Society of Korea Industrial and Systems Engineering Vol. 37, No. 1 : 96-103, March 2014 ISSN : 2005-0461(print)
http://dx.doi.org/10.11627/jkise.2014.37.1.96 ISSN : 2287-7975(online)

Analysis of a Controllable M/G/1 Queueing Model Operating under the (TN) Policy

Hahn-Kyou Rhee†

Hannam University

(TN) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형 분석

이 한 교†

한남대학교

A steady-state controllable M/G/1 queueing model operating under the (TN) policy is considered where the (TN) policy is defined as the next busy period will be initiated either after T time units elapsed from the end of the previous busy period if at least one customer arrives at the system during that time period, or the time instant when Nth customer arrives at the system after T time units elapsed without customers' arrivals during that time period. After deriving the necessary system characteristics such as the expected number of customers in the system, the expected length of busy period and so on, the total expected cost function per unit time in the system operation is constructed to determine the optimal operating policy. To do so, the cost elements associated with such system characteristics including the customers' waiting cost in the system and the server's removal and activating cost are defined. Then, the optimal values of the decision variables included in the operating policies are determined by minimizing the total expected cost function per unit time to operate the system under consideration.

Keywords : M/G/1 queueing model, System characteristics, Optimal operating policy

1. 서 론

서비스를 받으려고 기다리는 상황을 수리적으로 분석하기 위해 개발된 다양한 형태의 대기모형들은 Yadin과 Naor[14]가 서비스를 제공해 주는 사람, 즉 server의 업무수행시간을 보다 효율적으로 활용하기 위한 방안으로 조정가능한 대기모형(controllable queueing model)을 제안한 이후 많은 유용한 모형들이 소개되어 오고 있다. 여기에 해당되는 대기모형들에는 단순하고 획일적인 일반적 대기모형(ordinary queueing model)과는 달리 대기시스템을 필요에 따라 보다 효율적으로 운영하기 위한 적절한 운용방침을 추가함으로써 시스템을 보다 유연하게 운용할 수 있는 가능성을 제공하였다고 볼 수 있다. 분류된 두 종류 대기모형들의 가장 큰 차이점은 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 대기시스템에 없을 때, 서비스를 제공하는 server의 역할과 또한 server가 없을 때 서비스를 받기 위해 대기시스템에 도착하는 고객이 언제 서비스를 받을 수 있는지에 있다고 볼 수 있다. 일반적 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없더라도 server는 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 항상 서비스창구에서 대기상태를 유지해야만 한다. 이러한 조건은 고객의 입장에서는 즉시 서비스를 제공받을 수 있다는 장점이 있지만 대기시스템 운영자 입장에서는 서비스를 받으려는 고객이 없음에도 불구하고 서비스창구에 항상 운용해야 하는 문제로 인해 server의 업무활용도가 낮아지게 됨을 간과할 수 없게 된다. 일반적 대기모

Received 27 January 2014; Finally Revised 3 March 2014; Accepted 6 March 2014
† Corresponding Author : hkrhee@hnu.kr

형에서 나타나는 이러한 문제점, 즉 낮은 server의 업무활용도를 향상시키기 위해 제안된 조정가능한 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 대기시스템에서 기다리는 고객이 없으면 즉시 서비스 창구를 폐쇄한 다음, server를 부수업무에 활용할 수 있다. 이러한 조건이 적용됨으로써 server는 서비스창구에서의 업무와 서비스창구 폐쇄된 다음에 유휴시간이 없이 또 다른 부수업무를 수행해야 하기 때문에 server의 업무활용도가 증가됨을 알 수 있다. 또한 일단 폐쇄된 창구는 미리 정해진 조건이 만족되어야만 server는 수행중인 부수업무의 수행을 중단하고 서비스를 기다리는 고객들을 위하여 서비스창구로 복귀하여 다시 서비스를 제공해야 한다. 다시 말해 서비스창구 폐쇄 후 도착한 고객은 미리 정해진 조건을 만족하지 않을 경우 서비스를 제공받을 수 없다. 이러한 폐쇄된 서비스창구의 운용을 다시 재개할 수 있도록 미리 정해진 조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 한다. 따라서 조정가능한 대기모형에서는 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개되기 위한 시스템상태를 규정하는 운용방침의 역할이 매우 중요함을 알 수 있다. 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있지만(Teghem[13]), 이러한 운용방침들은 시스템상태를 표현하는 입력변수의 개수에 따라 단순 운용방침(simple operating policy), 이변수 운용방침(dyadic operating policy) 그리고 삼변수 운용방침(triadic operating policy)으로 분류할 수 있다.

가장 대표적인 단순 운용방침에는 Yadin과 Naor[14]가 제안한 것으로 대기시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 N($N \geq 1$)명이 되는 순간 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하여 기다리는 고객에게 서비스를 제공하는 N운용방침(N-policy)이 있으며, Heyman[4] 등이 제안한 운용방침으로 서비스창구가 폐쇄된 후 T단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 서비스창구의 운용을 재개하여 서비스의 제공이 개시되는 T운용방침(T-policy) 그리고 마지막으로 Balachandran과 Tijms[1]이 제안한 것으로 서비스창구가 폐쇄된 이후 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D단위시간을 초과하는 순간부터 기다리는 고객에게 서비스 제공을 재개하는 D운용방침(D-policy)이 있다.

기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하기 위해 단순 운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 server를 일반적 대기모형 보다는 효율적으로 활용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 시스템의 상태를 나타내는 다양한 조건들 중에 단지 한 가지 대기시스템 상태에만 의존하여 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개되기 때문에 시스템 운영에 충분한 유연성이 부여되었다고 볼 수 없다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 하나의 단순 운용방침에 또 다른 하나의 단순 운용방침을 적절하게 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis, Rhee와 Sivazlian[3]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개될 수 있는 조건에 두 종류의 단순 운용방침을 활용함으로써 유연성이 증가된 이변수 운용방침은 포함된 두 종류의 단순 운용방침이 특이한 형태로 결합된 것으로 Min(N,T), Min(T,D), Min(N,D), Max(N,T), Max(T,D) 그리고 Max(N,D) 운용방침으로 표현된다. 이러한 이변수 운용방침은, 예를 들면, Min(N,D) 운용방침이 적용될 경우, 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 N 혹은 D운용방침에 따르는 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하여 즉시 서비스 제공이 개시되어야 하며, Max(N,D) 운용방침이 적용될 경우에는 N운용방침과 D운용방침에 따르는 두 조건 모두가 처음으로 만족될 때 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개되어 서비스 제공이 즉시 개시되어야 한다. 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다(Gakis, Rhee와 Sivazlian [3] 혹은 Rhee[6] 혹은 Rhee와 Oh[7]). 이미 언급된 것처럼, 이러한 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다는 server에게 혹은 시스템 운용에 어느 정도의 유연성을 부여할 수 있다는 사실로 인해 최근에는 server에게 혹은 시스템운용에 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 가지 단순 운용방침 모두가 결합된 Min(N,T,D), Max(N,T,D) 그리고 Med(N,T,D) 운용방침과 같은 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee[9]에 의해 제안되었다. 이변수 운용방침들과 유사하게 서비스를 기다리는 고객이 없어 창구가 폐쇄된 후 N 혹은 T 혹은 D운용방침이 적용되는 세 조건 중 어느 것이나 가장 먼저 충족되는 순간, 혹은 세 조건 모두가 만족되는 순간, 혹은 세 조건 중 어느 두 조건이 만족되는 순간 server는 수행중인 부수업무를 중단하고 폐쇄된 서비스창구에 복귀하여 서비스를 기다리는 고객들에게 서비스 제공을 개시하여야 한다[8].

다양한 형태의 운용방침을 고려할 경우, 고객 혹은 운영자의 입장에서 보면 상호 상반된 장단점으로 인해 실제상황에 적용하기 위해서는 상대방에 대해 많은 이해와 협조가 필요할 뿐만 아니라 많은 입력변수가 복잡 다양하게 결합되어 있어 입력변수의 최적해를 구하기 위해서는 커다란 어려움이 동반됨을 예상할 수 있다. 이러한 구조적인 문제를 피하고 보다 현실적인 운용방침을 개발하여 적용하는 것이 또 하나의 필요한 전략일 수 있다.

본 논문에서는 제 2장에서 **(TN)** 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형에 대한 연구의 목적이 기술되고 그리고 제 3장에서는 연구에 적용되는 대기시스템

이 정의된다. 또한 제 4장에서 연구대상의 대기모형 분석을 통하여 필요한 시스템 특성치를 유도한 후 제 5장에서는 시스템운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구축한 다음 제 6장에서 운용방침에 포함된 입력변수들의 최적해를 유도한다.

2. 연구 목적

조정가능한 대기모형을 실제 산업현장에서 직접 활용하기 위해서는 채택된 운용방침이 적용되었을 때 기대되는 비용과 효과를 고려하여 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 결정한 다음 그 결과에 따라 운용되어야 한다. 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 유도하기 위한 과정에는 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값, 고객에게 서비스를 제공하고 있는 server 수의 기대값, 대기모형이 운용될 때의 busy period의 기대값, 등이 필요할 수 있다. 여기에서 busy period는 서비스를 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간부터 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스창구를 폐쇄할 때까지의 시간간격으로 정의된다(Rhee와 Sivazlian[11, 12]).

최적의 운용방침을 결정하기 위해 필요한 시스템 특성치는 한 사람의 고객이 시스템 내부에서 단위시간을 기다리는데 필요한 비용, 한 사람의 server가 고객에게 단위시간의 서비스를 제공하는데 필요한 비용 그리고 서비스창구를 폐쇄하고 재개하는데 필요한 비용요소와 결합되어 시스템 운용에 필요한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하게 된다. 그렇지만 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하기 위해 필요한 시스템 특성치는 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 수가 증가하면 증가할수록 유도과정에서 발생되는 어려움과 복잡한 정도가 매우 커지며 또한 최적 운용방침의 결정에 더욱 더 큰 어려움이 내재되어 있어 실제상황에서 적용하기 불가능해질 가능성이 존재하는 특징이 있다.

이러한 현실적인 어려움을 해결할 수 있으면서 또한 현장에서의 적용가능성을 높일 수 있는 새로운 형태의 (TN) 운용방침을 다음과 같이 정의하며 (TN) 운용방침이 적용되었을 때의 단위시간당 기대되는 총비용을 최소화하는 조건으로 운용방침의 최적해를 유도함을 본 연구의 목적으로 설정한다.

(TN) 운용방침 : 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스창구가 폐쇄된 이후, T단위시간이 경과하기 전에 최소한 한 사람의 고객이 대기시스템에 도착한 경우, T 운용방침이 적용된다. 그러나 T단위시간이 경과하기 전에 한 사람의 고객이 도착하지 않았을 경우, N운용방침이 적용된다.

3. 대기모형의 정의

안정상태(steady-state)에 있는 M/G/1 대기모형에 관하여 다음과 같은 사항을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 대기시스템에 도착하는 고객들은 단위시간당 평균 λ명인 포아송과정(Poisson process)에 따른다. 다시 말해, 연속된 두 고객의 평균 도착시간 간격은 $\frac{1}{\lambda}$이다. 즉 t단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 X(t)라고 하면, X(t)의 확률질량함수(probability mass function)는 다음과 같이 주어진다.

$$P[X(t)=j]=\frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^j}{j!},\ j=0,1,2,3,\cdots \tag{1}$$

(ii) 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수는 평균과 분산이 각각 $\frac{1}{\mu}$와 σ^2인 상호독립이며 동일한(identical) 임의의 확률분포라 가정한다.

(iii) X_0와 B_0 : 일반적 M/G/1 대기모형의 시스템내부에 있는 고객 수와 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. X_0와 B_0의 기대값을 각각 $E[X_0]$와 $E[B_0]$로 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진다(Kleinrock[5]; Conolly[2]).

$$E[X_0]=\rho+\frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)} \tag{2}$$

$$E[B_0]=\frac{1}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} \tag{3}$$

(iv) 기타 언급되지 않은 사항들은 M/G/1 대기모형의 일반적인 가정에 따른다.

4. 시스템 특성치 유도

(TN) 운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형의 busy period는 T 혹은 N 운용방침으로 시작하느냐에 따라 결정된다. 따라서 busy period가 T 혹은 N 운용방침에 따라 시작될 확률을 각각 P[T]와 P[N]으로 정의하고 식 (1)을 사용하면 다음과 같이 주어진다.

$$P[T]=1-e^{-\lambda T} \tag{4}$$

$$P[T]=e^{-\lambda T} \tag{5}$$

4.1 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값

조정가능한 M/G/1 대기모형에 단순 T, N 그리고 (TN) 운용방침이 적용되었을 때 시스템 내부에 있는 고객 수를 나타내는 확률변수를 X_N, X_T 그리고 $X_{(TN)}$라고 정의하면, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$X_{(TN)} = P[N]X_N + P[T]X_T \tag{6}$$

따라서 X_N, X_T 그리고 $X_{(TN)}$의 기대값을 각각 $E[X_T]$, $E[X_N]$ 그리고 $E[X_{(TN)}]$라고 정의하고, 식 (6)을 사용하면 다음과 같은 관계식이 얻어진다.

$$E[X_{(TN)}] = P[N]E[X_N] + P[T]E[X_T] \tag{7}$$

Heyman[4]와 Yadin과 Naor[14]의 결과로 $E[X_T]$와 $E[X_N]$는 다음과 같이 주어진다.

$$E[X_T] = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda T}{2} \tag{8}$$

$$E[X_N] = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{N-1}{2} \tag{9}$$

여기에서 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 그리고 σ^2 각 고객에게 제공되는 서비스시간의 분산(variance)을 나타낸다. 식 (8)과 (9)에서 주어진 $E[X_T]$와 $E[X_N]$를 식 (7)에 대입하면 $E[X_{(TN)}]$는 아래와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} E[X_{(TN)}] &= e^{-\lambda T}\left\{\rho + \frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{N-1}{2}\right\} \\ &\quad + (1-e^{-\lambda T})\left\{\rho + \frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda T}{2}\right\} \\ &= \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)} + e^{\lambda T}\left(\frac{N-1}{2}\right) \\ &\quad + (1-e^{-\lambda T})\left(\frac{\lambda T}{2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

그런데 식 (2)에서 주어진 $E[X_0]$를 사용하면 식 (10)은 아래와 같이 표현된다.

$$E[X_{(TN)}] = E[X_0] + e^{-\lambda T}\left(\frac{N-1}{2}\right) + (1-e^{-\lambda T})\left(\frac{\lambda T}{2}\right) \tag{11}$$

4.2 Busy Period 기대값 유도

조정가능한 M/G/1 대기모형에 단순 T와 N 운용방침이 적용되었을 때 busy period의 기대값을 각각 $E[B_T]$과 $E[B_N]$ (Gakis, Rhee와 Sivazlian[3] 혹은 Rhee[6, 9, 10] 혹은 Rhee와 Oh[7, 8])라고 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_T] = \frac{(\lambda T)E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \tag{12}$$

$$E[B_N] = N\,E[B_0] \tag{13}$$

또한 조정가능한 M/G/1 대기모형에 (TN) 운용방침이 적용되었을 때, busy period가 T 운용방침 혹은 N 운용방침으로 시작될 때의 idle period 기대값을 각각 $E[I_T]$와 $E[I_N]$으로 정의하면 다음과 같다.

$$E[I_T] = \frac{T}{1-e^{-\lambda T}} \tag{14}$$

$$E[I_N] = T + \frac{N}{\lambda} \tag{15}$$

여기에서 idle period는 서비스창구가 폐쇄되어 있는 시간간격을 나타내며 busy period와 idle period의 합을 busy cycle이라고 정의한다. 그리고 (TN) 운용방침이 적용될 때의 busy period, idle period와 busy cycle의 기대값을 각각 $E[B_{(TN)}]$, $E[I_{(TN)}]$ 그리고 $E[BC_{(TN)}]$라면 다음이 성립한다.

$$E[B_{(TN)}] = P[N]E[B_N] + P[T]E[B_T] \tag{16}$$

$$E[I_{(TN)}] = P[N]E[I_N] + P[T]E[I_T] \tag{17}$$

$$E[BC_{(TN)}] = E[B_{(TN)}] = E[I_{(TN)}] \tag{18}$$

식 (16)에 식 (4)와 식 (5)에서 주어진 P[T]와 P[N] 그리고 식 (12)와 식 (13)에서 주어진 $E[B_T]$과 $E[B_N]$을 대입하면

$$\begin{aligned} E[B_{(TN)}] &= P[N]E[B_N] + P[T]E[B_T] = e^{-\lambda T}(N\,E[B_0]) \\ &\quad + (1-e^{-\lambda T})\left\{\frac{(\lambda T)E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\right\} \\ &= e^{-\lambda T}(N\,E[B_0]) + (\lambda T)\,E[B_0] \end{aligned} \tag{19}$$

식 (19)에 식 (3)에서 주어진 $E[B_0]$를 대입하면 $E[B_{(TN)}]$은 다음과 같다.

$$E[B_{(TN)}] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}\left(Ne^{-\lambda T} + \lambda T\right) \tag{20}$$

같은 방법으로 식 (17)에 주어진 P[T]와 P[N] 그리고 식 (14)와 식 (15)에서 주어진 $E[I_T]$과 $E[I_N]$를 대입하면

$$E[I_{(TN)}]=\frac{T(1-e^{-\lambda T})}{1-e^{-\lambda T}}+\left(T+\frac{N}{\lambda}\right)e^{\lambda T}$$
$$=(1+e^{-\lambda T})T+\frac{Ne^{-\lambda T}}{\lambda} \quad (21)$$

마지막으로 식 (18)에 식 (20)과 식 (21)에서 주어진 $E[B_{(TN)}]$과 $E[I_{(TN)}]$을 대입하면 $E[BC_{(TN)}]$이 다음과 같이 결과를 얻을 수 있다.

$$E[BC_{(TN)}]=\frac{1}{\mu(1-\rho)}\{Ne^{-\lambda T}+\lambda T\}$$
$$=(1+e^{-\lambda T})T+\frac{Ne^{-\lambda T}}{\lambda}$$
$$=\left\{\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)}+1+e^{-\lambda T}\right\}T$$
$$+\left\{\frac{1}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\lambda}\right\}Ne^{-\lambda T}$$

여기에서 $\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)}+1=\alpha$와 $\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\lambda}=\beta$로 치환하면 $E[BC_{(TN)}]$는 다음과 같이 표현된다.

$$E[BC_{(TN)}]=(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T} \quad (22)$$

또한 아래의 관계식들이 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)}+1=\frac{1}{(1-\rho)} \quad (23)$$
$$\beta=\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\lambda}=\lambda\frac{1}{(1-\rho)} \quad (24)$$
$$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda \quad (25)$$

5. 시스템 운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수 구축

시스템 운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구축하기 위해서는 서비스를 받으려는 고객이 시스템에서 기다리는데 발생되는 제반 비용 그리고 서비스창구의 폐쇄 및 재개에 필요한 비용을 고려하여야 한다. 이러한 비용요소를 좀 더 구체적으로 표현하기 위해 다음을 정의한다.

(i) h : 한 명의 고객이 한 단위시간 동안 시스템에 머무는데 소요되는 비용.
(ii) k : 서비스창구를 한 번 폐쇄하고 재개하는데 필요한 제반 비용으로 busy period가 시작될 때와 busy period가 종료될 때 발생되는 비용의 합을 의미한다.
(iii) 고정된 비용으로 고용된 한 명의 server가 항상 근무하는 상황을 가정하여 server가 서비스를 제공하는데 필요한 비용 항상 일정함으로 여기에는 고려하지 않기로 한다.

f(T,N)을 위에서 정의된 비용요소와 필요한 시스템 특성치가 결합된 시스템운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수라고 정의하면 f(T,N)는 다음과 같이 표현된다.

$$f(T,N)=hE[X_{(TN)}]+k\left\{\frac{1}{E[BC_{(TN)}]}\right\}$$
$$=h\left\{E[X_0]+e^{-\lambda T}\left(\frac{N-1}{2}\right)+(1-e^{-\lambda T})\left(\frac{\lambda T}{2}\right)\right\}$$
$$+k\left[\frac{1}{\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}}\right] \quad (26)$$

6. 최적 (TN) 운용방침의 결정

조정가능한 M/G/1 대기모형에 적용되는 (TN) 운용방침의 최적해는 식 (26)에서 주어진 시스템 운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수, f(T,N)를 가장 작게 하는 T와 N의 값, T^*과 N^*는 다음과 같이 유도된다.

정리 : 식 (26)에서 주어진 (TN) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형의 단위시간당 기대되는 총비용함수를 최소화하는 입력변수의 최적해 T^*과 N^*는 다음과 같이 유도된다.

$$T^*=\frac{(1-\rho)}{\lambda(2-\rho)}$$
$$N^*=\left[\sqrt{\frac{2k\lambda h(1-\rho)}{h}}-\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1-\rho}{2-\rho}\right\}^2\right]e^{\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}-\left\{\frac{(1-\rho)^2}{(2-\rho)}\right\}$$

증명 : 식 (26)을 사용하여 $\frac{\partial f(T,N)}{\partial T}=0$와 $\frac{\partial f(T,N)}{\partial N}=0$를 만족하는 T와 N의 값을 구하면 된다. $\frac{\partial f(T,N)}{\partial T}$와 $\frac{\partial f(T,N)}{\partial N}$는 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial f(T,N)}{\partial T}=he^{-\lambda T}(-\lambda)\left(\frac{N-1}{2}\right)$$
$$+h(-e^{-\lambda T})(-\lambda)\left(\frac{\lambda T}{2}\right)+h(1-e^{-\lambda T})\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$+\frac{k\{e^{-\lambda T}(-\lambda)T+(\alpha+e^{-\lambda T})+\beta Ne^{-\lambda T}(-\lambda)\}}{\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial f(T,N)}{\partial N}=he^{-\lambda T}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{-k(\beta e^{-\lambda T})}{\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}^2} \quad (28)$$

식 (28)에서 주어진 $\frac{\partial f(T,N)}{\partial N}$ 로부터 $\frac{\partial f(T,N)}{\partial N}=0$를 풀면

$$\frac{h}{2}e^{-\lambda T}=\frac{k\beta e^{-\lambda T}}{\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}^2}$$

$$he^{-\lambda T}\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}^2=2k\beta e^{-\lambda T}$$

따라서

$$\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}^2=\frac{2k\beta}{h} \quad (29)$$

또한

$$(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}=\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}$$

$$\beta Ne^{-\lambda T}=\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-(\alpha+e^{-\lambda T})T \quad (30)$$

또한 식 (27)의 $\frac{\partial f(T,N)}{\partial T}$ 의 마지막 항 $\frac{-k\{e^{-\lambda T}(-\lambda)T+(\alpha+e^{-\lambda T})+\beta Ne^{-\lambda T}(-\lambda)\}}{\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}^2}$ 에 식 (29)과 식 (30)의 결과를 대입하여 간단히 하면 다음과 같다.

$$\frac{-k\{e^{-\lambda T}(-\lambda)T+(\alpha+e^{-\lambda T})+\beta Ne^{-\lambda T}(-\lambda)\}}{\{(\alpha+e^{-\lambda T})T+\beta Ne^{-\lambda T}\}^2}$$
$$=\frac{-k\{-\lambda e^{-\lambda T}T+\alpha+e^{-\lambda T}-\lambda\beta Ne^{-\lambda T}\}}{\left(\alpha T+\frac{T}{\lambda}e^{-\lambda T}+\beta Ne^{-\lambda T}\right)^2}$$
$$=\frac{-k\left\{-\lambda e^{-\lambda T}T+\alpha+e^{-\lambda T}-\lambda\left(\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-\alpha T-e^{-\lambda T}T\right)\right\}}{\frac{2k\beta}{h}}$$
$$=-\frac{-h\left\{-\lambda e^{-\lambda T}T+\alpha+e^{-\lambda T}-\lambda\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}+\lambda\alpha T+\lambda Te^{-\lambda T}\right\}}{2\beta}$$
$$=-\frac{h\left\{\alpha+e^{-\lambda T}-\lambda\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}+\lambda\alpha T\right\}}{2\beta} \quad (31)$$

식 (31)의 결과를 식 (25)에 대입하여 $\frac{\partial f(T,N)}{\partial T}=0$를 풀면 다음과 같다.

$$-\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}N+\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}+\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}(\lambda T)+\frac{\lambda h}{2}-\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}$$
$$-\frac{\alpha h}{2\beta}-\frac{h}{2\beta}e^{-\lambda T}+\frac{\lambda h}{2\beta}\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-\frac{\lambda h\alpha}{2\beta}T=0$$
$$-\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}N+\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}(\lambda T)+\frac{\lambda h}{2}-\frac{\alpha h}{2\beta}-\frac{h}{2\beta}e^{-\lambda T}$$
$$+\frac{\lambda h}{2\beta}\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-\frac{\lambda h\alpha}{2\beta}T=0 \quad (32)$$

그런데 식 (25)에서 주어진 결과를 사용하면 아래의 관계식이 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\frac{\alpha h}{2\beta}=\frac{\lambda h}{2}$$

그래서 식 (32)는 다음과 같다.

$$-\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}N+\frac{\lambda h}{2}e^{-\lambda T}(\lambda T)-\frac{h}{2\beta}e^{-\lambda T}$$
$$+\frac{\lambda h}{2\beta}\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-\frac{\lambda h\alpha}{2\beta}T=0 \quad (33)$$

식 (33)의 좌우변에 $\left(\frac{2\beta}{\lambda h}\right)$를 곱하면 다음과 같다.

$$-\beta Ne^{-\lambda T}+\beta\lambda Te^{-\lambda T}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T}+\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-\alpha T=0 \quad (34)$$

식 (30)과 식 (34)로 구성된 연립방정식을 풀면 다음과 같다.

$$\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-(\alpha+e^{-\lambda T})T$$
$$=\beta\lambda Te^{-\lambda T}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T}+\sqrt{\frac{2k\beta}{h}}-\alpha T$$

위 식을 간단히 하면 다음과 같은 관계식이 유도된다.

$$-e^{-\lambda T}T=\beta\lambda Te^{-\lambda T}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T}$$

각 항을 $e^{-\lambda T}$로 나눈 후 T에 관하여 풀면,

$$(1+\beta\lambda)T=\frac{1}{\lambda}$$

또한 식 (25)을 사용하면 $\beta\lambda=\alpha$이므로

$$T^*=\frac{1}{\lambda(1+\alpha)} \quad (35)$$

그런데 식 (23)에서 주어진 α를 식 (35)에 대입하여 간단히 하면

$$\mathrm{T}^{*}=\frac{1}{\lambda\left\{1+\frac{1}{(1-\rho)}\right\}}=\frac{(1-\rho)}{\lambda(2-\rho)} \tag{36}$$

여기에서 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$를 의미한다. 마지막으로 식 (36)에서 얻어진 T^{*} 그리고 식 (23)와 식 (24)에서 주어진 α와 β를 식 (30)에 대입하면 N^{*}를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}^{*}&=\frac{\sqrt{\frac{2\mathrm{k}\beta}{\mathrm{h}}}-(\alpha+\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}^{*}})\mathrm{T}^{*}}{\beta\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}^{*}}}\\
&=\frac{\sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{\lambda\mathrm{h}(1-\rho)}}-\left[\frac{1}{(1-\rho)}+\mathrm{e}^{-\lambda\left\{\frac{(1-\rho)}{\lambda(2-\rho)}\right\}}\right]\left\{\frac{(1-\rho)}{\lambda(2-\rho)}\right\}}{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\mathrm{e}^{-\lambda\left\{\frac{(1-\rho)}{\lambda(2-\rho)}\right\}}}\\
&=\frac{\sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{\lambda\mathrm{h}(1-\rho)}}-\left\{\frac{1}{\lambda(2-\rho)}+\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}\right\}\left\{\frac{(1-\rho)}{\lambda(2-\rho)}\right\}}{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}}{\lambda(1-\rho)}}\\
&=\frac{\lambda(1-\rho)\sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{\lambda\mathrm{h}(1-\rho)}}-\left\{\frac{1}{(2-\rho)}+\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}\right\}\left\{\frac{(1-\rho)}{\lambda(2-\rho)}\right\}\lambda(1-\rho)}{\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}}\\
&=\frac{\sqrt{\frac{2\mathrm{k}\lambda\mathrm{h}(1-\rho)}{\mathrm{h}}}-\left[\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1-\rho}{2-\rho}\right\}^{2}+\left\{\frac{(1-\rho)^{2}}{(2-\rho)}\right\}\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}\right]}{\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}}\\
&=\left[\sqrt{\frac{2\mathrm{k}\lambda\mathrm{h}(1-\rho)}{\mathrm{h}}}-\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1-\rho}{2-\rho}\right\}^{2}\right]\mathrm{e}^{\frac{(1-\rho)}{(2-\rho)}}-\left\{\frac{(1-\rho)^{2}}{(2-\rho)}\right\}
\end{aligned}$$

7. 결 론

조정가능한 M/G/1 대기모형에 적용될 수 있는 다양한 형태의 운용방침이 개발되어 소개되고 있지만 대부분의 경우 각각의 운용방침의 적용에 따른 시스템 특성치가 매우 복잡한 형태로 주어지기 때문에 시스템 운용에 따른 비용요소를 고려한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 활용한 입력변수들의 최적해 유도에 많은 어려움이 따른다. 따라서 다양한 형태의 새로운 운용방침의 개발도 중요하지만 그러한 운용방침에 포함된 입력변수들의 최적해의 유도의 가능성 또한 고려되어야 한다. 이러한 문제를 고려하여 제안된 (TN) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형의 최적운용방침의 성공적 유도는 또 다른 형태의 운용방침의 개발, 즉 예를 들면 {T|Min(N, T)}, {T|Max(N, T)}, {T|Min(N, D)} 혹은 {T|Max(N, D)} 운용방침 등과 같은 복잡한 형태이지만 현실성이 있는 운용방침의 적용에 따른 시스템의 분석과 최적 운용방침을 결정할 수 있는 가능성을 제시하였다고 볼 수 있다.

Acknowledgement

This study has been partially supported by the 2013 Internal Research Fund of the Hannam University, Daejon, Korea.

References

[1] Balachandran, K.R. and Tijms, H, On the D-policy for the M/G/1 Queue. *Management Science*, 1975, Vol. 9, p 1073-1076.

[2] Conolly, B., *Lecture Notes on Queueing Systems*, Halsted, New York, 1975.

[3] Gakis, K.G., Rhee, H.K., and Sivazlian, B.D., Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies. *Stochastic Analysis and Applications*, 1995, Vol. 13, No. 1, p 47-81.

[4] Heyman, D., The T-policy for the M/G/1 Queue. *Management Science*, 1977, Vol. 23, No. 7, p 775-778.

[5] Kleinrock, L., *Queueing Systems, Vol. 1 : Theory*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1975.

[6] Rhee, H.K., Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies. *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 1997, Vol. 23, No. 4, p 729-739.

[7] Rhee, H.K. and Oh, H.S., Derivation of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Periods for Min (N, D) and Max(N, D) Operating Policies in a Controllable M/G/1 Queueing Model. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2009, Vol. 32, No. 3, p 71-77.

[8] Rhee, H.K. and Oh, H.S., Development of the Most Generalized Form of the Triadic Operating Policy and Derivation of its Corresponding Expected Busy Period. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2009, Vol. 32, No. 4, p 161-168.

[9] Rhee, H.K., Construction of a Relation Between the Triadic Min(N, T, D) and Max(N, T, D) Operating Policies Based on their Corresponding Expected Busy

Period. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2010, Vol. 33, No. 3, p 63-70.

[10] Rhee, H.K., Derivation of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Period for a Controllable M/G/1 Queueing Model Operating under the Triadic Max(N, T, D). *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2011, Vol. 34, No. 1, p 67-73.

[11] Rhee, H.K., Decomposition of the Most Generalized Triadic Operating policy Using its Corresponding Expected Busy. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2011, Vol. 34, No. 4, p 162-168.

[12] Rhee, H.K. and Sivazlian, B.D., Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic (0, K, N, M) Policy. *Journal of Applied Probability*, 1990, Vol. 27, p 425-432.

[13] Teghem, J., Control of the Service Process in a Queueing System. *European Journal of Operational Research*, 1986, Vol. 23, p 141-158.

[14] Yadin, M. and Naor, P., Queueing System with Removable Service Station. *Operational Research Quarterly*, 1963, Vol. 14, p 393-405.