를 사용하게 한다. 다른 사람과 의사소통을 하려면 자신의 생각을 분명하고 뚜렷하게 해야 한다. 생각을 기호로 바꾸어 상대방이 자신의 생각을 알아들었다고 확신할 때까지 말을 계속하는 것이다. 다른 사람을 이해시키기 위해서는 아이디어나 과제의 여러 가지 다른 측면을 고려하고 상대방의 입장을 생각하지 않을 수 없다. 그 결과 사물이나 아이디어의 여러 가지 측면이나 속성이 점점 드러나게 된다(Newman, Griffin, & Cole, 1989; Salomon, 1993).

소그룹 활동에서 볼 수 있는 것 가운데 하나는 사람들이 다른 사람들을 조절하기도 하고 동시에 다른 사람들에 의해 조절된다는 사실이다. 이 같은 조절과 피조절은 서로 다른 수준에서 서로 다른 종류의 공유된 활동 속에서 나타난다. 또래와의 공유된 활동이나 각자 독자적으로 수행하는 활동에서는 조절과 피조절 상황이 훨씬 동등하게 일어난다. 비고츠키 연구자들은 타인 조절이 자기 조절보다 앞서 생긴다고 믿는다(Elena & Leong, 1998). 그리고 자기 조절 능력을 향상시키기 위해서 타인 조절을 이용하기도 한다. 자기가 규칙을 지키려 할 때보다 옆에 있는 친구의 틀린 점을 볼 때 훨씬 더 쉽게 규칙을 배우게 되는 경우가 이에 해당된다. 교수-학습 상황에서 타인 조절을 촉진시키는 방법에는 틀린 부분을 찾아내기 활동이나 다른 친구들의 문제를 활용해서 또 다른 친구들의 문제를 해결하는 방법 등이 있다. 마지막으로 외적 매개체를 활용하여 타인 조절과 자기 조절을 하는 경우도 있다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상 및 검사도구

3차원 기하 사고와 공간적 추론에서 대상이 되는 표상에 대해 알아보기 위해 중등학교 예비교사 43명을 대상으로 4~5명씩 조를 만들어 총 10개의 조를 대상으로 연구하였다. 조별로 남녀의 비율은 다양하며 연령층도 다양하게 구성되었다. 본 연구에 참여한 예비교사는 사범대학 수학교육과 2학년 학생들이며, 실험을 시작하기 전 연구의 목적과 방법 그리고 요구되는 인터뷰 시간 등을 충분히 설명하였다. 본 연구에서 수행된 과제는 Saito, Akita, & Inprasitha(2013)의 연구에서 사용한 기하 문제 7개 유형의 총 28문제 중에서 난이도가 가장 높은 유형을 제외하고 나머지 6개의 유형에서 총 7문제를 선정하여 사용하였다. 제외된 한 문항은 회전축이 기울어진 문항으로 교육과정에서 다루지 않으며 2차원 평면에 표상하기에는 어려움이 있어 본 연구의 문항으로 적합하지 않다고 판단하였다.

2. 자료 수집 방법

본 연구는 2013년 11월 25일부터 3주에 걸쳐 실시되었다. 총 10개의 조가 한 번씩 과제수행에 참여하였으며, 과제수행을 마치고 난 뒤 바로 과제기반형 조별 인터뷰가 진행되었다. 과제수행과 인터뷰의 시간은 약 1시간

정도였으며 연구 참여 예비교사들에게 모든 인터뷰와 과제수행의 과정이 녹화와 녹음될 것이고, 가명을 사용할 것이라는 점을 사전에 밝혔다.

본 연구에서는 기하과제에 관련된 표상활동을 살펴보는 것이므로 소그룹 구성원들의 상호간 표상을 서로 관찰할 수 있고, 이를 매개체로 하여 자신이나 그룹의 표상활동을 조절할 수 있기 위하여 전지(640mm×940mm)와 여러 색깔의 사인펜을 대형 책상 위에 제공하였다. 과제를 해결하는 동안 나타나는 표상은 전지에 모두 조별로 자유롭게 기록하였으며, 지우거나 회손되지 않도록 하였다. 그리고 각 조별로 과제의 해결한 결과를 한 부씩 제출하게 하였다.

과제수행을 촬영하는 카메라는 1대로 참여자의 거부감을 고려하여 촬영의 초점은 표상활동이 나타나는 전지에 맞추었다. 과제가 조별로 진행되는 가운데 연구자는 과제 수행에 방해가 되지 않는 곳에서 과제 수행에 관한 느낌이나 표상활동에 대한 아이디어나 질문을 기록하여, 과제 수행이 마치고 난 뒤 약 10분 동안 조별 인터뷰를 진행하였다. 그리고 모든 인터뷰 파일은 녹취록으로 작성하여 자료 분석을 위한 기초로 삼았다. 또 과제 수행의 표상이 전부 드러난 전지와 과제 결과물도 분석의 자료로 사용하였다.

인터뷰의 질문 내용은 전반적인 과제에 관한 내용을 묻는 질문과 조별로 아이디어나 느낌에 관한 질문으로 구성되었다. 각 조별로 동일하게 질문한 질문의 예는 다음과 같다.

- 과제의 수준은 어떠합니까?
- 과제를 해결하는 동안 가장 힘든 부분은 무엇이었습니까? 그 이유는?
- 조별 활동이 잘 되었다고 생각하는지 아니면 그렇지 않은지? 그 이유는?
- 과제를 해결하면서 새롭게 알게 된 내용은 무엇입니까?
- 표상을 그렇게 한 이유는 무엇입니까?
- 표상을 하는 방법을 어떻게 알게 되었나요?

위에서 언급한 질문을 포함하여 각 조별로 독특한 표상 방식이 관찰되면 그 이유와 출처에 대한 질문 등이 추가되었다. 이러한 인터뷰의 결과를 통해 연구 대상자들의 표상 출처 및 표상 유형 등에 대해 알 수 있었으며 표상의 사용 목적 및 중요성에 대한 정보도 알 수 있었다.

3. 자료 분석 방법

과제 활동과 인터뷰 테이프의 녹취록은 오른쪽 여백을 충분히 두고서 프린트를 하였고 이 여백에 코드를 적었다. 한 시간 분량의 과제 활동과 인터뷰의 경우 약 20쪽에서 40쪽의 녹취록이 작성되었다. 10조가 참여한 연구로 녹취록은 약 300쪽의 분량이 되었으며, 한 조당 약 30개의 코드가 생성되었다. 질적자료 분석 방법인 분석적 귀납법(analytic induction)을 사용하여(Ericson, 1986) 첫 번째 조의 녹취록에 대한 코딩을 마친 후 이 코드 목록을 바탕으로 다음 조의 코딩 작업을 하는 방식으로 진행하였다. 이 코드표를 기초로 하여 10조의 예비교사의 표상활동에 관한 공통된 패턴이나 주제를 찾으려는 분석 작업을 실시하였다. [표 1]과 같이 분석적 귀납법에 의해 추출된 공통의 하위 코드들을 오른쪽 행에 적고, 왼쪽 행에는 이들 하위 코드를 대표하는 상위 코드를 적었다. 그런 다음 이들 상위 코드로부터 예비 수학교사의 3차원 기하 사고와 공간 추론의 표상활동에 대한 주제를 도출하였다. 연구 결과로 제시된 이들 주제는 소그룹에서 나타나는 언어 표식 현상의 유형, 물리적 대상을 표상적 관점에서 사용함, 3차원 기하 도형을 2차원으로 표상하는데 사용되는 관행들 - 기하 수업에서 배운 교사의 관행을 모방함, 교육과정에서 배우지 않은 관행들, 소그룹 활동에서 표상의 역할 - 타인조절 및 자기조절, 의도적인 주의집중이다.

코딩의 신뢰도를 확보하기 위해 전체 녹취록의 1/3 정도를 본 연구자와 한 명의 수학교육 전문가가 독자적으로 코딩 작업을 하였다.

$\frac{\text{합의한 개수}}{\text{합의한 총 개수} + \text{합의하지 않은 총 개수}}$ 에 따라(Miles & Huberman, 2009) 서술 코드의 경우는 일치도가 80% 이상이었지만, 추론 코드의 경우는 일치도가 70% 미만이었다. 그래서 코드의 정의와 코딩의 자료 블록에 대한 지속적인 토론과 수정을 거쳐 전체 녹취록의 1/2 분량에 이르러서는 거의 80% 이상의 일치도를 확보할 수 있었다. 이후의 코딩 작업은 본 연구자에 의해 완료되었다. 본 연구자의 결과도출의 타당함을 확인하기 위하여 연구에 참여한 예비 수학교사 네 명에게 본 연구의 결과를

소개하고 의견을 구했지만, 내용의 이론적 난해함으로 인해 단순한 동의를 얻는데 만족할 수밖에 없었다.

본 연구의 결과와 관련된 코드 목록을 간단하게 제시하면 다음과 같다.

[표 1] 코드 목록
[Table 1] Code list

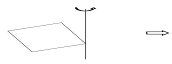
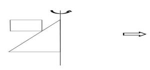
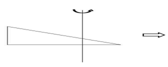
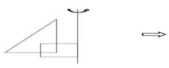
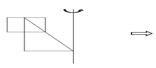
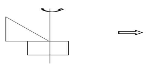
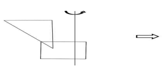
상위 코드	하위 코드
실선과 점선의 관행의 중요성	· 해석자가 알아보기 쉽기 때문에 중요함 · 점선은 내부구조를 알기 쉽게 해줌 · 겉과 속을 구분해줌
점선과 실선 사용의 관행	· 면은 실선, 안은 점선 · 회전하는 것은 모두 점선으로 한 후 정답 기록 시 다시 구분함 · 안 보이는 부분을 점선으로 하는 것이 대중적임 · 실선은 보이는 부분에 그림 · 점선과 실선의 잘못된 사용은 이상한 표상임
물리적 대상 비유의 목적	· 머릿속에 이미지가 떠오름 · 공통적으로 같은 이미지를 떠오르게 하는 방법임 · 과제해결에 많은 도움을 줌 · 회전체를 빨리 그리게 됨 · 문제가 쉬워짐 · 추상적인 것이 구체화됨 · 알아보기 쉬움 · 입체를 평면에 그릴 때 기존 사물을 이용하면 더 쉬움
회전체를 표상하는 관행	· 면을 회전하여 그림 · 선을 회전하여 그림 · 대칭도형을 그려 점을 연결해 줌 · 과거의 경험을 이용함 · 꼭짓점 대칭 · 도형을 분리해서 회전함 · 비유를 해결전략으로 사용함 · 큰 도형을 먼저 그리고 작은 도형은 중에 기록함 · 보이는 겉부터 먼저 나중에 내부 그림
표상을 통한 자기조절과 타인조절	· 타인의 표상이 본인의 표상을 조절하는 역할을 함 · 언어로 타인조절 · 언어로 자기조절 · 타인의 동의로 자기조절 · 손으로 타인조절

4. 검사 문항

본 연구에서 사용한 문항은 Saito 외 2 (2013)의 연구에서 사용된 일곱 개 유형, 전체 28문항 중 가장 난이도가 높은 유형을 제외한 나머지 여섯 개의 유형에서 각 한 문제를 선정하였다. 그리고 특별히 한 개의 유형에서 두 문제를 선정하여 전체 문항은 일곱 문항을 사용하였다. 28개의 문항은 모든 평면도형을 회전하여 나타나는 3차원 입체도형을 2차원 평면에 나타내는 문제이다. 일곱 개의 유형은 평면도형이 한 개가 주어진 경우(3유형)와 평면도형이 두 개가 주어진 경우(4유형)로 나눌 수 있다. 평면도형이 한 개가 주어진 경우는 다시 회전축과 도형이 한 점에서 만나는 경우, 회전축이 도형을 가로지르는 경우, 도형이 기울어져 회전하는 경우로 나눌 수 있다. 평면도형이 두 개가 주어진 경우는 다시 두 도형이 회전축과 한 점이나 한 변에서 만나는 경우, 회전축이 두 도형을 가로지르는 경우, 두 도형이 겹쳐서 회전하는 경우, 두 도형이 겹쳐서 회전축이 도형을 가로지르는 경우로 나눌 수 있다. 본 연구에서는 도형이 기울어져 회전하는 경우를 제외한 여섯 가지 유형에서 한 문제를 선택하여 사용하였다. 그리고 평면도형 두 개가 겹쳐서 회전하는 유형에서 회전축과 한 점에서 만나서 회전하는 경우와 한 변에서 만나서 회전하는 경우 두 가지를 선택하여 총 일곱 문항을 사용하였다. 구체적인 문항은 [표 1]과 같다.

본 연구는 예비교사들을 대상으로 표상과정을 알아보는 연구이다. 본 연구에서 사용한 검사문항은 현재 우리나라 교육과정에는 다루지 않은 기하 문항으로, 연구자가 소그룹별로 개인별로 표상하는 과정을 관찰하는데 기존에 암기된 정답을 기록하여 구체적인 표상활동을 파악하지 못하는 경우를 방지하고자 교육과정에 포함되지 않은 과제를 선정하였다. 그리고 그 중에서 표상활동을 가장 잘 드러나는 문항으로 Saito 외 2 (2013)의 문항을 선정하였다. 실제로 본 연구에 참여한 총 10개 조가 일곱 문항의 과제를 해결하는데 걸리는 시간은 20분에서 1시간 20분으로 다양하게 나타났다.

[표 2] 검사 문항
[Table 2] Test items

번호	문항	유형
1		평면도형 1개를 회전함. 회전축과 도형의 한 꼭짓점이 만남.
2		평면도형 2개를 회전함. 회전축과 도형의 한 변이 만남.
3		평면도형 1개를 회전함, 회전축이 도형을 가로지름.
4		평면도형 두 개가 겹쳐진 것을 회전함. 회전축과 도형의 한 변이 만남.
5		평면도형 두 개가 겹쳐진 것을 회전함. 회전축과 도형의 한 꼭짓점이 만남.
6		평면도형 두 개가 겹쳐진 것을 회전함. 회전축이 한 개의 도형을 가로지름.
7		평면도형 두 개가 겹쳐진 것을 회전함. 회전축이 한 개의 도형을 가로지름.

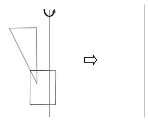
Ⅳ. 결과 분석 및 논의

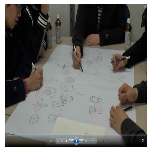
1. 소그룹에서 나타나는 언어 표식(verbal labeling) 현상의 유형

기하와 공간적 추론에 관한 이해를 위해 개인의 인지를 연구한 Coren 외 2 (1994)는 언어 표식은 기하 개념을 이해하는데 영향을 준다고 하였다. 특히 언어 표식은 개인의 경험과 결합하여 기하에서 복잡한 도형을 그리는데 도움을 줄 수 있다고 언급하였다. 예를 들어 누군가가 자신이 그린 도형이 빗자루와 같다고 말하면 자신도 모르게 빗자루와 비슷하게 그리며, 누가 이 동일한 도형을 권총과 같다고 한다면 권총처럼 그려지는 현상이 기하에서 유사하게 일어난다고 하였다. 이러한 현상은 본 연구에서도 매우 자주 일어남을 볼 수 있었다.

에피소드 1 - 언어 표식의 대상이 동일해짐: 녹취록 #3(1조)

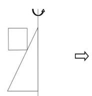
1 학생1 : 이거 어떤데? 이렇게 생긴 거 뭐 같지 않나? 왠지?
2 학생2 : 음..
3 학생4 : 맞아 맞아
4 학생1 : 이거 뭐.. 뭐라(웅성거림) 하지?
5 학생2 : 확성기?
6 학생1 : 어? 이거 그 문고리
7 학생들 : 아
8 학생2 : 아 옛날 문고리?
9 학생4 : 한 10년 전 문고리

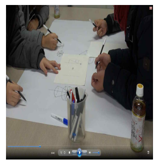

<문항 7>



에피소드 2 - 언어 표식의 대상이 다양하게 나타남: 녹취록#2(8조)

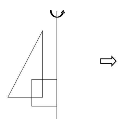
1 학생2 : 그냥 그려보고 싶어서.. (웅성거림) 뭐지?
2 학생4 : 그거? 튜브 모양
3 학생5 : 원기둥, 원기둥
4 학생4 : 휴지. 두루마리 휴지
5 학생5 : 원기둥 두 개
6 학생4 : 두루마리 휴지 어 됐다 저 잘하네.


<문항 2>



에피소드 3 - 언어 표식을 통한 타인의 이해를 도움: 녹취록 #1(6조)

1 학생3 : 일단 이 속은 다 비워..
2 학생5 : 완전 스텐드 아니야?
3 학생3 : 여기까지는 비어 있고? 아.......


<문항 4>

앞의 에피소드 1에서는 그려진 표상이 특정한 물건과

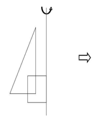
닮았음을 연상하는 대화가 일어나고 있다. 그 대상이 확성기에서 문고리로 옮겨지면서 언어 표식의 대상이 마지막에는 일치되는 것을 볼 수 있다. 또 에피소드 2에서는 언어 표식 현상이 같은 대상이라 하더라도 개인들마다 다르게 나타나고 있음을 알 수 있다. 문항 2번에 대해 1조에서는 확성기, 문고리가 언어 표식 현상으로 등장한 반면 다른 조에서는 고깔모자, 두루마리 휴지, 원기둥, 크리스마스트리, 원통 등이 언어 표식 현상으로 나타났다. 이렇게 다양한 언어 표식 현상으로부터 정답을 도출하는 과정도 조마다 다양한 형태로 나타났다. 각자 자신의 언어 표식을 이용하여 표상하고 난 뒤 조원들의 협의로 최상의 표상을 선정하거나, 1조의 경우와 같이 조원들 모두가 동의하는 언어 표식을 표상하여 정답을 기록하는 조도 있었다. 마지막 에피소드 3에서는 한 학생의 언어 표식 현상으로 도형을 이해하지 못하는 다른 조원에게 표상의 이해를 도와주는 것을 볼 수 있다. 본 연구에서 나타난 언어 표식 현상은 개인의 인지에 관한 용어이긴 하지만 기하 과제를 해결하는 소그룹활동에서도 일어나는 현상이며, 이 현상은 3차원 기하 도형을 평면에 그리는 과제를 해결하는데 있어 유용한 도구로 작용하고 있음을 발견하였다.

2. 물리적 대상을 표상적 관점에서 사용함

기하 영역에서 물리적 대상의 일반적인 예들은 크게 두 가지 중요한 역할을 한다. 하나는 기하 개념에 관한 데이터의 역할이고, 다른 하나는 표상으로의 역할이다. 많은 연구자들이 첫 번째 역할보다는 두 번째의 표상적 관점에서 초점을 많이 두고 있다. 특히 Battista(2007)에 따르면 이러한 물리적 대상은 기하 교육에서 필요한 직관을 가져다 줄 수 있다고 한다. 본 연구에서도 기하 문제의 답을 표상하는데 있어 이러한 물리적 대상의 예를 사용하는 것을 볼 수 있었다. 특히 에피소드 5에 서술된 조에서는 3차원 대상을 2차원 표상하는 전략으로 이러한 물리적 대상을 사용하여 본 연구의 모든 과제를 해결하고 있음을 볼 수 있었다.

에피소드 4 – 물리적 대상의 비유로 정답을 예측함: 녹취록 #3(1조)

1 학생2 : 고깔모자 위에서..
2 학생4 : 옆에 잠잘 때 불 켜고 끄고 하는 것
3 학생3 : 어 스탠드, 스탠드..
4 학생2 : 램프?
5 학생3 : 램프? 그..
6 학생1 : 그냥 스탠드라고 하면 되잖아? (웅성거림)
7 학생2 : 대충 그 모양이네.



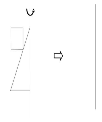
<문항 4>

에피소드 5 – 물리적 대상에 대한 비유를 전략으로 생각함: 녹취록 #3(1조)

1 학생2 : 그러니까 이 생긴 거를 비유를 하면서 어떻게 생겼는가 말하면..
2 학생5 : 그래
3 학생2 : 편하네.
4 학생1 : 이게 딱 우리의 구체적 이용물을 이용해가지고 하니깐 쉽네.

에피소드 6 – 물리적 대상을 결합하여 정답을 예측함: 녹취록 #4(4조)

1 학생4 : 이건 원뿔이고...
2 학생2 : 오케이.
3 학생4 : 원뿔인데...
4 학생1 : 도너츠 하나에 원뿔 하나 필요하네.



<문항 2>

에피소드 4는 학생들이 문제를 해결하는 과정에 물리적 대상인 스탠드를 떠올려 정답을 표상하기 쉽게 하는 것을 보여준다. 그리고 이러한 과정의 결과로 결국 이 조에서는 이러한 물리적 대상의 비유를 전략으로 사용하는 것이 에피소드 5에서 드러났다. 그리고 이러한 물리적 대상의 예는 본 연구에 참여한 모든 조에서 드러났으며, 그 종류와 언급된 대상의 수에서만 차이가 났다. 마지막 에피소드 6을 보면 이러한 전략을 합의하지 않았음에도 불구하고 어떤 학생은 이러한 전략을 자연스럽게 사용하는 것을 볼 수 있다.

3. 3차원 기하 도형을 2차원으로 표상하는데 사용되는 관행들

Parzysz(1988)는 3차원 대상을 2차원 표상을 사용하여 나타내는 구체적인 방법은 학교수학에서 다루지 않기

때문에 학생들은 이를 위해 대부분 관행에 따르다고 하였다. 따라서 정확한 3차원 도형을 표상하기 위해서는 배우지 않은 이들 관행을 정확히 해석하여 활용하는 능력이 요구된다. 이런 능력의 부재로 인해 학생들은 그려진 2차원이나 3차원 도형을 이해하지 못하고 잘못 해석하게 된다. 본 연구의 자료 분석에 따르면, 예비교사들은 기하 수업에서 과거에 배운 교사의 관행과 교육과정에서 배우지 않은 관행들에 따라 3차원 기하도형을 2차원으로 표상하고 있었다.

1) 기하수업에서 배운 교사의 관행을 모방함

에피소드 7 - 대칭이동을 사용함: 녹취록 #3(1조)

1 연구자 : 어떤 학생이 대칭이동이라는 말을 했는데 왜 나왔나요?
2 학생3 : 그림을 쉽게 그리는 방법으로 했을 때 이 그림을 이렇게...
3 학생1 : 돌리는 거니까
4 학생3 : 예 돌리는 거니까(웅성거림) 옆쪽에 하나 더 그려놓고 서로 점을 이으면, 회전변환처럼 그려지니까 이게 쉬우니까 그래서...
5 연구자 : 대칭이동이랑 회전변환도 나왔어요?
6 학생1 : 네
7 연구자 : 그런 게.. 그렇게 배웠던 게, 옛날에 배웠던 게 이 과제하는데 도움이 됐나요?
8 학생5 : 네 아무래도 (웅성거림) 과정에서는..
9 학생1 : 네 아무래도 뭐... 그때 당시에 선생님이 가르쳐준 방법도 있었고, 뭐 조금 더 문제 푸는 데는 수월했죠? 과거의 경험이 있었으니까...

에피소드 8 - 점선과 실선의 사용법: 녹취록 #7(5조)

1 연구자 : 처음에 점선하고 실선 얘기가 나왔는데 이 답을 하는데 점선과 실선이 중요했나요?
2 학생2 : 일단은 보이는 부분과 안 보이는 부분을 구분한다는 점에서 조금 신경을 썼던 것 같아요.
3 연구자 : 안 보이는 부분은?
4 학생1 : 점선..
5 학생3 : 점선으로...하고..
6 연구자 : 그건 어디서 배웠나요? 그렇게 하라고?
7 학생5 : 초등학교 때...
8 학생3 : 배웠던 대로
9 연구자 : 배웠던 대로?
10 학생3 : 네

에피소드 7에서는 과거의 수학교사로부터 배운 평면도형을 회전하여 회전체를 평면에 그리기 위한 방법으로 평면도형을 축에 대칭이동하여 다시 그려서 연결하는 방법에 따라 이번 과제를 해결하였다는 것을 인터뷰를 통해 알 수 있었다. 그리고 학생들이 과거에 배운 대칭이동, 회전변환 같은 수학 개념에 대한 경험도 과제 해결에 도움이 되었다는 것을 알 수 있다. 에피소드 8에서는 3차원 도형을 2차원에 표상하는 하나의 관행인 점선과 실선의 사용이다. 점선과 실선에 대한 이러한 관행은 다른 여러 조에서도 암묵적으로 나타났다. 이러한 점선과 실선의 관행은 에피소드 8에서 학생 5가 말했듯이 과거의 교사나 수업시간에 사용한 관행이 지금까지도 영향을 주고 있었다.

2) 교육과정에서 배우지 않은 관행들

에피소드 9 - 겹쳐있는 도형의 회전의 경우 분리하여 회전함: 녹취록 #4(4조)

1 연구자 : 두 개 나눈다는 뜻이 뭐에요?
2 학생2 : 그러니까 이렇게 해서....이것.. 그림이..
3 학생4 : 이것 따로 이것 따로 생각한다는 거요.
4 연구자 : 붙어져 있는 도형 두 개가 있으면?
5 학생4 : 네
6 학생2 : 이거 돌릴 때…….
7 학생3 : 가로로 이렇게 잘라가지고…….

에피소드 10 - 면을 회전, 선을 회전함: 녹취록 #2(8조)

1 연구자 : 아……. 그리고 이런 말도 나왔어요. 이게 또 이 조의 특이한 점인데, 면을 돌리고, 선을 돌린다.
2 학생1 : 같은 말.
3 연구자 : 근데 면을 돌린다는 거는?
4 학생2 : 문제가 이렇게 있었잖아요?
5 연구자 : 네
6 학생2 : 이렇게 있으면 이건 선을 돌리는 거잖아요? 근데 이것을 이렇게 생각하면 이게 면을 돌리는 거잖아요…….

에피소드 11 - 점을 먼저 대칭하여 그림: 녹취록 #5(9조)

1 연구자 : 점을 찍으면 더 빨리 그릴 수 있다라고 하였는데 여기서 말하는 점은 어떤 점인가요?
2 학생2 : 외곽에 있는 점이랑 겹치는 부분이요. 미리 정해놓고 그리면 훨씬 쉽게 풀 수 있다는 거죠.

위의 세 개의 에피소드는 학교수학의 교육과정에는 제시되지 않았던 3차원 도형의 2차원 표상에 관한 관행들이다. 이러한 관행들은 조별로 다양하게 나타났는데 대표적으로 점대칭과, 선대칭, 면대칭과 같은 대칭을 이용하는 방법과 과제가 어려운 경우에는 분리하는 방법,

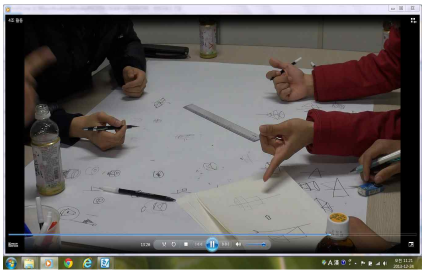
물리적 대상을 표상 측면에서 사용하여 입체를 그리는 방법 등이 있었다. Greeno(1988)에 따르면, 관행은 사회적으로 의미 충실한 맥락 속에서 수행되어지는 일상 활동이며, 그러한 활동은 다른 사람과의 의사소통 및 협력, 그리고 주어진 상황에서 활용 가능한 자원을 이용하는 방법에 대한 지식에 의존한다고 하였다. 그의 말처럼 본 연구에서도 학생들은 표상을 하는 과정에서 과거의 지식과 경험에서 나온 관행을 사용했으며, 조별 활동의 맥락 속에서 학교수학의 교육과정에서 배우지 않은 여러 가지 관행이 드러났다.

4. 소그룹 활동에서 표상의 역할

비고츠키는 소그룹 활동에서 나타나는 특징으로 외적 매개체를 활용하여 타인조절과 자기조절이 일어난다고 하였는데(Elena & Leong, 1998), 본 연구의 경우 특히 제스처, 언어, 2차원 표상 등의 외적 매개체가 표상으로 작용함으로써 이러한 조절 활동이 일어났다. 다시 말해 표상을 통해 자기조절과 타인조절이 나타났다.

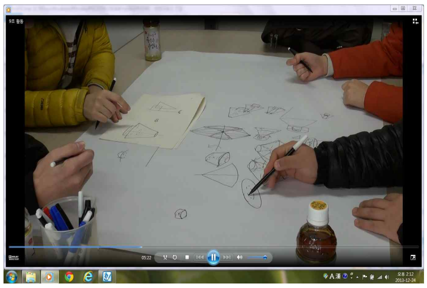
1) 타인조절 및 자기조절

에피소드 12 - 손이나 언어에 의한 타인조절: 녹취록 #4(4조)



1 학생1 : 아 이거 딱 이 선까지(손가락으로 지목하며)
2 학생2 : 여기까지?
3 학생4 : 어 맞다. 맞다.
4 학생1 : 이 두 개를 반으로 나눠서 생각해봐
5 학생4 : 어 이렇게.. 가로로.
6 학생1 : 안에. 안으로 넣어가지고.
7 학생2 : 이렇게 되네.

에피소드 13 - 본인의 표상에 의한 타인조절: 녹취록 #5(9조)



1 학생2 : 이 점에서…….
2 학생3 : 어떻게?
3 학생2 : 원래는 이렇게 있으면……. 살짝 올라와서 이렇게 되는데.... 살짝만 올려주고…….
4 학생3 : 여기서?
5 학생1 : 아.아……. 너 말하는거 이거지? 여기 이렇게 그려야 된다고? 일단 점선…….
6 학생2 : 너무…….
7 학생3 : 이거 너무 올라갔어? 그럼 요 밑에다가 할까?
8 학생2 : 일단……. 딱 중간…….
9 학생3 : 중간……. 여기다 그냥 요렇게 하면 되지??
10 학생2 : 어.

에피소드 14 - 타인의 동의에 의한 자기조절: 녹취록 #4(4조)

1 학생4 : 맞지. 맞지. 아 근데 이게. 이게 조금 더
2 학생2 : 올라갔어야 되네.
3 학생4 : 어 어. 위로. 어. 더 위에
4 학생2 : 이쪽이네
5 학생4 : 어어……. 이거 진짜 잘 그린다.
6 학생2 : 이거라고?
7 학생4 : 어
8 학생2 : 이게? 어 잠깐만…….
9 학생1 : 이거 이쪽에 홈 파이고…….
10 학생4 : 화장지 두루마리 하나.
11 학생1 : 이렇게 보면 옆에서는 (웅성거림) 옆에서는 원기둥인데
12 학생2 : 어. 이래 보면 이래 아니가?
13 학생4 : 아까 꺼랑 합친 것 같... 요거랑 두루마리랑 합치면 되는 거
14 학생2 : 이거랑 이거 아니가 그냥?
15 학생4 : 어
16 학생1 : 맞다.

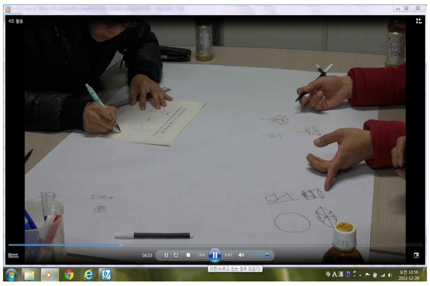
에피소드 12는 다른 학생들의 손이나 말에 의해 학생2의 표상 활동이 조절되고 있음을 보여준다. 그리고 에피소드 13은 학생 3을 위해 다른 학생이 직접 자신의 표상을 보여주며 타인의 표상의 잘못됨을 지적하고 수정하

는 과정이다. 에피소드 14에서는 학생 2가 계속적으로 자신의 표상을 다른 학생들에게 계속 확인하며 수정을 받음으로써 표상의 자기조절 활동이 나타나고 있다. 이처럼 비고츠키가 말한 소그룹 활동에서 일어나는 자기조절과 타인조절은 언어, 제스처, 2차원 표상을 매개로 하여 일어날 수 있었다. 본 연구에서 드러난 타인조절과 자기조절은 위에서 밝힌 경우 이외에도 언어, 손, 제스쳐, 본인의 표상을 통하여 타인조절이 일어났으며, 특히 본인의 시범에 의한 타인조절이 나타났다. 이러한 타인조절과 자기조절이라는 상호작용을 통해 오답을 수정하고 표상을 수정하는 활동이 일어났다. 지필환경에서 볼 수 없는 이런 유형의 상호작용을 메타인지적 작용을 하는 것으로 보인다.

2) 의도적인 주의집중

비고츠키 학자들은 의도적인 주의집중에 관해 연구하였다. 의도적 주의집중이란 학생이 의식적으로 정신을 집중할 때를 말한다. 그리고 이러한 주의집중은 매개체를 사용해서 사건이나 행동에 집중하는 경우가 많다 (Elena & Leong, 1998). 본 연구에서도 과제를 해결하는 과정에서 전지에 그려진 2번 문항의 표상을 손가락 제스쳐를 사용하여 조원들의 주의를 의도적으로 그 표상에 집중시키는 활동이 나타났다. 그리고 주변의 물건을 매개로 하여 조원 전체의 주의집중을 유도하는 활동이 나타났다.

에피소드 15 – 손으로 표상을 지목하여 주의집중을 유도함: 녹취록 #4(4조)



1 학생2 : 이거 아니야?
2 학생1 : 이거 아니다……. 아니 맞는 것 같은데?
3 학생2 : 이거 아니야?
4 학생1 : 어? 아……. 원뿔……. 뭐 그런 식으로 나올 것 같다
5 학생2 : 여기는 일치 여기가…….
6 학생4 : 응 너 되게 잘 그린다.
7 학생2 : 맞지? 아 내 배웠다니까?
8 학생4 : 이거 맞다. 어 맞아 맞아.
9 학생2 : 그렇지.
10 학생4 : 진짜 잘 그리는데? 완벽하다 이거

에피소드 16 – 주변의 물건을 사용하여 주의집중을 유도함: 녹취록 #1(6조)

1 학생5 : 점선이 이거잖아? 이거 두 개, 이거 두 개
2 학생4 : 응
3 학생3 : 이렇게 생겼겠네.
4 학생5 : 그렇지
5 학생3 : 이렇게 돌아가면서
6 학생4 : 응
7 학생5 : 그렇지 (웅성거림)

에피소드 15는 한 학생의 표상을 다른 학생이 가리킴으로써 조원 전체가 그 표상에 주의집중하게 되는 과정을 보여주고 있다. 그리고 주의집중하여 생각한 결과 주목한 표상이 정답이라는 합의를 이끌어내었다. 에피소드 16은 여학생이 조원들의 이해를 돕기 위해 옆에 있는 연필꽂이와 두 개의 펜을 이용하여 입체도형의 내부 구조를 설명하는 장면이다. 이처럼 물리적 대상을 매개로 하여 조원들의 이해 및 주의집중을 이끌어내는 활동이 조별활동에서 나타났다. 위에서 제시한 주의집중 이외에 주도권을 가진 학생이 등장한 조에서는 이 학생의 표상에 모든 조원들이 주의집중하는 현상이 생기는 것도 볼 수 있었다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 예비 수학교사들을 대상으로 3차원 기하 대상을 나타내기 위한 2차원 표상활동을 살펴봄으로써 3

차원 기하 사고와 공간적 추론이 어떠한 형태로 나타나는지를 알아보았다. 특히 소그룹에서 일어나는 상호작용이 2차원 표상을 하는데 어떤 영향을 주는지를 살펴보았다. 본 연구의 주요 결과로부터 얻은 결론과 기하 교육에 대한 시사점은 다음 네 가지로 제시될 수 있다.

첫째, 기하와 공간적 추론에서 개인 인지에 관한 특성으로 연구된 언어 표식 현상이 소그룹에서도 일어난다는 것을 알 수 있었다. 그리고 이런 언어 표식 현상은 개인마다 다양하게 일어나며 특정한 도형에 대해서는 동일한 언어 표식 현상이 일어난다는 것을 알 수 있었다. 그리고 이러한 언어 표식 현상은 선행연구자의 결론(Coren 외 2, 1994)처럼 복잡한 도형을 표상하는데 도움을 주었다. 그리고 이 언어 표식이 특히 타인의 이해를 돕는데 유용한 도구가 될 수 있음을 본 연구를 통해 알 수 있었다. 여러 국가의 학교 교육과정에서 시각적 표상의 일부분만을 강조하고 있다(Bishop, 1991; Presmeg, 2006). 이에 본 연구에서 다룬 언어 표식 현상은, 이러한 기하 교육에서 학생과 교사에게 복잡한 기하도형을 표상하는 유용한 도구가 될 수 있을 것으로 본다.

둘째, 3차원 대상을 2차원에 표상하는데 있어 물리적 대상은 표상으로 중요한 역할을 한다. 그리고 이러한 물리적 대상을 표상으로 사용하는 것은 학교수학의 교육과정에서는 배우지 않으나 개인이나 그룹에서 언제든지 일어날 수 있는 현상이었다. 또 이러한 물리적 대상에 대한 비유는 3차원 대상을 2차원으로 표상하는 과제에서 학생들에게 좋은 관행이 될 수 있음을 볼 수 있었다. 본 연구에서 발견한 표상의 관행을 표상의 원리로 설명하고 있는 Parzysz(1998)는 적어도 고등학교에서는 3차원 대상을 2차원으로 표상하는 기본 원리를 학교수학에서 가르쳐야 하며, 학생들은 이러한 원리를 배우고 조절할 수 있어야 한다고 하였다. 이에 물리적 대상을 기하의 대상으로서 뿐만 아니라 기하의 도형을 나타내는 한 가지 표상 관행으로 사용하는 것은 3차원 대상을 2차원 표상으로 나타내기 위한 좋은 관행의 하나가 될 수 있음을 본 연구를 통해 알 수 있었다.

셋째, Parzysz(1988)가 언급한 것처럼 2차원 표상으로 3차원 대상을 표상하는 것은 교육과정이나 교사의 관행에 많은 영향을 받으며 학생 자신의 경험을 통해 획득한 관행도 많이 사용함을 본 연구에서도 볼 수 있었다. Gagatsis, Chistou, & Elia(2004)와 Dreyfus(1991)에 따르면, 도형은 특정한 규칙과 관행에 의해 결정되는 형태로 그려지고 이들 규칙과 관행에 관련된 수학적 정보를 담고 있다고 하였다. 이러한 규칙과 관행을 배우지 않은 학생은 도형을 표현하는 것이 불가능하다고 하였다. Maria & Vanessa(2012)는 학교에서 시각적 표상의 사용을 규정하는 규칙과 기준은 수학 교수 활동의 중요한 부분이 되어야 한다고 하였다. 표상은 학생 개인의 경험과 교사, 교육과정을 통해 획득한 관행에 많은 영향을 받는다는 것을 본 연구를 통해 알 수 있었다. 그러므로 학생들은 이러한 관행을 기하 수업을 통해 배울 수 있어야 하며, 본 연구에서 사용한 과제와 같이 2차원 표상을 3차원 표상으로 전환하는 풍부한 관행과 수학적 경험을 제공할 수 있는 과제를 사용하는 기하 수업이 되어야 한다고 본다. 또 표상에 관한 연구에서도 관행에 영향을 받는 점을 감안하여 문화적·사회적 맥락에서 이와 관련된 연구가 진행되어야 한다고 생각한다.

마지막으로, 소그룹활동에서 표상은 자기조절 및 타인조절과 인지적 측면에서는 의도적인 주의집중을 가능하게 하는 매개체가 됨을 알 수 있었다. 표상은 사회적 활동으로서 대상을 나타내며 의견 수렴의 도구라는 두 가지 주요 목적으로 사용된다(Despina, 2011). Despina에 의하면 학생들은 문제해결의 과정에서 결론을 공유하기 위해 표상을 사용하며, 표상이 학생들 사이의 상호작용에 중요한 역할을 한다고 한다. Despina의 주장처럼 공통된 표상의 사용으로 학생들 사이의 의사소통이 촉진되어 상호작용에 의한 결론을 모든 학생이 공유하게 되게 된다. 그러나 본 연구에서 표상은 이처럼 대상을 나타내고 결론을 공유하기 위한 목적 이외에도 소그룹활동의 사회적 상호작용을 활성화시키는 도구가 되었다. 본 연구에서 학생들은 자기조절과 타인조절 그리고 의도적인 주의집중을 위한 도구로 표상을 사용하였다. 또한 학생들이 그들의 표상을 협상을 하기 위한 도구로, 그리고 동료들과 전략과 의미를 협력하여 구성하는 도구로 사용하고 있었다. 따라서 소그룹활동의 의사소통 과정을 연구할 때 표상의 역할을 살펴보는 것은 소그룹의 의사소통에 대한 의미 있는 자료를 제시해 줄 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 2009 개정 수학과 교육과정[별책 8]. 교육과학기술부.

Ministry of Education and Science Technology (2011). *The mathematics curriculum with 2009 revision[separated edition 8].* Ministry of Education and Science Technology.

김혜연 (2011). 예비교사들의 학습자 이해 지식과 교수방법 지식에 관한 연구 : 중학교 2학년 기하영역 증명을 중심으로, 석사학위논문, 이화여자대학교.

Kim, H. H. (2011). *A study on pre-service teachers' knowledge of students' understanding and teaching methods: Based on the geometric proofs for the second graders of middle school,* Master's thesis, Ewha Womans University.

류현아 (2008). 중등 기하문제 해결에서 시각화와 추론 과정, 박사학위논문, 건국대학교.

Ryu, H. A. (2008). *Visualization and reasoning in geometric problem solving among secondary school students,* Doctoral dissertation, Konkuk University.

Elena, B., & Leong, D. J. (1998). 정신의 도구: 비고츠키 유아교육 (김억환, 박은혜 번역.). 서울: 이화여자대학교 출판부. (원본 출판 1996).

Elena, B., & Leong, D. J. (1998). Tools of the Mind: the Vygotskian approach to early childhood education (E. H. Kim & E. H. Park Trans.). Seoul: Ewha Womans University Press. (Original work published 1996).

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (2009). 질적자료분석론 (박태영, 박소영, 반정호, 성준모, 은선경, 이재령, 이화영, 조성희 번역.). 서울: 학지사. (원본 출판 1994).

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (2009). *Qualitative data analysis.* (T. Y. Park, S. Y. Park, J. H. Van, J. M. Sung, S. K. Eun, J. R. Lee, H. Y. Lee, S. H. Cho Trans.). Seoul: Hakjisa. (Original work published 1994).

Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology, 42*(2), 291-310.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). New York: Information Age Publishing.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analysing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 121 - 146.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 71 - 78). Dordrecht: Kluwer.

Bishop, A. (1991). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Brown, D. L., & Wheatley, G. H. (1997). Components of imagery and mathematical understanding. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 45 - 70.

Burton, L. J., & Fogarty, G. J. (2003). The factor structure of visual imagery and spatial abilities. *Intelligence, 31*, 289 - 318.

Christou, C., & Pittalis, M. (2010). Type of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 191-212.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Co.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In N. Paterman, B. J. Doughery, & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th international conference of psychology in mathematics education, Vol. 2* (pp. 229-236). Honolulu, USA.

Colom, R., Contreras, M. J., Botella, J., & Santacreu, J. (2001). Vehicles of spatial ability. *Personality and Individual Differences, 32,* 903 - 912.

Coren, S., Ward, L. M., & Enns, J. T. (1994). *Sensation and perception.* Fort Worth, TX: Harcourt Brace College.

Despina A. S. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics, 76,* 265-280.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 1* (pp. 33-48). Genova: Universita de Genova.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study.* Dordrecht: Kluwer.

Edelman, G. M. (1992). *Bright air, brilliant fire.* New York, NY: Basic Books.

Ericson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed.). New York: Macmillan Publishing Company.

Gagatsis, A., Christou, C., & Elia, I. (2004). The nature of multiple representations in developing mathematical relationships. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14,* 150-159.

Greeno, J. G. (1988)."For the study of mathematics epistemology", In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving, Vol. 3* (pp. 23-31). Reston, VA: NCTM.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology, 18,* 31 - 48.

Hegarty, M., & Waller, D. A. (2005). Individual differences in spatial abilities. In P. Shah & A. Miyake (Eds.), *The cambridge handbook of visuospatial thinking.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kimura, D. (1999). *Sex and cognition.* Cambridge: MIT.

Kozhevnikov, M., Motes, M., & Hegarty, M. (2007). Spatial visualization in physics problem solving. *Cognitive Science, 31,* 549 - 579.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environments: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (Vol. 121, 48-67). Grenoble Cedex, France: NATO ASI Series, Computer and Systems Sciences.

Laborde C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 283-317.

Lohman, D. (1988). Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence, Vol. 40* (pp. 181 - 248). Hillsdale: LEA.

Ma, H. L., Wu, D., Chen, J. W., & Hsieh, K. J. (2009). Mithelmore's development stages of the right rectangular prisms of elementary school students in Taiwan. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 4* (pp. 57 - 64). Thessaloniki: PME.

Margaret, S., Ami M., & Walter J. W. (2011). Designing spatial visual tasks for research: The case of the filling task. *Educational Studies in Mathematics, 78,* 135-163.

Maria, M. D., & Vanessa, S. T. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in*

Mathematics, 80(3), 413-431.

Mariotti, M. A. (1989). Mental images: some problems related to the development of solids. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13rd international conference for the psychology of mathematics education, Vol. 2* (pp. 258-265). Paris, France.

Miyake, A., Friedman, N. P., Rettinger, D. A., Shah, P., & Hegarty, M. (1991). How are visuospatial working memory, executive functioning, and spatial abilities related? A latent-variable analysis. *Journal of Experimental Psychology, 130*, 621 - 640.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newman, D., Griffin, P., & Cole, M. (1989). *The construction zone: working for cognitive change in school*. Cambridge: Cambridge University Press.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "Seeing" Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79 - 92.

Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (2001). Patterns in children's drawings and actions while constructing the nets of solids: The case of the conical surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 23*(4), 41 - 62.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), M*athematical reasoning* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205 - 236). Rotterdam: Sense.

Saito, N., Akita, M., & Inprasitha, M. (2013). Instructional method for developing students' mathematical creativity. *Paper presented at the 6tth East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME 6)*, Phuket, Thailand.

Salomon, G. (1993). *Distributed cognitions: psychological and educational considerations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Schulze, D., Beauducel, A., & Brocke, B. (2005). Semantically meaningful and abstract figural reasoning in the context of fluid and crystallized intelligence. *Intelligence, 33*, 143 - 159.

Sevil, A., & Fatma, A. T. (2013). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-22.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning* (pp. 281-298). Mahwah, NJ: Erlbaum.

A study of representing activities of preservice secondary mathematics teachers in 3D geometric thinking and spatial reasoning

Lee Yu Bin
Graduate school of Yeungnam University
E-mail : missbeen@naver.com

Cho Cheong Soo†
Yeungnam University
E-mail : chocs@yu.ac.kr

This study investigated the types of the 3D geometric thinking and spatial reasoning through the observation of the 2D representing activities for representing the 3D geometrical objects with preservice secondary mathematics teachers. For this purpose, the 43 sophomoric students in college of education were divided into 10 groups and observed their group task performance on the basis of the representation they used. Observed processes were all recorded and the participants were interviewed based on the task. As a result, the role of physical object that becoming the object of geometric thinking and spatial reasoning, and diverse strategies and phenomena of the process that representing the 3D geometric figures in 2D were discovered. Furthermore, these processes of representing were assumed to be influenced by experience and study practice of students, and various forms of representing process were also discovered in the process of small group activities.

* ZDM Classification : D85
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : geometric thinking, spatial reasoning, representation
† Corresponding author