Society of Korea Industrial and Systems Engineering Vol. 37, No. 1 : 50-59, March 2014 ISSN : 2005-0461(print)
http://dx.doi.org/10.11627/jkise.2014.37.1.50 ISSN : 2287-7975(online)

An Efficient Method for Solving a Multi-Item Newsboy Problem with a Budget-Constraint and a Reservation Policy

Chang-Yong Lee†

Dept. of Industrial and Systems Engineering, Kongju National University

예산 제약과 예약 정책이 있는 복수 제품 신문 배달 소년 문제 해결을 위한 효율적 방법론

이 창 용†

공주대학교 산업시스템공학과

In this paper, we develop an efficient approach to solve a multiple-item budget-constraint newsboy problem with a reservation policy. A conventional approach for solving such problem utilizes an approximation for the evaluation of an inverse of a Gaussian cumulative density function when the argument of the function is small, and a heuristic method for finding an optimal Lagrangian multiplier. In contrast to the conventional approach, this paper proposes more accurate method of evaluating the function by using the normalization and an effective numerical integration method. We also propose an efficient way to find an optimal Lagrangian multiplier by proving that the equation for the budget-constraint is in fact a monotonically increasing function in the Lagrangian multiplier. Numerical examples are tested to show the performance of the proposed approach with emphases on the behaviors of the inverse of a Gaussian cumulative density function and the Lagrangian multiplier. By using sensitivity analysis of different budget constraints, we show that the reservation policy indeed provides greater expected profit than the classical model of not having the reservation policy.

Keywords : Newsboy Problem, Reservation Policy, Numerical Integration, Lagrange Multiplier

1. 서 론

신문, 우유, 잡지 등 단일 기간(single-period) 상품들은 일반적으로 판매 기간 동안 가격의 변동이 있는데, 보통 판매 시작 시점에서는 최고 가격이며 판매 종료 시점에는 최저 가격을 형성하게 된다. 판매 기간은 상품에 따라 다르며 보통 유효 기간이 있기 때문에 유효 기간이 끝나면 판매할 수 없거나 하찮은 가격에 팔 수 밖에 없다. 따라서 사업 관리자 입장에서는 총 이익을 최대화하기 위하여 판매 기간의 시작 시점에서 최적의 주문량을 결정하는 것이 매우 중요한 문제가 된다.

고전적인 단일 기간 모델은 신문 배달 소년 문제(newsboy problem)로 알려져 있으며 총 비용을 최소화하거나 총 이익을 최대화하는 최적 주문량을 결정하는 해법이 제시되었다[5, 15]. 이 모델은 판매 기간이 끝나는 시점에 만약 재고가 남아있으면 상품의 가격은 매우 하찮게 되며, 이와 반대 경우에는 기회 비용과 이익 창출의 기회를 잃게 된다는 가정에 기반하고 있다. 따라서 수요의 불확실성으로 인하여 일반적으로 기대치를 사용하여 최소 비용 혹은 최대 이익 문제를 푼다[8].

최근 신문 배달 소년 문제를 공급사슬관리 측면에서

Received 1 December 2013; Finally Revised 9 January 2014; Accepted 23 January 2014
† Corresponding Author : clee@kongju.ac.kr

단일 기간 재고 문제로 간주하고 이에 대한 연구가 진행되고 있다. 예를 들어 보면, 특정한 생산 시스템에서 무작위 산출 문제[7], 의사 결정자의 행위가 주문량 결정에 따른 위험에 미치는 영향[17, 18], 주문량을 증가시키기 위하여 소매자와 재고 위험을 공유하기 위하여 재조자의 재구입(buyback) 정책[1], 그리고 재정적인 제약이 공급사슬관리(SCM)에 미치는 영향[10] 등이 있다. 이러한 연구들은 단일 품목에 관한 연구들인데, 일반적으로 신문 배달 소년 유형의 문제는 여러 종류의 제품들 그리고 여러 유형의 제약 조건을 고려할 수 있다. Silver 등[15]은 복수 제품(multi-item), 단일 제약 조건(single-constraint) 신문 배달 소년 문제에서 기대 이익을 최대화하는 해법을 제안하였다. 또한 Shao와 Ji[13]는 단일 제약 조건에서 퍼지 형태의 수요(fuzzy-demand)에 대한 연구를 수행하였다.

또한 근래 전통적인 신문 배달 소년 문제를 확장한 연구들이 주목을 받고 있다. 관련 연구의 예를 들면, 수요의 불확실성에 따른 위험을 감소시키기 위하여 제조사와 소매상 사이의 다른 전략을 다양한 의류 품목에 대하여 적용한 두 단계(two-stage) 신문 배달 소년 문제[16], 시간이 지남에 따라 가치가 하락되는 품목들의 수요와 가치하락의 이중적인 불확실성을 고려한 연구[6], 그리고 가격과 저장 수준의 불확실성이 존재하는 경우에 대하여 발송 계획 문제를 신문 배달 소년 문제 측면에서 고려한 연구[4] 등을 들 수 있다.

보다 현실적인 모델이 Chen과 Chen[2]에 의하여 제안되었는데, 이들은 복수 제품, 단일 제약 조건 신문 배달 소년 문제에 예약 정책(reservation policy, or advance-purchase policy)을 포함시켰다. 예약 정책은 항공권[3] 및 서비스 산업[14] 등에 널리 적용될 수 있는 것으로 수요에 대한 불확실성을 줄이기 때문에 이익을 증대할 수 있다. 또한 소비자 입장에서는 예약을 통한 할인 등이 중요한 인센티브로 작용할 수 있기 때문에 예약을 선택하는 경향을 띠게 된다. 할인율이 높을수록 소비자의 예약 의욕은 일반적으로 높아짐으로 할인율은 판매량에 영향을 미치게 되고 또한 주문량에 영향을 준다. 그러나 높은 할인율은 높은 판매에도 불구하고 낮은 이윤 혹은 손실을 야기할 수 있다. 따라서 최적의 주문량과 최적의 할인율을 결정하는 것이 최고의 이윤을 위해 필요하다.

이러한 관점에서 Chen과 Chen은 복수 품목에 대하여 예약에 따른 할인율과 예산에 대한 제약 조건이 있는 경우의 신문 배달 소년 모형을 제안하고, 최적 주문량과 최적 할인율을 계산하기 위하여 소위 MCR 알고리즘을 제안하였다. 특히 MCR 알고리즘은 최적 주문량 계산에 필요한 누적확률분포의 역함수를 근사 방법을 사용하여 구하고, 예산에 따른 제약 조건을 만족하는 해를 구하기 위하여 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 휴리스틱 방법을 사용하여 구하는 해법을 제시하였다.

본 논문에서는 Chen과 Chen이 제안한 모형에 대하여 보다 효율적이고 정확한 해를 구하기 위하여 정규화(normalization)와 수치 적분을 사용하여 누적확률분포의 역함수를 정확하게 구하는 방법과 제약 조건을 만족하는 해가 유일하게 존재함을 증명하여 라그랑주 승수를 효율적으로 구하는 방법[11]을 제안하고자 한다. 따라서 제안하는 방법은 근사 방법이나 휴리스틱 방법을 적용하지 않기 때문에 최적 주문량과 할인율을 보다 정확하게 계산할 수 있을 뿐만 아니라 기존의 방법보다 간단하기 때문에 보다 빠른 시간에 최적 주문량과 할인율을 계산할 수 있다는 장점이 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어있다. 제 2장에서는 고려하는 모형을 위한 기호를 설명하고 수리 모형과 그 특징을 언급하였다. 제 3장에서는 Chen과 Chen이 제시한 기존의 방법론을 살펴보고 본 논문에서 제안하는 방법론을 소개하였다. 제 4장에서는 예제를 통해 제안한 방법론의 효율성을 살펴보고, 예산 제약의 변동에 따른 기대 이익의 변화를 살펴보았다. 마지막으로 제 5장에서는 본 논문의 결론을 제시하였다.

2. 모형 정의

각 제품($i = 1, 2, \cdots, n$)에 대하여 본 논문에서 고려하는 모형을 위해 사용한 기호들은 다음과 같다.

- c_i : 제품 단위당 가격
- s_i : 제품 단위당 판매 가격
- v_i : 제품 단위당 구제 가격(salvage cost)
- p_i : 제품 단위당 재고 부족 가격(shortage cost)
- X_i : 수요량으로 정규 분포를 따르는 확률 변수, 즉 $X_i \sim N(\mu_{X_i}, \sigma^2_{X_i})$
- Q_i : 주문량으로 결정변수
- a_i : 할인율(discount rate)로 결정변수
- β_i : 의욕율(willingness rate)
- w_i : 추가 수요율(extra demand rate)
- B : 최대 허용 예산

할인율은 $\alpha_i \in [0, 1]$를 만족하며, β_i는 의욕율로 α_i의 연속 함수이다. 의욕율은 수요에 대한 비율로 할인율 α_i가 높을수록 예약하려는 “의욕”이 높아지는 경향을 고려하여 할인율에 대한 함수로 표현한다. 따라서 $\beta_i = g_i(a_i)$로 표현하고, 다음과 같은 성질을 만족한다[2].

$$g_i(0)=0, \qquad g_i(1)=1$$
$$g_i(\alpha_i) \geq g_i(\alpha_2) \ \text{ for } \ \alpha_1 \geq \alpha_{2.} \tag{1}$$

따라서 $\beta_i \in [0, 1]$이다. 추가 수요율 w_i역시 α_i에 대한 함수로 수요에 대한 비율이며 의욕율과 동일한 성질을 가지나, 직관적으로 볼 때 예약에 따른 주문량보다 적음으로 공리적 요구 조건(axiomatic requirement) [9]을 적용하여 $w_i(\alpha_i=1) \leq 1$을 만족하도록 $w_i(\alpha_i)=\delta g_i(\alpha_i)$로 정하며, 여기서 $0 \leq \delta \leq 1$이다[2]. 또한 의욕율과 추가수요율 모두는 주문량에 영향을 준다.

신문 배달 소년 문제에서 예약 정책이 있는 경우, 제품 i에 대한 총 이익 Z_i는 보통 판매 이익 Z_i^u와 예약에 따른 판매 이익 Z_i^r의 합으로 이루어진다. 할인율은 의욕율과 이에 따른 추가 수요율을 결정하므로 할인율은 주문량과 총 이익에 영향을 미친다. 따라서 주문량과 할인율이 이 모형에서 기대 총 이익을 최대화하는 결정 변수가 된다. 보통 판매로 인한 이익은 보통 수요량과 주문량에 의존하는데, 보통 수요량은 $(1-g_i(\alpha_i))X_i$로 주어짐으로 보통 판매로 인한 이익은

$$Z_i^u = \begin{cases} (s_i - v_i)(1-g_i(\alpha_i))X_i + (v_i - c_i)Q_i, \\ \quad \text{if}\,(1-g_i(\alpha_i))X_i < Q_i \\ (s_i + p_i - c_i)Q_i - p_i(1-g_i(\alpha_i))X_i, \\ \quad \text{if}\,(1-g_i(\alpha_i))X_i \geq Q_i \end{cases} \tag{2}$$

이 된다. 또한 예약 정책에 의한 추가 수요량은 $w_i(\alpha_i)X_i$이므로 예약에 따른 수요량은 $\{g_i(\alpha_i)+w_i(\alpha_i)\}X_i$로 주어지고, 예약에 따르는 이익은

$$Z_i^r = \{g_i(\alpha_i)+\omega_i(\alpha_i)\}X_i\{s_i(1-\alpha_i)-c_i\} \tag{3}$$

가 된다. 따라서 제품 i에 대한 총 이익의 기대값은 $\mathrm{E}(Z_i) = E(Z_i^r)+E(Z_i^u)$로 주어진다. 수요량이 정규분포를 따르는 확률 변수인 경우, 각 제품에 대한 이익의 기대값은 아래와 같이 주어진다.

$$E(Z_i^r) = \{g_i(\alpha_i)+w_i(\alpha_i)\}\mu_{X_i}\{s_i(1-\alpha_i)-c_i\} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} E(Z_i^u) = \ & (s_i - v_i)(1-g_i(\alpha_i))\mu_{x_i} + (v_i - c_i)Q_i \\ & + (s_i + p_i - c_i) \\ & \times \int_{Q_i(1-g_i(\alpha_i))^{-1}}^{\infty} \{Q_i - (1-g_i(\alpha_i))x_i\} f_{X_i}(x_i)\,dx_i \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $f_{X_i}(x_i)$는 평균이 μ_{X_i}이고 분산이 σ_{X_i}인 정규 분포를 따르는 확률밀도함수이다.

따라서 본 연구에서 고려하는 문제의 수학 모형(F1)은 다음과 같다.

$$\text{F1 : Maximize } \mathrm{E(Z)} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \{E(Z_i^r)+E(Z_i^u)\} \tag{6}$$

subject to

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i[Q_i + \{g_i(\alpha_i)+w_i(\alpha_i)\}\mu_{X_i}] \leq \mathrm{B} \tag{7}$$

식 (6)은 목적 함수로 모든 제품의 기대 이익을 최대화하는 것이며, 식 (7)은 주문 비용의 합이 예산 B 이내로 하는 제약 조건이다.

3. 기존의 해법과 제안하는 해법

수학 모형 F1을 풀기 위해 라그랑주 함수(Lagrange function)를 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(Q_i, \alpha_i) = \ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} E(Z_i) \\ & - \lambda\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i(Q_i + [w_i(\alpha_i)+g_i(\alpha_i)]\mu_{X_i}) - B\} \end{aligned} \tag{8}$$

라그랑주 함수 $\mathrm{L}(Q_i, \alpha_i)$를 Q_i와 α_i에 대해 편미분하고 0으로 두면 라그랑주 함수를 최적화하는 문제의 제1계 필요조건(first order necessary condition)을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial L(Q_i, \alpha_i)}{\partial Q_i} = \frac{\partial E(Z_i)}{\partial Q_i} - \lambda c_i = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial L(Q_i, \alpha_i)}{\partial Q_i} = \frac{\partial E(Z_i)}{\partial Q_i} - \lambda c_i[w_i'(\alpha_i)+g_i'(\alpha_i)]\mu_{X_i} = 0 \tag{10}$$

위의 두 방정식의 해인 최적 주문량과 할인율은 참고문헌 [2]에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$Q_i = (1-g_i(\alpha_i))H_i \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & \mu_{x_i}\begin{Bmatrix} [g_i'(\alpha_i)+w_i'(\alpha_i)][s_i(1-\alpha)-(1+\lambda)c_i] \\ -[g_i(\alpha_i)+w_i(\alpha_i)]s_i + g_i'(\alpha_i)pi \end{Bmatrix} \\ & -(s_i+p_i-v_i)g_i'(\alpha_i)(-\sigma_{X_i}f_N(z_i)+\mu_{X_i}F_N(z_i)) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서

$$\xi \equiv \frac{s_i + p_i - (1+\lambda)c_i}{s_i + p_i - v_i}, \ Z_i \equiv \frac{H_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, \ H_i \equiv F_{X_i}^{-1}(\xi_i) \tag{13}$$

로 정의되며, $f_N(z_i)$는 표준정규분포를 따르는 확률밀도함수이고 $F_N(z_i)$는 $f_N(z_i)$의 누적확률함수이다. 특히 최적 할인율 α_i는 식 (12)의 음함수(implicit function)의 해로 주어지기 때문에 방정식 (12)의 해가 α_i가 된다.

3.1 기존 해법

주어진 λ에 대하여 식 (11)과 식 (12)를 사용하면 최적 주문량 Q_i과 할인율 α_i을 계산할 수 있다. 이때 만약 할인율이 음수가 되면 $\alpha_i = 0$으로 둔다. Q_i와 α_i가 결정되면 주문 비용 $\sum_{i=1}^{n} c_i(Q_i + [w_i(\alpha_i) + g_i(\alpha_i)]\mu_{X_i})$을 계산하여 최대 허용 예산에 적합한지 여부를 알 수 있다. 따라서 예산에 따르는 제약 조건을 만족하는 최적의 λ를 구하는 것이 관건이 된다. Chen과 Chen은 초기에 $\lambda = 0$(즉, 제약 조건이 없는 경우)으로 두고, 식 (11)과 식 (12)에 대한 해를 구한 다음 제약 조건인 식 (7)의 만족 여부를 판별하였다. 만약 제약 조건을 만족하지 않으면, 제약 조건을 만족할 때까지 λ값을 일정량 증가시켜서 주문 비용을 다시 계산하여 허용 예산에 대한 적합 여부를 반복적으로 판단하는 휴리스틱 (heuristic) 방법을 사용하였다.

또한 식 (11)과 식 (13)을 사용하여 주문량을 계산하기 위해 누적확률함수의 역함수 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$를 계산하는데, ξ_i값에 따라서 다른 방법을 사용하였다. 즉, $\mathrm{P}(X_i \le \mu_{X_i} - 3\sigma_{X_i}) \equiv 0.00135(\varepsilon_i = 0.00135)$을 이용하여, $\xi_i > \varepsilon_i$인 경우에는 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$를 직접 계산하고, $0 < \xi_i < \varepsilon_i$인 경우에는 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$를 계산하지 않고 주문량을 근사적으로 $\max(0, \mu_{X_i} - 3\sigma_{X_i})$로 정하였다. 이것은 ξ_i가 매우 작은 값인 경우에는 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$의 계산이 느리게 수렴되기 때문에 수치적으로 정확한 계산이 어렵기 때문이다. 즉 $F(H_i) = \xi_i$를 사용하여 매우 작은 ξ_i값에 대하여 H_i를 직접 구하는 경우에는 $H_i \ll 1$에 대한 적분을 수행해야 하기 때문이다. Chen과 Chen이 제시한 해법은 다음과 같다.

Step 1 : $\lambda = 0$로 둔다.

Step 2 : 주어진 λ에 대하여 ξ_i와 할인율 α_i를 식 (13)에 의해 계산한다.

Step 3 : 예약에 따른 예약 주문 비용 $G_r = \sum_{i,\alpha_i > 0}^{n} c_i \{g_i(\alpha_i) + w_i(\alpha_i)\}\mu_{X_i}$을 계산한다.

Step 4 : $\xi_i > \varepsilon_i$인 제품에 대하여 Q_i를 구하여 보통 판매 주문 비용 $G_u = \sum_{i,\,\xi_i > \varepsilon_i}^{n} c_i Q_i$를 계산하고, $0 < \xi_i < \varepsilon_i$인 제품에 대하여 $G_t = \sum_{i, 0 < \xi_i < \varepsilon_i}^{n} c_i \max(0, \mu_{X_i} - 3\sigma_{X_i})$를 계산한다.

Step 5 : $G = G_u + G_r$을 계산한다. 만약 $G > B$이면 $\lambda \leftarrow \lambda + (G - B)/B$로 두고 Step 2로 돌아간다. 만약 $G < B$이고 $\dfrac{B-G}{B} < 0.001$이면 종료하고, 그렇지 않으면 Step 6으로 간다.

Step 6 : $G' = G + G_t$를 계산한다. 만약 $G' < B$이면 $\lambda \leftarrow \lambda - (B - G')/B$로 두고 Step 2로 돌아간다.

3.2 제안하는 해법

본 논문에서 제안하는 해법은 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$와 라그랑주 승수 λ를 보다 효율적으로 구하는 방법을 포함하고 있다. 제안하는 해법에서는 정규화를 사용하여 ξ_i 값의 크기에 무관하게 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$를 계산한다. 즉, ξ_i 값이 작은 경우에도 Chen과 Chen이 제안한 근사법을 사용하지 않고 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$를 직접 계산한다. ξ_i가 매우 작은 값인 경우에도 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$를 추가적으로 계산해야 하므로 계산량이 늘어나지만, 총 계산 시간에 비하여 현실적으로 거의 영향을 미치지 않는 정도 (약 5%) 정도이다. 제안하는 방법을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

식 (13)의 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i) = H_i$의 양변에 역함수를 취하면 $F_{X_i}(H_i) = \xi_i$가 된다. 또한

$$F_{X_i}(H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{X_i}} \int_{-\infty}^{H_i} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu_{X_i})^2}{2\sigma^2 x_i}\right\} dx_i \qquad (14)$$

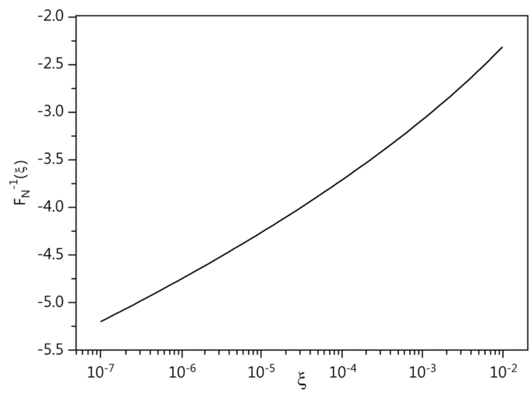
이므로 정규화 $\eta_i \equiv \dfrac{x_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$, $Z_i \equiv \dfrac{H_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$를 적용하면, 위의 식 (14)는

$$F_N(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i} \exp\left\{-\frac{\eta_i^2}{2}\right\} d\eta_i \qquad (15)$$

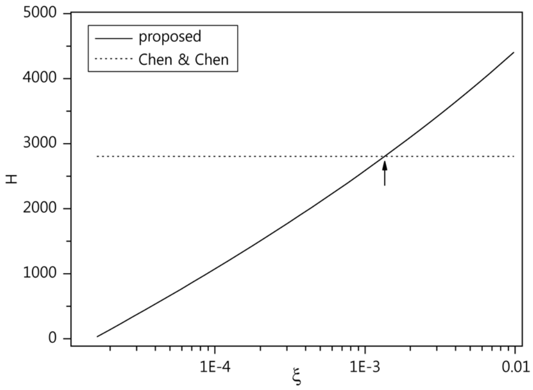
가 된다. 따라서 $F_N(z_i) = \xi_i$를 만족하는 z_i를 식 (15)를 사용하여 구한 다음, 정규화 관계인 $H_i = \mu_{X_i} + z_i\sigma_{X_i}$를 사용하면 ξ_i값의 크기에 무관하게 ξ_i가 작은 경우에도 H_i를 구할 수 있다.

<Figure 1>은 $F_N^{-1}(\xi_i)$을 $10^{-7} \le \xi_i \le 10^{-2}$인 영역에 대하여 Romberg 적분 방법[12]을 사용하여 구하여 그 결과를 나타낸 것이다. Romberg 적분법은 계산 속도가 빠르고 필요한 계산 정밀도를 보장하는 장점이 있다. <Figure 1>에서 볼 수 있듯이 $\xi_i \lesssim 10^{-3}$인 경우에도 누적확률함수의 역함수는 연속적으로 매끄럽게 변화함을 알 수 있다. 이것은 Chen과 Chen의 경우에 $\xi_i \lesssim 10^{-3}$에 대하여 근사값을 취한 것과 대조된다.

제안한 $F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$ 계산 방법의 효용성을 입증하기 위하여 Chen과 Chen[2]이 사용한 제품 2를 위한 매개변수 $\mu_{X_i} = 10{,}000$과 $\sigma_{X_i} = 2{,}400$에 대하여 제안한 방법과 기존 방법을 적용하여 H_i값을 구하고 그 결과를 <Figure 2>에 나타내었다. <Figure 2>에서 볼 수 있듯이 ξ_i값이 $\varepsilon_i = 0.00135$ (<Figure 2>의 화살표)보다 작은 경우, Chen과 Chen의 방



<Figure 1> Plot of $F_N^{-1}(\xi_i)$ Versus ξ_i



<Figure 2> Plot of H_i Versus ξ_i for the Product 2 by Using Proposed and Conventional Methods

법은 $H_i = \max(0, \mu_{X_i} - 3\sigma_{X_i})$에서 H_i = 2,800으로 고정되는 반면, 제안한 방법은 $\xi_i < \varepsilon_i$인 경우에도 H_i값은 지속적으로 변화하며 $\xi_i \approx 1.6 \times 10^{-5}$에서 $H_i = 0$이 된다. 또한 $\mu_{X_i} < 3\sigma_{X_i}$인 경우(제품 1에 해당), Chen과 Chen의 방법은 모든 $\xi_i < \varepsilon_i$에 대하여 $H_i = 0$이나 제안하는 방법은 ξ_i에 의존하는 연속적인 H_i값을 가진다.

또한 Chen과 Chen은 λ을 구하기 위하여 휴리스틱 방법을 적용하였으나, 본 연구에서는 최적의 λ를 찾기 위해 다음과 같은 효율적인 방법을 제안한다. 일반적으로 허용 예산이 클수록 이익도 증가됨으로 허용 예산에 최대한 접근하는 λ를 구하는 것은 최대 이익 측면에서 필요하다. 최적의 λ는 식 (8)의 라그랑주를 λ에 대하여 편미분하여 0으로 둔 방정식의 해에 해당한다. 즉,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv h(\lambda)$$
$$= B - \sum_{i=1}^{n} c_i \{ Q_i + [w_i(\alpha_i) + g_i(\alpha_i)]\mu_{X_i} \} = 0 \quad (16)$$

의 해가 최적의 λ가 된다.

위의 방정식 $h(\lambda) = 0$의 해는 아래의 조건 (a)~조건 (c)를 만족하면 유일하게 존재하므로 이분법(bisection method) 등을 사용하여 방정식의 해를 구할 수 있다. 이분법을 사용하면 구하는 해는 최적 λ에 지수적으로 수렴한다. 이와 달리 기존 방법은 후보 λ를 일정한 크기인 $(B-G')/B$로 변화시키기 때문에 선형적으로 수렴한다. 따라서 지수적으로 수렴하는 이분법이 근사적 방법보다 정확한 해를 구할 수 있을 뿐만 아니라 빨리 수렴하기 때문에 계산량도 적다고 할 수 있다.

(a) $h(\lambda)$는 λ에 대하여 연속이다.
(b) $h(\lambda)$는 단조 증가 혹은 감소 함수이다.
(c) $h(\lambda_1) > 0$, $h(\lambda_2) < 0$인 λ_1, λ_2가 존재한다.

식 (11)과 식 (12)에 의하여 Q_i와 α_i는 λ의 함수이므로 $\omega_i(\alpha_i) + g_i(\alpha_i)$ 역시 λ의 함수가 되기 때문에 $h(\lambda)$는 λ에 대하여 대하여 연속이다. 따라서 조건 (a)는 만족된다. 조건 (b)가 만족함을 보이기 위하여 $\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} > 0$ (즉, $h(\lambda)$는 단조 증가 함수)임을 Appendix에서 증명하였다. $\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} > 0$이므로 $h(\lambda)$는 단조 증가 함수이고, $\lambda \geq 0$조건 하에서 $h(\lambda) = 0$인 해가 존재하기 위해서는 $h(\lambda = 0) < 0$이어야 한다. 이 조건은 매개변수 값을 제약하는 조건으로 사용될 수 있다. 위에서 언급한 방법을 사용하여 제안하는 해법은 다음과 같다.

Step 1 : $h(\lambda_1) > 0$, $h(\lambda_2) < 0$인 λ_1, λ_2를 식 (16)을 사용하여 구한다.

Step 2 : $\lambda_{new} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$로 두고 $h(\lambda_{new})$를 계산한다. 만약 $h(\lambda_{new}) > 0$이면 $\lambda_1 = \lambda_{new}$로 두고, 그렇지 않으면 $\lambda_2 = \lambda_{new}$로 둔다.

Step 3 : 만약 $(h(\lambda_1), -h(\lambda_2)) < \varepsilon$이면 Step 4로, 아니면 Step 2로 돌아간다. 여기서 ε은 미리 정의된 임의의 작은 값이다.

Step 4 : λ_1 혹은 λ_2에 대하여 식 (11)~식 (13)를 사용하여 Q_i와 α_i를 구하여 총 이익의 기대값인 $E(Z_i) = E(Z_i^r) + E(Z_i^u)$을 계산한다.

4. 예 제

제안한 방법의 유의성을 예제를 통해 입증하기 위하여 적절한 매개변수를 사용하여 추가 실험을 수행하였으며, <Table 1>은 추가 실험에서 사용한 매개변수이다. <Table

<Table 1> Parameters of a Product

μ_X	σ_X	s	c	v	p	λ
400	100	12000	10000	5000	10	0.2005

<Table 2> Results of the Experiment

	ξ	Discount rate	Order quantity			Order cost	Expected profit	Budget constraint
			reservation	Usual sale	total			
Proposed method	0.000713	0.000034	3	81	84	840936	164844	850000
Chen and Chen	0.000713	0.000015	2	100	102	1019294	201574	850000

1>에서 주어진 매개변수를 사용하여 추가 실험한 결과를 <Table 2>에 나타내었다. 두 가지 방법을 사용하여 구한 결과를 <Table 2>를 통해 비교해 보면, 기존 방법을 적용한 경우의 총 주문량(total order quantity)은 제안한 방법보다 크기 때문에 주문 비용(order cost)과 기대 이익(expected profit)도 기존 방법이 큰 결과를 얻는다. 그러나 기존 방법으로 구한 해는 예산 제약(budget constraint)을 만족하지 않음으로 유의한 해가 아니다. 즉, 제안한 방법은 예산 제약을 만족하는 해가 존재하는 반면, 같은 조건에서 기존 방법을 적용하면 예산 제약 조건을 만족하지 않게 됨을 알 수 있다. 이것은 기존의 근사 방법을 사용하면 필요 이상의 주문을 해야 하는 경우가 발생하기 때문이다.

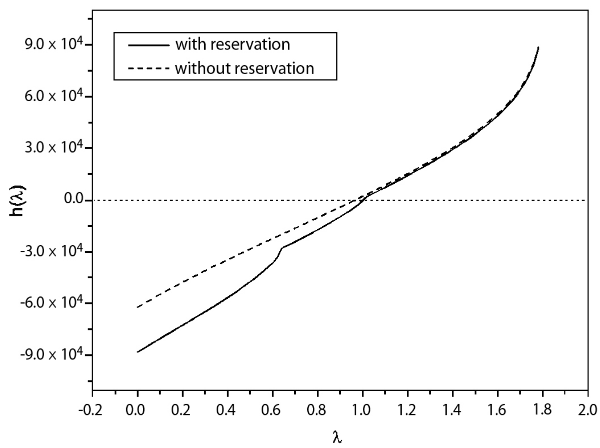
위에서 제안한 해법의 효용성을 살펴보기 위하여 Chen과 Chen[2]이 다루었던 예제를 제안한 해법에 적용하고자 한다. Chen과 Chen은 4개의 제품이 있다고 가정하였고, 각 제품에 대한 매개변수들은 <Table 3>에 주어져 있다. 또한 각 제품에 대한 의욕율은 $g_1(\alpha_1)=\alpha_1$, $g_2(\alpha_2)=\sqrt{\alpha_2}$, $g_3(\alpha_3)=\sqrt{\alpha_3}$, $g_4(\alpha_4)=\alpha_4^2$, 그리고 추가 수요율 상수는 $\delta=0.5$로 정하였다. 또한 제안한 알고리즘 Step 3에서 $\varepsilon=10^{-7}$로 정하여 최적의 λ를 위한 유효숫자를 충분하게 정하였다.

<Figure 3>은 <Table 3>의 매개변수 값을 사용하여 예약 정책이 있는 경우와 없는 경우 각각에 대하여 $h(\lambda)$를 λ에 대해 나타낸 것이다. 제 3장에서 언급한 것과 같이 $h(\lambda)$는 연속이고 단조 증가 함수이며, 또한 $h(\lambda=0)<0$임을 알 수 있다. <Figure 4>은 최적의 λ를 구하기 위하여 반복에 따른 λ값의 변화를 살펴본 것이다. <Figure 4>을 통해 볼 수 있듯이 제안한 방법은 매우 빠르게 최적의 λ값에 수렴시킴을 알 수 있다.

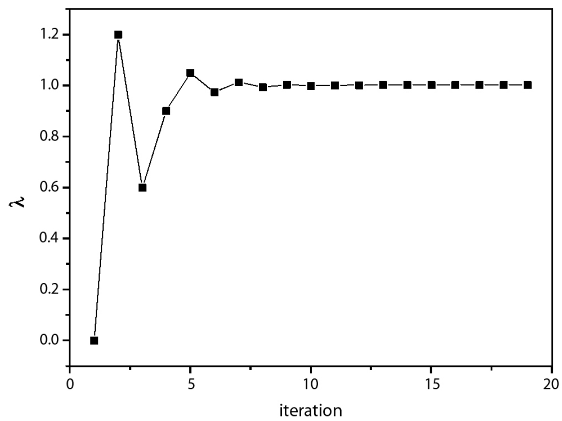
제안한 방법을 사용하여 구한 최적 주문량, 할인율, 기대 이익 등의 최적해를 예약 정책을 사용한 경우와 그렇지 않는 경우(괄호 안)에 대하여 <Table 4>에 나타내었다. <Table 4>에서 알 수 있듯이 예산 제약으로 인해 두 경우 모두 주문 비용은 거의 동일하나, 예약 정책을 사용한 경우가 그러지 않는 경우 보다 더 높은 기대 이익을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

<Table 3> Products' Parameters

product	μ_{X_i}	σ_{X_i}	s_i	c_i	v_i	p_i
1	8,000	3,000	9	3	2	10
2	10,000	2,400	12	8	1	12
3	13,000	2,000	20	15	5	22
4	5,000	1,000	36.5	12	1	25



<Figure 3> Plot of $h(\lambda)$ Versus λ for with and without Reservation



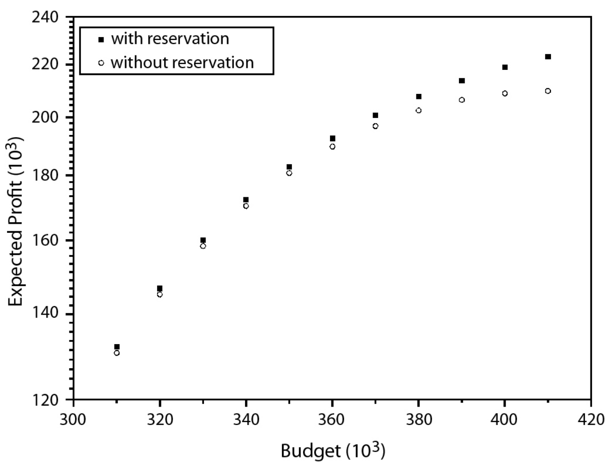
<Figure 4> Plot of λ Versus Iteration

<Table 4> Optimal Solution with the Reservation Policy and a Budget Constraint of 350,000. Numbers in the Parentheses Correspond to Optimal Solution without Reservation

Product	Discount rate	Quantity			Order cost	Expected profit
		Reservation	Usual	Total		
1	0.128089	1537	8858(10220)	10395	31185(30660)	41276(38975)
2	0.000482	329	8855(9133)	9184	73480(73066)	13087(12658)
3	0	0	12082(12160)	12082	181231(182410)	24620(25781)
4	0.132022	130	5211(5321)	5341	64101(63862)	103879(103320)
Total	0.260593	1996	35006(36834)	37002	349997(349998)	182864(180735)

또한 보통 주문량은 예약 정책이 없는 경우가 있는 경우보다 제품 종류에 무관하게 더 많으나, 예약 정책에 따른 주문으로 인하여 총 주문량은 예약 정책이 있는 경우가 더 크며 기대 이익 역시 더 크다. 특히 제품 3에 대한 할인율은 계산상으로는 $\alpha_2 = -0.033089$이나 음수이므로 $\alpha_2 = 0$가 되며, 할인율이 없는 제품 3의 경우에는 예약 정책을 사용하지 않는 경우에 더 많은 이익이 창출됨을 알 수 있다.

허용하는 예산에 따른 기대 이익의 변화를 예약 정책의 유무에 대하여 살펴보았으며, 그 결과를 <Figure 5>에 나타내었다. <Figure 5>을 통해 볼 때 허용 예산이 클수록 예약 정책을 사용하는 경우가 그렇지 않는 경우에 비하여 총 기대 이익의 차이가 증가함을 알 수 있다. 이것은 허용 예산이 클수록 예약 정책을 사용하는 것이 이익 창출 측면에서는 유리함을 의미한다.



<Figure 5> Plot of Expected Profit with and Without Reservation Versus Budget

5. 결 론

본 연구에서는 Chen과 Chen[2]이 제안한 예약 정책과 예산 제약이 있는 경우의 복수 제품 신문 배달 소년 모형에 대한 효율적인 해법을 제안하였다. 제안한 해법은 정규화와 수치 적분을 사용하여 누적확률분포의 역함수를 구하는 방법과 제약 조건을 만족하는 해가 유일하게 존재함을 증명하여 라그랑주 승수를 효율적으로 구하는 방법을 포함하고 있다. 따라서 제안한 방법은 기존의 근사 방법이나 휴리스틱 방법을 적용하지 않기 때문에 고려하는 모형의 최적 주문량과 할인율을 보다 정확하게 계산할 수 있을 뿐만 아니라 기존 방법에 비하여 간단하기 때문에 빠른 시간에 모형의 해를 구할 수 있는 장점이 있었다.

제안한 방법의 장점을 입증하기 위하여 적절한 매개변수 값들을 사용하여 그 결과를 살펴보았다. 반복에 따른 λ값의 변화를 통해 볼 때 제안하는 방법은 최적의 λ값을 매우 빠르게 찾아감을 알 수 있다. 특히 제안한 방법을 사용하여 구한 최적해는 예약 정책을 사용한 경우가 그렇지 않는 경우 보다 높은 기대 이익을 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 또한 허용 예산에 따른 기대 이익의 변화를 예약 정책의 유무에 대하여 분석한 결과 허용 예산이 클수록 예약 정책을 사용하는 것이 그렇지 않는 경우에 비하여 기대 이익이 증가함을 알 수 있었다.

Acknowledgement

This work was Supported by the Research Grant of the Kongju National University in 2013.

References

[1] Arcelus, F.J., Kumar, S., and Srinivasan, G., Evaluating manufacturer's buyback policies in a single-period two-echelon framework under price-dependent stochastic demand. *Omega*, 2008, Vol. 36, No. 5, p 808-24.

[2] Chen, L.H. and Chen, Y.C. A multiple-item budget- constraint newsboy problem with a reservation policy. *Omega*, 2010, Vol. 38, p 431-439.

[3] Dana, Jr JD. Advance-purchase discounts and price dis-

crimination in competitive markets. *Journal of Political Economy*, 1998, Vol. 106, No. 2, p 395-422.

[4] Densing, M., Dispatch planning using newsvendor dual problems and occupation times : Application to hydropower. *European Journal of Operational Research*, 2013, Vol. 228, No. 2, p 321-330.

[5] Hadley, G. and Whitin, T.M., Analysis of inventory systems. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall; 1963.

[6] Huanga, M., Economic ordering model for deteriorating items with random demand and deterioration. *International Journal of Production Research*, 2013, Vol. 51, No. 18, p 5612-5624.

[7] Keren, B., The single-period inventory problem : extension to random yield from the perspective of the supply chain. *Omega*, 2009, Vol. 37, No. 4, p 801-10.

[8] Kevork IS. Estimating the optimal order quantity and the maximum expected profit for single-period inventory decisions. *Omega*, 2009, doi : 10.1016/j.omega.2009.09.005.

[9] Khouja, M. and Robbins, S.S., Linking advertising and quantity decisions in the single-period inventory model. *International Journal of Production Economics*, 2003, Vol. 86, No. 2, p 93-105.

[10] Lai, G., Debo, L.G. and Sycara, K., Sharing inventory risk in supply chain : the implication of financial constraint. *Omega*, 2009, Vol. 37, No. 4, p 811-25.

[11] Lee, D. and Lee, C., A Study on Inventory Control Policy For Semi-Finished Product and Optional Components. *Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2013, Vol. 36, No. 4, p 31-37.

[12] Press W. et al. Numerical Recipes in C. 2nd Ed. New York, Cambridge, 2002.

[13] Shao, Z. and Ji, X., Fuzzy multi-product constraint newsboy problem. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, Vol. 180, No. 1, p 7-15.

[14] Shugan, S.M. and Xie, J., Advance pricing of services and other implications of separating purchase and consumption. *Journal of Service Research*, 2000, Vol. 2, No. 3, p 227-39.

[15] Silver, E.A., Pyke, D.F., and Peterson, R., *Inventory management and production planning and scheduling*, 3rd ed., New York : Wiley, 1998.

[16] Weea, H., Kuoa, T., Huanga, Y., and Lina, Y., Two-stage newsboy problem for fashion products considering revenue sharing and return policies. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 2013, Vol. 30, No. 8, p 500-509.

[17] Wang, C.X. and Webster, S., The loss-averse newsvendor problem. *Omega*, 2009, Vol. 37, No. 1, 93-105.

[18] Wu, J., Li, J., Wang, S., and Cheng, T.C.E., Mean-variance analysis of the newsvendor model with stockout cost. *Omega*, 2009, Vol. 37, No. 3, p 724-30.

<Appendix>

정리 : $h(\lambda)$는 λ에 대하여 단조 증가 함수이다.

증명 : 식 (8)에 의하여

$h(\lambda) \equiv \frac{\partial L}{\partial \lambda} = B - \sum_{i=1}^{n} c_i (Q_i + [w_i(\alpha_i) + g_i(\alpha_i)]\mu_{X_i})$이다. $h(\lambda)$의 λ에 대한 단조 증가 함수임을 보이기 위하여 $h(\lambda)$를 λ에 대하여 미분하면

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \left\{ \frac{dQ_i}{d\lambda} + \left(\frac{dw_i(\alpha_i)}{d\lambda} + \frac{dg_i(\alpha_i)}{d\lambda} \right) \mu_{X_i} \right\} \tag{A1}$$

가 된다. 여기서 $\frac{dQ_i}{d\lambda}$는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dQ_i}{d\lambda} = \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_i}\frac{d\xi_i}{d\lambda} + \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{d\lambda}$$

식 (11)과 식 (13)에서 주문량은 $Q_i = (1 - g_i(\alpha_i))F_{x_i}^{-1}(\xi_i)$, 그리고 $\xi_i \equiv \frac{s_i + p_i - (1+\lambda)c_i}{s_i + p_i - v_i}$로 주어짐으로

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} &= 0 \\
\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_i} &= (1 - g_i(\alpha_i))\frac{\partial F_{X_i}^{-1}(\xi_i)}{\partial \xi_i} = (1 - g_i(\alpha_i))\frac{1}{\sqrt{f(Q_i)}} \\
\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i} &= -\frac{\partial g_i(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cdot F_{X_i}^{-1}(\xi_i) = -\frac{\partial g_i(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} H_i \\
\frac{dQ_i}{d\lambda} &= -\frac{c_i}{s_i + p_i - v_i} < 0
\end{aligned}$$

가 된다. 따라서

$\frac{dQ_i}{d\lambda} = -\frac{1 - g_i(\alpha_i)}{\sqrt{f(Q_i)}}\frac{c_i}{s_i + p_i - v_i} - \frac{\partial g_i(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} H_i \frac{d\alpha_i}{d\lambda}$로 표현되고, $\frac{dw_i(\alpha_i)}{d\lambda} + \frac{dg_i(\alpha_i)}{d\lambda} = \left\{ \frac{\partial w_i(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial g_i(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \right\} \frac{d\alpha_i}{d\lambda}$이므로 $w_i(\alpha_i) = \delta g_i(\alpha_i)$를 사용하면 식 (A1)은

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - g_i(\alpha_i)}{\sqrt{f(Q_i)}} \frac{c_i}{s_i + p_i - v_i} \\ + \frac{\partial g_i(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}(H_i - (1+\delta)\mu_{x_i})\frac{d\alpha_i}{d\lambda} \end{array} \right\} \tag{A2}$$

로 표현할 수 있다.

$g_i(\alpha_i) < 1$이므로 위의 식 (A2)의 우변 첫 번째 항은 항상 양수이며, 따라서 예약을 고려하지 않는 경우에는 $\alpha_i = 0$이므로 $\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} > 0$이다. 예약을 고려하는 경우는 식 (1)에 의해 $g_i(\alpha_i)$가 α_i에 대하여 단조 증가 함수이므로 $\frac{\partial g_i(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} > 0$이다. 식 (12)에서 알 수 있듯이 할인율 α_1는 λ에 대하여 음함수(implicit function)이므로 매개변수 값과

$g_i(\alpha_i)$를 알아야만 $\frac{d\alpha_i}{d\lambda}$를 명시적으로 구할 수 있다.

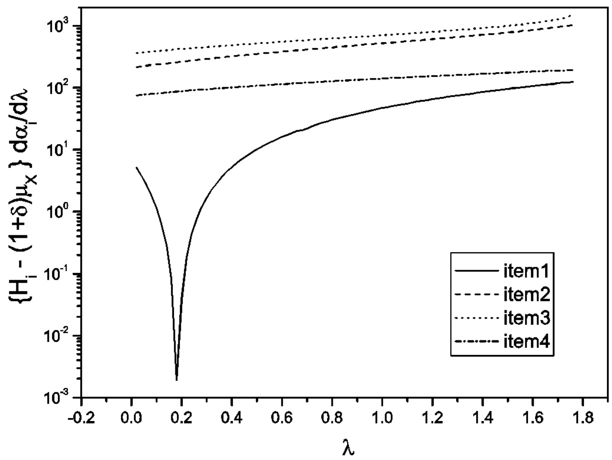
$\frac{d\alpha_i}{d\lambda}$를 명시적으로 구하지 않고 $\{H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}\}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}>0$을 증명하기 위하여 다음의 두 가지 경우를 고려하자. 또한 H_i는 예약을 고려하지 않은 경우의 주문량이며, 예약에 따른 수요량을 나타내는 확률 변수는 $\{g_i(\alpha_i)+w_i(\alpha_i)\}X_i$ 이므로 $(1+\delta)\mu_{X_i}$는 예약에 따른 최대 기대 수요량이다.

(i) $H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}>0$인 경우 :

$H_i>(1+\delta)\mu_{X_i}$인 λ영역에서는 예약을 고려하지 않은 경우의 주문량이 예약에 따른 최대 기대 수요량보다 크기 때문에 주문량과 기대 수요량을 일치시키기 위해서 예약에 따른 주문량인 $Q_i=(1-g_i(\alpha_i))H_i$가 λ에 대하여 감소되어야 한다. 따라서 $g_i(\alpha_i)$는 λ에 대하여 증가되어야 하므로 $\frac{\partial g_i(\alpha_i)}{\partial\alpha_i}>0$가 되어야 하며, $g_i(\alpha_i)$는 α_i에 대하여 단조증가함수이므로 $\frac{d\alpha_i}{d\lambda}>0$이다. 따라서 $\{H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}\}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}>0$이 만족된다.

(ii) $H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}<0$인 경우 :

$H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}$인 λ영역에서는 위의 (i)의 경우와 반대로 주문량과 기대 수요량을 일치시키기 위해서 예약에 따른 주문량인 $Q_i=(1-g_i(\alpha_i))H_i$를 증가되어야 한다. 따라서 $g_i(\alpha_i)$는 감소되어야 하므로 $\frac{d\alpha_i}{d\lambda}<0$가 되며, 이 경우에도 $\{H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}\}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}>0$이 만족된다. 따라서 (i)과 (ii)의 결과를 통해 볼 때, $H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}$의 부호에 무관하게 $\{H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}\}$ $\frac{d\alpha_i}{d\lambda}>0$임을 알 수 있다. 그러므로 모든 경우에 대하여 이며, 따라서 $h(\lambda)$는 λ에 대하여 단조 증가 함수이다.



<Figure 1> Plot of $\{H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}\}\ \frac{d\alpha_i}{d\lambda}$ Versus λ for all Products

위에서 증명한 $\frac{dh(\lambda)}{d\lambda}>0$을 추가로 입증하기 위하여 참고문헌[2]에서 사용한 매개변수 값들을 사용하여 $\{H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}\}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}$을 λ에 대하여 계산하였고, 그 결과를 <Figure 6>에 나타내었다. <Figure 6>에서 볼 수 있듯이 모든 제품 ($i=1, 2, 3, 4$)에 대하여 λ에 무관하게 $\{H_i-(1+\delta)\mu_{X_i}\}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}>0$임을 알 수 있다.